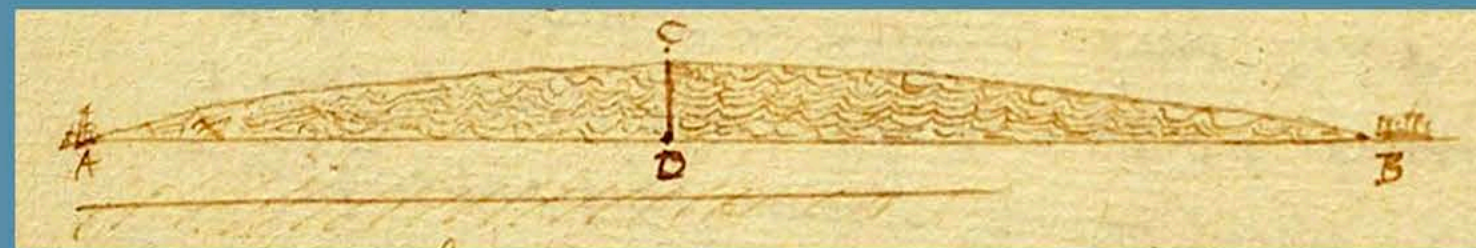


Circulation Transmission Héritage

Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » sont différents. Cet ouvrage explore des moments historiques où des décalages, petits ou grands, nourrissent des héritages et furent le fruit des circulations et des transmissions. Il invite à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études qu'il rassemble mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.



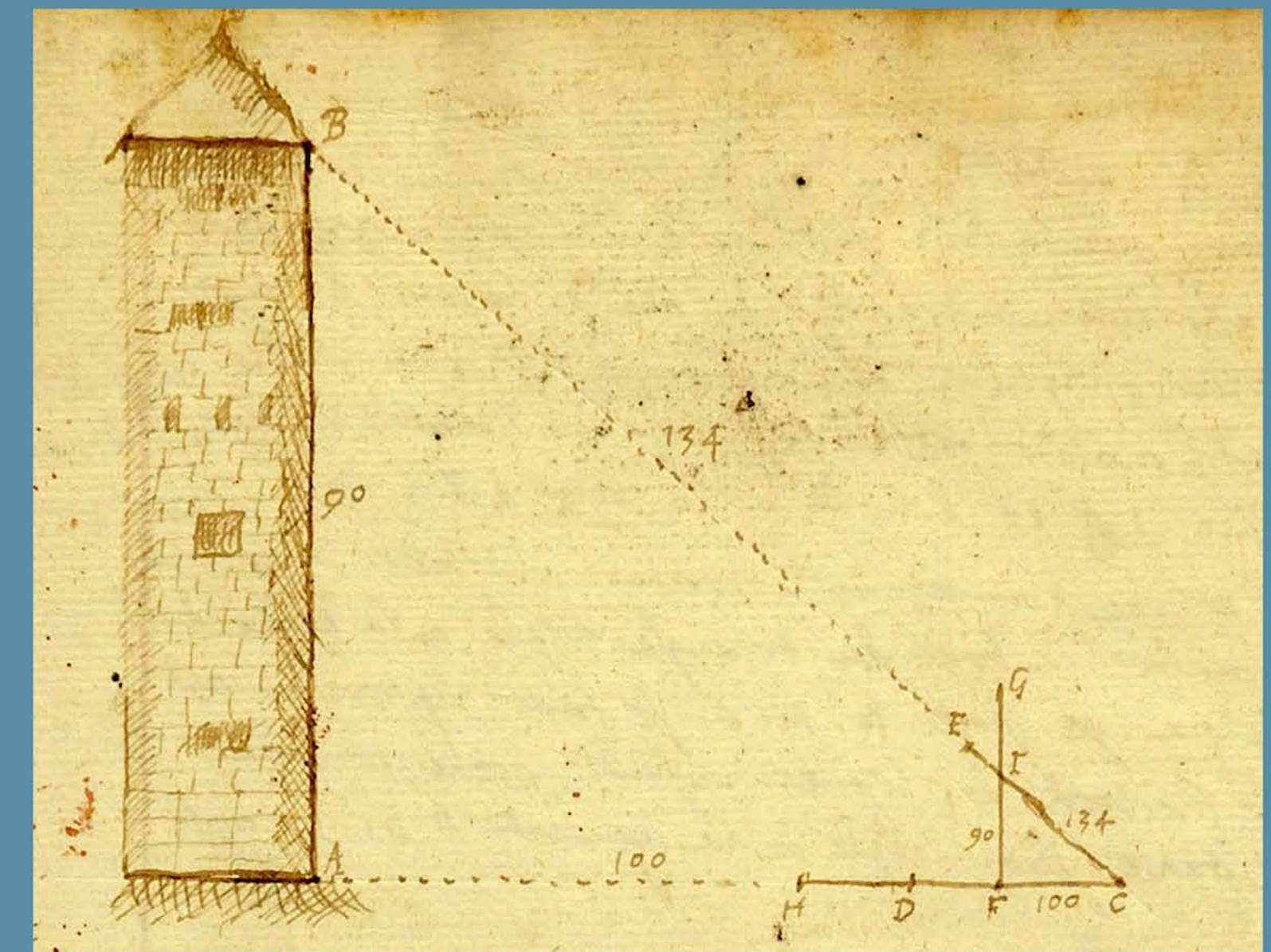
ISBN : 978-2-902498-06-2

Édition et diffusion : IREM de Basse-Normandie
juin 2011

IREM
de Basse-
Normandie

Circulation Transmission Héritage *histoire et épistémologie des mathématiques*

Circulation Transmission Héritage



Actes du 18^e colloque inter-IREM
histoire et épistémologie
des mathématiques
mai 2011

Université de Caen Basse-Normandie

Circulation Transmission Héritage

Actes du XVIII^e colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-3. – Lire les Anciens, aujourd’hui

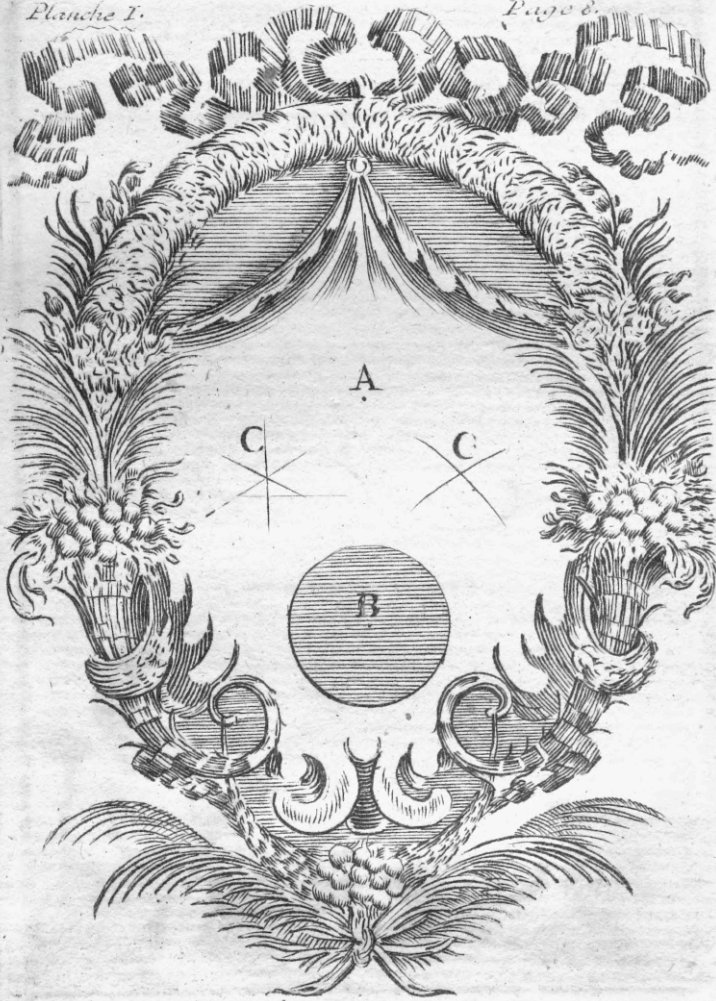
II-3-Z. Pages 583-618

**Une relecture de la proposition 46 du livre IV
des *Coniques* d’Apollonios de Pergé, de ses
éditions et de ses traductions**

*Didier Bessot, Denis Lanier,
Jean-Pierre Le Goff & Didier Trotoux*

Circulation Transmission Héritage

Histoire et épistémologie des mathématiques



Commission inter-IREM
Épistémologie et histoire des mathématiques

Circulation Transmission Héritage

Actes du XVIII^e colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

ISBN : 978-2-902498-06-2

© IREM de Basse-Normandie (Université de Caen Basse-Normandie), juin 2011

Directeur de publication : Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Diffusion : IREM de Basse-Normandie, Université de Caen Basse-Normandie,

campus 2, 14032 Caen Cedex

Tél. : 02 31 56 74 02 – Fax. : 02 31 56 74 90

Adresse électronique : irem@unicaen.fr

Site Internet : <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

Coordination : Évelyne Barbin et Pierre Ageron

Comité de lecture : Pierre Ageron, Didier Bessot, Richard Choulet, Gilles Damamme, Guy Juge, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff, Pierrick Meignen, Thierry Mercier, François Plantade, Danielle Salles, Didier Trotoux et Éric Trotoux

Relecture générale : Pierre Ageron, Jean-Pierre Le Goff

Conception, illustration et mise en page du volume : Jean-Pierre Le Goff, Pierre Ageron, Didier Bessot et Didier Trotoux

Conception de l'affiche du colloque et de la couverture des actes : Patrice Gourbin

Impression et façonnage : Corlet numérique, 14110 Condé-sur-Noireau

Crédits photographiques de la couverture :

Bibliothèque de Caen, deux images tirées du manuscrit *in-fol.* 27 : *Pratique de geometrie*, de la main de Samuel Bochart (1599-1667)

– 1^{ère} de couverture : mesure au *gonomètre* de la hauteur d'une tour, $f^{\circ}8\ r^{\circ}$

– 4^{ème} de couverture : mesure de la *gibbosité* de la mer entre Dieppe et la Rie (Rye), $f^{\circ}42\ v^{\circ}$

Illustrations hors-texte :

Les 16 planches hors-texte des pages de l'ouvrage, paginées ii, viii, xiv, 28, 50, 94, 122, 240, 338, 360, 386, 446, 480, 502, 544 et 582, sont tirées de la *Pratique de la Geometrie, sur le papier et sur le terrain ; où par une methode nouvelle & singuliere l'on peut avec facilité & en peu de tems se perfectionner en cette science*, Par Sebastien Leclerc, Graveur du Roi. A Paris, Chez Ch. A. Jombert, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame. M. DCC. XLIV. (1744). *Avec Privilege du Roi.* (coll. part., clichés : jplg)

Sommaire

Sommaire	v
<i>Pierre Ageron</i>	
Avant-propos	ix
<i>Évelyne Barbin</i>	
Présentation	xi

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

<i>Ahmed Djebbar</i>	
Les mathématiques en pays d'Islam : héritages, innovations et circulation en Europe	3
<i>Frédéric Laurent</i>	
Les éléments d'une transmission : petite histoire de la transmission des <i>Éléments</i> d'Euclide en Arménie	29
<i>Isabelle Martinez-Labrousse</i>	
Un essai de synthèse entre le théorème de Pythagore et la procédure <i>gou-gu</i>	51
<i>Gérard Hamon & Lucette Degryse</i>	
Le livre IX des <i>Quesiti et inventioni diverse</i> de Niccolò Tartaglia : langue et mathématiques	71
<i>Pierre Ageron</i>	
Les sciences arabes à Caen au XVII ^e siècle : l'héritage arabe entre catholiques et protestants	95
<i>Jean-Pierre Le Goff</i>	
La perspective selon Andrea Pozzo et son adaptation chinoise, ou, questions de regards obliques et croisés : de la distance entre deux pensées de la représentation	123

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

Martine Bübler & Anne Michel-Pajus

Règle de trois et proportionnalité dans une arithmétique
pratique niçoise du XVI^e siècle et dans ses sources 155

Pierre Ageron & Didier Bessot

De Varignon au père André :
tribulations normandes d'un cours de géométrie 181

Anne Boyé & Guillaume Moussard

L'enseignement des vecteurs au XX^e siècle : diversité
des héritages mathématiques et circulation entre disciplines 201

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

Jeanne Peiffer

La circulation mathématique dans et par
les journaux savants aux XVII^e et XVIII^e siècles 219

Christian Gérini

Pour un bicentenaire : polémiques et émulation dans
les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne,
premier grand journal de l'histoire des mathématiques (1810-1832) 241

Norbert Verdier

Le *Journal de Liouville* et la presse de son temps : hériter, transmettre
et faire circuler des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885) 255

I-4. – Les figures : accompagner les mots

Olivier Keller

Surface, figure, ligne et point : un héritage de la préhistoire 281

Jean-Pierre Cléro

Qu'est-ce qu'une figure ? 297

II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-1. – Hériter et inventer

Gilles Damamme

Quel héritage se transmet à partir des biographies de grands mathématiciens ?	331
--	-----

Pierre Ageron

Ibn Hamza a-t-il inventé les logarithmes ? Constitution et circulation du discours islamocentré sur l’histoire des mathématiques	339
---	-----

Jean-Paul Guichard

L’algèbre nouvelle de Viète et ses héritiers	361
--	-----

Denis Lanier, Jean Lejeune & Didier Trotoux

L’invention de la médiane	387
---------------------------------	-----

Dominique Tournès

Une discipline à la croisée d’intérêts multiples : la nomographie	415
---	-----

II-2. – Transmettre et s’approprier

Évelyne Barbin

Pourquoi les contemporains de Descartes n’ont-ils pas compris sa <i>Géométrie</i> de 1637 ?	449
--	-----

Jean Lejeune, Denis Lanier & Didier Trotoux

Jules Gavarret (1809-1890) : précurseur de l’introduction des statistiques inférentielles en épidémiologie ?	465
---	-----

François Plantade

H. G. Grassmann : une destinée linéaire ?	481
---	-----

Jean-Pierre Le Goff

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la vie et l’œuvre de Salomon de Caus	503
---	-----

Maryvonne Ménéx-Hallé

La question du mathématique	545
-----------------------------------	-----

II-3. – Lire les Anciens, aujourd’hui

Alain Bernard

Les <i>Arithmétiques</i> de Diophante : introduction à la lecture d’une œuvre ancrée dans différentes traditions antiques	557
--	-----

Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff & Didier Trotoux

Une relecture de la proposition 46 du livre IV des <i>Coniques</i> d’Apollonios de Pergé, de ses éditions et de ses traductions	583
--	-----

II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-1. – Hériter et inventer

Gilles Damamme

- Quel héritage se transmet
à partir des biographies de grands mathématiciens ? 331

Pierre Ageron

- Ibn Hamza a-t-il inventé les logarithmes ? Constitution et circulation
du discours islamocentré sur l’histoire des mathématiques 339

Jean-Paul Guichard

- L’algèbre nouvelle de Viète et ses héritiers 361

Denis Lanier, Jean Lejeune & Didier Trotoux

- L’invention de la médiane 387

Dominique Tournès

- Une discipline à la croisée d’intérêts multiples : la nomographie 415

II-2. – Transmettre et s’approprier

Évelyne Barbin

- Pourquoi les contemporains de Descartes n’ont-ils pas compris
sa *Géométrie* de 1637 ? 449

Jean Lejeune, Denis Lanier & Didier Trotoux

- Jules Gavarret (1809-1890) : précurseur de l’introduction
des statistiques inférentielles en épidémiologie ? 465

François Plantade

- H. G. Grassmann : une destinée linéaire ? 481

Jean-Pierre Le Goff

- Tout ce que vous avez toujours voulu savoir
sur la vie et l’œuvre de Salomon de Caus 503

Maryvonne Ménéx-Halléx

- La question du mathématique 545

II-3. – Lire les Anciens, aujourd’hui

Alain Bernard

- Les *Arithmétiques* de Diophante : introduction à la lecture
d’une œuvre ancrée dans différentes traditions antiques 557

Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff & Didier Trotoux

- Une relecture de la proposition 46 du livre IV des *Coniques*
d’Apollonios de Pergé, de ses éditions et de ses traductions 583

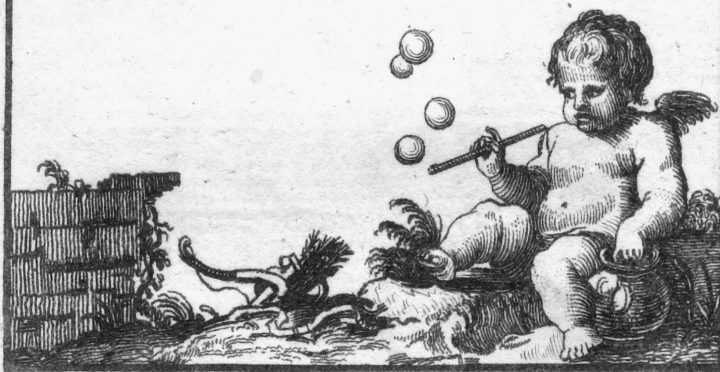
A ————— B

C ————— D

E ————— F

C ————— D

V —————



Avant-propos

L'IREM de Basse-Normandie, institué dans l'université de Caen le 23 octobre 1973, cultive par précellence l'histoire des mathématiques. Dès l'origine, plusieurs de ses animateurs, professeurs de lycée, étaient conduits par une intuition : introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques serait de nature à aider les élèves à y retrouver du sens, sens que le formalisme – des “maths modernes”, notamment – tendait à dissimuler. Mais la discipline “histoire des sciences” n'était alors guère développée dans les universités. C'est ainsi que commença un colossal travail de recherche fondamentale et appliquée, d'édition de sources, de formation initiale et continue, d'actions interdisciplinaires. Nombreux sont ceux qui y ont contribué ; je veux citer au moins les noms de Jean-Pierre Le Goff, Didier Bessot et Denis Lanier et leur rendre ici un hommage plein d'amitié et d'admiration.

C'est à l'IREM de Basse-Normandie qu'il revint d'organiser le tout premier colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, au château de Tailleville, en mai 1977, puis le X^e colloque d'une série devenue bisannuelle, sur le thème *La mémoire des nombres* – c'était à Cherbourg en mai 1994. Entre les deux, l'IREM de Basse-Normandie avait organisé, à l'initiative de l'Association pour le développement des études et recherches en histoire et épistémologie des mathématiques (ADERHEM), un colloque exceptionnel baptisé *Destin de l'art, dessein de la science* (octobre 1986). Enfin le XVIII^e colloque inter-IREM, dont vous tenez en main les actes, s'est tenu en mai 2010 au cœur de l'université caennaise, dans l'amphithéâtre Henri Poincaré (qui enseigna deux années à Caen). Le thème retenu, *Circulation – Transmission – Héritage*, invitait à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études ici rassemblées mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Basse-Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

Je remercie les institutions qui ont compris l'intérêt de cette manifestation : le ministère de l'Éducation nationale (via l'Assemblée des directeurs d'IREM), la région Basse-Normandie, la ville de Caen, l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (régionale de Basse-Normandie), l'ADERHEM, et notre *alma mater* l'université de Caen Basse-Normandie.

Ce colloque n'aurait pu être organisé sans l'énergie déployée par Geneviève Jean, secrétaire de l'IREM, et par de nombreux animateurs de l'IREM, notamment Guy Juge, Éric Trotoux et Didier Trotoux. Enfin Jean-Pierre Le Goff, Didier Trotoux et Didier Bessot m'ont apporté une aide précieuse dans l'édition de ces actes. Que tous soient très chaleureusement remerciés.

Pierre Ageron
directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Présentation

Auteurs, destinataires et lecteurs d'un texte :
histoires de décalages.

Évelyne Barbin,
IREM des Pays de la Loire,
Centre François Viète, Université de Nantes

*La plus grande partie d'une œuvre se déroule sous la
tyrannie de sa réception.*

Christophe Prochasson, « Ce que le lecteur fait de l'œuvre. Héritages
et trahisons : la réception des œuvres », *Mill neuf cent*, 12, 1994.

Le Colloque inter-IREM « Histoire des mathématiques : circulation, transmission, héritage » s'inscrit bien dans la visée de « la réception des œuvres » de Hans Robert Jauss, dont Christophe Prochasson indique l'intérêt pour l'historien dans le texte cité en exergue. Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Le cas des manuels, y compris les plus récents, n'échappe pas à cette distinction, que connaît bien l'enseignant : le destinataire du manuel est l'élève de classe de quatrième, mais la lectrice est Vanessa. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » – en utilisant l'expression de Jauss – sont différents. Cet ouvrage propose quelques moments historiques de décalages, petits ou grands, qui nourrissent les héritages, qui sont le fruit des circulations et des transmissions.

Les aspects matériels de la circulation des textes, leurs véhicules, font l'objet de la première partie. L'histoire des mathématiques arabes est intéressante, puisqu'elles sont au carrefour de langues diverses, elles commencent avec des traductions et se perpétuent avec d'autres traductions, dans une sphère culturelle large, comme le montrent Ahmed Djebbar et Pierre Ageron. Avec la transmission des *Éléments* d'Euclide en Arménie, Frédéric Laurent délivre une partie peu connue de l'histoire. L'ouvrage d'Euclide, transmis par les Jésuites en Chine, y connut un sort étrange, puisque les lecteurs orientaux négligèrent

les démonstrations qui faisaient le succès des *Éléments* ailleurs. L'exemple du décalage très abrupt de l'attente entre Occidentaux et Chinois est illustré dans cet ouvrage par Isabelle Martinez et Jean-Pierre Le Goff. L'écart plus ténu entre langue savante, le latin, et langue vernaculaire, ici un dialecte italien, est examiné avec précision par Gérard Hamon et Lucette Degryse à propos des *Quesiti* de Nicollo Tartaglia au XVI^e siècle.

Il existe deux types de véhicules adaptés à des destinataires particuliers, ce sont les manuels et les revues mathématiques. Les manuels sont écrits à partir de sources diverses et à destination de commençants, avec le souci d'un rendu intégral des « idées » ou à l'inverse dans celui d'une « adaptation » aux élèves. Du côté des sources, Martine Bühler et Anne Michel-Pajus analysent celles d'un ouvrage d'arithmétique niçois du XVI^e siècle. Du côté des réceptions, Pierre Ageron et Didier Bessot retracent les tribulations d'un manuel de géométrie au XVIII^e siècle. Comme le montrent Anne Boyé et Guillaume Moussard, l'enseignement des vecteurs présente un cas très complexe aux sources multiples – géométriques, algébriques et physiques –, qui a beaucoup changé selon les destinataires à différentes époques.

L'édition des revues scientifiques commence au XVII^e siècle. Les journaux savants sont écrits par des « savants » à destination de leurs confrères, membres d'Académies nationales ou de Sociétés provinciales. La spécialisation de revues aux seules mathématiques au XIX^e siècle est contemporaine de publications pour des publics eux aussi plus spécialisés, qu'ils soient enseignants, amateurs ou bien mathématiciens. La transmission par des revues multiplie le nombre de possibilités de mise en évidence de décalages, en augmentant le nombre des auteurs et en accordant la plume aux lecteurs. Les articles de Jeanne Peiffer, de Christian Gérini et de Norbert Verdier offrent un large panel de périodes et de publics pour diverses revues sur trois siècles.

Les figures mathématiques ne transcendent-elles pas les questions de transmission en offrant un langage qui serait universel ? De plus, ne s'agit-il pas d'un langage qui précède l'écriture ? Ces questions trouveront des éléments de réponse dans les articles d'Olivier Keller et de Jean-Pierre Cléro. Prise du point de vue de la réception historique des « textes », la première question recevrait une réponse plutôt relativiste. Un triangle est vu comme une aire par Euclide et comme ses trois côtés par Descartes, il est désigné par des lettres chez les mathématiciens grecs et par des couleurs chez les chinois.

La seconde partie de cet ouvrage retourne à l'auteur d'un texte, mais sans abandonner la perspective du destinataire et du lecteur. En effet, l'auteur est lui-même un lecteur, et donc un texte peut être lu comme un maillon dans un échange dialogique. Car, comme l'explique Mikhaïl Bakhtine, un texte est écrit

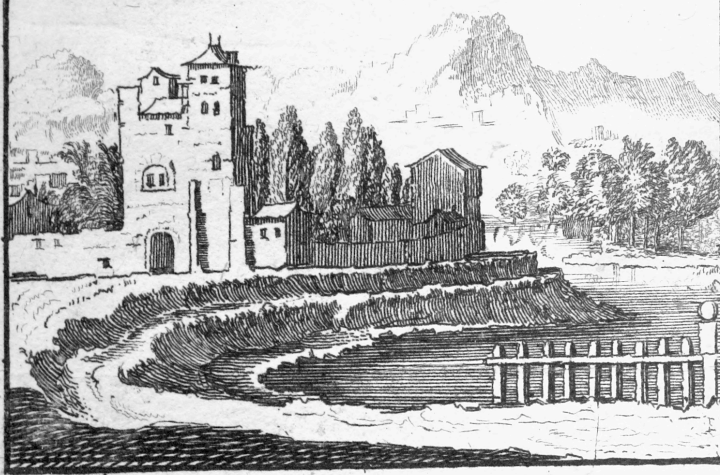
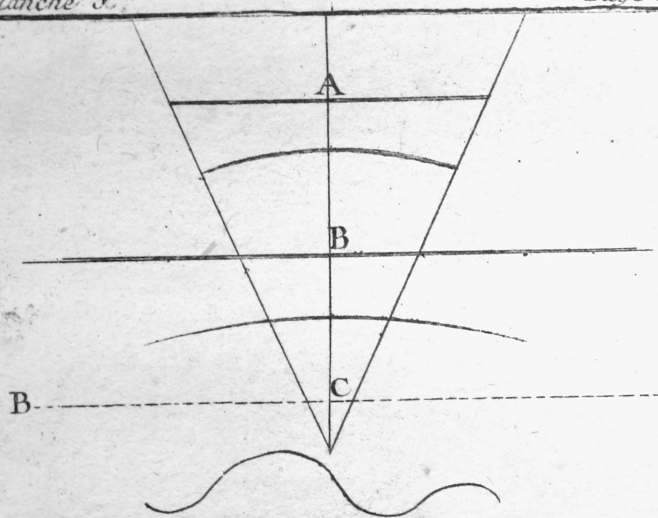
en réponse à d'autres auteurs de textes et il s'adresse à des lecteurs qui ont une « attitude responsive active ».

Lorsqu'un auteur doit écrire quelque chose qui lui paraît nouveau, c'est-à-dire susceptible d'aller au-delà des conceptions contemporaines, il doit aménager son texte. Autrement dit l'invention pose des problèmes accrus de transmission. C'est ce qu'analysent les articles de Jean-Paul Guichard, de Denis Lanier, Jean Lejeune et Didier Trotoux pour deux inventions mathématiques. L'histoire des mathématiques, qu'elle s'intéresse à des inventions ou des inventeurs, ne peut pas passer outre leurs intérêts sous-jacents, par exemple pour la nomographie présentée par Dominique Tournès. Le renouveau du genre biographique en histoire, indiqué par Gilles Damamme, va de pair avec une histoire des inventeurs dans le contexte intellectuel, social et culturel de leur époque. En suivant les propos de Pierre Ageron, cette perspective peut aussi être prise en compte dans l'écriture de l'histoire.

Le décalage entre un auteur et l'horizon d'attente de ses lecteurs contemporains est au cœur de la partie suivante. Évelyne Barbin explique que les contemporains de Descartes n'ont pas compris sa *Géométrie* de 1637 alors qu'elle semble aller de soi aujourd'hui. Lorsque que Jean Lejeune, Denis Lanier et Didier Trotoux utilisent le terme de précurseur, au dépit de l'histoire, n'est-ce pas pour écrire un grand décalage entre Gavarret et ses lecteurs ? Avec François Plantade et Jean-Pierre Le Goff, sont retracées les réceptions des œuvres de Grassmann et de Salomon de Caus. En vis-à-vis de ces articles, qui invitent à un relativisme constructif des « vérités mathématiques », Maryvonne Menez-Hallez pose la question du « mathématique ».

La dernière partie de l'ouvrage est plus orientée vers la lecture historique des textes. Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff et Didier Trotoux proposent une relecture d'une proposition d'Apollonius à partir de ses éditions et de ses traductions. Alain Bernard lit les *Arithmétiques* de Diophante comme un texte ancré dans différentes traditions antiques. Ainsi que le remarque Christophe Prochasson, « la tradition n'est pas un processus autonome de transmission », elle est au contraire un mécanisme de réappropriation du passé.

La thématique du colloque croise les questions d'enseignement et elle a vivement intéressé ceux qui dans les IREM associent l'histoire des mathématiques à son enseignement. Le riche sommaire de cet ouvrage en est le témoin.



Section II

D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

3. – Lire les Anciens aujourd'hui

Circulation Transmission Héritage

Actes du XVIII^e colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-3. – Lire les Anciens, aujourd’hui

II-3-Z. Pages 583-618

**Une relecture de la proposition 46 du livre IV
des *Coniques* d’Apollonios de Pergé, de ses
éditions et de ses traductions**

*Didier Bessot, Denis Lanier,
Jean-Pierre Le Goff & Didier Trotoux*

Une relecture de la proposition 46 du livre IV des *Coniques* d'Apollonios de Pergé, de ses éditions et de ses traductions

Didier Bessot, Denis Lanier, Jean Pierre Le Goff & Didier Trotoux,
Cercle de Lecture en Histoire des Sciences de l'IREM de Basse-Normandie,
irem@unicaen.fr

Les propositions 46 à 50 du livre IV des *Coniques* d'Apollonios de Pergé font l'objet d'éditions et de traductions fautives ou lacunaires ou de restaurations intemporalisées qui méritent qu'on s'y arrête. Le *Cercle de Lecture* de l'IREM de Basse-Normandie propose ici un aperçu de l'architecture générale du traité, en particulier de ses quatre premiers livres pour un retour sur un des nombreux écueils rencontrés dans la compréhension de cette œuvre majeure des débuts d'une mathématique "supérieure".

1. – Introduction et présentation

1-a. – Le *Cercle*

Le *Cercle de Lecture en Histoire des Sciences* de l'IREM de Basse-Normandie présente cette étude à propos d'une des ses activités fondatrices. En effet un certain nombre d'entre nous, qui représentons le "canal historique" de l'IREM et qui sont passés récemment en "vétérance" comme on disait autrefois, un certain nombre d'entre nous avons lancé en 1988 le projet d'une lecture attentive et la plus rigoureuse possible du traité des *Coniques* d'Apollonios de Pergé¹. Nous ne pensions pas à l'époque que vingt-deux ans après nous en serions au milieu du livre VII ! L'idée de départ recouvrait plusieurs préoccupations des membres du groupe. Un travail important avait été engagé autour du travail de Girard Desargues et de la naissance du projectif. En effet les références à Apollonios sont multiples, même si elles sont souvent parcellaires, dans la littérature mathématique du XVII^e siècle. D'autre part nous étions engagés dans la formation initiale et continue en histoire des mathématiques avec un vrai *leitmotiv* : il faut lire les textes. Au delà de la littérature pédagogique de l'antiquité grecque comme celle des *Éléments*

¹ Suivant l'avis éclairé de Micheline Decorps-Foulquier dans sa thèse sur le traité des *Coniques*, nous utilisons les noms latinisés pour les auteurs ayant vécu après J.-C. et nous avons rétabli la terminaison grecque pour ceux qui ont vécu avant notre ère, d'où : Apollonios de Pergé (avec un "g" dur).

d'Euclide, nous étions tentés d'aborder un texte plus difficile et plus proche d'une littérature de recherche. Avec Archimède, Apollonios, dont les préoccupations pédagogiques sont certaines par ailleurs (au moins dans la première moitié du traité), est un très bon exemple de ce genre de littérature. La dernière raison, qui a son importance dans la suite de l'histoire que nous voulons narrer aujourd'hui, est la disponibilité du texte (en tout cas les sept huitièmes...) dans une traduction française relativement accessible.

La forme de travail est à peu près la même depuis le début de nos réunions mensuelles. L'un d'entre nous lit une proposition, dessine la figure en même temps et nous suivons mot à mot, quelquefois lettre à lettre la démonstration. Sans contrainte de durée de travail (il nous est arrivé de buter plusieurs séances sur la même ligne !) nous ne passons à la suite qu'après élucidation complète à la fois du contenu mathématique (qu'il nous arrive de moderniser) et de la formulation apollonienne (très maîtrisée dans les quatre premiers livres, plus relâchée dans les suivants au moins dans la traduction disponible alors). Parfois nous recourons aux moyens modernes d'illustration, comme les logiciels de géométrie dynamique, pour étudier plus en détail une figure, envisager d'autres cas... Nous ne nous isolons pas dans l'histoire et faisons souvent des incursions dans les débats pédagogiques modernes, comme en témoigne le titre "provisoire" d'une de nos pré-publications sur Apollonios : *un exemple d'ingénierie de la didactique des référentiels curvilignes du second degré pour sujets apprenants du troisième siècle avant notre ère en réussite différée*.

La composition du groupe a varié dans le temps, nous avons été jusqu'à huit ou neuf participants, avec des collègues ayant suivi les stages de formation que nous proposons régulièrement. Pour des raisons diverses, nous sommes revenus, alors que nous approchons de la fin du traité, à l'effectif initial de quatre. Pour assurer l'intégration de nouveaux membres dans le cercle et pour garder en mémoire l'architecture de cette œuvre si structurée, nous avons rédigé des dossiers de lecture comprenant pour un livre ou une partie du texte, un résumé des principales propositions, la liste complète des énoncés, des commentaires sous forme de lecture suivie de quelques propositions majeures et représentatives. Le dossier de lecture concernant le livre III (foyers, ...) doit faire l'objet d'une publication dans un prochain numéro des *Cahiers de la Perspective*, publiés a-périodiquement par l'IREM de Basse-Normandie.

Les difficultés que nous avons pu rencontrer au cours de cette lecture sont de deux ordres. D'abord le style synthétique grec emporte le plus souvent l'adhésion du lecteur, mais il ne lui permet pas toujours de reconstituer la logique de l'architecture générale du traité au delà de la lecture mot à mot, le nez dans le texte. Il faut pour cela prendre de temps en temps du recul, ce que nous essayons de faire avec nos dossiers de lecture. En revanche cette lecture pas à pas permet un bain méthodologique et la compréhension, si ce n'est la maîtrise, de la "boîte à outils" possédée par un lecteur antique bien éduqué. Ce

sont à la fois les résultats classiques, mais aussi les situations ou figures qui devaient être immédiatement reconnues par les étudiants alexandrins. La deuxième sorte de difficultés tient à l'établissement du texte lui-même et aux limites de la traduction et des commentaires de l'édition utilisée, à savoir celle de Paul Ver Eecke [Ap-VE]². Ces difficultés qui ne permettent pas, par exemple, de savoir si une obscurité, voire une incohérence dans le texte vient de l'auteur lui-même, de la traduction utilisée voire d'interpolations dont Apollonios n'est évidemment pas responsable. Ces difficultés augmentent plus on avance dans le traité (surtout dans la deuxième partie, les livres "arabes") mais nous allons en présenter un exemple ici dans le livre IV qui fait partie des livres "grecs" censés être mieux établis du fait de leur antériorité. Cela nous a conduit à une enquête sur le texte et à la nécessité de multiplier les sources. Une autre question est celle de la traduction des énoncés d'Apollonios en langage mathématique moderne. Comment résumer sans trahir ? Comment simplifier pour mieux comprendre tout en conjuguant fidélité et respect du texte ? Comment devant une construction logique aussi travaillée ne pas chercher une synthèse sous-jacente ? Mais ne risque-t-on pas alors de surestimer la globalisation des propos d'Apollonios ? Un exemple simple de ce dilemme apparaît avec la dénomination des hyperboles (*cf. infra*). Enfin, une de nos motivations pour engager ce travail étant la recherche des prémices de la géométrie projective, comment mettre en évidence ces jalons sans accentuer notre vision rétrospective ?

Pour Apollonios une hyperbole se définit comme une courbe "continue", n'ayant qu'une seule branche. Il nomme l'autre branche de notre hyperbole "moderne", l'*hyperbole opposée*. Nombre des propriétés énoncées dans le traité sur l'*hyperbole apollonienne* sont valables sur la conique entière (au sens "moderne"). De fait, Apollonios considère séparément le cas des hyperboles opposées. Ce qui nous a maintes fois incité à dire qu'il avait parfaitement compris que les deux branches formaient une seule courbe, du moins en termes de propriétés, d'autant plus que pour Apollonios le cône découpé a effectivement deux nappes, la seconde étant engendrée par la demi-droite prolongeant celle qui engendre la nappe primitivement envisagée pour définir le solide conique ! Mais le cadre logique de la géométrie grecque et la définition antique de la nature d'une courbe obligent à étudier les différents cas successivement. Dans la suite, et sauf mention du contraire par une périphrase, nous utiliserons le vocabulaire d'Apollonios pour nommer l'hyperbole : "hyperbole" pour une branche de notre hyperbole "moderne", "hyperbole opposée" pour la branche opposée à l'hyperbole envisagée, et "hyperboles conjuguées" pour les deux branches de l'hyperbole "moderne" conjuguée de

² Dans la suite, les références entre crochets, composées d'initiales d'auteur, d'année et parfois de pagination, renvoient à la bibliographie en fin d'article.

l'hyperbole "moderne" primitive envisagée par Apollonios avec ses "hyperboles opposées".

Avant d'étudier en détail une proposition de ce livre IV, nous allons tenter de résumer brièvement la vie, l'œuvre complète et dans le traité des *Coniques* le contenu des quatre premiers livres. Vaste programme !

1-b. – Apollonios : vie et œuvre

On sait fort peu de choses sur la vie d'Apollonios de Pergé. Il est né vers 240 av. J.-C. dans la ville de Pergé, importante cité maritime de la Pamphylie sur la côte méridionale de l'Asie mineure. Il aurait étudié les mathématiques à Alexandrie sous la férule de disciples d'Euclide. Il acquiert ensuite une très grande renommée dans le monde hellénistique comme géomètre et astronome. C'est à Alexandrie qu'il rédige le traité des *Coniques*. Il enseigne à Alexandrie et à Pergame. Il meurt à Alexandrie vers 170 av. J.-C. Il était en relation avec tous les grands savants de l'époque et les quelques bribes biographiques ne sont que des rumeurs, par exemple sur le mauvais caractère d'Apollonios, rapportées par des commentateurs ultérieurs. Nous ignorerons donc ces clapotis immondes et rappellerons simplement qu'avec Euclide et Archimède Apollonios est le géomètre le plus célèbre et le plus actif de la période hellénistique.

Outre le traité des *Coniques*, qui est le seul qui nous soit parvenu (et encore, partiellement en grec), Apollonios a été particulièrement prolifique. D'après les témoignages des contemporains et disciples, repris par Pappus d'Alexandrie, il a publié un grand nombre de traités. Certains portaient sur les problèmes de découpage de segments sous certaines conditions : *Des sections proportionnelles*, *Des sections suivant une aire*, *Les deux livres des sections déterminées*. Un traité était consacré aux problèmes de contact avec le célèbre problème du cercle tangent à trois cercles donnés. Un autre était consacré aux *Lieux Plans*, propositions concernant la droite et le cercle. Le traité *Des inclinaisons* portait sur des problèmes de sécantes à des droites ou cercles. Apollonios aurait aussi écrit des traités sur la vis, sur l'inscription du dodécaèdre et de l'icosaèdre dans une même sphère, ou encore sur les quantités irrationnelles. Mais l'activité d'Apollonios ne se limitait pas à la géométrie. Il avait aussi écrit en arithmétique, en astronomie et en optique. Malheureusement, en dehors des *Coniques* et des *Sections proportionnelles*, ces traités ne sont que connus que de façon fragmentaire ou par des citations tronquées dans des commentaires et ont donc donné lieu au cours des siècles à des tentatives de reconstitution ou de « *divination* », travail mathématique qui eut son heure de gloire en particulier au XVII^e siècle.

1-c. – Les *Coniques*

On parlera plus loin des différentes éditions et traductions des *Coniques*. Rappelons simplement que le Traité comportait initialement huit livres. Les quatre premiers constituaient pour Apollonios lui-même les éléments de la

question. Les suivants exposaient des résultats plus originaux. L'ensemble des quatre premiers livres est connu grâce à des copies grecques rapportées d'Orient au XV^e siècle et dont les premières éditions imprimées datent du XVI^e siècle. Ces manuscrits proviennent principalement de l'édition et du commentaire d'Eutocius d'Ascalon à la fin du V^e siècle ou au début du VI^e siècle. Les trois livres suivants ne sont connus qu'à partir de manuscrits arabes qui ne sont apparus qu'au XVII^e siècle. L'astronome anglais Edmund Halley a publié en 1701 une édition complète en latin des sept livres [Ap-Ha]. La première traduction en une langue autre que le latin des sept livres a été publiée en 1923 par le belge Paul Ver Eecke. Les quatre premiers livres ont été traduits en français à partir de l'édition critique du texte grec par Heiberg [Ap-Hei] et les trois suivants à partir de la traduction latine faite de l'arabe par Halley. Comme c'était la seule traduction disponible au moment où nous engagions notre travail, c'est cette édition (republiée chez A. Blanchard en 1959, puis 1963) que nous avons principalement utilisée.

Les courbes coniques (obtenues comme section d'un cône par un plan) étaient connues avant Apollonios. Une légende attribuée à Ménechme, disciple d'Eudoxe, la découverte des coniques pour résoudre des problèmes d'insertion de moyennes proportionnelles. Il est sûr que, à l'époque d'Archimède et d'Apollonios, les propriétés des coniques avaient été largement étudiées et enseignées. L'objet du traité d'Apollonios est de rassembler, dans un premier temps, ces connaissances en les réorganisant de manière plus synthétique, puis d'y ajouter les résultats de ses propres recherches. La première partie du traité (livres I à IV) est consacrée à cette mise en forme des connaissances "élémentaires" sur les coniques.

La première innovation d'Apollonios concerne la définition même des coniques. Jusqu'à lui, on considérait l'intersection d'un cône droit avec un plan perpendiculaire à une génératrice. Les différentes formes de courbes obtenues dépendaient de l'ouverture du cône, précisément de son angle au sommet : ce que nous appelons hyperbole pour un angle obtus, ellipse pour un angle aigu et parabole pour un angle droit. Les noms utilisés avant Apollonios font référence à ces trois cas d'angle. Apollonios considère, comme aujourd'hui, un cône donné que l'on coupe avec un plan variable. Le cône est toujours à base circulaire mais il n'est pas forcément droit au sens que son sommet n'est pas nécessairement situé à la verticale du centre du cercle, et de surcroît, ce cône est "double" avec ses deux nappes. Ceci permet une définition plus générale des courbes et de leurs éléments.

Le livre I commence par l'étude de ces différentes intersections et donne assez vite (propositions 11, 12 et 13) les propriétés caractéristiques des trois types de sections coniques en termes d'égalité d'aires. Certains appellent encore ces propriétés "équations", nous préférons "symptômes". Ces symptômes sont donnés dans ce que nous appellerions aujourd'hui un repère défini par un

diamètre (axe d'une symétrie oblique de la conique) et la direction des « ordonnées » (direction de cette même symétrie oblique, qui divise toutes ces "ordonnées" en deux segments égaux, ce que signifie, étymologiquement le mot "diamètre"). Le cas des "axes" (au sens qu'ils ont dans la théorie des coniques et non dans celle des repères cartésiens, non nécessairement orthonormés) n'est alors qu'un cas particulier où le diamètre est perpendiculaire aux ordonnées. Les symptômes sont décrits pour les trois coniques comme comparaison du carré construit sur l'ordonnée d'un point quelconque de la conique avec le rectangle dont un côté est le segment déterminé sur le diamètre entre le sommet et le pied de l'ordonnée (ce que nous appelons "l'abscisse" aujourd'hui) et l'autre le "côté droit", paramètre constant. Il s'agit sans doute d'une généralisation de la propriété bien connue du cercle ou plus exactement du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle : le carré de la hauteur est égal au produit des segments délimités sur la base par la hauteur. Dans le cas où il y a égalité entre les deux aires évoquées plus haut, on a affaire à une parabole. Dans le cas où il faut ajouter une aire d'un rectangle semblable à une figure constante, il s'agit d'une hyperbole (parabole "par excès"). Enfin le cas où il faut retirer une aire concerne une ellipse (parabole "par défaut"). Les noms apolloniens des coniques sont donc liés à ces symptômes caractéristiques. On comprendra qu'après la proposition 14, l'étude des courbes ne fait plus référence au cône ou à la géométrie dans l'espace. Apollonios donne ensuite des propriétés de base des coniques comme la propriété classique sur le pied de la tangente en un point sur le diamètre (propositions 33 à 37). On pourrait résumer cette propriété en disant que le pied de la tangente est le conjugué harmonique du pied de l'ordonnée par rapport aux deux sommets. Mais ce serait être par trop anachronique. Le livre I se termine par des problèmes de construction qui reviennent à construire effectivement une conique dont on connaît le symptôme.

Le livre II s'intéresse d'une part aux propriétés des asymptotes des hyperboles et d'autre part aux constructions des diamètres, axes, centres et tangentes à des coniques données. Les asymptotes sont définies comme passant par le centre et par des points situés sur la tangente à un sommet à une distance déterminée. Apollonios démontre d'abord que les asymptotes vérifient leur propriété étymologique, c'est à dire qu'elles ne rencontrent pas l'hyperbole et qu'aucune droite n'est plus près de l'hyperbole (en termes projectifs, ce sont les tangentes aux points à l'infini de l'hyperbole). Apollonios décrit ensuite un grand nombre de propriétés métriques liées aux asymptotes ; par exemple la proposition 23 donne la constance du produit des distances sur une ordonnée entre un point de l'hyperbole et les deux asymptotes. Apollonios démontre aussi que les asymptotes d'une hyperbole sont les mêmes que celles de l'hyperbole opposée et de l'hyperbole conjuguée. La deuxième partie du livre II

est consacrée aux diamètres et à leur construction à partir de sécantes ou de tangentes.

Le livre III rassemble un certain nombre de propriétés des coniques liées d'une part au changement de repère et d'autre part à des propriétés caractéristiques autres que les symptômes du livre I. On parlera plus loin des "puissances directionnelles" d'un point par rapport à une conique, généralisation des propriétés de la puissance d'un point par rapport à un cercle. On y trouve aussi des propriétés qu'on aurait tendance à moderniser sous le titre pôle-polaire avec la propriété principale que la conique, le pôle et la polaire définissent une division harmonique sur toute sécante à la conique passant par le pôle. Une autre partie concerne une étude des tangentes et de leurs intersections entre elles. Apollonios définit et étudie ensuite les points que nous nommons foyers et leurs propriétés usuelles. Enfin ce livre III qui est une sorte de catalogue de propriétés usuelles se termine par ce que nous appelons la génération ponctuelle et/ou tangentielle des coniques. Il s'agit de la construction point par point de coniques définies par cinq éléments, deux points, les tangentes en ces points et un autre point ou le centre. Ces propositions préfigurent donc les grands théorèmes des géomètres du XVII^e siècle, Desargues, Pascal, La Hire, Newton, Lepoivre.

Le livre IV comporte deux parties bien distinctes. Les vingt trois premières propositions peuvent être considérées comme des réciproques de propositions du livre III. Elles autorisent la construction de tangentes aux coniques sous diverses conditions. Les autres propositions du livre sont consacrées à l'étude du nombre de points d'intersection entre deux coniques, ou une conique et un cercle. On montre qu'il y a au plus quatre points d'intersection. La proposition 44 étudie le cas de deux hyperboles sécantes en quatre points. La conclusion est que les sections opposées n'ont alors pas de point commun. La proposition 46, qui va nous occuper dans cet article, est consacrée à la situation où deux hyperboles ainsi que leurs opposées se coupent respectivement en deux points (ou, en termes d'aujourd'hui, deux hyperboles se coupent en quatre points, à raison de deux par branche).

2. – Le style apollonien

Avant d'aborder directement cette proposition, il est utile d'évoquer la forme du traité. Les *Coniques* appartiennent à la tradition de la géométrie grecque classique dont les *Éléments* d'Euclide constituent un exemple emblématique. L'ouvrage se présente comme une suite de propositions validant des résultats énoncés. Ces propositions qui sont pour la plupart des théorèmes démontrant une propriété, se succèdent dans un ordre qu'exige la logique démonstrative. Les résultats obtenus sont réutilisés sans qu'il soit fait référence aux propositions utilisées pour leur démonstration et il est

implicitement acquis qu'on peut utiliser tous les résultats des *Éléments* d'Euclide.

Chaque proposition suit un “déroulement” bien précis à savoir :

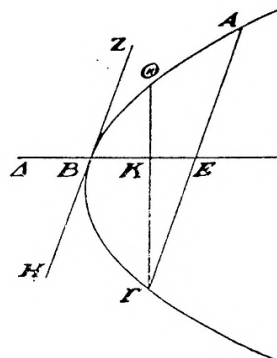
- l'énoncé,
- l'exposition qui permet de nommer les données présentées sous forme générale dans l'énoncé,
- la construction,
- la démonstration,
- la conclusion qui permet de constater que la propriété énoncée est bien démontrée.

La proposition est accompagnée d'une figure, correspondant à l'état final de la construction, qui permet de suivre la démonstration. Cette figure peut être élaborée progressivement en suivant l'exposition puis la démonstration. Notons que lorsqu'une proposition concerne plusieurs types de coniques et qu'une même démonstration convient pour ces différents types, une seule figure, correspondant à l'un des cas, est faite.

Une lecture détaillée des propositions 5 et 36 du livre II des *Coniques* va permettre d'illustrer notre propos.

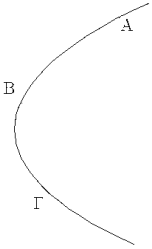
Proposition II-5 [Ap-VE, 122-123] :

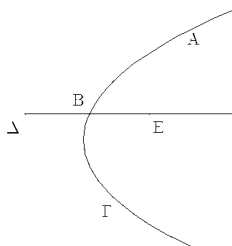
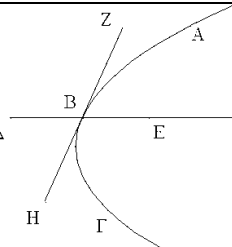
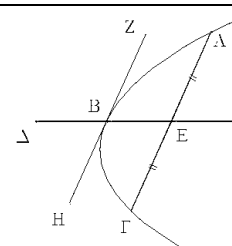
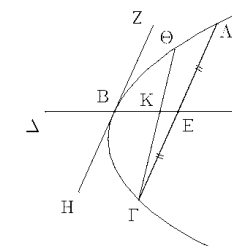
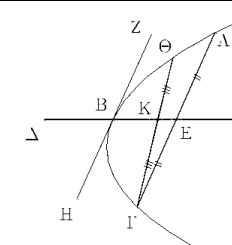
Lorsqu'un diamètre d'une parabole ou d'une hyperbole coupe une droite en deux parties égales, la droite qui touche la section à l'extrémité de ce diamètre sera parallèle à la droite coupée en deux parties égales.



La notion de diamètre d'une conique a été définie au début du livre I : il s'agit d'une droite qui coupe en deux parties égales toutes les lignes droites menées dans cette conique parallèlement à une certaine droite donnée.

Déroulons, pas à pas, l'exposition de cette proposition :

Exposition	Constructions	Commentaires
Soit ABΓ une parabole ou une hyperbole		Nous pouvons remarquer que les points A, B et Γ de la conique ne sont pas encore définis.

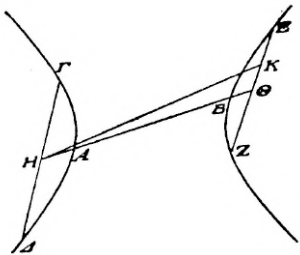
dont le diamètre est la droite ΔBE .		Le point B est défini comme intersection de la conique et du diamètre.
Que la droite ZBH soit tangente à la section,		ZBH est la tangente à la conique au point B.
et menons une droite AEF dans la section, de telle sorte que la droite AE soit égale à la droite EF.		Les points A et Γ de la conique sont enfin définis comme extrémités d'une corde dont le milieu E appartient au diamètre ΔE .
Je dis que la droite $A\Gamma$ est parallèle à la droite ZH.	La conclusion de la proposition est énoncée. Ensuite, vient la démonstration :	
En effet, s'il n'en est pas ainsi, menons, par le point Γ , la droite $\Gamma\Theta$ parallèle à la droite ZH, et menons la droite de jonction ΘA .		Début d'une démonstration par l'absurde.
Dès lors, puisque $AB\Gamma$ est une parabole ou une hyperbole, dont un diamètre est la droite ΔE , et dont la tangente est la droite ZH, à laquelle la droite $\Gamma\Theta$ est parallèle, la droite ΓK est égale à la droite $K\Theta$.		D'après la proposition I-46 pour la parabole et la proposition I-47 pour l'hyperbole.

Or, la droite ΓE est aussi égale à la droite EA ; par conséquent, la droite $A\Theta$ est parallèle à la droite KE ; ce qui est absurde, car la droite $A\Theta$ prolongée rencontrera la droite BA .	Conséquence de la proposition VI-2 des <i>Éléments</i> d'Euclide. D'après la proposition I-22.
---	---

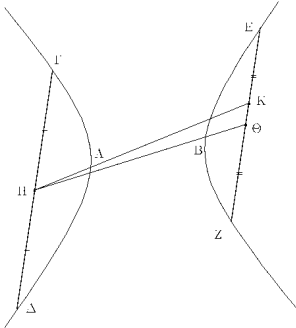
Pour cette proposition, la conclusion n'est pas reprise à la fin de la démonstration.

Poursuivons par la lecture de la proposition 36 du livre II [Ap-VE, 151].

Lorsque des droites sont menées parallèlement dans chacune des sections opposées, la droite reliant leurs points de division en deux parties égales sera un diamètre de ces sections opposées.



Exposition	Constructions	Commentaires
Soient A, B des sections opposées.		Pour Apollonios les hyperboles opposées sont deux courbes distinctes.
Menons, dans chacune d'elles, des droites $\Gamma\Delta$, EZ qui soient parallèles ;		$\Gamma\Delta$ et EZ sont des cordes de chacune des hyperboles opposées, qui sont parallèles.
coupons chacune de ces droites en deux parties égales aux points H, Θ , et menons la droite de jonction $H\Theta$.		Les cordes $\Gamma\Delta$ et EZ sont coupées en leur milieux respectifs H et Θ .

Je dis que la droite $H\Theta$ est un diamètre des sections opposées.	Énoncé de la conclusion de la proposition. Démonstration de cette proposition :
En effet, s'il n'en est pas ainsi, qu'une droite HK soit un diamètre.	 Début de la seconde démonstration par l'absurde. On ne sait pas (sans figure) où est situé le point K.
Dès lors, la tangente au point A est parallèle à la droite $\Gamma\Delta$; en sorte qu'elle est aussi à la droite EZ .	A devient un point, le point d'intersection de la branche $\Gamma\Delta\Delta$ et du diamètre HK . Le résultat est une conséquence de la proposition II-5 étudiée ci-dessus.
Donc la droite EK est égale à la droite KZ ;	D'après la proposition I-30, K désignant le milieu de la droite EZ .
ce qui est impossible, puisque la droite $E\Theta$ est aussi égale à la droite ΘZ .	En effet, K a été supposé distinct de Θ , puisque la droite HK a été supposée distincte de $H\Theta$.
Par conséquent, la droite HK n'est pas un diamètre des sections ; donc la droite $H\Theta$ est un diamètre.	La conclusion de la proposition est énoncée.

Comme dans la proposition précédente, la démonstration a été faite par l'absurde mais elle se termine dans ce cas par l'énoncé de la conclusion qui permet de constater que la propriété de l'énoncé a bien été démontrée.

3. – Quelques prolégomènes à la lecture de la proposition 46 du livre IV des *Coniques*

Comme on va le voir, la lecture de la proposition 46 du livre IV des *Coniques* d'Apollonios de Pergé comporte, telle qu'elle nous est parvenue, *a minima* des lacunes et une figure erronée, voire des fautes de raisonnements, qui posent plusieurs questions au lecteur et/ou à l'historien. Elle n'est pas la seule ni dans

le livre IV, ni dans les autres livres : pour ne prendre comme exemple que les propositions 49 et 50 qui suivent dans le livre IV, elles présentent une méthode apparentée à celle de la 46 avec la même erreur initiale ; la proposition 46 s'avère donc en être la première occurrence. C'est ce point précis et récurrent de la démarche qui fait problème dans la mesure où elle paraît incompatible avec ce qu'une lecture des trois premiers livres laisse augurer des qualités de géomètre de l'auteur ; dans la mesure aussi où elle n'a été que fort peu relevée par les commentateurs (*cf. infra*) et corrigée moins encore par des éditeurs soucieux de rendre justice à Apollonios, fût-ce parfois en forçant le texte, par exemple en proposant ce que Viviani et d'autres auteurs, appelèrent une « *divination* » pour combler les lacunes, d'un texte ancien, voire son absence totale quoiqu'attestée. C'est ce que nous tenterons de proposer, sans faire de ces "corrections" autre chose que des *errata* susceptibles d'avoir été pensés par Apollonios.

Pour comprendre la lecture commentée de IV-46, qui suivra, il convient de donner l'énoncé et la démonstration commentés de la proposition 19 du livre III [AP-VE, 215-216], indispensable pour la compréhension de ce qui va suivre ; on y voit émerger une notion essentielle utilisée par l'auteur dans la suite du livre III et dans le livre IV, que nous avons qualifiée de "puissance directionnelle" ; nous avons choisi cette dénomination pour la dite notion, pour indiquer que celle-ci généralise la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle (selon la terminologie moderne), connue depuis Euclide : ce dernier la définit en terme de constance de l'aire d'un rectangle produit par deux segments d'une sécante à un cercle donné, variant autour d'un point fixe, dans le livre III de ses *Éléments*.

Une lecture de la proposition 19 du livre III des *Coniques*.

Cette proposition traite du cas de l'hyperbole (en termes apolloniens : « *des hyperboles opposées* ». Apollonios y démontre un résultat du type "puissance directionnelle").

Si deux droites tangentes à des sections opposées se rencontrent, et si l'on mène des droites qui, parallèles aux tangentes, se coupent mutuellement et coupent la section, le rectangle délimité sous les droites situées entre la section et le point de rencontre des droites [*i. e.* les droites parallèles aux tangentes] sera au rectangle délimité sous les droites prises de la même manière comme sont entre eux les carrés des tangentes.

Soient des sections opposées dont les droites AF , BA sont des diamètres, et dont le point E est le centre. Soient AZ , ZA des tangentes qui se rencontrent au point Z , et menons, de points quelconques, les droites $HΘIKΛ$, $MNΞOA$ parallèles aux droites AZ , ZA . Je dis que le rectangle délimité sous les droites HA , AI est au rectangle délimité sous les droites MA , $ΛΞ$ comme le carré de la droite AZ est au carré de la droite ZA .

[...]

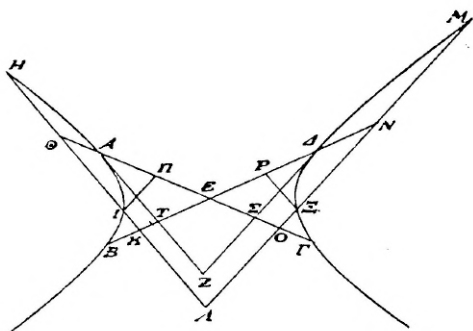


Figure issue de [Ap-VE]

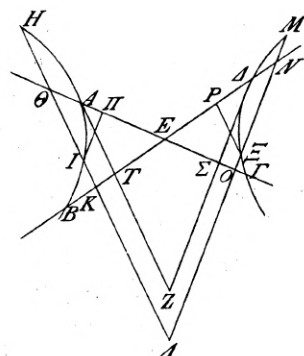


Figure issue de [Ap-Hei]

Autrement dit : les rectangles construits sur deux sécantes $H\Theta I\kappa\Lambda$, $MN\Xi O\Lambda$, ordonnées ou encore parallèles aux deux tangentes issues de Z , c'est-à-dire les rectangles "produits" $HA \times AI$ et $MA \times AE$, sont dans le même rapport que les rectangles particuliers construits sur ZA et $Z\Lambda$, à savoir des carrés, $AZ \times ZA$ (ou AZ^2) et $\Delta Z \times Z\Delta$ (ou ΔZ^2), lorsque les sécantes issues de Λ "deviennent" des tangentes issues de Z , et que les intersections H et I (resp. M et Ξ) se confondent en A (resp. Δ) : ce qui donne la relation notée [E] :

$$\frac{HA \times AI}{MA \times AE}, \text{ i. e. } \frac{\text{Aire (Rect. } HA \times AI)}{\text{Aire (Rect. } MA \times AE)} = \frac{AZ^2}{Z\Delta^2}.$$

Autrement dit encore, la démonstration va montrer la permanence du rapport $\frac{HA \times AI}{MA \times AE}$ lorsque les faisceaux conjugués de sécantes "varient" avec leur origine Λ , en prenant deux faisceaux particuliers, dont les points de concours sont Ξ et I , puis en appliquant la méthode des comparaisons, additions, soustractions et substitutions d'aires rectilignes – une sorte de jeu de *tangram* sur divers triangles, rectangles, carrés et quadrilatères quelconques – dans des configurations du genre "quadrilatère complet", ici : $\Theta\kappa\Lambda ONE\kappa$ et $EATZ\S\Delta E$, traversées par les transversales III et ΣP , parallèles à $Z\Delta$ et ZA (resp.). Voici cette démonstration (colonne de gauche), qui fait appel à deux propositions (4 et 7) démontrées au début du livre III, et dont les arguments successifs sont explicités (à droite), sous une forme "algébrisée" du point de vue des notations aujourd'hui familières des rapports et des proportions :

Menons, par les points Ξ , I , les droites III , ΣP parallèles aux droites AZ , $Z\Delta$. Dès lors, puisque le carré	Les carrés construits sur $\Theta\Lambda$ et ΘI sont dans un rapport d'aire égal à celui des aires des triangles $\Theta\Lambda O$ et $\Theta I\Pi$, du fait que ces deux triangles sont semblables (dans une homothétie de centre Θ et de rapport $\Theta\Lambda/\Theta I$) puisqu'inclus dans une configuration "de Thalès" $\Theta I\Lambda O\Pi$ où les parallèles (III) et (ΛO) coupent les sécantes ($\Theta\Lambda$) et
--	--

de la droite $\Theta\Lambda$ est au triangle $\Theta\Lambda O$, et le carré de la droite ΘI au triangle $\Theta I \Pi$,	$(\Theta O) ; \text{ donc : } \frac{\text{Aire (Tri. } \Theta\Lambda O)}{\text{Aire (Tri. } \Theta I \Pi)} = \frac{\Theta\Lambda^2}{\Theta I^2} ;$ $\text{d'où : } \frac{\text{Aire (Tri. } \Theta\Lambda O)}{\Theta\Lambda^2} = \frac{\text{Aire (Tri. } \Theta I \Pi)}{\Theta I^2} [1] ;$
comme le carré de la droite AZ est au triangle $AZ\Sigma$,	mais on a la même similitude entre les triangles susdits et le triangle $AZ\Sigma$: donc ce dernier est au carré de AZ comme les deux autres aux carrés de leurs côtés homologues à AZ : $\frac{\text{Aire (Tri. } \Theta\Lambda O)}{\Theta\Lambda^2} = \frac{\text{Aire (Tri. } \Theta I \Pi)}{\Theta I^2} = \frac{\text{Aire (Tri. } AZ\Sigma)}{AZ^2} [2] ;$
le rectangle restant, délimité sous les droites $H\Lambda$, ΛI , est donc au quadrilatère restant $\Pi\Theta\Lambda$ comme le carré de la droite AZ est au triangle $AZ\Sigma$.	Le « <i>rectangle restant</i> » $H\Lambda \times \Lambda I$ résulte, Θ étant le milieu de HI, de la différence $\Theta\Lambda^2 - \Theta I^2 = (\Theta\Lambda + \Theta I) \times (\Theta\Lambda - \Theta I) = H\Lambda \times \Lambda I$; le « <i>quadrilatère restant</i> » $\Pi\Theta\Lambda$, résulte de la différence entre les triangles semblables $\Theta\Lambda O$ et $\Theta I \Pi$; l'égalité [1] des deux premiers rapports donne alors, par égalité du rapport des différences : $\frac{\text{Aire (Tri. } \Theta\Lambda O)}{\Theta\Lambda^2} = \frac{\text{Aire (Tri. } \Theta I \Pi)}{\Theta I^2}$ $= \frac{\text{Aire (Tri. } \Theta\Lambda O) - \text{Aire (Tri. } \Theta I \Pi)}{\Theta\Lambda^2 - \Theta I^2} = \frac{\text{Aire (Quadr. } \Pi\Theta\Lambda)}{\text{Aire (Rect. } H\Lambda \times \Lambda I)}$ et d'après [2] : $\left[\frac{\text{Aire (Tri. } \Theta\Lambda O)}{\Theta\Lambda^2} = \frac{\text{Aire (Tri. } \Theta I \Pi)}{\Theta I^2} \right] [3] ;$ $= \frac{\text{Aire (Tri. } AZ\Sigma)}{AZ^2} = \frac{\text{Aire (Quadr. } \Pi\Theta\Lambda)}{\text{Aire (Rect. } H\Lambda \times \Lambda I)}$
Or, le triangle $AZ\Sigma$ équivaut au triangle ΔZT , et le quadrilatère $\Pi\Theta\Lambda I$ équivaut au quadrilatère $KP\Xi\Lambda$;	or, $\text{Aire (Tri. } AZ\Sigma) = \text{Aire (Tri. } \Delta ZT)$ [4], dans le quadrilatère complet $EATZ\Sigma\Delta E$, du fait de la proposition 4 du livre III ; et, $\text{Aire (Quadr. } \Pi\Theta\Lambda I) = \text{Aire (Quadr. } KP\Xi\Lambda)$ [4], du fait de la proposition 7 du livre III ;
donc, le rectangle délimité sous les droites $H\Lambda$, ΛI est aussi au quadrilatère	d'après [3], on a : $\frac{\text{Aire (Rect. } H\Lambda \times \Lambda I)}{\text{Aire (Quadr. } \Pi\Theta\Lambda)} = \frac{AZ^2}{\text{Aire (Tri. } AZ\Sigma)} [5] ;$

$P\Xi\Lambda K$ comme le carré de la droite AZ est au triangle ΔTZ.	donc, en substituant les termes des égalités [4] : $\frac{\text{Aire} \left(\text{Rect. } H\Lambda \times \Lambda I \right)}{\text{Aire} \left(\text{Quadr. } P\Xi\Lambda K \right)} = \frac{AZ^2}{\text{Aire} \left(\text{Tri. } \Delta TZ \right)} ;$
Or, le quadrilatère $P\Xi\Lambda K$ est au rectangle délimité sous les droites $M\Lambda$, $\Lambda\Xi$ comme le triangle ΔTZ est au carré de la droite $Z\Lambda$;	d'après le même raisonnement que ci-dessus appliqué dans la configuration "de Thalès" $N\Xi\Lambda KP$, on aura : $\frac{\text{Aire} \left(\text{Quadr. } P\Xi\Lambda K \right)}{\text{Aire} \left(\text{Rect. } M\Lambda \times \Lambda\Xi \right)} = \frac{\text{Aire} \left(\text{Tri. } \Delta TZ \right)}{Z\Lambda^2} \text{ [6] ;}$
donc, par raison d'identité, le rectangle délimité sous les droites $H\Lambda$, ΛI est au rectangle délimité sous les droites $M\Lambda$, $\Lambda\Xi$ comme le carré de la droite AZ est au carré de la droite $Z\Lambda$.	par « raison d'identité », <i>i. e.</i> si $a/b = a'/b'$ et si $b/c = b'/c'$, alors $a/c = a'/c'$ (ou en termes modernes, en faisant les rapports des termes des égalités [5] et [6] et en simplifiant), on obtient la conclusion de la proposition : $\frac{\text{Aire} \left(\text{Rect. } H\Lambda \times \Lambda I \right)}{\text{Aire} \left(\text{Rect. } M\Lambda \times \Lambda\Xi \right)} = \frac{AZ^2}{Z\Lambda^2} ;$ ce qui est bien la relation [E] proposée.

4. – La proposition 46 du livre IV des *Coniques*

La proposition 46 du livre IV des *Coniques* d'Apollonios de Pergé, telle qu'elle figure dans les diverses éditions consultées fait problème ; elle comporte deux cas, selon qu'une droite joignant deux points est parallèle ou non à une certaine droite donnée.

Pour juger de la difficulté ici soulevée, convoquons d'abord le texte, dans la traduction de Paul Ver Eecke [Ap-VE, 315-317] ; signalons néanmoins que, si cette traduction nous semble conforme au texte grec, connu, rappelons-le, par plusieurs copies dont une d'Eutocius, qui fonde essentiellement l'établissement du texte grec par Heiberg, et conforme aussi à la traduction latine qu'en donne le même Heiberg, le problème de la restitution des figures reste posé [D-F] : nous les reproduisons ici telles qu'elles apparaissent dans les éditions de Ver Eecke et de Heiberg ; elles ne semblent pas en contradiction entre elles, ni avec le texte, au sens où elles ne sont pas incompatibles avec son contenu, tel qu'il fut transmis par Eutocius et restitué par Heiberg, et sans préjuger du fait qu'une version plus ancienne pourrait être inductrice de l'erreur que nous releverons (la copie de figures par un non-spécialiste est sans doute plus

problématique que celle d'un texte); nous en donnons aussi une version modernisée pour en faciliter la lecture.

Lorsqu'une hyperbole rencontre l'une de sections opposées en trois points, sa propre section opposée ne rencontrera pas l'autre section opposée en plus d'un point.

Soient les sections opposées $AB\Gamma$, ΔEZ ; qu'une hyperbole $AMB\Gamma$ rencontre la section $AB\Gamma$ aux trois points A , B , Γ , et soit ΔEK la section opposée de la section $AM\Gamma$. Je dis que la section ΔEK ne rencontre pas la section ΔEZ en plus d'un point.

En effet, qu'elle la rencontre, si possible, aux points Δ , E , et menons les droites de jonction AB , ΔE . Ces droites sont parallèles ou ne le sont pas. [...]

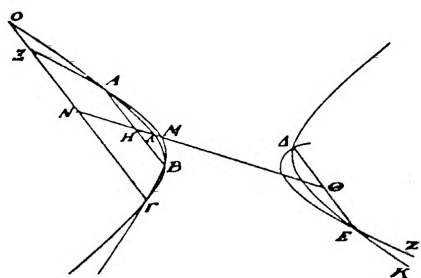


Figure issue de [Ap-VE]

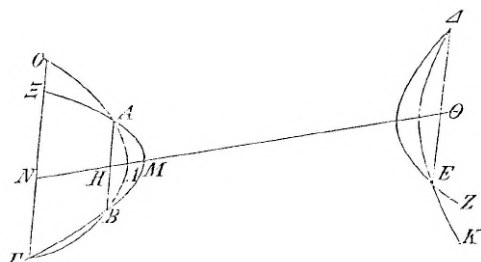


Figure issue de [Ap-Hei]

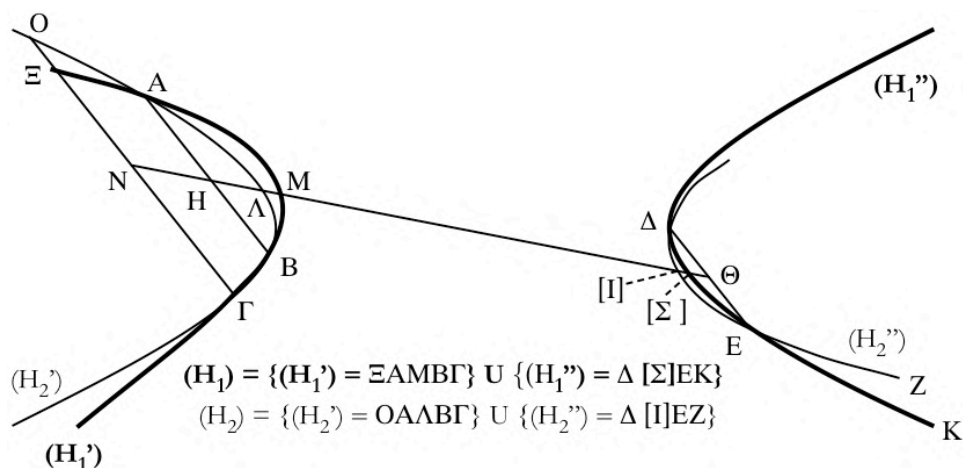
Qu'elles soient d'abord parallèles. Divisons les droites, AB , ΔE en deux parties égales aux points H , Θ , et menons la droite de jonction $H\Theta$. Cette droite est donc un diamètre de toutes les sections, et les droites AB , ΔE lui sont menées de manière ordonnée. Menons maintenant, du point Γ , la droite $\Gamma N\Xi O$ parallèle à la droite AB ; cette droite sera donc menée de manière ordonnée sur le diamètre, et elle rencontrera les sections en un autre, puis en un autre point; car, si elle les rencontrait en un même point, ces sections ne se rencontreraient plus en trois, mais en quatre points.

Dès lors, la droite ΓN sera égale à la droite $N\Xi$ dans la section AMB , tandis que la droite ΓN sera égale à la droite NO dans la section AAB . En conséquence, la droite ON sera aussi égale à la droite $N\Xi$; ce qui est impossible. [...]

En substance, cette proposition se propose de démontrer que, lorsqu'une hyperbole $(\Xi)A(M)B\Gamma$ [ou (H_1')] rencontre en trois points, A , B , Γ , l'une, $(O)A(A)B\Gamma$ [ou (H_2')], ou l'autre, ΔEZ [ou (H_2'')] de deux hyperboles opposées, alors son opposée, ΔEK [ou (H_1'')], ne rencontrera l'autre hyperbole opposée, (H_2'') ou (H_2') (resp.), qu'en un point, au plus. L'auteur se place dans le cas de trois points de rencontre entre (H_1') et (H_2') . L'hypothèse contraire à la conclusion, permettant de réduire la chose à l'absurde, consiste à supposer que (H_1'') et (H_2'') se rencontrent en plus d'un point: l'hypothèse de deux points de

rencontre en plus des trois autres suffit en effet à falsifier l'énoncé, en l'occurrence ici : Δ et E . Deux cas se présentent : soit (AB) est parallèle à (ΔE) , soit elles sont concourantes (en Π).

Dans le premier cas, le plus simple, Apollonios considère les deux lignes AB et ΔE comme des ordonnées au diamètre commun aux deux hyperboles opposées (H_1'') et (H_2''), puisque les quatre points A, B, Δ, E, appartiennent à l'une de deux hyperboles opposées, les deux premiers à (H_2'') et les deux suivants à (H_2'') ; cette propriété du diamètre commun à deux hyperboles opposées, pour une même direction d'ordonnées parallèles a été démontrée au livre II, proposition 33. Le diamètre en question est d'ailleurs tout simplement la droite qui joint les milieux des deux lignes ordonnées, H, milieu de [AB], et Θ, milieu de [ΔE]. Par conséquent, il est clair alors :



1°) qu'une parallèle à (AB) passant par Γ sera ordonnée au même diamètre, commun à (H_1') et (H_2'') ;

2°) que ce diamètre est aussi le diamètre commun à (H_1') et (H_1'') , et que les lignes AB et ΔE lui sont ordonnées dans ce couple d'hyperboles opposées comme dans le premier ; la parallèle à (AB) passant par Γ ne peut donc couper les hyperboles (H_2'') et (H_1'') qu'en un seul et même point, symétrique de Γ par rapport au point d'intersection de cette parallèle avec le diamètre commun aux quatre hyperboles ; il apparaît alors un quatrième point d'intersection entre (H_2') et (H_1') , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse ; c. q. f. d. pour le cas parallèle.

Apollonios aborde ensuite le second cas, celui où les droites (AB) et (ΔE) sont concourantes en Π .

Que les droites $AB, \Delta E$ ne soient pas parallèles, mais que, prolongées, elles se rencontrent au point Π .

Menons la droite ΓO parallèle à la droite $\Delta \Pi$, et que son prolongement rencontre la droite $\Delta \Pi$ au point P. Coupons les droites $AB, \Delta E$ en deux parties

égales aux points H , Θ , et menons, par les points H , Θ , les diamètres $H\Sigma I$, $\Theta\Lambda M$; tandis que, par les points I , Λ , M , nous menons les droites IYT , MY , AT tangentes aux sections. Dès lors, la droite IT sera parallèle à la droite $\Delta\Pi$, et les droites AT , MY seront parallèles aux droites $\Delta\Pi$, OP . [...]

Arrêtons-nous sur ces constructions préalables. Au lieu de tracer une ordonnée passant par Γ et par Π , l'auteur – ou plus exactement son transcritteur ou son commentateur –, choisit de tracer une parallèle à (AB) passant par Γ . Celle-ci rencontre l'hyperbole (H_1) en Ξ et le prolongement de $\Delta E\Pi$ en P ; le principe de la pseudo-démonstration qui suit est de montrer que le point O en lequel cette parallèle recouperait l'hyperbole (H_2') serait nécessairement confondu avec Ξ , en raison de l'égalité des rectangles "produits" $OP \times P\Gamma$ et $\Xi P \times P\Gamma$, ce qui donnerait un quatrième point commun à (H_1) et à (H_2) contrairement à l'hypothèse.

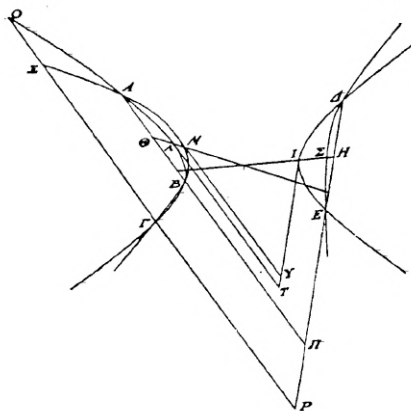


Figure issue de [Ap-VE]

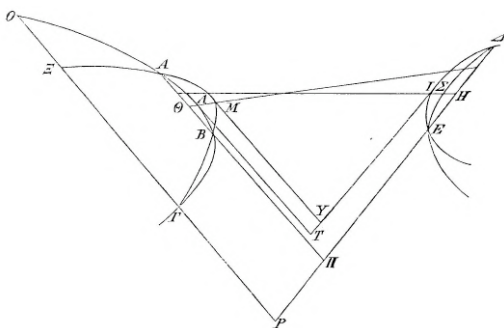
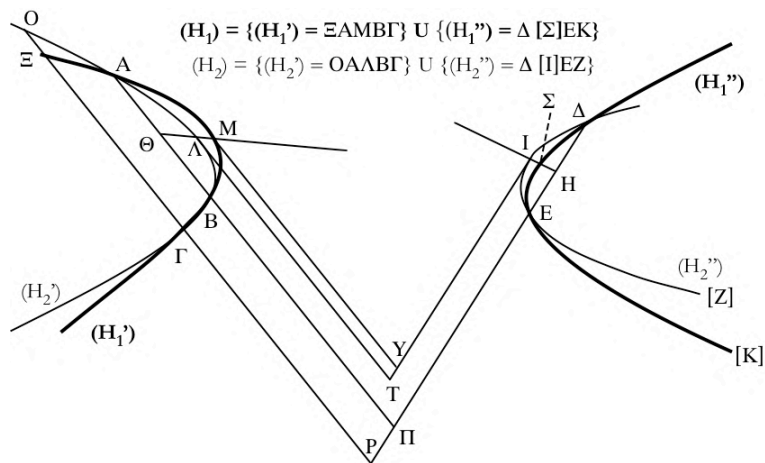


Figure issue de [Ap-Hei]

Pour ce faire, le rédacteur divise les lignes AB et ΔE en deux parties égales, aux points Θ et H respectivement, et mène – dit-il – les diamètres $H\Sigma I$ et $\Theta\Lambda M$, Σ et I étant, d'après la figure, sur (H_1') et sur (H_2') respectivement, Λ et M étant sur (H_2') et sur (H_1') respectivement, d'après l'énoncé qui parle de l'hyperbole $AMBI$ comme étant l'hyperbole (H_1') ; ces deux diamètres ne sont ni confondus ni parallèles sur la figure, ce qui correspond bien au fait que les ordonnées que l'on a partagées en deux et dont chacune est commune à deux des quatre hyperboles, ne sont pas parallèles. On aura peut-être noté que la deuxième figure, tant chez Ver Eecke que chez Heiberg, est ambiguë car elle ne comporte pas les lettres Z et K qui différencient, sur la figure du cas parallèle, les hyperboles (H_2') et (H_1') respectivement ; cependant on peut supposer que la disposition relative des deux courbes n'a pas changé, d'une figure à l'autre, ce qui permet de situer Σ sur (H_1') et I sur (H_2') ; ce choix est

confirmé implicitement par les “calculs” dans la suite du texte et ne remet donc pas en cause nos différentes observations.



Première difficulté : $H\Sigma I$ est-il conçu comme un diamètre commun aux deux hyperboles (H_1'') et (H_2'') ? Si tel est le cas, c'est-à-dire si $H\Sigma$ est un diamètre relatif à la direction d'ordonnées (ΔE) de (H_1'') et HI un diamètre relatif à la même direction d'ordonnées (ΔE) de (H_2'') , le texte anticipe sur un résultat qui n'est pas acquis, car rien, *a priori*, n'oblige H, Σ et I à être alignés ; de même, si ΘM est un diamètre relatif à la direction d'ordonnées (AB) de (H_1') et $\Theta \Lambda$ un diamètre relatif à la même direction d'ordonnées (AB) de (H_2') , rien, *a priori*, n'oblige Θ, Λ et M à être alignés. Si l'on veut alors sauver le texte au profit de sa vérédiction, il faut entendre la phrase « *menons, par les points H, Θ , les diamètres $H\Sigma I, \Theta \Lambda M$* » selon l'une des combinaisons (a, b) , (a, b') (a', b) ou (a', b') qui résultent du croisement des quatre phrases suivantes :

- a) $\Theta \Lambda M$ et un diamètre relatif à la direction d'ordonnées (AB) de (H_1') et Λ est le point d'intersection de ce diamètre avec (H_2') ,
- b) $\Theta \Lambda M$ et un diamètre relatif à la direction d'ordonnées (AB) de (H_2') et M est le point d'intersection de ce diamètre avec (H_1') ,
- a') $H\Sigma I$ et un diamètre relatif à la direction d'ordonnées (ΔE) de (H_1'') et I est le point d'intersection de ce diamètre avec (H_2'') ,
- b') $H\Sigma I$ et un diamètre relatif à la direction d'ordonnées (ΔE) de (H_2'') et Σ est le point d'intersection de ce diamètre avec (H_1'') .

Cette supposition a pour conséquence graphique que les points H, Σ et I , d'une part, et Θ, Λ et M , d'autre part, s'ils sont considérés comme des sommets, c'est-à-dire comme extrémités de diamètres, relatifs à une même direction d'ordonnées, ne doivent pas être alignés *a priori*, mais seulement après que l'on ait démontré qu'ils le sont, alors qu'ils le sont *de facto* sur la figure qui accompagne tant le texte établi par Heiberg que la traduction de Ver Eecke.

En poursuivant notre lecture du précédent passage, l'on voit apparaître la seconde difficulté. Le rédacteur trace trois tangentes aux hyperboles :

1°) IYT, tangente à (H_2'') en I, qu'il considère comme l'extrémité d'un diamètre relatif à (H_2'') puisqu'il précise que (IYT) est parallèle à $(\Delta E\Pi)$;

2°) ΛT , tangente à (H_2'') en Λ , qu'il considère comme l'extrémité d'un diamètre relatif à (H_2'') puisqu'il précise que (ΛT) est parallèle à $(AB\Pi)$ et – nous dit-il – à $(O\Xi P\Gamma)$; cette tangente coupe la précédente en T ;

et 3°) MY, tangente à (H_1') en M, qu'il considère comme l'extrémité d'un diamètre relatif à (H_1') puisqu'il précise aussi que (MY) est parallèle à $(AB\Pi)$; cette tangente coupe la première en Y.

On voit donc qu'il n'est plus possible de sauver le texte dans son intégralité, puisque le parallélisme de (MY) et de (ΛT) à (ΔE) , ici donné d'évidence, supposerait l'un ou l'autre des développements préalables que voici :

soit 1°, supposant que Λ et M sont des sommets de deux diamètres, la preuve de l'alignement de Θ , de Λ et de M fait défaut,

soit 2°, supposant que Θ , Λ et M sont alignés et que l'un des points Λ ou M est un sommet, il manque alors la preuve de ce que l'autre, M ou Λ , est aussi un sommet. En fait, toute la difficulté réside en ceci que, dans le cas non parallèle, on ne peut pas dire, comme dans le cas parallèle : « *cette droite est donc un diamètre de toutes les sections* », ni même dans les termes utilisés ici : « ces deux droites, $\Theta\Lambda$ et HI, sont diamètres l'une aussi bien de (H_2') que de (H_1') , l'autre de (H_2'') et de (H_1'') ».

Une telle lacune apparaît donc comme une première hypothèse qui pourrait conduire à une “restitution” du texte, sous une forme que nous qualifierons volontiers d'apollonienne, dès lors que l'on retiendra la suggestion que cette erreur paraît fort improbable à la suite d'un livre III quasiment sans faille et qu'elle est plutôt imputable à une lecture faible d'un commentateur, dans le contexte d'un livre IV par ailleurs assez défailant.

Poursuivons notre lecture de la démonstration :

De plus, puisque le rectangle délimité sous les droites $A\Pi$, ΠB est au rectangle délimité sous les droites $\Delta\Pi$, ΠE comme le carré de la droite MY est au carré de la droite YI ; mais que le carré de la droite ΛT est au carré de la droite TI comme le rectangle délimité sous les droites $A\Pi$, ΠB est au rectangle délimité sous les droites $\Delta\Pi$, ΠE , le carré de la droite ΛT sera donc aussi au carré de la droite TI comme le carré de la droite MY est au carré de la droite YI. Pour les mêmes raisons, le rectangle délimité sous les droites ΞP , $P\Gamma$ sera au rectangle délimité sous les droites ΔP , $P E$ comme le carré de la droite MY est au carré de la droite YI ; tandis que le rectangle délimité sous les droites OP , $P\Gamma$ sera au rectangle délimité sous les droites ΔP , $P E$ comme le carré de la droite ΛT est au carré de la droite TI. En conséquence, le rectangle délimité sous les droites OP , $P\Gamma$ sera équivalent au rectangle délimité sous les droites ΞP , $P\Gamma$; ce qui ne peut avoir lieu.

L'erreur commise dans la construction initiale est donc doublée ici d'une seconde faute de raisonnement, ce qui nous amène à reconsidérer l'ensemble de la démonstration, voire à proposer (*infra*) des démonstrations alternatives, l'une au moins dans le droit fil du "style" apollonien.

L'erreur dont nous venons de développer le processus, se renouvelle, avons-nous dit, dans les propositions 49 et 50 du livre IV. Nous n'en donnerons ici que les énoncés, les réénonciations et les figures (deux figures par proposition en raison des deux cas, extraites de la version de Ver Eecke), afin que le lecteur puisse juger par lui-même que ces dernières partent de la même hypothèse erronée d'un diamètre supposé *a priori* commun dans le cas de deux hyperboles mises en relation avec leurs opposées ; il lui restera à reconstituer les "démonstrations" qui s'ensuivent, voire à *diviner* des démonstrations plus conformes à la rigueur apollonienne...

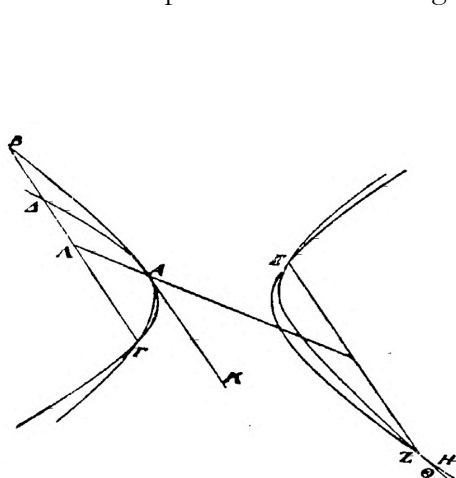


Figure IV-49a issue de [Ap-VE]

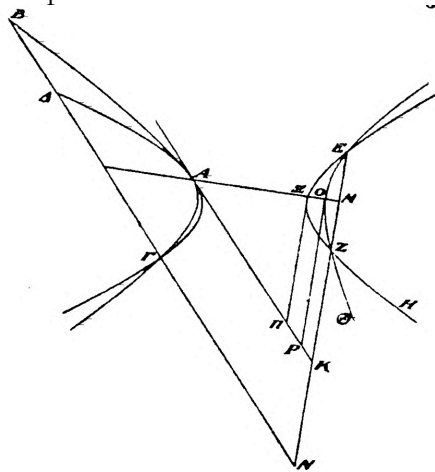


Figure IV-49b issue de [Ap-VE]

IV-49. Lorsqu'une hyperbole, tangente à l'une de[s] sections opposées, rencontre cette section en un autre point, sa propre section opposée ne rencontrera pas l'autre section opposée en plus d'un point.

Soient $AB\Gamma$, EZH des sections opposées ; qu'une hyperbole $\Delta A\Gamma$ soit tangente au point A , et sécante au point Γ , et soit $EZ\Theta$ la section opposée de la section $\Delta A\Gamma$. Je dis que la section $EZ\Theta$ ne rencontrera pas l'autre section opposée en plus d'un point.

En effet, qu'elle la rencontre, si possible, aux deux points E , Z . Menons la droite de jonction EZ , et menons, par le point A , la droite AK tangente aux sections. Ces dernières droites sont parallèles ou ne le sont pas. [...]

IV-50. Lorsqu'une hyperbole touche l'une de sections opposées en un seul point, sa propre section opposée ne rencontrera pas l'autre section opposée en plus de deux points.

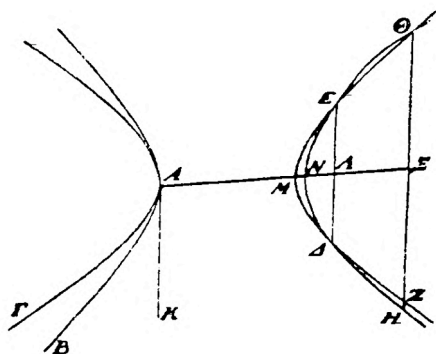


Figure IV-50a issue de [Ap-VE]

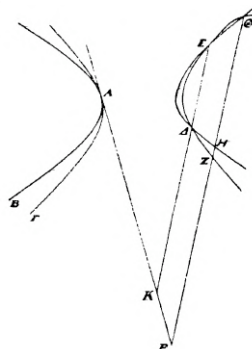


Figure IV-50b issue de [Ap-VE]

Soient AB , $E\Delta H$ des sections opposées ; que l'hyperbole $A\Gamma$ soit tangente à la section AB au point A , et soit $E\Delta Z$ la section opposée de la section $A\Gamma$. Je dis que la section $E\Delta Z$ ne rencontrera pas la section $E\Delta H$ en plus de deux points.

En effet, qu'elle la rencontre, si possible, aux trois points Δ , E , Θ . Menons la droite AK tangente aux sections AB , $A\Gamma$; menons la droite de jonction ΔE que nous prolongeons, et que les droites AK , ΔE soient d'abord parallèles. [...] Que les droites AK , ΔE ne soient point parallèles ; mais qu'elles se rencontrent au point K . [...]

Pour tenter d'élucider cette question d'une éventuelle erreur commise par Apollonios ou par ses transpositeurs, ou encore simplement transmise par ces derniers, il convient de revenir sur l'historique de l'établissement puis des éditions imprimées du texte, afin de repérer d'éventuelles corrections, gloses ou commentaires.

5. – Les principales éditions du traité des *Coniques* d'Apollonios, du XVI^e au XXI^e siècles

Les premières éditions modernes des *Coniques* d'Apollonios sont la conséquence de l'introduction en Occident – et en premier lieu en Italie – de manuscrits grecs importés de Byzance au cours du XV^e siècle et contenant seulement les quatre premiers livres, éventuellement complétés des *Lemmes* de Pappus et des *Commentaires* d'Eutocius. Avant cette période, seul était connu le début de ce traité, préliminaires et partie du livre premier, par une traduction latine faite à partir d'un texte arabe par Gérard de Crémone (1114-1187).

Le plus ancien manuscrit grec aujourd'hui connu, le *Vaticanus gr. 206*, date de la fin du XII^e siècle et début du XIII^e ; il est d'origine soit italo-grecque (Sicile normande) soit constantinopolitaine. C'est très probablement lui qui fut rapporté de Byzance à Venise, avec de nombreux autres manuscrits, en 1427, par le philologue et humaniste Francesco Filelfo (1398-1481). Un deuxième

manuscrit, le *Vaticanus gr. 203*, est apparu en Italie dans la seconde moitié du XV^e siècle. C'est un troisième manuscrit, le *Mutinensis*, *α.v* 7.16, datant du XV^e siècle, qui fut utilisé par Giorgio Valla (1447-1500) pour publier en latin des extraits des livres I et II dans son ouvrage à visée encyclopédique, *De expetendis et fugiendis rebus opus*, publié à Venise en 1501. Durant le premier quart du XVI^e siècle, l'intérêt pour l'étude des sections coniques s'est particulièrement manifesté chez les savants allemands, notamment à Nuremberg. Ainsi Johann Müller (1436-1476), dit Regiomontanus, possédait le manuscrit *Norimbergensis Cent. V. app6* datant du XV^e siècle ; selon l'inventaire de la bibliothèque de Regiomontanus établi en 1512, son disciple Bernhard Walter l'aurait traduit en latin, mais cette traduction n'a pas été retrouvée. Johann Werner (1468-1522) a publié en 1522 le *Libellus super viginti duobus elementis conicis* qui est un ouvrage original et non une traduction du texte apollonien.

La première traduction, qui se voulait intégrale des quatre premiers livres, du grec en latin fut l'œuvre de Gianbattista Memo (ou Memmo) (ca. 1466-1536) et fut publiée en 1537 par son fils Giovanni Maria sous le titre *Apollonii Pergei philosophi, mathematicae excellentissimi Opera...* [Ap-M]. Toutefois cette édition comporte de nombreuses lacunes et erreurs dues autant à la mauvaise qualité du manuscrit utilisé, de la famille du *Vaticanus gr. 203*, proche du *Bodleianus Canonicianus gr. 106* (XV^e siècle) qu'aux incompréhensions de Memo. Le savant messin, l'abbé Francesco Maurolico (1494-1575), insatisfait de cette édition, a entrepris de la corriger et de la compléter sans disposer d'un texte grec. Son édition corrigée des livres I à IV et sa restitution des livres V et VI ont été achevées fin 1547 mais sont restées inédites jusqu'à leur publication à Messine en 1654 sous le titre : *Emendatio et restitutio Conicorum Apollonii Pergæi*.

La première édition soigneuse des quatre premiers livres du traité d'Apollonios a été réalisée sous la forme d'une traduction en latin par Federico Commandino (1509-1575) intitulée *Apollonii Pergæi conicorum libri quattuor...* et publiée à Bologne en 1566 [Ap-C]. Commandino a travaillé à partir de plusieurs manuscrits difficiles à identifier du fait des corrections qu'il a jugé nécessaire d'apporter. Cette édition a été reprise, augmentée de ses propres commentaires et imprimée en 1655, par le Père Claude Richard (1589-1644).

Edward Bernard (1638-1697), professeur à Oxford, forma le projet d'une édition gréco-latine des livres I à IV et arabo-latine des livres V à VII, projet qui restera inabouti.

Isaac Barrow (1630-1677) a publié à Londres en 1675 un abrégé en latin des quatre premiers livres dans *Archimedis Opera : Apollonii Pergæi conicorum libri IV. Theodosii Spherica : methodo nova illustrata, & succinctè demonstrata*, mais il y propose une traduction libre et adaptée usant de la méthode et du symbolisme algébriques.

Les premiers manuscrits arabes des *Coniques* connus en Occident ont été rapportés d'Orient en 1629 par Jacob Golius (1596-1667), géomètre et professeur de langues orientales à Leyde (Provinces-Unies), mais cet apport est resté sans conséquence dans le domaine de l'étude savante et de l'édition jusqu'à la fin des années 1650. En 1658, Alfonso Borelli (1608-1679) a découvert dans la *Bibliothèque Laurentienne* de Florence un manuscrit arabe contenant les sept premiers livres des *Coniques*, dont les livres V à VII avaient été résumés et remaniés en 994 par le géomètre Abalphat d'Ispahan, nom sous lequel était désigné en Occident Abû al-Fath Mahmûd al-Isfahâni. Une copie datée de l'an 513 de l'Hégire (1119 de l'ère chrétienne) du livre d'Abalphat fut apportée à Rome en 1578 par le Patriarche d'Antioche Ni'amat Allâh qui l'offrit au Cardinal Ferdinand de Médicis ; après avoir séjourné dans la bibliothèque de Gian Battista Raimondi, elle fut déposée à la *Bibliothèque Laurentienne* en 1627. Vincenzo Viviani (1622-1703), qui préparait depuis quelques mois une *restitutio* du livre V, encore considéré comme perdu, demanda à Borelli de taire sa découverte jusqu'à la parution de son propre ouvrage qui est intervenue en 1659 sous le titre *De maximis et minimis geometrica divinatio in quantum conicorum Apollonii Pergaei num desideratum*.

Borelli fit alors traduire en latin le manuscrit d'Abalphat d'Ispahan par Abraham Ecchellensis (Ibrahîm al-Hâqilânî, 1605-1664), professeur de langues orientales à Rome et compléta cette traduction des notes qu'il estimait nécessaires à une bonne compréhension du texte. L'ensemble fut publié à Florence en 1661 sous le titre *Apollonii Pergaei conicorum lib. V. VI. VII...* [Ap-E].

D'autre part, une copie d'un des manuscrits arabes rapportés par Jacob Golius était conservée à la *Bodleian Library* d'Oxford ; elle contient une version intégrale des sept premiers livres établie au IX^e siècle par Thâbit Ibn Qurra (836-901) et corrigée en 1260 par le géomètre persan Nasîr ad-dîn at-Tûsî (1201-1274). Cette copie fut utilisée, avec d'autres manuscrits en grec, par Edmund Halley (1646-1742) pour élaborer son ouvrage *Apollonii Pergaei conicorum libri octo et Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni libri duo*, publié en 1710 à Oxford [Ap-Ha]. Les livres I à IV y sont proposés en édition bilingue grec-latin, le texte grec étant ainsi imprimé pour la première fois. Pour cette partie issue des manuscrits grecs, Halley bénéficia de la collaboration de David Gregory (1659-1708). La traduction latine est très voisine de celle de Federico Commandino, publiée près d'un siècle et demi auparavant, avec cependant des commentaires et surtout des corrections, y compris sur le texte grec, dont celle qui concerne la difficulté qui est l'objet de cette étude. Cette édition des quatre premiers livres est en outre accompagnée, en version bilingue également, des *Lemmes* de Pappus d'Alexandrie (ca. 290 - ca. 350) et des *Commentaires* d'Eutocius d'Ascalon (ca. 480 - ca. 540). Les livres V à VII sont donnés dans une traduction latine faite à partir du manuscrit copié de l'édition établie par Thâbit Ibn Qurra et par Nasîr ad-dîn at-Tûsî. Le livre VIII est une restitution

construite par Halley et rédigée en latin, pour un livre qui reste encore inconnu à ce jour. Le traité s'achève par une édition bilingue du *De sectione cylindri et conii libri duo* de Sérénus d'Antinoë (ca. 300-ca. 360) dont le contenu mathématique du second livre, sur les sections du cône, est d'une richesse très inférieure à celle du traité d'Apollonios [Se-VE].

L'édition publiée par Halley fut considérée, à juste titre, comme la meilleure référence par les savants des XVIII^e et XIX^e siècles puisque ce n'est qu'à la fin du XIX^e siècle que la connaissance de sources nouvelles a justifié une nouvelle édition. En 1891-1893, le philologue et helléniste danois de l'université de Copenhague Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) publie à Leipzig *Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis* en deux volumes contenant une édition critique du texte grec des quatre premiers livres établie sur tous les manuscrits grecs connus et accompagnée d'une traduction en latin intégrant cependant des notations mathématiques modernes. Cette édition est devenue la référence principale pour les quatre premiers livres et l'est restée jusqu'au début de ce siècle [Ap-Hei].

Elle fut utilisée par Thomas Little Heath (1861-1940) pour rédiger son *Apollonius of Perga. Treatise on conics Sections edited in modern Notation, with introductions including an Essay on the earlier History of the Subject*, publié à Cambridge en 1896 [Ap-Hea]. Heath n'y propose pas une traduction mais une réorganisation de la matière des quatre premiers livres en regroupant en un même paragraphe des propositions qui, dans la conception ancienne, ne pouvaient être énoncées que séparément ; ainsi, par exemple, un point de contact entre deux coniques peut être considéré à l'époque moderne comme deux points communs confondus, ce qui n'était pas concevable pour les Anciens.

Les éditions Halley et Heiberg ont été aussi utilisées par Paul Louis Ver Eecke (1867-1959) pour préparer sa traduction en français publiée en 1923 à Bruges sous le titre *Les coniques d'Apollonius de Perge, œuvres traduites pour la première fois du grec en français*. En fait, seuls les quatre premiers livres sont traduits du grec à partir de l'édition Heiberg, tandis que les livres V à VII le sont à partir de la traduction latine de l'arabe publiée par Halley. La traduction française de Ver Eecke a été rééditée en 1959 à Paris chez A. Blanchard [Ap-VE].

En 1990, Gerald J. Toomer (né en 1934), historien des mathématiques, a publié *Conics : books V to VII : the Arabic Translation of the lost Greek Original in the Version of the Bani Mūsā / Apollonius. Edited with Translation and Commentary* [Ap-T]. Mais il n'y a pas lieu de convoquer cette édition dans la présente étude qui concerne des parties du livre IV.

Enfin, depuis 2008, est publiée une édition bilingue grec-français et arabe-français sous le titre *Apollonius de Perge, coniques*, préparée par Roshdi Rashed, Micheline Decorps-Foulquier et Michel Federspiel [Ap-R/D-F/F]. Pour le texte

grec les éditeurs ne se sont pas contentés de reprendre la version Heiberg mais l'ont établi à nouveau à partir de tous les manuscrits connus et en tenant compte des éditions antérieures ; le texte arabe a aussi été établi à partir de tous les manuscrits connus, alors que Halley et Toomer avaient effectué leurs traductions à partir d'une seule version.

Les textes utilisés pour la présente étude sont l'édition en français de Ver Eecke et des traductions en français faites par nos soins des éditions Memo, Commandino, Halley et Heiberg ainsi que la première traduction publiée de l'arabe en français, due à Roshdi Rashed. Qu'en est-il alors, dans ces différentes éditions, de la difficulté rencontrée dans la démonstration proposée dans la traduction de Ver Eecke ?

Avant d'entreprendre cet examen, il convient de donner les précisions suivantes concernant la numérotation de la proposition étudiée, selon les diverses éditions ; la proposition en question est numérotée 46 par Heiberg puis Ver Eecke, 44 par Memo, Commandino et Halley, et enfin 42 dans la traduction de l'arabe par Rashed, et ce en raison, par exemple, du regroupement des propositions numérotées 27, 28, 29 chez Heiberg et Ver Eecke en une seule proposition 27 chez Commandino et Halley.

Le texte édité par Memo est semblable, sur le point litigieux, à celui de Ver Eecke : on y retrouve la confusion des diamètres des deux hyperboles et de leurs sections opposées, relatifs aux cordes communes à ces hyperboles. En outre le texte de la démonstration, d'un style déjà obscur, présente des lacunes et des erreurs d'impression et la figure correspondant à la seconde partie de la démonstration manque, ce qui rend ce texte peu utilisable pour une étude sérieuse du corpus apollonien.

Bien qu'établie avec plus de précision et de rigueur, l'édition de Commandino présente cependant la même rédaction problématique : « *Et per g h ducantur diametri ghi, hlms* » (i. e. : « *et que par g [et] h [milieux des cordes cd et ab, communes aux deux hyperboles] soient menés les diamètres ghi, hlms* »).

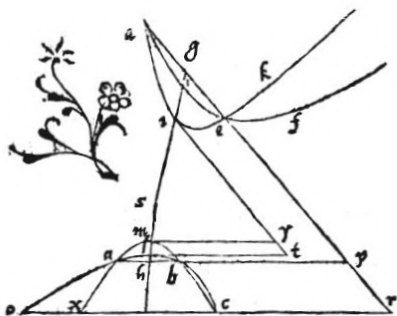


Figure IV-44 de [Ap-C] (IV-46 dans [Ap-VE])

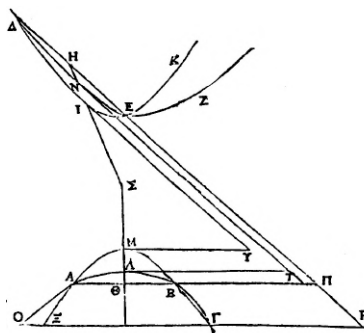


Figure IV-44 de [Ap-Ha] (IV-46 dans [Ap-VE])

Lorsque Commandino écrit « *ghi* », il s'agit en fait du diamètre « *gi* » relatif à la corde « *de* », la lettre « *h* » concernant le diamètre relatif à la corde « *ab* ». La figure montre pour chaque paire d'hyperboles un seul diamètre et en particulier l'alignement des points *h*, *l* et *m*.

Il en va tout autrement dans l'édition bilingue publiée par Halley. Certes la figure reste en partie confuse, laissant présumer d'un alignement des points Θ , Λ , M et Σ , mais donnant à voir une interruption du trait dans le tracé des autres diamètres HN et ΣI qui permet de penser que ces diamètres ont bien été conçus comme distincts par Halley. Cette impression est totalement confirmée par le texte dans lequel quatre diamètres, et non plus deux, sont clairement définis : « *et per H, Θ ducantur diametri HN, ΣI , $\Theta \Lambda$, $M \Sigma$* » (i. e. : « *et que par H, Θ soient menés les diamètres HN, ΣI , $\Theta \Lambda$, $M \Sigma$* »), sans que pour autant la démonstration comporte d'étapes supplémentaires ; en effet l'égalité de rapports de rectangles qui permet de conclure est obtenue par le jeu répété de la proposition 19 du livre III donnant aux rapports des carrés des quatre tangentes le rôle essentiel dans l'enchaînement des égalités. Peu importe à ce stade que les points de contact des paires de tangentes soient alignés ou non avec le milieu de la corde commune qui leur est associée.

Le point litigieux relatif à la confusion des diamètres a été repéré par Halley qui en a proposé une correction donnant une pleine validité à la démonstration. Halley a d'ailleurs pris soin de mentionner explicitement son intervention par une note placée tout après la démonstration : « *Hanc propositionem fæde depravatam integritati suæ restituimus.* » (i. e. : « *Nous avons restitué dans son intégrité cette proposition gravement corrompue.* »), mais sans préciser sur quels éléments cette “restitution” est intervenue.

En dépit des corrections apportées par Halley, Heiberg est revenu dans son édition bilingue au texte tel qu'il fut publié par Commandino. Cela vient certainement du fait qu'en tant que philologue helléniste non mathématicien, Heiberg s'en est tenu à ce que lui proposaient les manuscrits à sa disposition. Toutefois il n'a rédigé aucun commentaire sur le problème posé par la confusion des diamètres. Comme il a été vu précédemment, la traduction française de Ver Eecke, fondée sur le texte grec établi par Heiberg, réitère les mêmes manques.

Le lecteur pourra trouver des versions complètes des traductions ci-dessus dans des *Cahiers de la Perspective* à venir et/ou sur le site internet de l'IREM de Basse-Normandie.

L'édition toute récente, due à Roshdi Rashed, Micheline Decorps-Foulquier et Michel Federspiel, donne deux versions de cette proposition, l'une en arabe, numérotée 42, l'autre en grec, numérotée 46, toutes deux accompagnées d'une traduction en français. Ces deux versions reprennent dans leurs démonstrations la même confusion des diamètres présente dans toutes les éditions précédentes, à l'exception de celle de Halley. Toutefois, contrairement

aux autre éditions, des commentaires relatifs à cette difficulté viennent en avertir le lecteur. Dans l'édition du texte arabe, une note de bas de page signale à propos de ces diamètres qu'« *il faut lire les diamètres HN, HI, Θ M, Θ Λ* » au lieu de : « *les diamètres HNI et Θ ZMA* » comme le donne le texte.

En outre, dans le commentaire mathématique dont il fait précéder ce texte arabe et sa traduction en français, Rashed mentionne dans une remarque [Ap-R/D-F/F, 2.2, 98] une glose rédigée dans le manuscrit *Ms. Istanbul, Aya Sofia 2762, fol. 158 r^o*, par Ibn Abî Jarrâda (XIII^e siècle) dans laquelle la confusion des diamètres est stigmatisée comme une erreur et est corrigée avec des explications. Rashed donne de cette glose une traduction en français reproduite partiellement ci-après :

« Je dis que le second cas de figure de cette proposition, qui est la 42, a une figure et une démonstration incorrectes. Il [Apollonius] a dit au cours de la démonstration : « Nous menons des points H et Θ deux diamètres HZNI et Θ ZMA ». Il a supposé ainsi que Θ AM, qui est une droite, est un diamètre pour toutes les sections, et il a supposé que Z est un centre pour toutes les sections ; or ceci n'est pas possible car [...]. Il est correct de dire : Menons des points H et Θ les diamètres HN, HI, Θ M et Θ Λ , ainsi Θ Λ ne sera pas sur le prolongement de Θ M ; que HN et HI soient une seule ou deux droites. »

Enfin dans la note complémentaire [Ap-R/D-F/F, 2.2, 230-231, n. 20], Rashed indique que le manuscrit *Ms. Oxford, March 667*, rédigé par Thâbit Ibn Qurra, comporte, *fol. 80 v^o*, une glose due à Nasîr ad-dîn at-Tûsî qui propose la même correction, dans le texte et la figure, que celle d'Ibn Abî Jarrâda, sans en donner cependant de justifications. La traduction en français, toujours due à Roshdi Rashed, de la partie en cause est [Ap-R/D-F/F, 2.2, 231] :

Menons des points H et Θ les diamètres H Λ et HM pour les deux sections AM Γ et AMB Γ , et les diamètres Θ I et Θ N leur faisant face. [Le lecteur notera qu'at-Tûsî a permuté les lettres H et Θ par rapport au texte d' Ibn Abî Jarrâda.]

Or c'est à partir de ce manuscrit qu'Halley a effectué sa traduction de l'arabe en latin des livres V à VII ; il est donc très vraisemblable qu'il ait aussi examiné le contenu des quatre premiers livres et y ait trouvé la remarque de Nasîr ad-dîn at-Tûsî qui aurait ainsi inspiré les corrections qu'Halley a apportées à la démonstration de la proposition 44 – dans sa propre édition – du livre IV.

Dans la version grecque de cette édition, la difficulté liée à la confusion des diamètres est signalée par une note de bas de page [Ap-R/D-F/F, 2.3, 431, n. 136] qui renvoie pour plus de détails à la version arabe qui est mentionnée ci-dessus.

Il apparaît donc que, dans tous les manuscrits grecs ou arabes connus à ce jour des *Coniques* d'Apollonios, le second cas de la démonstration de la proposition 46 (ou 42 ou 44 selon les manuscrits) comporte la confusion induite des diamètres. Les seuls commentaires et rectifications connus sont le fait, en

premier lieu de deux mathématiciens et commentateurs des pays d'Islam du XIII^e siècle, suivis dans cette voie par Edmund Halley en 1710. Les éditions et/ou traductions postérieures ne donnent pas d'éclaircissement sur ce point litigieux, à l'exception de la dernière édition de 2008-2010.

6. – En guise de conclusion : deux “restitutions” de la proposition IV-46 des *Coniques*

Nous avons vu *supra* que c'est dans le second cas – celui du concours en Π des droites (AB) et (ΔE) – que se situe le point litigieux. Nous pourrions nous en tenir à ce constat, à ceci près que, si l'on excepte, dans l'œuvre d'Apollonios, quelques approximations et quelques faiblesses ou lacunes (des oublis de cas particuliers, par exemple, dûs souvent à une considération de la figure, sans variation de position d'un point réputé quelconque), la plupart probablement dues à des interpolations ou à des recopies défailtantes, c'est la seule erreur de raisonnement que nous ayons relevée, qui aurait nécessité plus qu'une interpolation élémentaire.

Compte tenu des propositions précédentes des livres III et IV, où il est largement fait usage de ce que l'on appellera, au XVII^e siècle, une “*ligne harmoniquement coup(p)ée*”, on peut envisager des démonstrations alternatives pour ce “second cas”. Nous en proposons deux ci-dessous, en expliquant les raisons qui motivent ces restitutions, issues, les premières comme les secondes, de notre lecture attentive et assidue des *Coniques* d'Apollonios, et en tentant de respecter au plus près le “style” que nous pensons pouvoir induire de cette lecture.

Pour une « *divination* » du texte original dans le cas concourant, faut-il conserver la voie du parallélisme ou faut-il penser une démarche faisant intervenir la division harmonique, sous une forme non explicite, s'entend ? Nous allons tenter les deux restitutions.

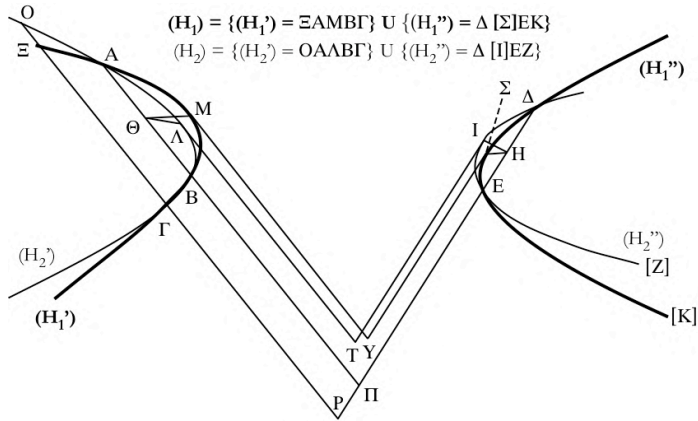
1^o) Première restitution, en suivant le texte au plus près, c'est-à-dire avec le *minimum* de transformations, qui pourrait en ce cas suggérer qu'il y a eu une transcription lacunaire, effet (ou cause) d'une adaptation à (ou par) une figure fautive ou lacunaire.

Traçons des parallèles aux tangentes, suivant le principe de cette proposition

– principe qui est aussi celui de la proposition 19 du livre III –, mais en construisant quatre tangentes au lieu de trois, et en nommant T le point d'intersection des tangentes en Λ et en I, et Y celui des tangentes en M et en Σ (*cf.* la figure alternative ainsi obtenue, *infra*), on peut proposer une version plus conforme aux qualités de géomètre qu'on est en droit d'attribuer à Apollonios, version dans laquelle ce qui subsiste du texte original apparaît en caractères romains et les modifications en italiques gras et entre accolades :

Que les droites AB, ΔE ne soient pas parallèles, mais que, prolongées, elles se rencontrent au point Π.

Menons la droite ΓO parallèle à la droite ΑΠ, et que son prolongement rencontre la droite ΔΠ au point P. Coupons les droites AB, ΔE en deux parties égales aux points H, Θ, et menons, par les points H, Θ, *{les diamètres HI et HΣ, ΘM et ΘΛ ;}* tandis que, *{par les points I, Λ, M et Σ,}* nous menons *{les droites IT, ΛT, MY, ΣY,}* tangentes aux sections. Dès lors, *{les droites IT et ΣY seront parallèles}* à la droite ΔΠ, et les droites ΛT, MY seront parallèles aux droites ΑΠ, OP.



De plus, puisque le rectangle délimité sous les droites ΑΠ, ΠB est au rectangle délimité sous les droites ΔΠ, ΠE comme le carré de la droite MY est au carré de *{la droite YΣ ;}* mais que le carré de la droite ΛT est au carré de la droite TI comme le rectangle délimité sous les droites ΑΠ, ΠB est au rectangle délimité sous les droites ΔΠ, ΠE, le carré de la droite ΛT sera donc aussi au carré de la droite TI comme le carré de la droite MY est au carré de *{la droite YΣ.}* Pour les mêmes raisons, le rectangle délimité sous les droites ΞP, ΠΓ sera au rectangle délimité sous les droites ΔP, ΠE comme le carré de la droite MY est au carré de *{la droite YΣ ;}* tandis que le rectangle délimité sous les droites OP, ΠΓ sera au rectangle délimité sous les droites ΔP, ΠE comme le carré de la droite ΛT est au carré de la droite TI. En conséquence, le rectangle délimité sous les droites OP, ΠΓ sera équivalent au rectangle délimité sous les droites ΞP, ΠΓ ; ce qui ne peut avoir lieu.

Autrement dit :

$$\text{sachant que } \frac{\text{ΑΠ} \times \text{ΠB}}{\text{ΑΠ} \times \text{ΠE}} = \frac{\text{MY}^2}{\text{YΣ}^2} \text{ [1']} \text{ et que } \frac{\text{ΛT}^2}{\text{TI}^2} = \frac{\text{ΑΠ} \times \text{ΠB}}{\text{ΑΠ} \times \text{ΠE}} \text{ [2, inchangée] ;}$$

$$\text{on aura donc } \frac{\text{ΛT}^2}{\text{TI}^2} = \frac{\text{MY}^2}{\text{YΣ}^2} \text{ [3'] ;}$$

de même :

$$\text{sachant que } \frac{\text{ΞP} \times \text{ΠΓ}}{\text{ΔP} \times \text{ΠE}} = \frac{\text{MY}^2}{\text{YΣ}^2} \text{ [4']} \text{ et que } \frac{\text{OP} \times \text{ΠΓ}}{\text{ΔP} \times \text{ΠE}} = \frac{\text{ΛT}^2}{\text{TI}^2} \text{ [5, inchangée] ;}$$

on aurait donc $OP \times PF = EP \times PF$ [6].

Une telle version reste très proche du texte qui nous est parvenu et qui a pu être altéré, par exemple, par un copiste soucieux de le mettre en conformité avec une figure où il aurait vu le point Y comme intersection des tangentes IY et MY, plutôt que comme intersection des tangentes SY et MY.

2°) Deuxième “restitution”.

Avec les précautions épistémologiques émises *infra* & *supra*, une autre “restitution” revient à considérer sur les lignes (AB) et (AE) ce que nous appelons aujourd’hui les conjugués harmoniques de Π , à savoir Θ par rapport aux points A et B, d’une part, et H par rapport aux points Δ et E, d’autre part (les notations sont inversées sur la seconde figure par rapport à la première, du fait de l’ordre d’exposition). En effet, l’équivalent projectif du diamètre $H\Theta$ du premier cas, qui coupe les ordonnées en deux segments égaux, est ici ce que nous appelons aujourd’hui la polaire de Π par rapport à l’une quelconque des coniques $ABE\Delta$: dans le cas parallèle, le point Π est à l’infini et la polaire est la droite des milieux de [AB] et [AE], qui partagent ces segments dans le même rapport, égal à un, qu’un point qui est à l’infini sur les droites (AB) et (AE) et qui est donc à égale distance des extrémités des segments [AB] et [AE]. L’on doit bien sûr faire abstraction du vocabulaire projectif utilisé à l’instant de façon rétrospective, et de l’usage, ici pédagogique, qui a été fait de l’infini : Apollonios n’a pas plus qu’Euclide, évoqué de quelconques “éléments à l’infini”, les “lignes droites” et les figures planes de la géométrie grecque étant seulement des “bouts” de droites et de plans potentiellement et indéfiniment prolongeables, et plus précisément encore, il n’a jamais laissé entendre qu’il pouvait concevoir une quelconque équivalence entre les deux cas, parallèle et concourant ; il n’en reste pas moins que dans de nombreuses propositions antérieures, la distinction des cas a été faite selon un procédé qui consiste à faire intervenir, soit des milieux des ordonnées à une conique comme diamètre, dans le cas de parallélisme des ordonnées, soit des conjugués harmoniques du point de concours dans le cas d’ordonnées concourantes, conjugués dont Apollonios a montré qu’ils formaient un lieu rectiligne au livre IV (aux propositions 9 à 15 et sans donner un nom à cette ligne droite, dite “polaire” aujourd’hui).

En introduisant un faisceau de droites concourantes en Π (les passages en caractères gras et entre accolades ont été ajoutés, ceux rayés et en caractères gras indiquent les suppressions que les ajouts imposent), une restitution possible – sur la base d’une autre figure, qui est sans doute plus hypothétique que le texte, malgré la moins grande fiabilité d’une figure dans sa transmission – serait alors :

que le géomètre de Pergé ait pu y avoir recours plutôt qu'au schéma démonstratif des parallèles, comme en III-19 (qui, elle, précède la théorie des pôles et polaires dans l'économie générale du traité). Si tel était aussi le cas dans le texte original, cela signifierait que la connaissance de cette théorie, que l'on retrouve d'ailleurs à l'œuvre au livre VII de la *Collection mathématique* de Pappus, était limitée chez les Anciens et qu'elle a fait l'objet d'une véritable (re-)découverte (au sens d'une utilisation explicite et plus étendue) au XVII^e siècle, par Girard Desargues, Blaise Pascal et Philippe de La Hire, qui, le premier d'ailleurs, parle de division harmonique à propos de la droite « *harmoniquement coup(p)ée* », là où Desargues parle d'« *involution de six points* ». On notera d'ailleurs, dans le grand-œuvre de La Hire, les *Sectiones Conicae* de 1685 [LH], 1^o) qu'il donne une table des *Coniques* d'Apollonios – l'*Expositio brevis*... –, où la proposition IV-46 n'est pas reprise dans son détail, mais est comprise, comme les 17 dernières propositions du livre IV et comme toutes les propositions concernant les intersections de deux couples d'hyperboles opposées, dans une proposition plus générale sur la position relative de ces sections et de leurs asymptotes ; 2^o) que ce résultat se trouve démontré sans faille – mais à sa manière et dans sa logique interne – dans son propre ouvrage, sans qu'on sache si La Hire avait ou non repéré l'erreur de raisonnement de IV-46, à un moment où toutes les éditions imprimées qu'il pouvait connaître étaient fautives et ne relevaient pas l'erreur ; la *Préface* et l'*Exposition brevis* donnent à penser qu'il a fait plus qu'éviter cette faille, en donnant un traité qu'il estime, comme il le dit lui-même, rendre compte du contenu et de la forme apolloniennes, voire en dépasser la somme, sans sacrifier à la modernité algébrique, comme l'avaient fait Wallis ou Barrow, et comme La Hire lui-même l'avait fait quelques années auparavant dans ses *Nouveaux élémens des sections coniques*... de 1679. Il reste donc difficile de savoir si l'erreur relevée dans cet article avait été repérée et analysée avant Halley, dans le monde occidental, ni, en particulier, immédiatement après la révolution projective opérée par Desargues, puis par La Hire et Lepoivre.

On aura compris, après une lecture attentive, et ici commentée pas à pas, de IV-46, que la démonstration du cas non parallèle est erronée et fondée de surcroît sur une figure qui ne semble pas permettre de conclure, même si l'on met de côté l'erreur de raisonnement. Cette faute – que l'on pourrait qualifier de “grossière”, non pour ternir rétrospectivement l'image d'Apollonios, mais plutôt pour douter qu'il ait pu la commettre, et cela d'autant plus que les commentateurs arabes expriment leurs critiques en termes mesurés –, n'a pas été relevée – du moins explicitement – par de nombreux commentateurs et éditeurs modernes du texte, à l'exception notable de Nasîr ad-dîn at-Tûsî, de Thâbit Ibn Qurra et d'Ibn Abî Jarrâda, et de Halley – qui évite le piège probablement après qu'il ait lu les précédents – ; à ceux-là il faut ajouter La Hire qui précise qu'il a corrigé, donc relevé l'erreur : c'est certainement le

trait le plus étrange de cette histoire, qui montre bien que la redécouverte de ce savoir grec en Occident, n'a pas été immédiate, tant la lecture des *Coniques* n'est pas chose aisée. Quant à la qualité respective du texte original et du texte qui nous est parvenu, cette "faute" peut être interprétée de diverses manières :

1°) comme il est possible de restituer un texte valide, sans trop de modifications, l'erreur pourrait alors s'interpréter comme une mauvaise recopie ; mais cela suppose de reconstituer aussi une figure en adéquation avec le texte, ce qui rend improbable l'hypothèse d'une simple erreur de copiste ;

2°) comme texte et figure sont correctement appariés dans le discours qui nous est parvenu, même si celui-ci (com-)porte un raisonnement faux, cela plaide plutôt pour une tentative inaboutie d'interprétation d'un texte original difficile ou pour un essai de simplification abusif d'un texte original ressenti comme obscur ; on relève dans le livre IV de nombreuses lacunes en matière d'exhaustivité des cas ou des imprécisions peu concevables en regard de la rigueur des trois premiers livres : cette proposition relèverait alors d'un remaniement médiocre par un éditeur critique maladroit ;

3°) s'il s'avérait que texte et figure soient conformes à la pensée originale d'Apollonios, force nous serait alors de constater ici les limites, en termes extensifs et compréhensifs, de la pensée du géomètre en matière de ce que nous appelons aujourd'hui "théorie des pôles et polaires" ou "théorie de la division harmonique", en particulier en matière d'intuition que le cas parallèle et le cas concourant sont de même nature, même si le traitement géométrique qu'en fait Apollonios, fondé sur la seule théorie des proportions, suppose la distinction de ces cas.

Bibliographie

Les principales éditions des *Coniques*

- [Ap-C] APOLLONIOS de Pergé (Federico COMMANDINO, éd. sc.). *Apollonii Pergæ conicorum libri quattuor. Una cum Pappi Alexandrini lemmatibus, et commentariis Eutocii Ascalonitæ. Sereni Antinsensis philosophi libri duo nunc primum in lucem editi. Quæ omnia nuper Federicus Commandinus Urbinas mendis quamplurimis expurgata è Græco convertit, & commentariis illustravit...* Bononiæ, ex officina Alexandri Benatii, M D LXVI. [Bologne : 1566].
- [Ap-E] APOLLONIOS de Pergé (Abraham ECHELLENSIS, trad.). *Apollonii Pergæ Conicorum lib. V. VI. VII. paraphraste abalphato asphananensi nunc primum editi. Additus in calce Archimedis assumptorum liber, ex codicibus arabicis m.ss. serenissii magni ducis Etruriæ Abrahamus Ecchellensis maronita in alma urbe linguar. orient. professor latinus reddidit. Io: Alfonsus Borellus in pisana academia matheseos professor curam in geometricis versioni contulit, & notas uberiores in universum opus adjecit. Ad serenissimum Cosmum III Etruriæ Principem. Florentia, ex typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI. Superiorum permissu.* [Florence : 1661].
- [Ap-Ha] APOLLONIOS de Pergé (HALLEY, Edmund, éd. sc.). *Apollonii Pergæ conicorum libri octo, et Sereni Antissensis de sectione Cylindri & conici libri duo.* Oxoniæ, e Theatro Sheldoniano, An. Dom. MDCCX. [Oxford : 1710]. Édition consultée : Osnabrück, Biblio Verlag, 1984 [Fac-similé de cette édition].

- [Ap-Hea] *Apollonius of Perga. Treatise on conics Sections edited in modern Notation, with Introductions including an Essay on the earlier History of the Subject.* By T. L. Heath M. A. sometime Fellow of Trinity College, Cambridge... Cambridge, at the University Press, 1896.
- [Ap-Hei] APOLLONIOS de Pergé (HEIBERG, Johan Ludvig, éd. sc.). *Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg, dr. phil. Lipsiae, in aedibus B. G. Teubneri MDCCCXCI-MDCCCXCIII.* Édition du texte grec et traduction latine par I. L. Heiberg, en deux vol. Leipsig : Teubner, 1891-1893. Éd. consultée : rééd. stéréotype en deux vol., dans la coll. : *Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana. Stutgardiae in aedibus B. G. Teubneri MCMLXXIV.* Stuttgart : Teubner, 1974. Pour le livre IV, prop. XLVI : vol. II, p. 69-73.
- [Ap-M] APOLLONIOS de Pergé (GianBattista MEMO, éd. sc.). *Apollonii Pergei philosophi, mathematicae excellentissimi Opera per doctissimum philosophum Ioannem Baptistam Memum patritium venetum, mathematicarumque artium in urbe veneta lectorem publicum : De graeco latinum traducta & noviter impressa.* [En dernière page :] *Impr. Venetiis per Bernardinum Bindonum, mediolanenum, ad instantiam magnifici domini Ioannis Mariae Memi patritii Veneti, ipsiusque impensa... M. D. XXXVII.* [Venise : 1537.]
- [Ap-R/D-F/F] *Apollonius de Perge, coniques.* Berlin, New York : 2009. Édition publiée en quatre tomes sous la forme matérielle de sept volumes numérotés 1.1 (livre I en arabe), 1.2 (livre I en grec), 2.1 (livres II & III, arabe), 2.2 (livre IV, arabe), 2.3 (livres II à IV, grec), 3 (livre V, arabe) et 4 (VI à VII, arabe). Pour le livre IV, prop. XLVI, en grec : 2.2 ; en arabe : 2.3.
- [Ap-T] Gerald J. TOOMER. *Apollonius. Conics : Books V to VII : The Arabic Translation of the lost Greek Original in the Version of the Banû Mūsā. Edited with Translation and Commentary by G. J. Toomer.* Coll. *Sources in the History of Mathematics and physical Sciences*, n° 9. En deux vol. New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo & Honk Kong : Springer-Verlag, 1990.
- [Ap-VE] APOLLONIOS de Pergé (Paul VER EECCKE, trad.). *Les coniques d'Apollonius de Perge.* Traduction française de Paul Ver Eecke. Bruges : 1923. Édition consultée : nouveau tirage, Paris : Librairie Albert Blanchard, 1959, retraitage : 1963.

Autres sources

- [LH] Philippe de LA HIRE. *Sectiones conicae in novem libros distributae.* Paris : Michallet, 1685. En particulier, pour l'intersection des hyperboles : propositions III-37 à III-57, p. 45-64. Pour l'*Expositio brevis singularum propositionum conicorum Apollonii Pergaei, cum ipsarum demonstrationibus ex nostra methodo deductis* (appendice aux *Sectiones conicae*), p. 220-244.
- [Se-VE] SÉRÉNUS d'Antinoë. *Les livres de la section du cylindre et de la section du cône.* Édition française de P. Ver Eecke. Bruxelles : 1929. Édition consultée : nouveau tirage, Paris : Lib. Albert Blanchard, 1969.

Bibliographie secondaire

- [D-F] Micheline DECORPS-FOULQUIER. "Sur les figures du Traité des *Coniques* d'Apollonios de Perge", in : *SMF-Revue d'Histoire des Mathématiques (SMF)*, vol. 5, 1999, p. 61-82.
- [F/U] Michael N. FRIED et UNGURU, Sabetai. *Apollonius of Perga's Conica. Text, Context, Subtext.* Leyde, Boston, Cologne : Brill, 2001.