

Aires sans formules

Carène GUILLET, Marie-Line MOUREAU

Introduction

Notre point de vue sur les aires est issu du travail que nous avons mené au sein du groupe de recherche¹ en histoire des mathématiques de l'IREM des Pays de la Loire, qui est formé d'enseignantes du secondaire (collège et lycée) et du supérieur (CPGE et université). Nous avons constaté que les aires ne sont pour nos élèves ou étudiants qu'un nombre, voire ne sont réduites qu'à la formule permettant de calculer ce nombre. Tous ont oublié que les aires sont des grandeurs et qu'en tant que telles, elles peuvent être comparées, additionnées, soustraites. Cette conception explique d'après nous certaines difficultés rencontrées par ces mêmes élèves pour résoudre les problèmes d'aires sans intégrales dans les exercices de bac² et certainement même en partie les erreurs dans les changements d'unités.

Suite au travail que nous avons mené sur la balance et le poids suspendu d'Archimède à Camus (GRHEM³, 2018) nous avons formulé l'hypothèse qu'un enseignement utilisant l'histoire des mathématiques permettrait aux élèves de voir l'aire comme une grandeur. Ils pourraient ainsi renouer avec leurs premiers apprentissages dans ce domaine, en cycle 3, où les aires des polygones sont comparées par découpages et recompositions avant toute introduction d'une quelconque mesure (Perrin, 2005).

Nous étudierons d'abord des aires de surfaces rectilignes, puis curvilignes : le cercle, la parabole et la cycloïde. Pour chacune de ces figures nous avons, avec un retour aux textes et des constructions effectives « papier crayon », bâti des activités que nous avons pour la plupart expérimentées en classe avec nos élèves

1. BARBIN Évelyne, BOYÉ Anne, BUROT Annabelle, GUILLET Carène, MOUREAU Marie-Line, NIZAN-PICARD Catherine, VOILLEQUIN Isabelle.

2. Par exemple : exercice 4 bac ES Antilles Guyane juin 2017, exercice 3 bac S Polynésie juin 2018, exercice 3 bac STMG Métropole juin 2019, visibles sur le site de l'APMEP.

3. Groupe de Recherche sur l'Histoire et l'Enseignement des Mathématiques.

de seconde générale, en travaux dirigés ou dans le cadre de l'enseignement de « Méthodes et Pratiques Scientifiques », et de première « Sciences de l'Ingénieur » en accompagnement personnalisé. Regroupées et présentées sous forme de problèmes, nous les avons aussi proposées lors de stages pour la formation continue des enseignants du secondaire (Plan Académique de Formation ou ateliers lors des journées académiques de notre IREM). Nous avons alors choisi de terminer par la parabole, rompant avec l'ordre chronologique, mais optant pour un ordre croissant dans les difficultés. Si les textes présentés sont classiques, nous pensons que leur regroupement et notre approche globale le sont moins.

Problème 1 : Étant donné un polygone convexe, construire un carré de même aire

Une expérimentation en classe de seconde

Cette expérimentation peut, nous en sommes persuadées, être faite avec profit avec des élèves de quatrième ou troisième, mais c'est avec des élèves de seconde (lors de différents TD du premier trimestre) que le travail a été mené.

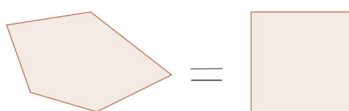


FIGURE 1 – Quadrature d'un polygone

La figure 1 étant projetée au tableau, nous commençons par indiquer aux élèves qu'il s'agit dans cette séquence d'établir la quadrature du polygone c'est-à-dire de construire un carré de même aire. À la façon des géomètres grecs nous obtiendrons l'égalité des aires sans calculs mais par des découpages et des recompositions en nombre fini. De plus, toutes les constructions se feront par intersections de droites et de cercles, c'est-à-dire à la règle et au compas. Nous les rassurons en leur signifiant que notre objectif n'est pas qu'ils redécouvrent seuls la construction du carré. Notre but est de remobiliser des connaissances géométriques, de les confronter à la rigueur du raisonnement hypothético-déductif ainsi que de leur offrir une ouverture culturelle. Il leur est précisé que ce problème correspond à la proposition 14 du livre II des *Éléments* d'Euclide, et que pour le résoudre, du fait de la construction des *Éléments*, il faut remonter le cours du traité jusqu'à un point sur lequel on s'accorde. Pour Euclide il s'agit bien évidemment de ses postulats, demandes et axiomes, mais pour notre travail en classe, il s'agira de la proposition 35 du livre I. Le cheminement sera de construire d'abord un rectangle de même aire que le polygone (objectif des deux premières séances) puis de réaliser la quadrature de ce rectangle (objectif de la dernière séance).

Nous distribuons les propositions d'Euclide qui seront utiles, certaines sont destinées à être lues et commentées en un cours dialogué, d'autres sont les supports

de constructions ou démonstrations réalisées par les élèves.

« Proposition 35. Les parallélogrammes qui sont construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux. » (Euclide, 1804, p. 54)

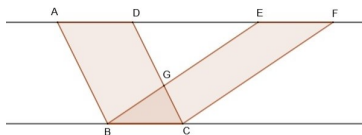


FIGURE 2 – Les parallélogrammes $ABCD$ et $BCFE$ ont la même aire

En effet les triangles ABE et DFC sont égaux car AE égale DF , AB égale DC et l'angle DAB égale l'angle FDC . On peut retrancher le triangle DEG à chacun de ces triangles, les figures restantes sont égales (en aire) et en leur ajoutant le triangle BCG , les figures obtenues, les parallélogrammes $ADCB$ et $EFCB$, ont des aires égales.

Cette démonstration est une utilisation du cas d'égalité des triangles côté-angle-côté⁴ qui fait partie du programme de quatrième depuis 2018⁵, mais c'est surtout un « modèle » (au sens des programmes 2011 et suivants⁶). En effet elle met en œuvre le découpage de la figure en éléments pertinents, procédé que l'on souhaite ériger en méthode.

« Proposition 36. Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux. » (Euclide, 1804, p. 55)

Ces deux parallélogrammes étant donnés, la démonstration de cette proposition passe par la construction du parallélogramme intermédiaire.

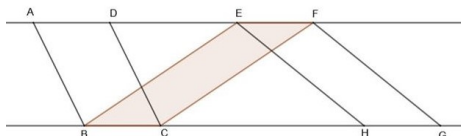


FIGURE 3 – Transitivité de l'égalité d'aire

L'égalité s'obtient alors grâce à la proposition précédente et à la transitivité de l'égalité des grandeurs. Cette transitivité est la première des notions communes énoncées par Euclide dans ses « demandes », en début du livre I : « Les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entre elles. » (Euclide, 1804, p. 5)

Cette démonstration a également valeur de « modèle » puisqu'elle permet d'établir avec les élèves que pour démontrer que deux grandeurs sont égales, il suffit de

4. EUCLIDE, Propriété 4 livre I.

5. BO n° 30 du 26-7-2018.

6. « Le programme identifie quelques démonstrations exemplaires, que les élèves découvrent selon des modalités variées » BO spécial n° 1 du 22-01-19.

montrer qu'elles sont égales à une même troisième. Ce raisonnement pourra être réinvesti dans la comparaison d'expressions numériques ou algébriques.

Problème 1-1 : Construire un rectangle de même aire qu'un triangle donné.

Ce problème leur étant soumis, les élèves visualisent assez bien le rectangle mais ils ont recours aux formules pour justifier l'égalité d'aire. Nous leur proposons de suivre le protocole de construction de la proposition 42 en choisissant un angle droit.

« Proposition 42. Construire dans un angle donné, un parallélogramme égal à un triangle donné. » (Euclide, 1804, p. 62)

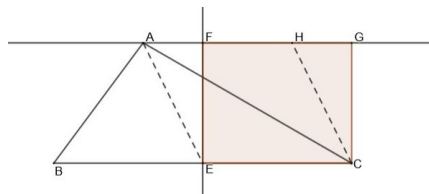


FIGURE 4 – Rectangle et triangle de même aire

Le triangle ABC étant donné, nous faisons construire à la règle et au compas : E le milieu de la base $[BC]$, ce qui revient à construire la médiatrice de cette base, construction donnée proposition 5 du livre I (Euclide, 1804, p. 11), la parallèle à (BC) passant par A et le point H tel que $AECH$ soit un parallélogramme. Alors $AECH$ et ABC sont tous les deux le double du triangle AEC d'après la proposition 34 selon laquelle la diagonale partage un parallélogramme en deux parties égales (Euclide, 1804, p. 53) et la « proposition 38. Les triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux. » (Euclide, 1804, p. 58). C'est l'occasion de réactiver ces résultats élémentaires de géométrie. La construction des points F et G sur la droite (AH) tels que $FGCE$ soit un rectangle permet d'achever la résolution de notre problème 1-1 grâce à la proposition 35.

Problème 1-2 : Construire un rectangle de même aire qu'un triangle donné et dont un des côtés a une longueur fixée arbitrairement.

Pour la résolution de ce problème 1-2 il reste à construire un rectangle de même aire que le rectangle $EFGC$ précédent et dont un des côtés est fixé au préalable. Nous présentons aux élèves la « proposition 43. Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui sont autour de la diagonale sont égaux entre eux. » (Euclide, 1804, p. 64)

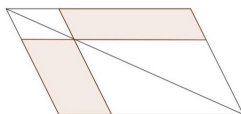


FIGURE 5 – Les deux parallélogrammes grisés sont égaux en aire

La démonstration basée sur la proposition 34 déjà évoquée ne pose pas de problème. La construction du rectangle est alors laissée aux élèves puisqu'il ne s'agit que de reconstruire la figure de la proposition 43 en faisant en sorte que le rectangle obtenu comme solution de notre problème 1-1 et le rectangle cherché soient les compléments autour de la diagonale d'un grand rectangle.

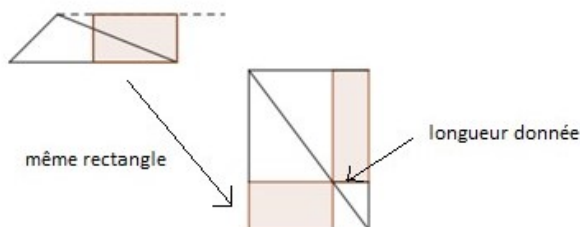


FIGURE 6 – Deux rectangles de même aire

Les deux rectangles de part et d'autre de la diagonale ont la même aire, donc le deuxième a la même aire que le triangle initial et a bien un côté de longueur donnée.

Il reste à suivre la « Proposition 45. Construire, dans un angle donné, un parallélogramme qui soit égal à une figure rectiligne donnée. » (Euclide, 1804, p. 67)

La figure est décomposée en triangles, une base est fixée arbitrairement, et il s'agit « d'empiler » les différents rectangles ayant cette base pour un de leurs côtés et de même aire que les triangles. La figure obtenue est un grand rectangle dont l'aire est celle de la figure rectiligne. Cette construction est facile à concevoir mais sa réalisation est longue et elle n'a pas été demandée effectivement. En conclusion des deux premières séances, elle est donnée à voir en une animation GeoGebra réalisée en utilisant les macros sous l'onglet *Outils*.

Pour finir de résoudre notre Problème 1, il ne reste plus qu'à suivre la proposition 14 du livre II : « Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée. » (Euclide, 1804, p. 105)

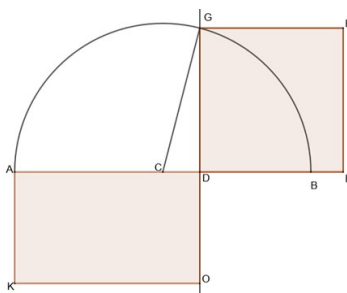


FIGURE 7 – Quadrature d'un rectangle

Il s'agit de construire un rectangle de même aire que la figure et, si ce rectangle n'est pas un carré, de construire un carré de même aire. Pour réaliser cette ultime quadrature, nous distribuons la figure 7 où, à partir du rectangle $ADOK$, il a été construit B sur (AD) tel que DB soit égal à DO et C le milieu de $[AB]$ et où le carré $DGIH$ a la même aire que le rectangle $ADOK$. Les élèves démontrent l'égalité d'aires mais ils reviennent aux calculs en nommant les différentes longueurs. Certains utilisent le théorème du triangle inscrit dans un demi-cercle qui, à ce moment des *Éléments* n'a pas encore été démontré.

Nous suivons alors avec eux la démonstration d'Euclide qui repose sur le théorème dit de Pythagore et la proposition 5 livre II : « Si une droite est coupée en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle compris sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le carré de la droite qui est placée entre les points de section, est égal au carré de la moitié de cette droite. » (Euclide, 1804, p. 84)

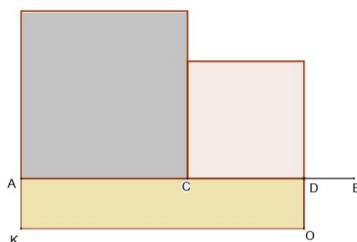


FIGURE 8 – Un carré somme d'un carré et d'un rectangle

Nous reformulons cette proposition pour les élèves : si sur le segment $[AB]$ on place d'une part son milieu C et d'autre part un point D quelconque entre C et B alors le carré de côté AC a pour aire la somme de l'aire du rectangle $ADOK$ de côtés AD et DB et du carré de côté CD . Cette égalité est à relier au théorème de Pythagore et lui redonne son sens géométrique : la construction d'un carré égal (en aire) à la somme de deux carrés.

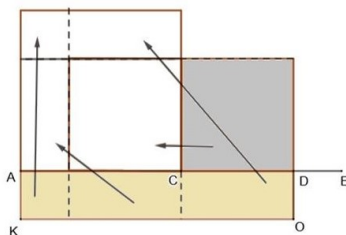


FIGURE 9 – Démonstration par découpages et recomposition

Dans la figure 8 le segment $[AB]$ est partagé en deux parties égales (avec C) et inégales (avec D). D'une part la somme des aires du rectangle $ADOK$ et du

carré de côté $[CD]$ égale l'aire du carré de côté $[AC]$, d'autre part l'aire du carré de côté $[AC]$ égale l'aire du carré de côté $[CG]$, elle-même égale à la somme des aires des carrés de côté $[CD]$ et $[DG]$. Il s'ensuit que l'aire du rectangle $ADOK$ est égale à celle du carré de côté $[DG]$.

Bilan

Durant toute cette séquence, les élèves ont joué le jeu et ont eu l'occasion de construire des figures, réfléchir, argumenter et... calculer (ce qui n'était pas recherché!). De plus, nous sommes dans l'esprit des programmes de seconde parus au B.O. du 22 janvier 2019 qui invitent les enseignants et les enseignantes à démontrer des identités géométriquement, comme en témoigne l'extrait suivant : « Pour a et b positifs, démontrer géométriquement l'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ »

Dans le domaine numérique, l'item « Établir l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique de deux réels strictement positifs. » n'est qu'une application de la quadrature du rectangle. En effet elle contient une construction effective de la moyenne arithmétique (le rayon CG du demi-cercle), et de la moyenne géométrique (le côté DG du carré). Il est clair que CG est supérieur à DG (propriété de l'hypoténuse) et donc la moyenne arithmétique de deux nombres positifs est supérieure à leur moyenne géométrique.

Ainsi ce travail, où nous avons mobilisé des savoirs et des savoir-faire géométriques dans des activités parfois difficiles mais ayant l'attrait du dépaysement pour les élèves, a-t-il permis de jeter des ponts entre différentes parties du programme.

Problème 2 : Trouver un triangle égal à un cercle

Une expérimentation en classe de première

Nous avons proposé cette activité en classe de première S au mois de mars avec 32 élèves répartis en groupes de 16 durant deux séances d'une heure d'accompagnement personnalisé. L'objectif était de faire travailler le raisonnement par l'absurde, en approfondissement des contenus abordés durant l'année. En effet, les programmes stipulent que la démonstration par l'absurde doit être introduite en classe de seconde, puis mobilisée pendant le cycle terminal. On trouve ici un double raisonnement par l'absurde, puisque Archimède montre que le cercle, ne pouvant pas être plus grand que le triangle et ne pouvant pas non plus être plus petit, est égal au triangle.

L'objectif de l'activité est de faire comprendre aux élèves la proposition première du traité *De la mesure du cercle* et les principales étapes de sa démonstration : « Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle dont un des côtés est égal au rayon de ce cercle et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence de ce même cercle. » (Archimède, 1846, p. 116).

L'enjeu majeur avec les élèves n'est pas de prouver la proposition I du livre X d'Euclide : « Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une

certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées. » (Euclide, 1804, p. 377-378), qui garantit pourtant le début de la preuve d'Archimède. C'est par un échange avec le professeur que la classe parvient à adhérer intuitivement à ce principe.

Le premier objectif pédagogique est la résolution du problème suivant :

Problème 2-1 : Comparer le polygone régulier inscrit dans un cercle et le triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est le périmètre du polygone et l'autre côté l'apothème des triangles.

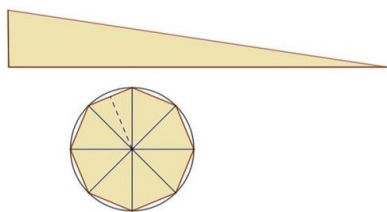


FIGURE 10 – Octogone et triangle de même aire

Nous avons d'abord défini le terme « apothème », nouveau pour eux, puis nous leur avons distribué la figure ci-dessus, en leur demandant de comparer l'aire de l'octogone⁷ à celle du triangle, en complétant si besoin les tracés. Après un temps de recherche d'une dizaine de minutes, certains élèves avaient trouvé qu'il suffisait de tracer sur la base du triangle les huit triangles isocèles constituant l'octogone, et l'ont donc indiqué aux autres. La comparaison ne leur a ensuite posé aucun problème. Nous avons alors généralisé cette égalité à un polygone régulier à n côtés.

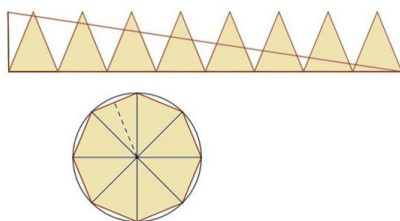


FIGURE 11 – Développement de l'octogone

Le texte d'Archimède est difficile d'accès pour les élèves. Nous leur avons donc posé des questions préalables assez larges pour leur permettre, sans avoir à rentrer dans les détails, de comprendre les grandes étapes de raisonnement : « Quelle

7. Nous avons choisi l'octogone, ayant un nombre de côtés suffisant pour lui donner un caractère général mais pas trop grand non plus afin de ne pas rendre la construction fastidieuse.

égalité Archimède démontre-t-il ? », « L'énoncé et la preuve comportent-ils des formules, des calculs ? », « Quel est le type de démonstration employée, repérer sa structure logique ? ». Nous avons pu constater qu'aucun élève ne connaissait la démonstration par l'absurde. Nous avons ensuite présenté la première partie du raisonnement d'Archimède, qui montre que l'aire du disque ne peut pas être supérieure au triangle, en un cours dialogué, qui a été bien suivi par les élèves. Les questions ont été nombreuses, tant sur les aspects historiques, comme la forme des textes mathématiques de l'époque, que sur des aspects strictement mathématiques, comme le statut logique de la preuve par l'absurde, ou encore des points techniques, comme le traitement des inégalités.

Voici comment cette preuve a été faite devant les élèves :

Supposons donc que le cercle C soit supérieur au triangle T tel que défini dans la proposition d'Archimède : un côté de l'angle droit est le rayon et l'autre la circonférence du cercle. Posons alors $C - T = e$.

Construisons un carré inscrit dans le cercle, puis un octogone, etc. en multipliant le nombre de côtés par deux. Ces polygones sont de plus en plus proches du cercle et on est assuré de finir par obtenir un polygone P , tel que $C - P < e$ grâce au principe d'Eudoxe. Alors, de $C - T = e$ et $C - P < e$, il découle que P est supérieur au triangle T .

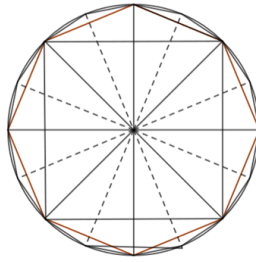


FIGURE 12 – Polygones réguliers successifs

Cependant, d'une part ce polygone est constitué de triangles isocèles d'apothème inférieur au rayon du cercle, d'autre part le périmètre du polygone est inférieur à la circonférence du cercle. Donc l'aire du triangle T' est inférieure à l'aire du triangle T . Or, T' et P ont la même aire, donc l'aire du triangle T est supérieure à celle du polygone P .

Comme T ne peut pas être, à la fois, supérieur et inférieur à P , il faut réfuter l'hypothèse : le cercle n'est pas supérieur au triangle T .

La deuxième partie nous a paru plus difficile et nous avons choisi de ne pas la détailler. En revanche, en complément de cette activité, nous avons fait réaliser à la classe une figure sur GeoGebra dans laquelle, partant d'un cercle de rayon 1 donné, ils ont dû construire un carré, un octogone puis un hexadécagone, d'abord inscrits dans le cercle, puis circonscrits au cercle, pour enfin observer l'évolution de leurs aires. Ils ont pu retrouver ainsi par approximations successives un encadrement de π .

Bilan

À l'issue de cette séance, lorsque les élèves se rendent compte que la fameuse formule $\pi \times R^2$ signifie que l'aire du disque est le produit de la demi-circonférence par le rayon, ils en sont stupéfaits car le sens géométrique d'une formule, apprise sans la comprendre, leur apparaît pour la première fois.

Nous pensons sans l'avoir expérimenté que l'activité serait adaptable pour une classe de seconde. Nous avons également proposé cette séquence en formation continue lors d'un stage inscrit au PAF. Nous avons passé environ une heure trente avec des professeurs stagiaires globalement novices en histoire des mathématiques, à présenter le texte, les laisser réfléchir, puis développer la preuve, pour finir par exposer les activités que nous avons réalisées à destination des élèves.

En formation continue, il nous semble important de signaler que contrairement à ce qu'on lit parfois, il ne s'agit pas de remplir le cercle par une suite de polygones de plus en plus proches. La succession de polygones construits (en pensée) n'a pas vocation à épuiser le cercle et il n'y a pas de passage à la limite. Pour les géomètres grecs le cercle n'est pas un polygone ayant une infinité de côtés, ce qui serait accepter un infini en acte, alors qu'ils n'acceptent que l'infini potentiel, qui permet d'imaginer un processus se prolongeant aussi longtemps que l'on veut. C'est ainsi par exemple, qu'une droite n'est pas un ensemble infini de points mais que tout segment peut être prolongé indéfiniment.

Problème 3 : Déterminer des aires de surfaces curvilignes par des méthodes d'invention

De nouvelles méthodes

Au XVII^e siècle les démonstrations telles que celle d'Archimède dans notre problème 2 sont contestées. Leur principe permet certes de résoudre de façon rigoureuse différents problèmes mais au prix de calculs et développements longs et difficiles. Mais surtout il faut savoir ce que l'on doit trouver avant de démontrer qu'il ne peut en être autrement ! Or au XVII^e siècle les géomètres découvrent de nouvelles courbes et s'intéressent à de nouveaux objets. Ils cherchent donc à élaborer des méthodes, dites d'invention, permettant d'établir de nouveaux résultats et d'éviter de trop longues démonstrations. Ils soupçonnent les Grecs d'avoir élaboré de telles méthodes mais de les avoir jalousement gardées secrètes.

En 1635, dans son livre *Geometria indivisibilibus contunuorum nova quadam ratione promota* (Cavalieri, 1653), le jésuite Bonaventura Cavalieri présente une méthode, la méthode des indivisibles, grâce à laquelle il peut effectivement déterminer des aires ou des volumes nouveaux. Les indivisibles ne sont pas acceptés par tous car leur nature pose problème, et entre autres, des problèmes de dimension. En effet la notion d'indivisibles fait intervenir des grandeurs non homogènes : les indivisibles d'une surface sont des lignes, et ceux d'un volume des surfaces. Comment concevoir qu'en ajoutant des lignes on obtient une surface ? Faire d'une surface un ensemble infini de lignes s'oppose à la conception du continu héritée d'Aristote. Malgré tout, pendant près d'un siècle, c'est-à-dire jusqu'à l'invention du

calcul intégral, cette méthode a été utilisée et elle a montré son efficacité. Roberval, Pascal, Torricelli et Leibniz y ont recours. Cependant elle a aussi toujours eu ses détracteurs et même Galilée, protecteur de Cavalieri mais atomiste convaincu, s'est montré plus que réticent à son utilisation qui mêle infini et infiniment petits (Barbin, 1987, Merker, 2001).

Une expérimentation en classe de seconde

Dans le cadre de l'enseignement MPS nous avons mené durant la première période de l'année un travail sur la détermination d'aires selon diverses méthodes. Sur deux séances nous avons choisi de faire découvrir à nos élèves la méthode des indivisibles. Le texte de Cavalieri étant d'un abord trop difficile, nous avons présenté les indivisibles dans *Les Éléments de géométrie* publiés en 1685 par Bernard Lamy, soit cinquante ans après le *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri. Ce texte s'éloigne de la théorie première car la notion de mouvement est totalement absente dans la *Géométrie des indivisibles* de Cavalieri. Mais évoquant un segment qui se déplace en laissant une trace (Lamy, 1740, p. 115), il fait écho aux connaissances des lycéens habitués à utiliser GeoGebra et il leur permet d'approcher la notion.

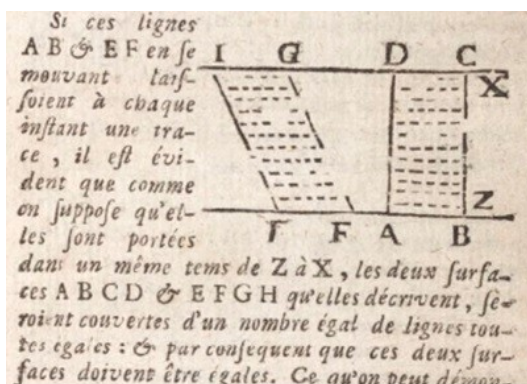


FIGURE 13 – Le texte de Bernard Lamy

Puis nous avons décidé de travailler un texte d'Antoine Arnauld. Ce janséniste, compose ses *Nouveaux élémens de géométrie* dont une première version paraît en 1667 et une seconde en 1683 comme un manuel destiné aux Petites écoles de Port-Royal. Il y montre un véritable souci de se rendre intelligible. Arnauld est hostile au raisonnement par l'absurde qui cherche à convaincre l'esprit sans l'éclairer et il critique l'organisation des *Éléments* d'Euclide. Les quatre premiers livres de ses *Nouveaux Éléments* traitent des grandeurs, la géométrie n'intervenant qu'ensuite.

Le texte choisi est le cinquième théorème du livre quizième des *Nouveaux élémens*. Il énonce : « Le cercle est égal au triangle qui a pour côtés de son angle droit le rayon du cercle et une ligne égale à la circonférence du cercle. » (Arnauld, 1683, p. 370)

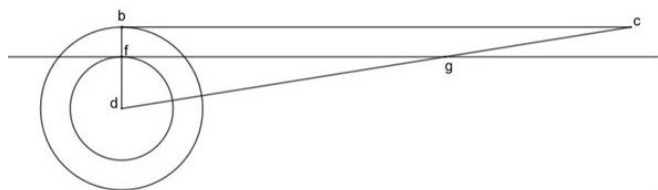


FIGURE 14 – Cercle et triangle de même aire selon Arnauld

Avant la distribution du texte d'Arnauld, les élèves ont construit la figure avec le logiciel GeoGebra à partir de la description : la droite (bc) est la tangente au cercle et égale à la circonférence, le point f un point sur le rayon $[bd]$, à partir duquel on trace le cercle de centre d , (ce cercle est un indivisible du cercle de rayon bd), et (fg) la parallèle à (bc) (le segment $[fg]$ est un indivisible du triangle bcd). Faisant varier le point f , et en activant les traces, les élèves ont vu les indivisibles remplir les figures et ont conclu à l'égalité des aires sans juger nécessaire de démontrer l'égalité des indivisibles chacun à chacun. Lorsqu'ils ont ensuite rédigé cette démonstration, sans surprise pour nous, ils ont reconnu une configuration de Thalès et écrit des égalités de rapports sous forme de fractions. Ils ont ensuite été confrontés au texte d'Arnauld tel qu'il apparaît dans l'édition de 1683. Il a fallu expliciter l'expression des égalités de rapports et les élèves ont pris conscience que la formule donnant la circonférence d'un cercle en fonction du rayon, qu'ils avaient utilisée, exprime de fait une relation de proportionnalité.

En conclusion de cette activité nous notons avec les élèves que nous avons établi une égalité d'aire entre un cercle et un triangle et que nous savons réaliser la quadrature de n'importe quel triangle mais, que pour autant, nous n'avons pas résolu le problème de la quadrature du cercle ! En effet le problème de la construction, à la règle et au compas, d'un segment de longueur égale à la circonférence du cercle n'est pas résolu. Cette recherche vaine de la quadrature du cercle est un élément culturel fort que nous trouvons pertinent d'évoquer à ce moment avec eux.

Problème 4 : Quelle relation y a-t-il entre l'aire du cercle générateur et celle sous une arche de cycloïde ?

La cycloïde

Objet de défi, source de rivalités, désignée cycloïde, roulette ou trochoïde au gré des auteurs, la cycloïde est la courbe du XVII^e siècle⁸. Son étude a aiguillonné les mathématiciens dans leurs recherches de nouveaux outils. Le père Marin Mersenne, de l'ordre des Minimes, introduit la cycloïde pour résoudre le paradoxe de la roue d'Aristote et pense y reconnaître une demi-ellipse. Roberval étudie ses tangentes,

8. Lire à ce propos l'article d'Évelyne BARBIN dans ce même ouvrage.

mettant au point pour cela une méthode d'invention relevant de la cinématique. Il obtient sa quadrature et contredit la conjecture de Mersenne.

Selon la définition de Torricelli, reprise par Pascal dans son *Traité Sur la roulette* (Pascal, 1658), et tout à fait usuelle de nos jours, une cycloïde est la trajectoire d'un point sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On se donne l'image mentale d'un clou sur un pneu de voiture.



FIGURE 15 – Une cycloïde

Mais Roberval en a une vision différente : il s'agit de « [la trajectoire] d'un point d'un cercle tournant autour du centre dans le même temps que ce cercle se déplace parallèlement à lui-même » (Roberval, 1693, p.191). Le cercle n'est pas une roue et ne tourne pas. Le point sur le cercle est animé par deux mouvements : le sien propre de rotation autour du centre, et le glissement rectiligne du cercle. Les courbes sont des trajectoires et Roberval construit les tangentes à partir de la composition des mouvements du mobile supposé parcourir la courbe.

Gilles Personne de Roberval occupe en 1634 la chaire de mathématiques du collège Royal. Il est membre de l'académie fondée en 1635 par Mersenne et qui se donne la vocation de faire progresser les sciences en créant une émulation et une collaboration entre les savants européens. Roberval est aussi l'un des premiers membres de l'Académie Royale des Sciences et c'est cette académie qui publie son *Traité des indivisibles, explication de la roulette* après sa mort. La façon dont Roberval établit que l'aire sous l'arche de la cycloïde vaut trois fois le disque est d'une belle ingéniosité. Sa démonstration s'appuie sur la construction de la cycloïde et d'une deuxième courbe, appelée « la compagne » de la cycloïde et qui est la trajectoire du même point sur le cercle lorsqu'il est animé (cette fois) d'un mouvement rectiligne sur le diamètre pendant que le cercle se déplace « parallèlement à lui-même ».

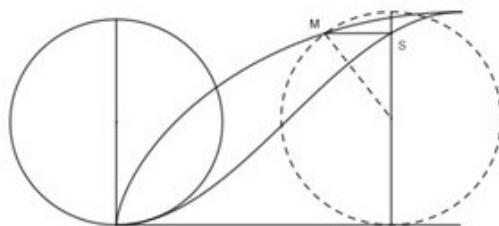


FIGURE 16 – La cycloïde et sa compagne

Il utilise ensuite les indivisibles pour montrer que l'aire du domaine entre la cycloïde et sa compagne, est égale à celle du demi-disque. Puis grâce au théorème d'Archimède à propos de l'aire d'un disque (voir problème 2), il établit que le triangle ACD et le disque ont la même aire, puis que l'aire sous la demi-arche de cycloïde est trois fois celle du demi-disque. Celle sous une arche est donc égale à trois fois l'aire du disque.

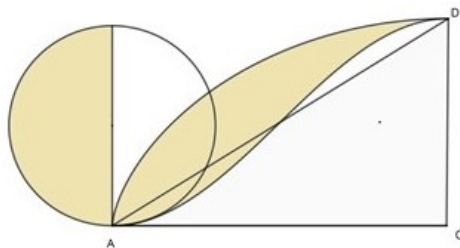


FIGURE 17 – Comparaison d'aires

Une expérimentation lors d'un stage

Nous avons proposé à un groupe d'enseignants de lycée de découvrir cette démonstration. À la recherche d'éléments de culture sur l'histoire des mathématiques, ces enseignants avaient jusqu'alors assez peu lu de textes originaux. Ayant déjà eu l'occasion d'évoquer avec eux les indivisibles de Cavalieri, nous les avons laissés découvrir le texte de Roberval et construire pas à pas la figure à partir d'une amorce.

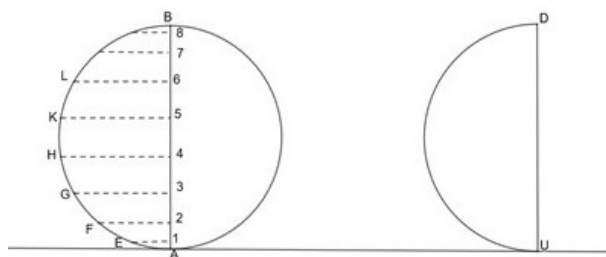


FIGURE 18 – L'amorce de la construction de la cycloïde

Comme nous nous y attendions les notations de Roberval ont dû être explicitées ainsi que la notion oubliée de sinus verse. La construction point par point de la cycloïde et de sa compagne ainsi que la démonstration sur les égalités d'aires ont été une belle découverte pour nos collègues.

Problème 5 : Comparer l'aire du segment de parabole à celle du triangle inscrit

Les coniques ont été étudiées par les géomètres grecs : Euclide aurait écrit un traité (perdu) sur les coniques et Apollonius de Perga est l'auteur d'un traité en huit livres (seuls sept nous sont parvenus) sur les sections coniques. C'est dans ce traité qu'il donne leurs noms actuels à l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Les lycéens d'aujourd'hui tracent bien des hyperboles et des paraboles, mais elles ne sont pour eux que des courbes représentatives de fonctions. Toutefois dans les programmes de 2019, la parabole apparaît également dans la partie Géométrie repérée comme ensemble des points équidistants à un point donné et à une droite donnée ; la voici de nouveau objet géométrique.

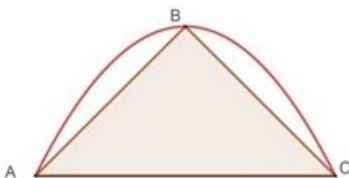


FIGURE 19 – Le segment de parabole est quatre tiers du triangle inscrit

Jusqu'au début du XX^e siècle, le résultat d'Archimède « un segment quelconque compris par une droite et par une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment » (Archimède, 1807, p. 337) était connu grâce à sa lettre à Dosithée. La démonstration qu'il y présente est établie sur le mode du double raisonnement par l'absurde. Mais en 1906, une copie d'une lettre à Eratosthène où il présente sa *méthode* est découverte. Archimède y explique que cette « méthode mécanique » lui permet de trouver maints résultats qu'il peut ensuite prouver par des démonstrations géométriques classiques (Archimède, 1960). Comme pressenti par les géomètres du $XVII^e$ siècle, Archimède avait bien une méthode d'invention, mais elle n'était pas tenue secrète, simplement perdue pour un (très long) temps.

Dans cette figure (figure 20), (CZ) est la tangente à la courbe en C . Archimède met en « balance » autour du point K , milieu de $[AZ]$, les segments $[HS]$ et $[MX]$. Ils sont en équilibre du fait de la propriété VII du livre I de son ouvrage *De l'équilibre des plans et de leurs centres de gravité* (Archimède, 1807, p. 282), puisque MX est à SH comme TK est à KN . Il établit ce rapport de grandeurs à l'aide des propriétés géométriques de la parabole et des triangles semblables.

L'ensemble de tous les segments $[MX]$ s'équilibre donc avec l'ensemble de tous les segments $[HS]$ et donc les segments $[OX]$. Par conséquent, le triangle AZC est en équilibre avec le segment de parabole ABC . Le rapport d'équilibre est $1/3$, rapport de KT à KP , où P est le centre de gravité du triangle AZC . La parabole « pèse » ainsi le tiers du triangle AZC . Il suffit alors d'observer que $[AB]$ est une médiane de AKC pour conclure que le triangle ABC est le quart du triangle AZC .



1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{1}{2}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. $\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$ 9. $\frac{1}{2}$ 10. $\frac{1}{2}$

leur faire faire des mathématiques, celles qui correspondent aux programmes, tout en montrant qu'elles sont une construction collective, inscrite dans la durée et le temps, pour répondre à des questions, ici la détermination des aires. Cet aspect culturel ne nous est pas indifférent alors que se profile dans un horizon très proche que de nombreux élèves abandonneront l'étude des mathématiques en fin de seconde.

Références bibliographiques

- ARCHIMÈDE, 1807, « De la mesure du cercle », « De la quadrature de la parabole », « De l'équilibre des plans et de leurs centres de gravité », *Œuvres d'Archimède*, trad. F. Peyrard, Paris, Buisson.
- ARCHIMÈDE, 1960, « De la méthode », *Les Œuvres complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, trad. P. Ver Eecke, Liège, Vaillant-Carmane.
- ARNAULD Antoine, 1683, *Nouveaux élémens de géométrie*, 2^e édition, Paris, Desprez.
- BARBIN Évelyne, 2013-2014, « Histoire des mathématiques : les courbes », polyco pié, master d'histoire des sciences et techniques, Nantes, Université de Nantes.
- BARBIN Évelyne, 1987, « Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles en Italie », *Fragments d'histoire des mathématiques*, Tome 2, Paris, APMEP, p.125-159.
- BELLA Sandra, 2018, *De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706)*, Thèse de doctorat en histoire des mathématiques, sous la direction d'Évelyne Barbin, Nantes, Université de Nantes.
- CAVALIERI Bonaventura, 1653, *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota*, Bologne, typis C FerroniiEx typographia de Ducijs.
- CAVALIERI Bonaventura, 1647, *Exercitationes geometricae sex*, Bologne, Typis Iacobi Montij.
- DIAGNE Mali, LATOUCHE Serge, LELONG Alain, LEROY Annette, VAN DEN BOOM Isabelle, VIDAL Claudine, 2005, « La géométrie des indivisibles ». *Histoire d'aires chap. 4, Les cahiers de l'IREM d'Orléans*, n° 3, Orléans, IREM d'Orléans.
- EUCLIDE, 1804, *Les Éléments de géométrie*, trad. F. Peyrard, Paris, F. Louis.
- FRÉMONT Christiane, 2003, *Singularités individus et relations dans le système de Leibniz*, Paris, Librairie Philosophique Vrin.
- FRIEDELMEYER Jean-Pierre, 1998, « Les aires : outils heuristique – outil démonstratif », *Repères IREM*, 31, Metz, Topiques éditions, p. 39-62.
- GRHEM des Pays de la Loire, 2018, « Expérience et Théorie : la balance et le poids suspendu d'Archimède à Camus », in BARBIN Évelyne (éd.), BÉNARD Dominique, MOUSSARD Guillaume, *Les mathématiques et le réel*, Rennes, PUR.
- GUICHARD Jean-Paul, 2011, « Petite histoire de la grandeur aire. Premier épisode. Les aires chez Euclide », *Corol'aire* n°85, Poitiers, APMEP, p. 4-5.

- GUILLET Carène, MOUREAU Marie-Line, VOILLEQUIN Isabelle, 2019, « Mathematics and experiment : How to calculate areas without formulas ? », *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education*, Oslo, Oslo Metropolitan University, p. 227-243.
- LAMY Bernard, 1740, *Les élémens de géométrie ou de la mesure de l'étendue*, 6^e édition, Paris, Hourdel.
- MERKER Claude, 2001, *Le chant du cygne des indivisibles*, Besançon, PUFC.
- MERKER Claude, 2004, « La méthode des indivisibles racontée lors d'un stage », *Repères IREM* n°54, Metz, Topiques éditions, p. 57-76.
- NOUET Monique, 1992, « Histoire des mathématiques en classe de terminale », *Repères IREM*, n°9, Metz, Topiques éditions, p.15-33.
- PASCAL Blaise, 1658, *Traité sur la roulette*, « Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Carcavi », Paris.
- PERRIN Daniel, 2005, *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie*, Paris, Cassini.
- PLANE Henry, 2007, « Les indivisibles » *PLOT. Nouvelle série* n°20, Paris, AP-MEP, p. 26-28.
- ROBERVAL (de) Gilles Personne, 1693, « Traité des indivisibles », *Divers ouvrages de Mathématique et de physique, par messieurs de l'Académie royale des sciences*, Paris, Imprimerie Royale, p. 190-245.