

Les *Éléments* de géométrie, d'Euclide au début du XIX^e : une source d'inspiration pour les enseignants et enseignantes

Dominique BAROUX, Martine BÜHLER

Introduction

Le programme du cycle 4 paru au BO du 26 juillet 2018 remet la démonstration et le raisonnement à l'honneur : « La formation au raisonnement et l'initiation à la démonstration sont des objectifs essentiels du cycle 4. Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (par exemple problèmes de nature arithmétique ou géométrique). »

Le programme précise également la place de la démonstration dans le « cours de mathématiques » : « Il est important que le cours de mathématiques ne se limite pas à l'application de recettes et de règles, mais permette de mettre en place quelques démonstrations accessibles aux élèves. De nombreux résultats figurant dans ce programme peuvent être démontrés en classe, selon des modalités variées. » L'importance d'une trace écrite structurée et cohérente est soulignée : « Une trace de cours claire, explicite et structurée aide l'élève dans l'apprentissage des mathématiques [...] la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les procédures et les stratégies étudiées. [...] En particulier, il est essentiel de distinguer le statut des énoncés (définition, propriété – admise ou démontrée –, conjecture, démonstration, théorème) et de respecter les enchaînements logiques. » Les enseignants et enseignantes sont invités à faire des choix pédagogiques de démonstrations : « Certaines démonstrations possibles (aussi bien sur les nombres et le calcul qu'en géométrie) sont identifiées dans le programme. Les enseignants ont la liberté de choisir ceux des résultats qu'ils souhaitent démontrer ou faire démontrer, en fonction du niveau et des besoins de leurs élèves. »

Les manuels actuels n'aident guère les enseignants et enseignantes à structu-

rer leur progression en « respectant les enchaînements logiques », ni à choisir les résultats à « démontrer ou faire démontrer ». L'objectif de l'atelier était d'aider à la réflexion sur ces sujets, en étudiant des extraits de différents textes historiques, en réfléchissant sur les choix opérés par les différents auteurs, en s'intéressant à l'évolution des différents traités du point de vue de l'ordre et de la présentation des résultats. Il nous a semblé que cette lecture de textes pouvait aider chacun et chacune à prendre du recul par rapport aux notions enseignées et à bâtir sa propre progression (Barbin, 2001). Nous souhaitons également que ces lectures donnent des idées d'activités en classe autour des raisonnements et des démonstrations en géométrie plane.

Vous trouverez sur le site de l'IREM de Paris ¹, auquel il sera souvent fait référence dans cet article, les textes étudiés dans l'atelier, des propositions d'activité en classe ainsi que des compléments biographiques et bibliographiques.

Les cas d'égalité et la méthode des aires

Les *Éléments* d'Euclide

La lecture des *Éléments* d'Euclide nous a paru incontournable pour qui s'intéresse à l'histoire de la géométrie. D'Euclide, on ne sait quasiment rien. Nos principales sources sur son existence sont de petites anecdotes sujettes à différentes conjectures, relatées par Pappus (vers 300), un des derniers grands mathématiciens grecs, et le philosophe néoplatonicien Proclus (probablement 412 – 485). Il semblerait qu'Euclide ait vécu à Alexandrie au III^e siècle avant Jésus-Christ. Les *Éléments*, l'ouvrage le plus connu d'Euclide, comporte 13 livres essentiellement consacrés à la géométrie, sauf les livres V (théorie des proportions), VII, VIII et IX (arithmétique) et X (incommensurables). Ils suivent une structure axiomatique-déductive, modèle de rigueur pendant plus de 2000 ans. Les présentations que nous ferons par la suite concernant les textes et les figures s'appuient sur la version de Vitrac citée en bibliographie ². Le livre I débute par 23 définitions, 5 demandes et 9 notions communes (Euclide, 1990). Dès le début du livre I on reconnaît un de nos cas d'égalité de deux triangles, c'est la proposition 4.

« Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. »

Euclide en fait une justification par superposition d'une manière analogue à celle que l'on pourrait faire dans les classes de collège. Cette proposition est immédiatement utilisée dans les démonstrations des propositions suivantes.

La proposition 8 n'est pas exactement un cas d'égalité : « Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, s'ils ont de plus la base égale

1. Dans les documents du groupe M. : A.T.H. (dossier « Histoire et Géométrie ») : <https://irem.univ-paris-diderot.fr/documents-du-groupe-math>.

2. Les deux premiers tomes de cette traduction sont disponibles sur la page personnelle de Bernard Vitrac.

à la base, ils auront aussi un angle égal, à savoir celui qui est contenu par les droites égales. » Cependant, elle jouera un rôle analogue ; en effet, la proposition 8 permet d'obtenir une égalité d'angles à partir d'égalités de côtés. Les propositions suivantes montrent comment sont utilisés ces résultats.

9

« Couper un angle rectiligne donné en deux parties égales.

Soit l'angle rectiligne donné sous BAC . Il faut alors le couper en deux parties égales. Que soit pris au hasard le point D sur AB . Et que, de AC , soit retranchée la droite³ AE , égale à AD (Prop. 3), et que DE soit jointe (Dem. 1). Que soit construit sur DE le triangle équilatéral DEF (Prop. 1), et que AF soit jointe (Dem. 1). Je dis que l'angle sous BAC est coupé en deux parties égales par la droite AF .

En effet, puisque AD est égale à AE , que AF est commune, alors les deux DA , AF sont égales aux deux EA , AF , chacune à chacune. Et la base DF est égale à la base EF (Df. 20)⁴. Donc l'angle sous DAF est égal à l'angle sous EAF (Prop. 8). Donc l'angle rectiligne donné sous BAC est coupé en deux parties égales par la droite AF . Ce qu'il fallait faire. »

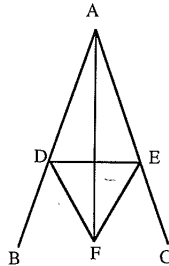


FIGURE 1 – Euclide, I.9

10

« Couper en deux parties égales une droite limitée donnée.

Soit AB la droite limitée donnée. Il faut alors couper la droite limitée AB en deux parties égales. Que soit construit sur elle le triangle équilatéral ABC (Prop. 1) et que l'angle sous ACB soit coupé en deux parties égales par la droite CD (Prop. 9). Je dis que la droite AB est coupée au point D en deux parties égales » (Euclide, 1990).

Euclide montre alors l'égalité des triangles ACD et BCD par la proposition 4, et obtient ainsi $AD = DB$.

3. Euclide nomme « droite » ce que nous nommerions « segment ».

4. La définition 20 est celle de « triangle équilatéral ».

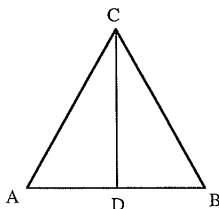


FIGURE 2 – Euclide, I.10

Nous voyons là l'un des deux types de propositions du livre I : un « problème », ici un problème de construction, avec le « rituel » euclidien de présentation : un énoncé général, un énoncé où l'on nomme les objets, la construction elle-même, enfin la démonstration que la construction est correcte. Les propositions 1 à 26 donnent ainsi des théorèmes ou résolvent des problèmes de construction, toujours en donnant des démonstrations s'appuyant sur les demandes et notions communes et/ou sur les propositions précédentes. Les propositions 27 à 32 traitent de la théorie des parallèles (angles alternes internes, angles correspondants,...), la proposition 32 donnant la démonstration explicitement au programme du cycle 4 du résultat sur la somme des angles d'un triangle : « Dans tout triangle, l'un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs d'un triangle sont égaux à deux droits ». Le texte de la démonstration se trouve sur le site de l'IREM de Paris⁵.

Les propositions suivantes portent sur les parallélogrammes, et démontrent des résultats fondamentaux, comme la proposition 35, elle aussi explicitement au programme :

« Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

Soient $ABCD$, $EBCF$ des parallélogrammes sur la même base BC , et dans les mêmes parallèles AF , BC . Je dis que le parallélogramme $ABCD$ est égal au parallélogramme $EBCF$.

En effet, puisque $ABCD$ est un parallélogramme, AD est égale à BC (Prop. 34). Alors pour la même raison EF est aussi égale à BC . De sorte que AD est aussi égale à EF (N.C. 1). Et DE est commune donc AE toute entière est égale à DF toute entière. Or AB est aussi égale à DC alors les deux EA , AB sont égales aux deux FD , DC , chacune à chacune. Et l'angle sous FDC est égal à l'angle sous EAB , l'extérieur à l'intérieur (Prop. 29). Donc la base EB est égale à la base FC et le triangle EAB sera égal au triangle DFC (Prop. 4). Que DGE soit retranché de part et d'autre : le trapèze restant $ABGD$ est donc égal au trapèze restant $EGCF$ (N.C. 3). Que le triangle GBC soit ajouté de part et d'autre : le parallélogramme $ABCD$ tout entier est donc égal au parallélogramme $EBCF$ tout entier (N.C. 2). Donc

5. Voir note 1

les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux. Ce qu'il fallait démontrer. » (Euclide, 1990)

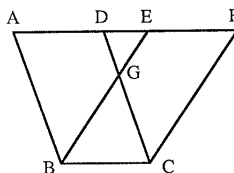


FIGURE 3 – Euclide, I.35

Cette démonstration nous paraît tout à fait utilisable en classe et nous donnons sur le site de l'IREM de Paris⁶ une idée d'activité.

On constate que le mot « égal » peut avoir différents sens chez Euclide : deux figures peuvent être « égales » dans le sens superposables, ou bien égales « en grandeur », c'est-à-dire d'aires égales. La proposition 35 permet de comprendre comment la proposition I.4 pourrait justifier que des figures non superposables sont d'aires égales, par découpage, recollement, et complémentation. La suite du livre I montre que tout polygone est « rectangulable », c'est-à-dire qu'on peut construire un rectangle de même aire que tout polygone donné, résultat complété dans le livre II par la « quadrature » d'un rectangle quelconque. Les problèmes de décomposition de polygones de même aire en pièces superposables ont donné lieu à diverses études ; le théorème de Bolyai affirme : « Deux polygones sont décomposables par les mêmes dissections polygonales si et seulement s'ils ont la même aire. » Cependant, la décomposition peut devenir assez compliquée et nécessiter un nombre grandissant de pièces, par exemple pour des parallélogrammes de même base entre les mêmes parallèles, lorsque les angles à la base sont très différents.

Euclide n'utilise pas de nombres, ni de mesures de grandeurs. Il utilise la notion d'aire comme grandeur (Bkouche, 2000). Ainsi, les aires ne sont pas des nombres, mais des grandeurs. C'est la mesure qui crée un lien entre une grandeur et le nombre associé (Bühler-Pajus, 2020). La proposition I.35 étudiée ci-dessus montre comment on peut démontrer des égalités d'aires sans mesure ni formule. Il est important pour nos élèves de se réapproprier cette notion d'aire travaillée au cycle 2. Les formules leur font souvent oublier le sens de ce qu'est une aire. Alors qu'ils auront besoin de retrouver ce sens dans leurs études ultérieures, par exemple en calcul intégral. Les résultats sur les parallélogrammes donnent des résultats sur les triangles, et réciproquement, du fait que la diagonale d'un parallélogramme le partage en deux triangles superposables.

Une lecture attentive du livre I montre à quel point la proposition I.4 est fondamentale : elle est utilisée dans 11 propositions sur les 48 du livre I ; 10 d'entre elles sont nécessaires pour des résultats ultérieurs, la proposition 47 est le résultat que nous appelons « théorème de Pythagore ». L'outil fondamental des cas d'égalité des triangles, longtemps disparu des programmes, a fait son retour dans les

6. Voir note 1

programmes de 2015 ; nous pouvons donc l'utiliser avec nos élèves pour les initier à la démonstration en géométrie, et nous appuyer sur ces énoncés simples et fondamentaux pour bâtir une progression cohérente. Ces cas d'égalité ont été utilisés par les géomètres jusqu'au XIX^e siècle et présents dans les manuels jusqu'en 1969.

Géométrie élémentaire de Bos (1830 – 1888)

Pour illustrer cette longévité, nous présentons un manuel scolaire écrit à la fin du XIX^e siècle et réédité ultérieurement. Les méthodes et les résultats démontrés perdureront globalement jusqu'à la réforme « des maths modernes » des années soixante. Bos justifie les deux premiers cas d'égalité donnés par transport d'un triangle sur l'autre et le dernier par un raisonnement par l'absurde, utilisant un résultat sur les angles de deux triangles ayant deux côtés égaux et le troisième inégal. Il énonce ensuite une « remarque générale » sur les cas d'égalité :

« Les théorèmes des n°31, 32 et 35 constituent ce qu'on appelle les trois cas d'égalité des triangles, et l'on en fait un usage fréquent en géométrie. Ces théorèmes montrent que si trois éléments d'un triangle, angles ou côtés, convenablement choisis, sont égaux aux trois éléments correspondant d'un autre triangle, les deux triangles sont égaux dans toutes leurs parties ; de telle sorte que l'égalité des trois premiers éléments chacun à chacun entraîne l'égalité des trois autres ; on conçoit sans peine le parti qu'on peut tirer de ces théorèmes pour démontrer l'égalité de deux lignes ou de deux angles appartenant à une même figure ou à deux figures différentes. Il est essentiel de remarquer que, dans deux triangles égaux, les côtés égaux sont toujours opposés aux angles égaux. » (Bos, 1903)

Bos ainsi ne se contente pas de donner les cas d'égalité, mais explique comment les utiliser dans des démonstrations : si l'on veut démontrer que deux angles ou deux segments sont égaux, il faut les « incorporer » dans deux triangles de la figure, qu'on pourra démontrer égaux en utilisant les données du problème. Ceci donne une méthode aux élèves pour résoudre des problèmes. Cette méthode peut permettre à tous et toutes les élèves de « démarrer » un problème de géométrie en voyant au moins ce qu'il faudrait faire. Bien sûr, les difficultés inhérentes aux démonstrations demeurent (comme distinguer les données de la conclusion cherchée), mais du moins les élèves peuvent comprendre ce qu'on cherche à faire.

Bos démontre ensuite les résultats usuels de géométrie élémentaire, dont celui sur la somme des angles d'un triangle et les propriétés des quadrilatères, parallélogrammes, rectangles ; certaines propriétés sont démontrées dans le « cours », d'autres laissées en exercice : une méthode que nous continuons d'employer, avec des démonstrations collectives dialoguées avec la classe, et d'autres laissées à l'initiative des élèves, dont le résultat est ensuite institutionnalisé dans la « trace écrite » du cours. Vous trouverez sur le site⁷ quelques-uns de ces résultats.

7. Voir note 1

La transmission des *Éléments*

Nous donnons ci-dessous un aperçu rapide des tribulations des *Éléments* de l'Antiquité au XVII^e siècle. Pour une étude approfondie, nous renvoyons à l'*Introduction générale* de la traduction des *Éléments* d'Euclide par Vitrac, introduction écrite par Maurice Caveing, dont nous nous inspirons pour les lignes qui suivent, ainsi qu'aux écrits de Djebbar et Vitrac.

L'ouvrage d'Euclide semble avoir supplanté les écrits antérieurs du même type. Dès l'Antiquité Grecque, il a été abondamment commenté par divers auteurs, entre autres Héron d'Alexandrie, Pappus ou Proclus, dont le *Commentaire au Premier Livre des Éléments d'Euclide* constitue une source importante sur les *Éléments*.

À partir du VII^e siècle s'ouvre une période d'expansion rapide du monde arabo-musulman. Une nouvelle tradition scientifique va émerger, s'appuyant au départ sur les foyers scientifiques pré-existant dans les zones conquises (Djebbar, 2010). Après une période d'assimilation des savoirs grecs et indiens grâce à la traduction d'ouvrages scientifiques, des savoirs nouveaux émergent.

L'ouvrage d'Euclide est traduit une première fois en arabe dès le début du IX^e siècle ; il donnera lieu à des commentaires et des travaux novateurs, en particulier sur la théorie des parallèles et la théorie des proportions.

À partir de la fin du XI^e siècle, l'Occident médiéval est en contact avec la civilisation musulmane, en particulier en Sicile et en Espagne. Des équipes de traducteurs rassemblant des savants de diverses confessions traduisent en latin et en hébreu les versions arabes des *Éléments*. Les traductions latines les plus marquantes sont celles de Gérard de Crémone (1114 – 1187), Adélarde de Bath (entre 1100 et 1130) et Campanus de Novare (1259). Campanus était un excellent mathématicien qui a composé la meilleure version latine à partir de l'arabe du point de vue mathématique. Son édition comporte des commentaires pour expliquer ou clarifier les démonstrations. Les débuts de la Renaissance sont marqués par l'invention de l'imprimerie. La première impression des *Éléments* a lieu en 1482 à Venise. C'est la version de Campanus qui a cet honneur et c'est le premier livre mathématique d'importance à être imprimé.

La chute de Constantinople en 1453 va aussi influencer sur la transmission des *Éléments* ; dès la fin du XV^e siècle, des manuscrits des *Éléments* écrits en grec font leur apparition en Italie. De multiples éditions et traductions d'Euclide vont apparaître. La version latine de Federigo Commandinus d'Urbino (1509-1575), parue à Pesaro en 1572, sera très utilisée. Dès 1540 on voit apparaître des traductions en langue vernaculaire : italien, toscan, allemand, français, espagnol, anglais, hollandais... La parution en 1574 (qui aura de nombreuses rééditions) à Rome de la version latine des *Éléments* de Clavius (1537-1612) est un moment important : ce livre permettra de disposer d'*Éléments* mathématiquement instructifs et sera très utilisé, en particulier dans les collèges jésuites (Kouteynikoff et al., 2012).

Au XVII^e siècle, apparaissent des critiques sur les Anciens et, en particulier, la présentation des propositions dans les *Éléments* est remise en question. Il est mis en avant que le fait de démontrer des résultats sans en présenter l'heuristique ne donne pas de méthodes pour trouver des résultats nouveaux. La question de la méthode, la recherche de méthodes générales, sont alors centrales. D'autres

Éléments sont publiés, revendiquant un ordre « plus naturel », une présentation différente et éventuellement des démonstrations reposant sur d'autres ressorts. L'idée de Descartes de « conduire par ordre [ses] pensées » inspire à Arnauld (1612-1694) un ordre très différent de celui d'Euclide pour ses *Nouveaux Éléments de géométrie* (Arnauld, 1667).

Les *Éléments de géométrie* de Clairaut (1713 – 1765)

Clairaut va lui aussi émettre des critiques sur l'ordre euclidien, mais elles seront motivées par des préoccupations pédagogiques « modernes ». Dès sa préface, il précise qu'il cherche « à intéresser et éclairer les Commencants ». Il s'élève contre l'habitude « de faire débiter l'enseignement par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et cherche plutôt à développer les principes [de la Géométrie] d'une manière naturelle ». Pour cela, il s'appuie sur la mesure des terrains, et des distances accessibles et inaccessibles, partant ainsi de problèmes concrets de mesure pour faire découvrir aux Commencants les principes dont dépendent ces mesures. « Ainsi, je parviens à faire découvrir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant » (Clairaut, 1753). Cette méthode lui paraît propre à encourager « ceux qui pourraient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications ». Mais, surtout, « elle accoutumera l'esprit à chercher et à réfléchir ». Clairaut évite, dit-il, de donner des démonstrations « de telle ou telle vérité, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir ».

Un bon exemple de cette méthode est la manière dont il introduit notre théorème de Pythagore, non pas comme un résultat donné a priori, mais en posant un problème, qu'on peut imaginer se poser dans un cadre concret : comment transformer deux carrés en un seul carré⁸.

Il commence par examiner le cas de deux carrés égaux, pour lesquels la solution se trouve facilement par découpage et recollement, les triangles CDA et CEF de la figure 4 étant égaux aux triangles GBA et GBF . Pour le cas général, il se demande où placer le point H , pour qu'on puisse amener le triangle ADH sur Adh en le faisant tourner autour du point A , et amener le triangle EFH sur Efh , avec le même point h sur (Cd) . Il montre alors qu'il suffit de placer H sur $[DF]$ de sorte que DH est égal à CF , et que le quadrilatère $AHEh$ ainsi obtenu est un carré (texte complet sur le site⁹).

Après ces réflexions autour de la méthode des aires et des cas d'égalité, nous proposons l'étude de textes plus tardifs portant plutôt sur le théorème dit « de Thalès » et sur les triangles semblables. La fin du XVIII^e siècle voit avec la Révolution de profonds bouleversements dans l'enseignement. Entre 1789 et 1794, l'intérêt pour les questions d'enseignement est attesté par la création du Comité d'Instruction Publique de la Législative et de la Convention, par de nombreux rapports, des décrets, plusieurs plans concernant ce sujet. Legendre sera chef du premier bureau de la Commission Nationale Exécutive de l'Instruction Publique Section Sciences et Lettres (poids et mesures, inventions et découvertes, encoura-

8. C'est d'ailleurs un problème qui se posait concrètement aux artisans du monde arabo-musulman (Djebbar, 2009).

9. Voir note 1

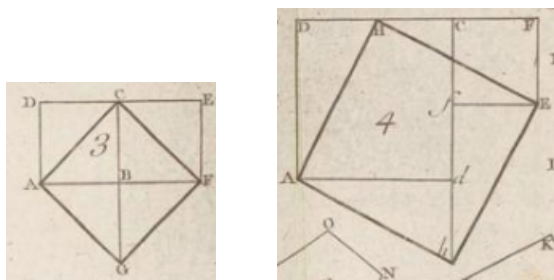


FIGURE 4 – Clairaut, Planche VII figures 3 et 4 (Clairaut, 1753)

gement aux sciences). En 1793, il a été chargé de rédiger des *Éléments de calcul* et de géométrie. Encouragé par Condorcet, il travaillait déjà à ses *Éléments de géométrie*, qui paraîtront en 1794. Ce livre connaîtra de nombreuses éditions et sera utilisé pendant plus d'un siècle pour l'enseignement, avec celui de Lacroix qui aura aussi une influence considérable.

Théorème des lignes proportionnelles et figures semblables

Les *Éléments de géométrie* de Legendre (1752 – 1833)

Legendre revendique dans sa préface le retour à l'ordre euclidien : « On nous reprochera peut-être d'avoir mêlé indistinctement les propriétés des lignes avec celles des surfaces ; mais en cela nous avons suivi à peu près l'ordre d'Euclide, et cet ordre ne peut manquer d'être bon si les propositions sont bien enchaînées les unes aux autres ». On retrouve ainsi une préoccupation actuelle : une cohérence dans l'ordre des énoncés. L'objectif est clair : « je désire surtout qu'il [son ouvrage] soit utile à l'instruction de la jeunesse et qu'il contribue à former des géomètres ¹⁰ dignes de succéder à ceux qui ont illustré le XVIII^e siècle ». Legendre se préoccupe aussi de la pédagogie à mettre en œuvre : « Il me semble au reste que si l'étude de la géométrie doit être précédée de quelques leçons d'algèbre, il ne sera pas inutile non plus de mener de front l'étude de ces deux sciences, et de les entremêler, autant qu'il sera possible, l'une avec l'autre ». (Legendre, 1800)

Legendre définit les figures (rectilignes) semblables comme des figures ayant les angles égaux chacun à chacun et les côtés homologues proportionnels. Avant d'aborder les propositions de géométrie mettant en jeu la proportionnalité, il prévient qu'il faut avoir en tête la théorie des proportions et renvoie aux livres d'algèbre et de géométrie pour cela. Il ramène les grandeurs à des nombres par la mesure (Bühler-Pajus, 2020), en admettant les nombres « incommensurables ». Il élude ainsi une difficulté, admettre qu'à chaque grandeur est associé un nombre, difficulté qui ne sera élucidée qu'à la fin du XIX^e siècle (Bkouche-Lubet-Marmier,

10. Ce mot signifie à l'époque « mathématiciens ».

2009). Il démontre cependant la formule donnant l'aire d'un rectangle, dont découleront celles du parallélogramme (par le biais d'une proposition qui est exactement la I.35 d'Euclide vue plus haut) et du triangle (moitié de parallélogramme) : sa démonstration utilise un raisonnement par l'absurde, et l'existence d'une quatrième proportionnelle. Il peut ensuite reprendre la démonstration d'Euclide du théorème « des lignes proportionnelles », que l'utilisation des nombres et des formules d'aires rend plus accessible pour nos élèves.

La formule donnant l'aire d'un triangle permet de justifier que le rapport des aires de deux triangles de même hauteur est égal au rapport de leurs bases.

Sur la figure 5, (DE) est parallèle à (BC) ; les triangles DEB et EDC ont même base DE et même hauteur (car (DE) est parallèle à (BC)), donc ils ont même aire. Le rapport des aires des triangles ADE et DEB est égal au rapport de leurs bases AD et DB , car ils ont même hauteur. De même le rapport des aires des triangles ADE et EDC est égal au rapport de leurs bases AE et EC . Comme les triangles DEB et EDC ont même aire, on obtient l'égalité des rapports $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$, c'est-à-dire aussi celle de leurs inverses $\frac{DB}{AD}$ et $\frac{EC}{AE}$, enfin, par manipulation de cette égalité : $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. La réciproque est joliment démontrée : on suppose $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. Si (DE) n'est pas parallèle à (BC) , alors on appelle O le point d'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par D . O est sur $[AE]$ ou sur $[EC]$; supposons d'abord qu'il est sur $[AE]$. Le théorème qu'on vient de montrer assure : $\frac{AD}{DB} = \frac{AO}{OC}$. On aurait donc : $\frac{AE}{EC} = \frac{AO}{OC}$. Ceci est impossible car $AO < AE$ et $OC > EC$. Legendre démontre ensuite le premier cas de similitude des triangles (deux triangles ayant leurs trois angles égaux chacun à chacun à chacun ont leurs côtés proportionnels) : les deux triangles ABC et DCE étant équiangles, il les place comme sur la figure 5 et prolonge $[DE]$ jusqu'à son intersection F avec (AB) ; on applique alors le théorème précédent, en utilisant le parallélisme de (AC) et (EF) , pour obtenir $\frac{BC}{CE} = \frac{BA}{AF}$. Or $AF = CD$ ($FACD$ est un parallélogramme); donc $\frac{BC}{CE} = \frac{BA}{CD}$. On montre de même $\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DE}$. On obtient ainsi la proportionnalité des côtés homologues.

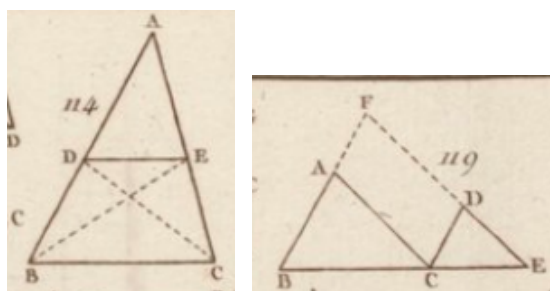


FIGURE 5 – Legendre, Planche 4 figures 114 et 119 (Legendre, 1800)

– Source : BnF

La manipulation des rapports d'aires n'est pas simple pour les élèves, et, si on veut utiliser cette démonstration, il faut sans doute un travail préalable pour s'appropriier les différents résultats utilisés. D'autres démonstrations sont possibles.

Les *Éléments de géométrie* de Lacroix (1765 – 1843)

Nous présentons ici la démonstration que donne Lacroix du « théorème des lignes parallèles ». On retrouve chez Lacroix les cas d'égalité des triangles comme outils de démonstration, mais il abandonne la méthode des aires pour la démonstration du théorème « des lignes parallèles ». Il est influencé par les *Éléments de géométrie* d'Arnauld qui démontre que « les parallèles menées par les points pris à égale distance sur les côtés d'un angle, coupent aussi l'autre côté en parties égales, proposition dont ceux qui ont suivi l'ordre qu'il avait adopté, ont fait depuis la base de la théorie des lignes proportionnelles. »

Lacroix, dans ses *Éléments de géométrie*, montre d'abord que, lorsque deux droites quelconques sont coupées par des droites parallèles menées à partir de points équidistants sur l'une des droites, alors les points d'intersection avec la deuxième droite sont également équidistants. Autrement dit, sur la figure 6, lorsque $AB = BC = CD = DE = EF$, alors $GH = HI = IK = KL = LM$. En effet, on mène (GN) , (HO) , (PI) , (KQ) , (LR) parallèles à (AF) . Alors, GN , HO , IP , etc., respectivement égaux à AB , BC , CD , etc., sont égaux entre eux. Ceci permet de montrer l'égalité des triangles GHN , HIO , IKP , KLQ , LMR entre eux, et d'en déduire l'équidistance des points G , H , I , K , L , M .

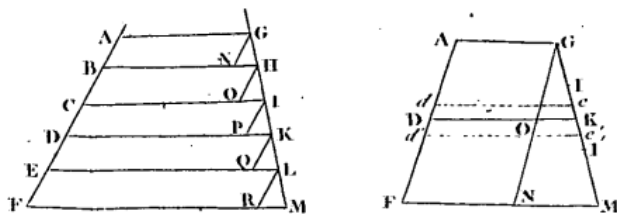


FIGURE 6 – Lacroix, Planche II figures 33 et 34 (Lacroix, 1808) – Source : BnF

Ceci lui permet d'obtenir le théorème de Thalès sous la forme « Trois parallèles coupent toujours deux droites quelconques en parties proportionnelles », autrement dit, avec la figure 6 : $\frac{AD}{DF} = \frac{GK}{KM}$. La démonstration découle facilement du théorème précédent dans le cas de lignes commensurables et Lacroix fait un double raisonnement par l'absurde dans le cas incommensurable. Le théorème de Thalès sous la forme triangles n'est alors qu'un cas particulier. Ce résultat sur des sécantes parallèles à deux droites quelconques était encore à l'honneur en collègue dans les années quatre-vingt, avec une démonstration semblable à celle de Lacroix, mais limitée à un exemple générique de rapport rationnel. Lacroix fait une remarque en note très intéressante (page 35) :

« On éprouvera peut-être quelque difficulté à transporter aux parties de l'étendue la notion de rapport, telle qu'on la conçoit à l'égard des nombres, surtout lorsqu'il s'agira de lignes incommensurables entre elles ; mais l'obscurité disparaîtra, si l'on fait attention qu'on ne peut comparer deux lignes qu'en les supposant rapportées à une commune mesure, et qu'alors leur rapport est vraiment un nombre, ou une frac-

tion dont les termes sont exprimés par les nombres de mesures communes comprises dans chaque droite. Quoique cette fraction cesse d'être rigoureusement assignable dans le cas où le rapport est incommensurable, elle n'en existe pas moins, puisqu'on peut en approcher d'aussi près qu'on voudra ; et deux rapports incommensurables devront être regardés comme égaux, dès qu'on prouvera que, quelle que loin que soit poussée l'approximation pour l'un et pour l'autre, leur différence demeurera toujours nulle. » (Lacroix, 1819)

Cette difficulté dans le théorème des lignes proportionnelles, qui tient aux rapports incommensurables, est également soulignée dans son *Essai sur l'enseignement en général et des mathématiques en particulier* (Lacroix, 1838).

La même préoccupation sur les grandeurs incommensurables se trouvait déjà chez Clairaut (pages 98-99) :

« Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelques soupçons sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables. On a vu qu'en comparant ces figures, nous avons toujours supposé qu'elles avaient une échelle qui pouvait également servir à mesurer toutes leurs parties : supposition qui paraît devoir maintenant être limitée, à cause de ce qui vient d'être dit. Il faut donc que nous revenions sur nos pas et que nous examinions si nos propositions, pour être vraies, n'auraient pas elles-mêmes besoin de quelques modifications. »

Clairaut reprend alors sa démonstration (voir plus bas) du fait que deux triangles abc et ABC équiangles ont leurs côtés proportionnels et prend pour exemple le cas où le rapport de AB à ab est celui de la diagonale au côté d'un carré, un cas d'incommensurabilité dont il a déjà traité plus haut.

« Quoique, suivant ce que nous avons vu, quelque grand que pût être le nombre des parties qu'on supposerait arbitrairement dans ab , AB ne pourrait jamais contenir un nombre exact de ces parties, il est cependant aisé de s'apercevoir que plus ce nombre sera grand, plus AB approchera d'être mesuré exactement avec les parties de ab . »

Il suggère alors de diviser ab en 100 parties (respectivement 1000 parties), et explique qu'alors AB sera compris entre 141 et 142 (respectivement 1414 et 1415) parties, et qu'on trouvera que AC contiendra aussi entre 141 et 142 (respectivement 1414 et 1415) parties de ac (divisé lui-même en 100, puis 1000 parties) et que, « en général, AC contiendra toujours autant de parties de ac , avec un reste, que AB contiendra de parties de ab , avec un reste. Ces restes seront[...] d'autant plus petits que le nombre des parties de ab sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger. »

Nous avons ainsi vu deux types de démonstrations du théorème de Thalès, utilisables en classe de collège, chacune comportant ses propres difficultés et ses avantages. La méthode des aires permet de montrer aux élèves une méthode féconde en géométrie et évite de se poser le problème de l'incommensurabilité ; celui-ci est masqué par un résultat sur les aires de triangles et parallélogrammes (deux

parallélogrammes entre les mêmes parallèles sont entre eux comme leurs bases) ou, pour nos élèves, par l'utilisation de la formule donnant l'aire d'un triangle à partir de celle sur l'aire d'un rectangle, qui nécessiterait pour une démonstration rigoureuse de se préoccuper du cas où longueur et largeur du rectangle sont incommensurables. L'utilisation des rapports dans la démonstration peut cependant poser difficulté, et, si la démonstration est convaincante, elle n'est peut-être pas très éclairante.

La démonstration utilisant les triangles égaux est sans doute plus accessible, surtout si elle est faite sur un exemple générique, ce qui n'est pas gênant, car on peut « imaginer » avec les élèves ce qu'on pourrait faire avec un rapport de nombres différents, même plus grands ; mais il est visible qu'elle fonctionne seulement pour des rapports rationnels. Comme Clairaut, on pourrait aborder ce problème plus tard, en rencontrant en exercice des rapports qui ne sont pas rationnels ... ou ne pas l'aborder.

Retour à Clairaut

Les cas d'égalité des triangles avaient été amenés dans le livre de Clairaut par la nécessité de mesurer des parcelles triangulaires dont un côté est inaccessible : il suffit alors de reproduire sur un terrain suffisamment plat et grand le triangle à mesurer, ce qui est possible lorsqu'on a pu mesurer un angle et deux côtés par exemple. Mais, il peut s'avérer impossible de trouver à proximité un tel terrain convenable, on est amené à s'intéresser à des triangles de « même forme », et nous voici en train d'étudier des figures rectilignes semblables, définies par Clairaut comme des figures ayant leurs angles égaux et leurs côtés proportionnels.

Clairaut démontre que des triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels, d'abord dans le cas particulier de deux triangles abc et ABC tels que ab est la moitié de AB (Voir figure 7). Pour démontrer que les deux autres côtés sont dans la même proportion, il commence par amener le triangle abc sur le triangle ABC , de sorte que b soit sur $[AB]$ et c sur $[AC]$; il trace ensuite la parallèle à (AB) passant par c qui coupe (BC) en g . Comme les angles Abc et ABC sont égaux, la droite (cb) est parallèle à (CB) donc bcb est un parallélogramme, $cg = bB$ et $bc = Bg$. L'égalité de Ab et bB (puisque $Ab = \frac{1}{2}AB$) entraîne celle de cg et Ab . Les triangles Abc et cgC sont égaux (un côté égal entre deux angles égaux du fait des parallélismes). Donc $Ac = cC$ et $Cg = cb = Bg$, donc c est le milieu de $[AC]$ et g est le milieu de $[BC]$, donc Ac est égal à la moitié de AC et bc est la moitié de BC . Une démonstration facilement adaptable pour nos élèves afin de montrer que la droite passant par le milieu d'un côté et parallèle à un autre côté coupe le troisième en son milieu.

Il explique ensuite que la démonstration serait analogue si « le côté ab était contenu trois ou quatre ou tel nombre qu'on voudra dans AB car on pourrait placer le long de AC trois, quatre, &c. triangles [...] égaux à acb . »

De même si ab n'est pas contenu un nombre entier de fois dans AB , mais « n'y fut contenu qu'avec quelque fraction ». La figure 8 est l'illustration du cas où un côté du petit triangle est égal au tiers du côté homologue du grand triangle. Cette figure pourrait servir aussi pour un rapport égal à deux-tiers.

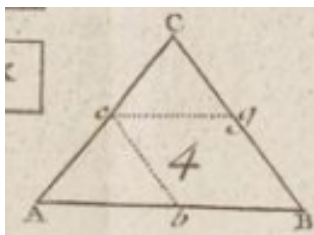


FIGURE 7 – Clairaut, Planche IV figure 4 (Clairaut, 1753)

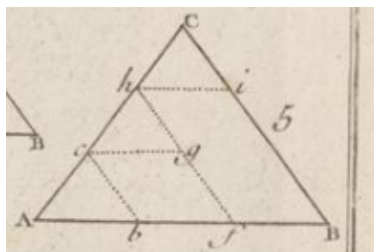


FIGURE 8 – Clairaut, Planche IV figure 5 (Clairaut, 1753)

Clairaut n'énonce jamais le théorème que nous appelons actuellement théorème de Thalès. De fait, pour justifier le premier cas de similitude (la proportionnalité des côtés homologues de deux triangles équiangles), Clairaut a commencé par placer ses triangles en « situation de Thalès », et ne voit aucune nécessité de traiter à part ce cas. Le théorème de Thalès tel que nous le connaissons dans les programmes actuels est de toute façon plus facile à utiliser en considérant les triangles semblables de la figure, en repérant les côtés homologues, ce qui évite de faire des erreurs dans les égalités de rapports. De fait, Euclide commençait par ce cas, car il utilisait des comparaisons d'aires valables dans ce cas de figure, puis en déduisait le premier cas de similitude grâce à des égalités de triangles.

Conclusion

Ainsi, les choix des auteurs de traités anciens peuvent nous éclairer sur les difficultés et les avantages de telle ou telle méthode et nous aider à faire nos propres choix avec nos élèves, dans le cadre des programmes du cycle 4 : choix d'une progression qui reste cohérente mathématiquement, mais aussi pédagogiquement ; choix des démonstrations de cours que nous estimons utiles et/ou nécessaires, à faire en dialogue avec la classe ou laissées à l'initiative des élèves ; étude de configurations permettant des exercices riches, avec constructions et démonstrations, ... Ainsi l'introduction des cas d'égalité le plus tôt possible au cycle 4 permet de donner aux élèves un outil très fécond pour les démonstrations en géométrie. Il peut être plus pertinent pour une progression cohérente de traiter le théorème des lignes proportionnelles avant les triangles semblables, mais adopter le choix de Clairaut

de n'aborder que les triangles semblables peut éviter aux élèves des erreurs dans les égalités de rapports. Les textes interrogent également le sens des notions étudiées, comme les aires. Il nous faudra concilier la vision des aires comme grandeurs et comme nombres, ne pas occulter la première totalement par l'utilisation systématique de formules. La difficulté des incommensurables est soulignée par les textes : à nous de voir comment nous traitons cette difficulté, à quel moment cela se révèle pertinent pour nos élèves.

Références bibliographiques et sitographiques

- ARNAULD Antoine, 1667, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, Charles Savreux, accessible sur le site Gallica <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6565463h.texteImage>, dernier accès le 28 juillet 2022.
- BARBIN Évelyne, 2001, « Qu'est-ce que faire de la géométrie ? », *Repères-IREM*, n° 43, pp. 59-83.
- BKOUCHE Rudolf, 2000, « La place du numérique dans la construction de la géométrie », in *La mémoire des nombres*, p. 655-688, Caen, IREM de Basse-Normandie.
- BKOUCHE Rudolf, LUBET Jean-Pierre, MARMIER Anne-Marie, 2009, *Grandeurs et nombres*, Recueil de textes et commentaires, Villeneuve d'Ascq, IREM de Lille.
- BOS Henri, 1903, *Géométrie élémentaire*, 1^{re} éd. 1881, Paris, librairie Hachette et Cie, accessible sur le site Gallica <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1162625k?rk=42918;4>, dernier accès le 28 juillet 2022.
- BÜHLER Martine et MICHEL-PAJUS Anne, 2020, « Autour du théorème de Pythagore : grandeurs et nombres », in dir. JOUVE Guillaume, MARMIER Anne-Marie, MOYON Marc, RECHER François, TAZZIOLI Rossana, TOURNÈS Dominique, *Mathématiques en perspectives, Hommage à Rudolf Bkouche*, Limoges, PULIM, p. 143-157.
- CLAIRAUT Alexis, 1753, *Éléments de géométrie*, Paris, Chez David, <https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-4548> (ETH-Bibliothek Zürich, Rar 5319), dernier accès le 28 juillet 2022.
- DJEBBAR Ahmed, 2009, *Textes géométriques arabes (IX^e-XV^e siècles)*, Dijon, IREM de Dijon.
- DJEBBAR Ahmed, 2010, « Les mathématiques en pays d'islam : héritages, innovations et circulation en Europe » in *Circulation, Transmission, Héritage*, Actes du colloque C2I de Caen, p. 3-28.
- EUCLIDE, 1990, *Les Éléments* (vol.1), traduction de Bernard Vitrac, 4 volumes, Paris, PUF.
- KOUTEYNIKOFF Odile, LOGET François, MOYON Marc, 2013, Quelques lectures renaissantes des *Éléments* d'Euclide, in *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, PULIM, p. 13-28.
- LACROIX Sylvestre François, 1808, *Éléments de géométrie à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*, Paris, accessible sur le site Gallica <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2081879?rk=85837;2>, dernier accès le 28 juillet 2022.

LACROIX Sylvestre François, 1838, *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*, Paris.

LEGENDRE Adrien-Marie, 1800, *Éléments de géométrie*, seconde édition, Paris, chez Firmin Didot (An VIII), accessible sur le site Gallica <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6212886v?rk=42918;4>, dernier accès le 28 juillet 2022.

VITRAC Bernard, page personnelle : <https://cnrs.academia.edu/BernardVitrac>.

Page du groupe M. : A.T.H., dossier « Histoire et Géométrie » : <https://irem.u-paris.fr/histoire-et-geometrie>