Circulation Transmission Héritage

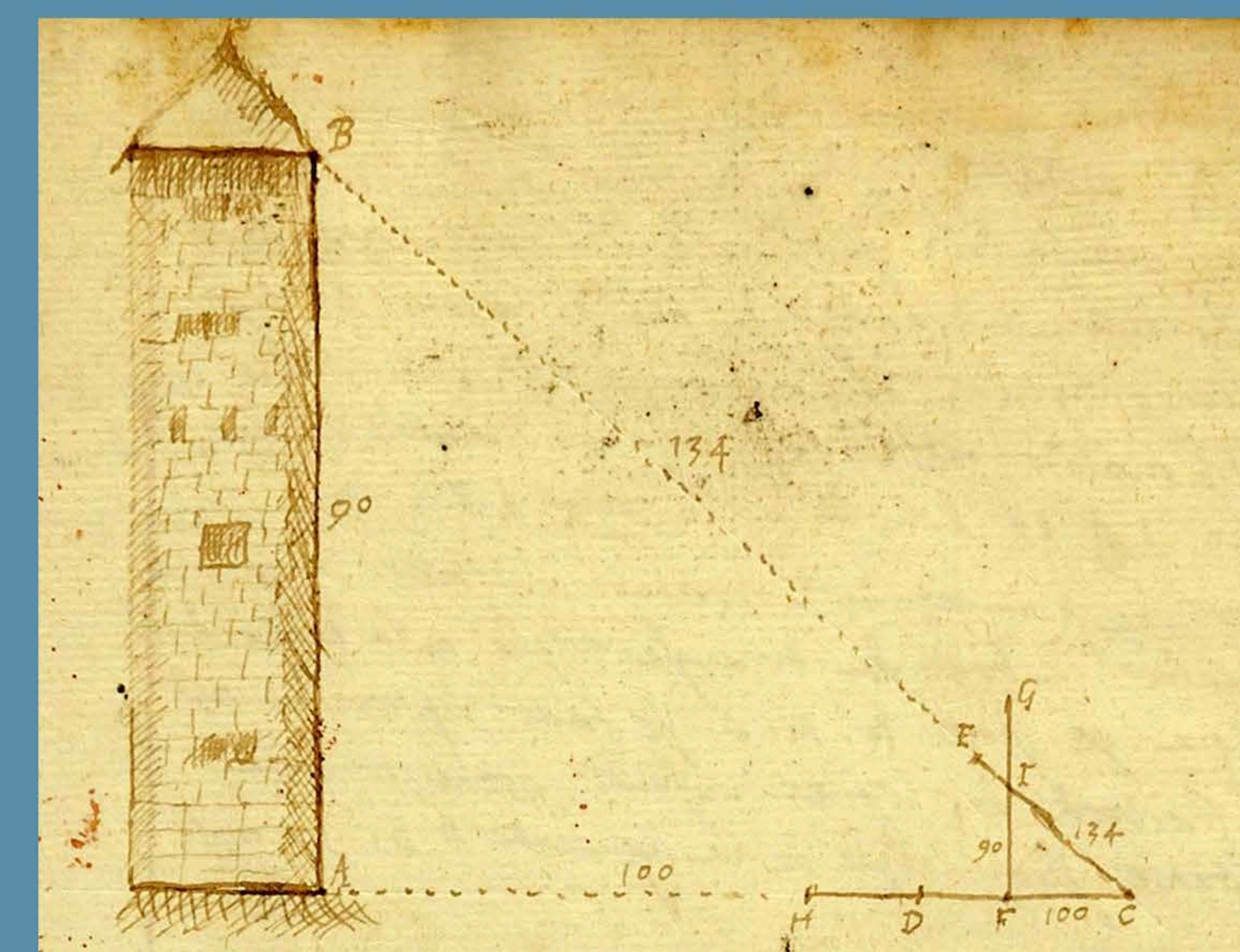
Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » sont différents. Cet ouvrage explore des moments historiques où des décalages, petits ou grands, nourrirent des héritages et furent le fruit des circulations et des transmissions. Il invite à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études qu'il rassemble mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

ISBN : 978-2-902498-06-2
Édition et diffusion : IREM de Basse-Normandie
juin 2011

IREM
de Basse-
Normandie

Circulation Transmission Héritage
histoire et épistémologie des mathématiques

Circulation Transmission Héritage



Actes du 18e colloque inter-IREM
histoire et épistémologie
des mathématiques
mai 2011

Université de Caen Basse-Normandie

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

II-2-Y.
Pages 557-581

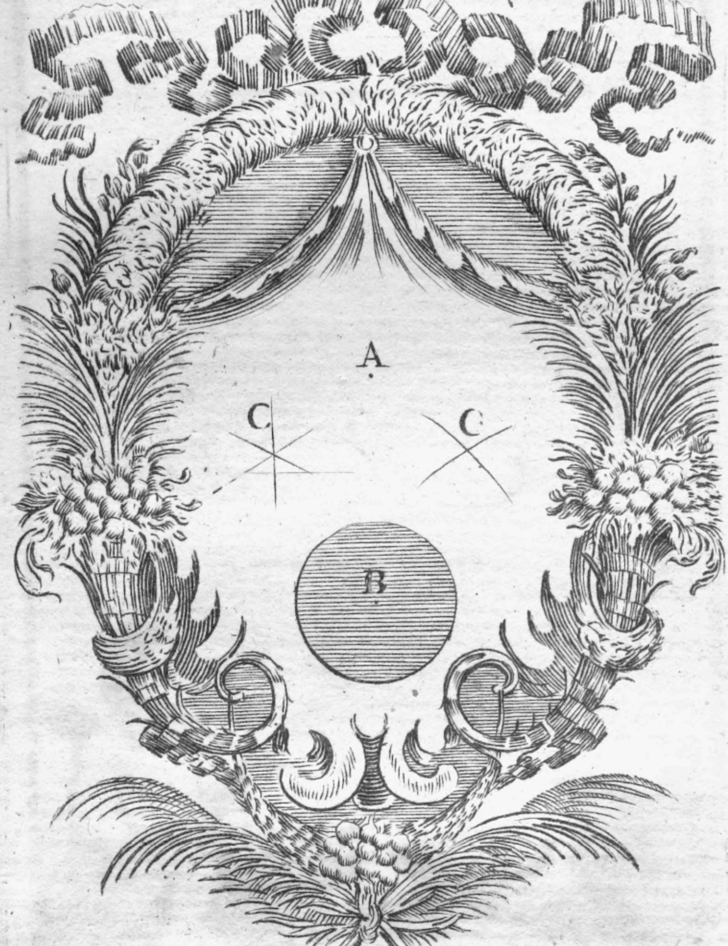
Les *Arithmétiques* de Diophante : introduction à la lecture d'une œuvre ancrée dans différentes traditions antiques

Alain Bernard

Circulation
Transmission
Héritage

Histoire et épistémologie des mathématiques

Planche I. Page 6.



Commission inter-IREM
Épistémologie et histoire des mathématiques

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

ISBN : 978-2-902498-06-2

Directeur de publication : Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie
Diffusion : IREM de Basse-Normandie, Université de Caen Basse-Normandie,
campus 2, 14032 Caen Cedex
Tél. : 02 31 56 74 02 – Fax. : 02 31 56 74 90
Adresse électronique : irem@unicaen.fr
Site Internet : http ://www.math.unicaen.fr/irem/
Coordination : Évelyne Barbin et Pierre Ageron
Comité de lecture : Pierre Ageron, Didier Bessot, Richard Choulet, Gilles Damamme, Guy Juge, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff, Pierrick Meignen, Thierry Mercier, François Plantade, Danielle Salles, Didier Trotoux et Éric Trotoux
Relecture générale : Pierre Ageron, Jean-Pierre Le Goff
Conception, illustration et mise en page du volume : Jean-Pierre Le Goff, Pierre Ageron, Didier Bessot et Didier Trotoux
Conception de l'affiche du colloque et de la couverture des actes : Patrice Gourbin
Impression et façonnage : Corlet numérique, 14110 Condé-sur-Noireau

Crédits photographiques de la couverture :
Bibliothèque de Caen, deux images tirées du manuscrit *in-fol.* 27 : *Pratique de geometrie*, de la main de Samuel Bochart (1599-1667)
– 1ère de couverture : mesure au *gonomètre* de la hauteur d'une tour, *f* °8 *r* °
– 4ème de couverture : mesure de la *gibbosité* de la mer entre Dieppe et la Rie (Rye), *f* °42 *v* °

Illustrations hors-texte :
Les 16 planches hors-texte des pages de l'ouvrage, paginées ii, viii, xiv, 28, 50, 94, 122, 240, 338, 360, 386, 446, 480, 502, 544 et 582, sont tirées de la *Pratique de la Geometrie, sur le papier et sur le terrein ; où par une methode nouvelle & singuliere l'on peut avec facilité & en peu de tems se perfectionner en cette science*, Par Sebastien Leclerc, Graveur du Roi. A Paris, Chez Ch. A. Jombert, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame. M. DCC. XLIV. (1744). *Avec Privilege du Roi.* (coll. part., clichés : jplg)

Sommaire

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

I-4. – Les figures : accompagner les mots

II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-1. – Hériter et inventer

II-2. – Transmettre et s'approprier

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-1. – Hériter et inventer

II-2. – Transmettre et s'approprier

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

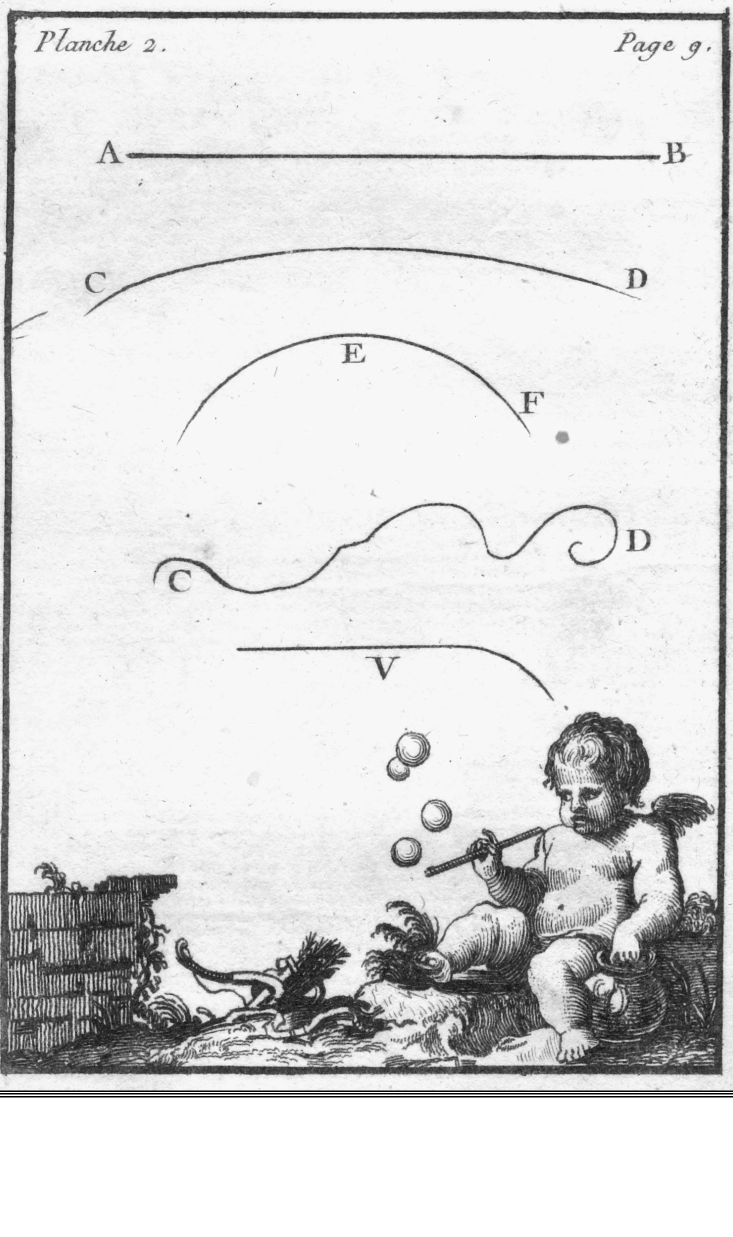


Planche 2.
Page 9.
A
B
C
D
E
F
C
D
V

Avant-propos

L'IREM de Basse-Normandie, institué dans l'université de Caen le 23 octobre 1973, cultive par précellence l'histoire des mathématiques. Dès l'origine, plusieurs de ses animateurs, professeurs de lycée, étaient conduits par une intuition : introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques serait de nature à aider les élèves à y retrouver du sens, sens que le formalisme – des "maths modernes", notamment – tendait à dissimuler. Mais la discipline "histoire des sciences" n'était alors guère développée dans les universités. C'est ainsi que commença un colossal travail de recherche fondamentale et appliquée, d'édition de sources, de formation initiale et continue, d'actions interdisciplinaires. Nombreux sont ceux qui y ont contribué ; je veux citer au moins les noms de Jean-Pierre Le Goff, Didier Bessot et Denis Lanier et leur rendre ici un hommage plein d'amitié et d'admiration.

C'est à l'IREM de Basse-Normandie qu'il revint d'organiser le tout premier colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, au château de Tailleville, en mai 1977, puis le X^e^ colloque d'une série devenue bisannuelle, sur le thème *La mémoire des nombres* – c'était à Cherbourg en mai 1994. Entre les deux, l'IREM de Basse-Normandie avait organisé, à l'initiative de l'Association pour le développement des études et recherches en histoire et épistémologie des mathématiques (ADERHEM), un colloque exceptionnel baptisé *Destin de l'art, dessein de la science* (octobre 1986). Enfin le XVIII^e^ colloque inter-IREM, dont vous tenez en main les actes, s'est tenu en mai 2010 au cœur de l'université caennaise, dans l'amphithéâtre Henri Poincaré (qui enseigna deux années à Caen). Le thème retenu, *Circulation – Transmission – Héritage*, invitait à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études ici rassemblées mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Basse-Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

Je remercie les institutions qui ont compris l'intérêt de cette manifestation : le ministère de l'Éducation nationale (via l'assemblée des directeurs d'IREM), la région Basse-Normandie, la ville de Caen, l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (régionale de Basse-Normandie), l'ADERHEM, et notre *alma mater* l'université de Caen Basse-Normandie.

Ce colloque n'aurait pu être organisé sans l'énergie déployée par Geneviève Jean, secrétaire de l'IREM, et par de nombreux animateurs de l'IREM, notamment Guy Juge, Éric Trotoux et Didier Trotoux. Enfin Jean-Pierre Le Goff, Didier Trotoux et Didier Bessot m'ont apporté une aide précieuse dans l'édition de ces actes. Que tous soient très chaleureusement remerciés.

Pierre Ageron
directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Présentation

Auteurs, destinataires et lecteurs d'un texte : histoires de décalages.

Évelyne Barbin,
IREM des Pays de la Loire,
Centre François Viète, Université de Nantes

La plus grande partie d'une œuvre se déroule sous la tyrannie de sa réception.
Christophe Prochasson, « Ce que le lecteur fait de l'œuvre. Héritages et trahisons : la réception des œuvres », *Mill neuf cent*, 12, 1994.

Le Colloque inter-IREM « Histoire des mathématiques : circulation, transmission, héritage » s'inscrit bien dans la visée de « la réception des œuvres » de Hans Robert Jauss, dont Christophe Prochasson indique l'intérêt pour l'historien dans le texte cité en exergue. Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Le cas des manuels, y compris les plus récents, n'échappe pas à cette distinction, que connaît bien l'enseignant : le destinataire du manuel est l'élève de classe de quatrième, mais la lectrice est Vanessa. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » – en utilisant l'expression de Jauss – sont différents. Cet ouvrage propose quelques moments historiques de décalages, petits ou grands, qui nourrissent les héritages, qui sont le fruit des circulations et des transmissions.

Les aspects matériels de la circulation des textes, leurs véhicules, font l'objet de la première partie. L'histoire des mathématiques arabes est intéressante, puisqu'elles sont au carrefour de langues diverses, elles commencent avec des traductions et se perpétuent avec d'autres traductions, dans une sphère culturelle large, comme le montrent Ahmed Djebbar et Pierre Ageron. Avec la transmission des *Éléments* d'Euclide en Arménie, Frédéric Laurent délivre une partie peu connue de l'histoire. L'ouvrage d'Euclide, transmis par les Jésuites en Chine, y connut un sort étrange, puisque les lecteurs orientaux négligèrent les démonstrations qui faisaient le succès des *Éléments* ailleurs. L'exemple du décalage très abrupt de l'attente entre Occidentaux et Chinois est illustré dans cet ouvrage par Isabelle Martinez et Jean-Pierre Le Goff. L'écart plus ténu entre langue savante, le latin, et langue vernaculaire, ici un dialecte italien, est examiné avec précision par Gérard Hamon et Lucette Degryse à propos des *Quesiti* de Nicollo Tartaglia au XVI^{e} siècle.

Il existe deux types de véhicules adaptés à des destinataires particuliers, ce sont les manuels et les revues mathématiques. Les manuels sont écrits à partir de sources diverses et à destination de commençants, avec le souci d'un rendu intégral des « idées » ou à l'inverse dans celui d'une « adaptation » aux élèves. Du côté des sources, Martine Bühler et Anne Michel-Pajus analysent celles d'un ouvrage d'arithmétique niçois du XVI^{e} siècle. Du côté des réceptions, Pierre Ageron et Didier Bessot retracent les tribulations d'un manuel de géométrie au XVIII^{e} siècle. Comme le montrent Anne Boyé et Guillaume Moussard, l'enseignement des vecteurs présente un cas très complexe aux sources multiples – géométriques, algébriques et physiques –, qui a beaucoup changé selon les destinataires à différentes époques.

L'édition des revues scientifiques commence au XVII^{e} siècle. Les journaux savants sont écrits par des « savants » à destination de leurs confrères, membres d'Académies nationales ou de Sociétés provinciales. La spécialisation de revues aux seules mathématiques au XIX^{e} siècle est contemporaine de publications pour des publics eux aussi plus spécialisés, qu'ils soient enseignants, amateurs ou bien mathématiciens. La transmission par des revues multiplie le nombre de possibilités de mise en évidence de décalages, en augmentant le nombre des auteurs et en accordant la plume aux lecteurs. Les articles de Jeanne Peiffer, de Christian Gérini et de Norbert Verdier offrent un large panel de périodes et de publics pour diverses revues sur trois siècles.

Les figures mathématiques ne transcendent-t-elles pas les questions de transmission en offrant un langage qui serait universel ? De plus, ne s'agit-il pas d'un langage qui précède l'écriture ? Ces questions trouveront des éléments de réponse dans les articles d'Olivier Keller et de Jean-Pierre Cléro. Prise du point de vue de la réception historique des « textes », la première question recevrait une réponse plutôt relativiste. Un triangle est vu comme une aire par Euclide et comme ses trois côtés par Descartes, il est désigné par des lettres chez les mathématiciens grecs et par des couleurs chez les chinois.

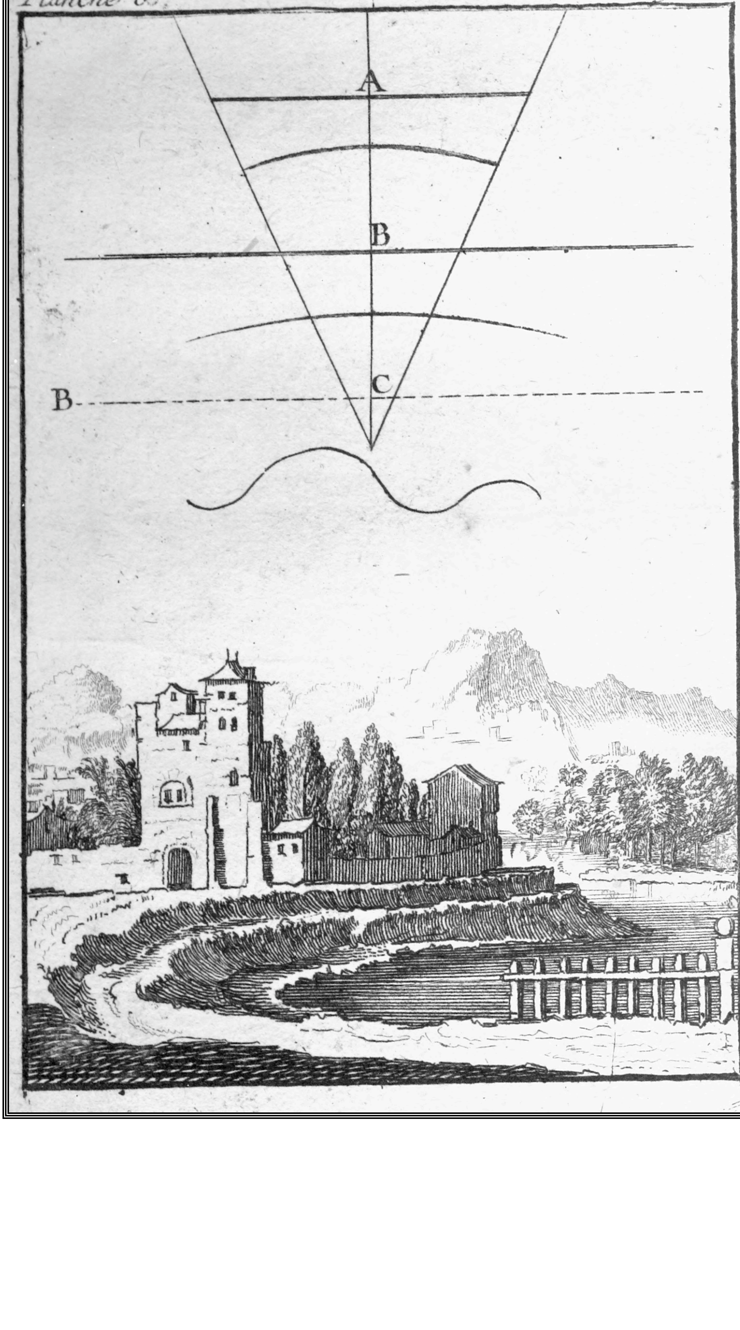
La seconde partie de cet ouvrage retourne à l'auteur d'un texte, mais sans abandonner la perspective du destinataire et du lecteur. En effet, l'auteur est lui-même un lecteur, et donc un texte peut être lu comme un maillon dans un échange dialogique. Car, comme l'explique Mikhaïl Bakhtine, un texte est écrit en réponse à d'autres auteurs de textes et il s'adresse à des lecteurs qui ont une « attitude responsive active ».

Lorsqu'un auteur doit écrire quelque chose qui lui paraît nouveau, c'est-à-dire susceptible d'aller au-delà des conceptions contemporaines, il doit aménager son texte. Autrement dit l'invention pose des problèmes accrus de transmission. C'est ce qu'analysent les articles de Jean-Paul Guichard, de Denis Lanier, Jean Lejeune et Didier Trotoux pour deux inventions mathématiques. L'histoire des mathématiques, qu'elle s'intéresse à des inventions ou des inventeurs, ne peut pas passer outre leurs intérêts sous-jacents, par exemple pour la nomographie présentée par Dominique Tournès. Le renouveau du genre biographique en histoire, indiqué par Gilles Damamme, va de pair avec une histoire des inventeurs dans le contexte intellectuel, social et culturel de leur époque. En suivant les propos de Pierre Ageron, cette perspective peut aussi être prise en compte dans l'écriture de l'histoire.

Le décalage entre un auteur et l'horizon d'attente de ses lecteurs contemporains est au cœur de la partie suivante. Évelyne Barbin explique que les contemporains de Descartes n'ont pas compris sa *Géométrie* de 1637 alors qu'elle semble aller de soi aujourd'hui. Lorsque que Jean Lejeune, Denis Lanier et Didier Trotoux utilisent le terme de précurseur, au dépit de l'histoire, n'est-ce pas pour écrire un grand décalage entre Gavarret et ses lecteurs ? Avec François Plantade et Jean-Pierre Le Goff, sont retracées les réceptions des œuvres de Grassmann et de Salomon de Caus. En vis-à-vis de ces articles, qui invitent à un relativisme constructif des « vérités mathématiques », Maryvonne Menez-Hallez pose la question du « mathématique ».

La dernière partie de l'ouvrage est plus orientée vers la lecture historique des textes. Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff et Didier Trotoux proposent une relecture d'une proposition d'Apollonius à partir de ses éditions et de ses traductions. Alain Bernard lit les *Arithmétiques* de Diophante comme un texte ancré dans différentes traditions antiques. Ainsi que le remarque Christophe Prochasson, « la tradition n'est pas un processus autonome de transmission », elle est au contraire un mécanisme de réappropriation du passé.

La thématique du colloque croise les questions d'enseignement et elle a vivement intéressé ceux qui dans les IREM associent l'histoire des mathématiques à son enseignement. Le riche sommaire de cet ouvrage en est le témoin.


A
B
B
C

Section II

D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

3. – Lire les Anciens aujourd’hui

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

II-2-Y.
Pages 557-581

Les *Arithmétiques* de Diophante : introduction à la lecture d'une œuvre ancrée dans différentes traditions antiques

Alain Bernard

Les *Arithmétiques* de Diophante : introduction à la lecture d'une œuvre ancrée dans différentes traditions antiques

Alain Bernard,
Centre A. Koyré (EHESS), Université Paris-Est Créteil
& IREM de Paris 7

Introduction

Quelques problèmes traditionnels posés par les *Arithmétiques*

Les *Arithmétiques* de Diophante sont un des textes les plus intriguants parmi ceux que nous a légués l'Antiquité grecque. Sa cohérence globale reste partiellement incomprise, puisque nous ne connaissons que dix des livres de problèmes dont le traité était originellement composé : six livres conservés en grec et quatre autres dans la traduction arabe de Qustâ Ibn Lûqâ (IX^{e} siècle après J.-C.)[1] L'auteur des *Arithmétiques* n'est connu que de nom : nous ne savons rien du temps ou du milieu dans lesquels il a vécu[2]. Le contenu de l'ouvrage lui-même a été diversement interprété, et ceci dès sa première réception ou "renaissance" dans le contexte arabe : s'agissait-il d'un recueil de problèmes arithmétiques ou d'un travail d'algèbre[3] ? Il ressemble en effet à un traité algébrique à plusieurs égards, notamment par l'usage d'une échelle d'inconnues accompagnées d'une désignation abrégée et par l'exposé de techniques utiles à la résolution des équations intermédiaires. D'un autre côté, le traitement diophantien des problèmes donne moins d'importance à ces

1 Si les trois premiers livres de la tradition grecque semblent bien correspondre aux trois premiers des treize livres d'origine, la répartition des sept autres que nous connaissons, soit par le grec, soit par la traduction, est moins assurée – sauf pour les quatre livres en arabe qui suivent directement les trois premiers livres en grec. Pour une traduction française du texte grec, voir [VE] ou la traduction plus récente, mais bien moins accessible car non éditée d'André Allard [Al], dont celle que je propose ici suit *grosso modo* le principe sinon la lettre. Le texte grec est lisible dans l'édition d'Allard ou dans celle de Paul Tannery, qu'on peut facilement trouver, consulter et télécharger sur le réseau [Ta, 1893-95]. Pour le texte des livres conservés en arabe, il existe deux éditions, l'une avec une traduction en français [Ra], l'autre avec une traduction en anglais [Se].

2 Sur ce point, les spéculations les plus poussées ont été avancées par Paul Tannery, qui a proposé une argumentation complexe et, dans l'ensemble, assez fragile, pour défendre une datation basse, vers le III^{e} siècle ap. J.-C. à laquelle, faute de mieux, on fait le plus souvent référence. Voir cependant les critiques de J. Klein sur cette thèse [Kl, p. 128-130 et les notes].

3 Voir la discussion de ce point dans [Ra, p. x-xvi]. Pour l'annonce en 1463, par Regiomontanus et dans le contexte humaniste renaissant, d'un manuscrit de Diophante au contenu algébrique, voir [Ci, p. 125-6].

équations qu'aux problèmes eux-mêmes, aux nombres qui les satisfont et surtout, comme nous le verrons, à la stratégie qui permet d'obtenir une équation, puis les nombres en question.

La tâche de déterminer ce qui est ou non important dans cet ouvrage est rendue encore plus complexe par l'absence d'une mise en contexte historique vraiment convaincante de l'ouvrage[4]. La plupart des interprétations ont fait jouer à Diophante le rôle d'un algébriste précoce. Cette interprétation est en un sens légitime, dans la mesure où le "mariage" du contenu des *Arithmétiques* avec d'autres traditions, notamment dans le monde arabe et à la Renaissance européenne, a effectivement participé à la constitution de l'algèbre moderne. En effet, la promotion de Diophante au titre de "proto-algébriste" grec soit être comprise en lien à un aspect important de la transformation de l'algèbre, particulièrement à la Renaissance : à savoir, qu'elle a été accompagnée et légitimée à l'époque par différentes "réécritures" de l'histoire des mathématiques[5]. Mais l'histoire des sciences contemporaines a remis en question, dès le début du XX[e] siècle, la légitimité des lectures algébriques des mathématiques anciennes et/ou médiévales *en tant qu'outil d'interprétation historique* de ces dernières[6].

Les bases d'une nouvelle interprétation historique de l'œuvre diophantienne[7]

Si on poursuit jusqu'à son terme l'approche des historiens contemporains, rendus méfiants à l'égard des facilités d'une lecture assimilatrice (algébrique en particulier), on peut alors renverser l'ordre des lectures et ne plus voir en Diophante, ou dans son texte, *que la somme accumulée de ses lectures ou de ses "renaissances"*. C'est apparemment ce qu'a proposé de faire Norbert Schappacher qui a mis du même coup en doute la possibilité même de « lire le texte de Diophante en tant que tel »[8]. Cette position est certainement défendable pour ce qui est du *personnage historique* Diophante, sur lequel nous ne disposons d'aucun témoignage fiable, pas plus apparemment que les érudits anciens ou médiévaux : il n'est effectivement que le produit de ce qu'on a dit

4 Les tentatives les plus connues sont celles de Paul Tannery et de Jacob Klein. Le premier interpréta la facture des problèmes diophantiens comme un témoignage du christianisme de Diophante [Ta, 1912]. Le second inséra le travail diophantien dans le cadre de la tradition de la "logistique théorique" ancienne, dont il reconstitua les traits sur le fondement de textes platoniciens [Kl, ch. 10, p. 126-149].

5 Voir là-dessus [Ci] qui résume les enjeux des débats autour de l'histoire (ou plutôt des histoires) de l'algèbre à la Renaissance. Pour un exemple suggestif d'un effet de "réappropriation" d'un problème diophantien par différents auteurs à la Renaissance, voir [Gu].

6 Pour une discussion de ce point particulier concernant Diophante, voir [Vi].

7 Ce paragraphe explique le lien entre cet exposé et une recherche historique que j'ai menée par ailleurs avec un collègue athénien : les lecteurs que ces explications n'intéressent pas peuvent passer à la section suivante de l'introduction, puis au corps de l'article.

8 Voir [Sch, 2002] et [Sch, 2005]. Le premier (dans un ancien volume inter-IREM) est la traduction française d'une version antérieure du second texte, en anglais, lui-même lisible en ligne.

de lui au cours de la longue histoire de ses “réceptions”. Mais concernant le *texte* des *Arithmétiques*, c’est une position paradoxale : s’il est vrai que nous n’avons aucun texte, issu de la tradition directe ou d’une traduction, qui ne soit issu d’une réappropriation d’un texte antérieur, ne fût-ce que sous la forme d’une copie annotée, il n’en reste pas moins que ce qui a été transmis, au-delà de toutes les variations que la transmission a nécessairement fait subir à l'original, garde une remarquable cohérence stylistique et de contenu. Il paraît pour le moins exagéré ou artificiel d’attribuer cette cohérence au seul produit des réappropriations et recopies successives : elle doit au contraire être attribuée, en bonne partie, à une *œuvre* originelle, dont l’unité de composition est encore perceptible. S’il faut certes renoncer à reconstituer le *texte* primitif, qui est inatteignable[9], on peut difficilement nier l’existence de l’*œuvre*. De ce point de vue, une lecture du texte de Diophante “en tant que tel” reste possible : il est cependant plus juste de dire que ce qu’on vise alors est la cohérence d’une œuvre plus que celle d’un texte *de facto* absent. La reconstitution de cette cohérence est d’ailleurs nécessaire au travail d’identification des variations et des commentaires que les glossateurs, éditeurs, traducteurs de Diophante ont pu pratiquer sur cette œuvre. À mes yeux, l'argument de Schappacher peut convaincre qu’une lecture mathématicienne du texte est plus ou moins vaine, notamment en raison du fait que toute recherche pour trouver des ‘théorèmes généraux’ chez Diophante est vouée à l’échec ou à la frustration. Mais cela ne prouve rien de plus que la chose suivante : quand un mathématicien moderne ou contemporain cherche dans Diophante ce qu’il aimerait y trouver, à savoir un certain *sens de la généralité* au sens où la conçoit un mathématicien contemporain, il ne le trouve pas ou doit le suppléer. La solution raisonnable est alors de tâcher de restituer la cohérence de l’œuvre de Diophante, sans préjuger *a priori* qu’elle doive observer les canons d’un savoir, d’une méthodologie ou de visées qui lui soient étrangers.

Cette tâche de “relecture” contextuelle et attentive de l’œuvre de Diophante n’est certainement pas facile, mais elle n’est pas non plus impossible. C’est ce que montre en particulier une étude récente de Jean Christianidis [Ch], qui propose, en partie à titre programmatique, une approche de l’œuvre de Diophante et de la cohérence du projet sous-jacent, qui soit respectueuse des termes dans lesquels ce projet est énoncé. Il énonce aussi l’hypothèse que ces termes pourraient être compris sur l’arrière-fond culturel, pour ainsi dire, de la rhétorique ancienne. Cet appel peut sembler incongru, dans la mesure où la rhétorique ancienne, à un niveau conceptuel ou pratique, paraît s’appliquer à de tout autres contenus que mathématiques. D’un autre côté, plusieurs historiens, dont je suis, ont montré que cette approche est non seulement légitime, mais aussi éclairante, c’est-à-dire qu’elle permet mieux d’approcher la structure et les

[9] On ne peut même pas supposer qu’il ait été unique.

finalités de certains traités anciens. Ainsi, j'ai montré dans mes études sur Pappus d'Alexandrie que les notions de *problème* ou d'*invention*, qui appartiennent à la tradition rhétorique ancienne, étaient des composants essentiels de l'approche que propose Pappus de la pratique mathématique de résolution de problèmes, aussi bien au niveau de sa technicité propre qu'au niveau conceptuel où cette pratique se trouve décrite et légitimée[10]. Jean Christianidis et moi-même avons donc continué à travailler dans cette direction et constaté qu'elle offrait une entrée nouvelle et intéressante sur la cohérence du projet diophantien[11].

Le projet d'une lecture guidée des *Arithmétiques* de Diophante et l'objet du présent article

Détailler l'approche historique des *Arithmétiques* que j'ai développée avec Jean Christianidis n'est pas directement l'objet du présent article, et je me contenterai donc, à cet égard, d'allusions passagères. Par contre, son objectif premier est de faire sentir progressivement, à partir du commentaire de quelques passages choisis des *Arithmétiques,* ce qui nous paraît être le cœur du projet diophantien : non pas initier son lecteur à ce qui serait une sorte de proto-algèbre grecque[12], mais pratiquer une traduction raisonnée des termes des problèmes à résoudre en d'autres termes, ceux de ce que Diophante nomme une *théorie arithmétique*.

Ce "guide de lecture" n'est pas un premier essai, mais le résultat de plusieurs expériences vivantes, toujours avec des collègues enseignants, pour les introduire à cette lecture[13]. Aussi les extraits que je propose ici, ainsi que l'ordre des lectures, suivent-ils l'ordre que j'ai adopté dans mes ateliers de lecture : par imitation consciente du projet diophantien lui-même, il s'agit de suivre une *voie*, qui passe nécessairement par des lectures détaillées de passages choisis de la préface des *Arithmétiques* et de certains de ses problèmes.

Le choix d'une telle voie, dans les ateliers comme dans l'article, répond à un second objectif : proposer aux auditeurs, tous enseignants ou intéressés à l'enseignement des mathématiques, une matière (que j'espère) intéressante pour réfléchir à ce qui me semble constituer un problème épistémologique et pédagogique majeur : notre façon d'enseigner la résolution de problèmes, qu'ils

10 On trouvera dans [Be, 2002] un résumé, à partir de quelques exemples accessibles, de cette lecture et de ses implications.

11 La première partie de ces études paraîtra dans *Archive for History of Exact Sciences* et contient une analyse détaillée de la structure des problèmes des trois premiers livres des *Arithmétiques*.

12 Même si, comme on le verra plus loin, les techniques algébriques ne sont pas absentes de l'appareil conceptuel de Diophante.

13 J'ai d'abord fait lire le texte dans le cadre d'une formation continue (à laquelle j'ai été invité à participer par mon collègue François Loget, que je remercie ici), puis dans le cadre du XVIII[e] colloque inter-IREM (Caen, mai 2010), enfin lors de la sixième université d'été européenne *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique* ESU 6 (Vienne, juillet 2010).

soient d'ailleurs arithmétiques ou géométriques, laisse-t-elle aux élèves l'initiative de la *manière de poser* un problème ? La réponse à cette question étant, malheureusement, le plus souvent négative, je pense qu'une lecture attentive de Diophante permet de réfléchir à l'appauvrissement potentiel de notre enseignement qu'une telle négligence entraîne.

Enfin j'aimerais ici proposer quelques réflexions qui me sont venues à partir de mes ateliers : je me suis aperçu que les collègues à qui je faisais lire Diophante n'ont pas bondi d'enthousiasme, comme je l'avais anticipé, sur la base trompeuse du plaisir que je prends *aujourd'hui* à lire Diophante. Pour le dire platement, cette expérience, au fond, m'a paru leur causer immédiatement plus de désagrément que de plaisir. Une explication incontournable est certainement que je n'ai été ni assez prudent avec ma propre approche, ni assez adroit pour faire sentir à mon auditoire l'intérêt que pouvait avoir cette lecture. Mais je pense qu'il faut aussi considérer le côté *intrinsèquement troublant* de cette lecture, qui tient fondamentalement au fait que la voie suivie par Diophante ressemble à de l'algèbre et invite donc à le lire dans ces termes, mais n'en est pas en réalité. Je reviendrai donc sur ce "trouble" et sur ces "visées essentielles" dans mes conclusions (partie 3).

Pour l'heure, retournons donc à Diophante, dont je propose ici une présentation en quelque sorte dogmatique et en deux parties : d'abord la préface (partie 1), ensuite quelques problèmes (partie 2).

1. – Le projet diophantien et ce qu'en dit l'introduction des *Arithmétiques*

Une visée : développer une *capacité inventive* dans les problèmes arithmétiques.

Un peu comme la « lettre volée » qui fait l'objet d'une nouvelle célèbre d'Edgar Allan Poe, les premières lignes de la préface de l'ouvrage de Diophante énoncent un projet peut être trop évident pour être bien compris de lecteurs contemporains. Voici la traduction des termes mêmes de Diophante que je propose [*Arithm.* 2.3-13] :

> L'invention des <traitements des> problèmes dans les nombres, mon très honoré Dionysios, je sais que tu es très zélé pour l'apprendre, et j'ai donc essayé <ici>, en commençant par les fondements sur lesquels ces choses sont établies, d'exposer la nature et la puissance qui est dans les nombres.
>
> Sans doute, l'affaire paraît-elle bien difficile à aborder, tant qu'elle n'est pas encore familière – les âmes des débutants désespèrent de réussir – mais elle te deviendra facile à saisir, sous l'effet de ton désir zélé et de ce que je

> t'en montrerai. Car elle parvient vite à l'instruction, l'ambition qui s'adjoint l'enseignement.

Ces quelques lignes définissent de manière schématique le cœur d'un projet, qui n'est centré principalement ni sur des problèmes[14], ni même sur leurs solutions : de ces dernières, il est certainement question plus loin dans la préface et dans certains des problèmes, mais ce n'est pas ce dont il est ici *directement* question. De quoi est-il alors question ? L'objet du traité, c'est *l'invention* de tels traitements des problèmes, et le but, c'est de l'apprendre. Autrement dit, le projet explicite ne vise pas le contenu de l'ouvrage, mais un absent, qu'il s'agit pour le lecteur, Dionysios, d'atteindre par son intermédiaire, et qui s'appelle : l'invention (*heurêsis*). L'ouvrage est, plus exactement, un traité, *pragmateia* ; la chose qui est visée est une "affaire", *pragma* : l'objet ne sera atteint que dans une effectuation – ou, comme le dira plus loin Diophante, en suivant une *voie* (*hodos*).

Que tout soit dans l'effectuation et un apprentissage progressif, d'une part, et que le traité n'offre en cela qu'une assistance, un intermédiaire, c'est ce qu'énonce le second paragraphe cité, de manière à la fois dense et suggestive. Travestissons un instant Diophante en romantique : le but est tragiquement inatteignable, et au débutant on ne peut promettre que désespoir et frustration, faute qu'il soit encore familier avec la chose, ou l'affaire. Faute d'atteindre l'objet, qui ne sera donc énoncé nulle part, il ne reste qu'une impulsion, le désir d'apprendre, d'un côté, et l'assistance de ce que Diophante a préparé, le support d'une voie, de l'autre. On peut à ce point de vue, et très légitimement, penser aux *Arithmétiques* comme à un *mathêma*, un support d'apprentissage.

Il y a donc deux choses à bien comprendre ici : la première, que le but ne peut être livré en propre puisque c'est au lecteur de l'atteindre ; la seconde, que le traité que nous abordons ainsi n'est pas l'objet à considérer directement : il n'est que le support d'une voie, une sorte d'instrument que Diophante nous répute donc utile.[15]

J'ajoute brièvement quelques éléments plausibles de contexte : si les termes de cette introduction nous paraissent en effet étranges et résonnent à nos oreilles comme une sorte de poésie philosophique, il n'en va probablement pas de même pour des contemporains, nécessairement lettrés, et à qui les termes d' "invention", de "problème", de "familiarité", de "désir", d' "apprentissage" et d'enseignement "montré" formaient un tout très connexe et cohérent, puisqu'ils définissaient à leur manière le cœur de la culture lettrée antique ou

---

14 Bien que le traité lui-même, comme Diophante l'explique plus tard, soit constitué d'une longue et riche série de problèmes répartie en treize livres.

15 Remarquons au passage qu'un autre traité mathématique célèbre de l'époque impériale, la "grande composition" ou *Almageste* de Claude Ptolémée, est présentée suivant une stratégie toute semblable, mais en des termes qui font plus explicitement appel à des distinctions philosophiques anciennes.

paideia. Poser un problème, c'est d'abord, en rhétorique, mettre au défi un orateur de parler. *Inventer* le discours qui répond à ce défi oratoire, dont le thème est ce que les anciens appellent *l'hypothèse*, est une des tâches de l'orateur : trouver la matière, les 'idées' de la réponse en quelque sorte. La valeur de la réponse en acte tient dans le fait qu'elle peut être vue comme le support d'un apprentissage : c'est en voyant faire qu'on apprend l'invention, et en imitant (au sens précis de ce terme dans ce contexte, qui ne renvoie ni à un plagiat ni à une copie) qu'on s'approprie les règles de composition d'un discours[16]. Cet apprentissage est donc affaire de familiarité, d'acculturation ou, comme l'on disait encore jusqu'au XIX^e^ siècle, de "lente imprégnation". Enfin, bien entendu, tout ceci n'est pas "rhétorique" au sens moderne, c'est-à-dire un pur exercice formel, mais beaucoup plus fortement, un art de penser, de domestiquer sa pensée et sa capacité à inventer le nouveau à partir de l'ancien, au travers d'un exercice permanent et soumis au jugement d'autrui ; cet exercice vise à former un individu libre et cultivé, c'est-à-dire capable d'action, de production dans la vie politique. Cette éducation est toute entière un *poiêtikon pragma*, affaire de production[17].

Cet aperçu, forcément trop court, vise ici simplement à faire entendre que si nous n'entendons plus ces mots comme quelque chose de familier, il n'en allait pas de même des anciens, ni plus généralement des esprits qui, comme les humanistes de la Renaissance, étaient encore formés à l'exercice de la rhétorique. C'est également en suivant les leçons de la rhétorique ancienne que j'ai construit l'atelier dont je restitue ici les leçons essentielles.

La tension entre les termes des énoncés et ceux de la théorie arithmétique.

Le deuxième élément qu'introduit Diophante dans sa préface est une double série de termes, certains d'entre eux relatifs aux noms des nombres qu'on trouve dans *les énoncés* de problèmes (et seulement à cet endroit), les autres propres aux éléments (*stoicheia*) de ce qu'il appelle une *théorie arithmétique* : ces derniers ne sont ensuite employés que dans les *traitements* ou *solutions*. Il faut ici, à nouveau, citer ce passage essentiel [*Arithm.* 2.14-6.8.], car il est un des fondements de l'appareil qui rend possible le travail d'invention, comme nous le verrons :

> Comme tu sais, entre autre choses, que tous les nombres sont formés d'une certaine quantité d'unités, il apparaît que cette dernière est établie de telle sorte que son existence s'étend à l'infini ; et parmi ces nombres, on en rencontre

16 Sur les règles de la bonne écoute, du *bene audiendi*, voir le beau texte de Plutarque, *Comment on doit bien écouter*, qui fait partie des *Moralia* [Ma].

17 Sur tous ces points, je renvoie à mon chapitre plus développé paru dans un autre volume inter-IREM [Be].

– Certains, les *carrés*, lesquels viennent d'un certain nombre multiplié par lui-même ; et ce dernier nombre est appelé le *côté* du <nombre> carré ;
– Et d'autres, les *cubes*, qui viennent de carrés multipliés par leur propre côté,
– Et d'autres encore, qui viennent de carrés multipliés par eux-mêmes ;
– Et d'autres, qui viennent de carrés qui sont multipliées par les cubes sur leurs côtés ;
– D'autres enfin, qui viennent de cubes multipliés par eux-mêmes ;
et partant de tout cela <*i.e.*, toutes ces sortes de nombres>, soit par l'addition, par la différence, ou la multiplication, ou leurs rapports entre eux, ou bien avec leurs propres racines, il advient que de multiples problèmes arithmétiques peuvent être tressés ; mais ils sont dénoués et résolus,[18] si toutefois tu marches selon la voie qu'on t'indiquera <ici>.

Il a ainsi été convenu que chacun des <sortes de> nombres ci-dessus, après avoir reçu une désignation abrégée, devient un élément de la théorie arithmétique.
– Ainsi, on appelle *puissance*[19] le carré et son signe distinctif est le Δ avec pour indice Y : <donc> Δ^{Y}, c'est la puissance.
– Le *cube*[20] a ainsi un signe distinctif, K avec pour indice Y : K^{Y}, <c'est donc> le cube.
– Le nombre venu du carré qu'on multiplie par lui-même est appelé *bicarré*[21], et son signe est deux deltas ayant pour indice Y ; $\Delta^{Y}\Delta$, <c'est donc> le bicarré.
– Le nombre venu du carré multiplié par le cube sur son côté est le *carré-cube*[22] et son signe propre est le <groupe de lettre> ΔK ayant pour indice Y, ΔK^{Y} <est donc> le carré-cube.
– Le nombre venu du cube multiplié par lui-même est le *cubocube*,[23] et son signe propre est deux kappas ayant comme indice Y, $K^{Y}K$ <est donc> le cubocube.
– Enfin le nombre qui ne possède aucune des particularités précédentes, mais qui possède en soi-même une quantité indéterminée d'unités, est appelé *arithme*[24] indéterminé et son signe distinctif est le ς[25].

---

18 Cette périphrase traduit le jeu de mots sur le terme grec employé, *luetai*, de *luein*, qui peut s'entendre des deux façons : résoudre et dénouer.
19 *Dunamis*. La translittération est essentielle pour comprendre le sens des abréviations introduites ensuite, qui reprennent généralement certaines lettres des noms introduits, comme ici "delta" et "upsilon".
20 *Kubos*.
21 *Dunamodunamis*.
22 *Dunamokubos*.
23 *Kubokubos*.
24 Je reprends la traduction de Ver Eecke, qui fait usage d'une forme quasi translittérée d'*arithmos* pour désigner le nombre indéterminé, quand il tient le rôle d'un élément de la théorie au cœur des solutions.
25 Le signe en grec est possiblement une ligature des deux premières lettres d'*arithmos*. Voir sur ce point [He, p. 33-36].

> Il y a encore un autre signe pour l'invariant des nombres déterminés, l'unité[26], et son signe est le M qui a pour indice le O, <c'est-à-dire> M^{O}.[27]

Cette présentation très riche, dont je constate qu'elle ne cesse d'intéresser des enseignants modernes, mériterait plus de commentaires que je ne peux en faire ici[28]. Je me borne à attirer l'attention sur la phrase de transition, qui explicite que les opérations qu'on peut faire sur les différents "types" de nombres (carrés, cubes, ou autres) conduisent à la possibilité de *tresser* des problèmes, c'est-à-dire de nouer la difficulté, ce qui en fait par conséquent l'enjeu. *Résoudre* le problème, la métaphore est ici délibérée, veut dire *dénouer* cette difficulté "tressée" : *luein*, d'où *lusis*, la solution, le dénouage. C'est au sujet de ce "dénouage", de la solution, que Diophante parle une première fois d'une *voie* à suivre pour y parvenir[29].

La voie passe par la possibilité de retraduire des termes choisis de l'énoncé dans les termes d'une théorie arithmétique dont Diophante présente l'échelonnement, et pour chaque terme ou *espèce*, leurs noms ainsi qu'une désignation abrégée de ces derniers. Au sujet de cette échelle, notons d'emblée qu'il ne s'agit pas, comme une traduction trop rapide pourrait le suggérer, d'une échelle partant de l'inconnue (x) et montant vers ses « puissances » (x^2, x^3, etc.), mais d'une échelle partant de la puissance (*dunamis*) et du cube (*kubos*) et qui monte ensuite vers des niveaux qui sont obtenus par différentes multiplications de ces espèces "élémentaires", comme par exemple le "bicarré" ou "puissance-puissance" (*dunamodunamis*) qui est la puissance multipliée par elle-même.[30] C'est seulement *à la fin* qu'on évoque le "nombre indéterminé" ou l' "arithme" suivant l'habile traduction de Ver Eecke ; puis l'unité ou monade, c'est-à-dire l'unité en tant que terme de la théorie arithmétique.

Pour respecter dans la suite, et notamment dans la partie 2, le caractère particulier des *désignations* diophantiennes, nous adoptons une transcription inspirée d'André Allard, en notant Ca pour le carré, n pour l'arithme ou "le nombre", u pour les unités, enfin Df pour le défaut, le manque.

---

26 *Monas.*

27 En suivant l'interprétation de [Ch], je n'ai pas traduit les termes « carré-carré », etc. qui, dans le texte de Tannery, sont apposés aussi à la première liste de termes. Cela paraît en effet contradictoire avec le principe d'introduction des éléments de la théorie arithmétique en les nommant, et peut être plausiblement interprété comme une interpolation.

28 En particulier, il est passionnant d'étudier ici comment le lexique est directement mis au service de la constitution d'un échelonnement dans ces termes, la concaténation renvoyant à un produit des espèces en jeu.

29 Noter toutefois que le terme substantivé *lusis* n'est jamais employé par Diophante, on ne trouve chez lui que le verbe.

30 Le nom même fait entendre l'opération, et l'écriture abrégée reprend les éléments essentiels de cette composition.

La présentation du calcul sur les espèces, en toute généralité

Les rapports de multiplication entre les degrés de cette échelle des termes de la théorie arithmétique ne sont cependant pas tous lisibles sur les noms : une grande partie de la préface vise à expliciter l'ensemble des opérations qui permettent de multiplier une espèce par une autre. Ces espèces ne se limitent d'ailleurs pas aux degrés présentés dans la liste ci-dessus, mais comprennent d'autre espèces "inverses", systématiquement nommées en ajoutant *-ston*, c'est-à-dire l'équivalent de notre *-ième*, aux noms précédents. Ainsi l'*arithmoston* est l'inverse de l'arithmos : c'est un "arithmième", et ainsi des autres. De plus, certaines espèces peuvent être combinées par adjonction ou par défaut pour en former de nouvelles, comme lorsqu'on dit que deux monades sont en *défaut* d'un arithme : ce sont en quelques sortes des "espèces combinées" des précédentes. Des règles précises gouvernent la multiplication de telles espèces, que Diophante énonce également[31].

Notons un point important : toutes ces opérations, sauf celles de multiplications sur les espèces "non combinées" et leurs inverses, ne sont pas illustrées par des exemples : on en donne au mieux les règles, mais elles sont globalement évoquées d'une manière très allusive, comme dans le passage suivant, qui comme tous les autres ne devient vraiment intelligible que quand on entre dans les solutions effectivement proposées [*Arithm.* 14.1-10] :

> Après t'avoir mis au clair sur leurs multiplications, les divisions <*litt.* partitions> des espèces proposées sont claires. Il est bien, cela étant, que celui qui aborde ce traité se soit exercé à l'addition, la soustraction et aux multiplications de ces espèces ; et à comment tu devras ajouter d'autres espèces à des espèces existantes ou en défaut, sous condition qu'elles ne soient pas en même quantité, et que <ces espèces ajoutées> soient existantes, ou bien existantes et déficientes ; ou encore, à comment tu devras retrancher d'espèces existantes et à d'autres qui sont en défaut, des expressions qui seront soit existantes soit existantes et en défaut.

Ce qui à nouveau est désigné ici, dans le même esprit que les premières lignes de la préface, est soit un préalable adressé au lecteur, soit une invitation à un certain niveau de lecture des problèmes : dans les deux cas, il est invité à s'exercer au calcul sur ces espèces. Il ne s'agit pas d'expliquer la pratique, mais *d'indiquer schématiquement qu'il faut pratiquer*, ce qui est différent.

Les calculs relatifs à l'équation obtenue

Les calculs évoqués précédemment ne concernent qu'une étape bien précise de la résolution : celle qui précède l'obtention d'une égalité entre espèces

---

31 Ce résumé rapide renvoie à [*Arithm.* 6.9-12.21]. La liste est malheureusement trop longue pour être étudiée ici, mais j'encourage le lecteur à faire sérieusement l'expérience de la lire.

calculées ou *équation*. À ce stade, et à ce stade seulement, de nouvelles opérations sont indiquées ; ces dernières ne s'appliquent véritablement qu'aux équations obtenues ou bien aux nouvelles équations qu'on peut en déduire [*Arithm.* 14.11-20] :

> Et ensuite de cela, à chaque fois que dans quelque problème il adviendra que quelques espèces soient égales à quelques autres, qui sont les mêmes mais pas en même quantité de part et d'autre, de chaque terme il faudra <savoir> retrancher les semblables des semblables, jusqu'à ce que *un* type d'espèce devienne égal à *un* type d'espèce. Au cas que, de quelque manière, il subsiste de part et d'autre des espèces en défaut, il faudra ajouter les parties déficientes de chaque côté, et à nouveau retrancher les semblables des semblables, jusqu'à ce que ce, de chaque côté, une seule sorte d'espèce subsiste.[32]

Les deux opérations fondamentales sont ici « retrancher les semblables des semblables » qui est une expression standard du vocabulaire géométrique ancien et est l'équivalent, chez les algébristes arabes, de la *muqâbala* ou opposition ; et « ajouter les parties déficientes » (s'il y en a), à nouveau une opération habituelle et qui est l'équivalent du *jabr* ou restauration. Le point important que souligne Diophante en conclusion et sur lequel il insiste encore dans la phrase suivante est que l'équation finalement obtenue ne doit plus comporter qu'une espèce "simple" de chaque côté, comme par exemple : « deux *dunameis* égalent à un arithme ».

La transition vers les problèmes eux-mêmes

Toutes ces opérations et leur finalité ne deviennent bien sûr explicites qu'au regard des problèmes effectifs, ceux qui sont présentés ensuite. C'est précisément ce qu'indiquent les derniers termes de la préface, qui n'offrent pas moins d'importance que les propos liminaires et en reprennent d'ailleurs l'esprit [*Arithm.* 14.25-16.7] :

> Pour l'instant, cependant, nous nous engagerons dans la voie des propositions, sachant que nous avons réuni une abondante matière portant sur ces espèces elles-mêmes. Comme ces choses sont nombreuses et d'une grande ampleur, et que pour cette raison même elles sont lentement maîtrisées par ceux qui les reçoivent ; comme encore il y a en elles des choses difficiles à fixer en mémoire : j'ai jugé bon de diviser ce qui est susceptible de l'être en elles, et au tout premier chef de mettre à part celles qui viennent au début, à la manière des éléments, en allant de celles qui étaient plus simples vers celles qui sont plus retorses. De telle sorte

32 Noter la césure très nette introduite par le « Et ensuite de cela », *meta tauta*. L'emphase sur *un* nous revient.

> qu'elles deviendront plus aisées à suivre pour les commençants, et que leur introduction pourra être mémorisée ; et quand à leur traitement dans leur entier, il se fera en treize livres.

Le point important est ici que la voie annoncée se poursuit au long des problèmes et de leurs traitements, qui ont été agencés en sorte d'en permettre l'assimilation progressive. Autrement dit, une partie de ce à quoi il faut se familiariser est indiquée de manière en quelque sorte immanente à la suite des traitements, auxquels il faut donc passer pour continuer notre chemin – c'est-à-dire, finalement, suivre Diophante, puisqu'il nous y invite.

Mais n'est-ce pas *quand même* de l'algèbre ? Retour sur un regret possible

Marquons ici une pause sur le chemin, afin d'enterrer sans regret nos envies éventuelles de prendre les chemins de traverse, cette « voie royale » qu'Euclide (ou peut-être Ménechme) refusait au roi Ptolémée (ou peut-être à Alexandre) dans une anecdote célèbre. En effet, le contenu de la préface, et particulièrement toutes les parties qui s'intéressent au calcul sur les espèces, puis surtout aux opérations sur les équations qu'on obtient à la fin des calculs, rappelle en tout ce qu'on trouve en algèbre. Le lecteur pressé se demandera donc peut-être d'où viennent les prévenances des historiens modernes sur une lecture algébrique de Diophante.

Or s'il ne fait aucun doute qu'on retrouve bien ici, bien avant la publication de tout traité portant en son titre et en son cœur l'opération d'*algèbre*, des opérations du même type, c'est-à-dire s'appliquant à des équations, leur *fonction* dans le traité est tout à fait différente. En particulier, elles ne sont pas du tout mises au centre du propos. Au mieux, elles sont instrumentales, et on peut même ajouter que le pluriel est de trop, car n'est instrumentale que le seul type d'équation "qui compte vraiment", à savoir le type « une espèce égale à une espèce », pour une raison que nous verrons par ailleurs ultérieurement.

Le centre du propos de Diophante est tout à fait ailleurs, dans cette chose qu'on ne peut pas *expliciter*, mais seulement *aider à acquérir*, qui est l'invention des solutions de problèmes arithmétiques. L'exposé de la théorie arithmétique, qui n'est ici qu'un instrument, n'est lui-même pas centré sur ces équations, et il n'est pas fait non plus de telle façon qu'on puisse tout de suite comprendre comment se pratiquent les opérations : pour cela aussi, il faut suivre la « voie des problèmes », qui propose, sinon des exemples, du moins un terrain d'exercice permettant de pratiquer les opérations auxquelles la préface fait allusion. Cette « voie des problèmes » n'est donc pas annexe, ni un simple terrain d'application, mais elle constitue bien, avec la préface, un des centres de l'exposé. La structure globale du traité rappelle en fait celle du poème philosophique de Parménide, lui aussi proposant une voie qui est exposée en deux parties qui ne peuvent se concevoir l'une sans l'autre[33].

2. – La voie diophantienne et ce qu'en montre l'agencement des problèmes

Afin de bien saisir la structure d'un problème diophantien et de son traitement, le mieux est de partir d'un exemple simple où toutes les étapes apparaissent assez clairement, le premier problème.[34]

Partager un nombre proposé en deux nombres <qui soient l'un à l'autre> dans une différence donnée.	
Que le nombre donné soit <le nombre> 100, la différence 40 u. <On doit> trouver les nombres <cherchés>.	
Que le moindre <nombre> soit posé 1 n. Le plus grand sera donc 1 n 40 u. <Les deux> ensemble, donc, deviendront 2 n 40 u. Ils sont donnés par ailleurs, 100 unités. Donc, 100 u sont égales à 2 n 40 u.	*Tetachthô*
Et <il faut retrancher> les semblables des semblables. Je retranche du <nombre> 100, 40 u, et des 2 arithmes et des 40 unités, semblablement, 40 unités. Les restes 2 n, sont égaux à 60 u. Chaque <arithme> devient donc 30 u.	*Homoia apo homoiôn.*
Retour aux positions : le moindre sera 30 u, le plus grand 70 u. Et la preuve est évidente.	*Epi tas hupostaseis Apodeixis*

De manière générale, les effets de structuration des propositions ou de leur traitement, ainsi que les formules employées qui permettent de distinguer une partie d'une autre, sont des aspects essentiels des mathématiques grecques anciennes. Là encore, il ne s'agit pas de simples ornements, ou alors dans un sens beaucoup plus fort que ce qu'un contemporain comprend sous ce terme : la structure porte la pensée et la possibilité d'une mémorisation intelligente, qui autorise *in fine* l'adaptation de cette structure à des cas nouveaux. Passons donc en revue ces éléments de structure qu'un regard moderne, là encore oublieux des leçons d'Edgard Allan Poe, pourrait prendre trop vite pour des détails ou un décorum inessentiel.

L'énoncé du problème (ou *protase*) fait apparaître, sous une forme d'abord générique[35], toutes sortes de nombres, qui sont ici les suivants :

---

33 Voir [Du, p. 255-272] pour une traduction française des fragments édités par Diels-Kranz.

34 Pour plus de clarté, je présente le traitement par un tableau, en indiquant en vis-à-vis les termes grecs translittérés correspondant aux termes soulignés dans la traduction.

– les nombres cherchés (*zêtoumenoi*), c'est-à-dire « à inventer », à trouver : il s'agit ici des deux nombres qui constituent le partage ;

– les nombres donnés ou prescrits, généralement dans la phase dite d'*instanciation* : il s'agit ici du nombre proposé et de la différence donnée, qui sont *ensuite* instanciés en 100 et 40 unités respectivement.

Dans certains énoncés, qui n'apparaissent qu'à partir du livre II, d'autres sortes de nombres indéterminés peuvent apparaître, qui n'ont aucun de ces deux statuts. Prenons pour exemple l'énoncé du problème II. 11 [*Arithm.* 96.5-6.] :

> *À deux nombres donnés, ajouter un même nombre, et faire que chacun devienne un carré.*

Cet énoncé comporte deux nombres donnés (instanciés en 2 et 3 unités chez Diophante), un nombre cherché (celui qu'on additionne) et deux nombres indéterminés, les (nombres) carrés qu'on obtient au terme de l'opération. Ces carrés ne sont ni cherchés ni donnés, mais sont néanmoins indéterminés et participent au "tressage" de la difficulté.

La difficulté, précisément, tient à la fois à la nature des nombres impliqués (comme dans le dernier exemple) et, bien sûr, dans la présence d'une prescription (*epitagma*), que certains traducteurs, à la suite de Tannery, ont imprudemment traduit par « condition », qui précise l'algorithme que doivent vérifier l'ensemble des nombres impliqués. Cette prescription est à la fois une procédure et une injonction, dont la forme générale est "il faut faire que tel calcul (qu'on précise) donne tel résultat (dont on précise aussi la nature)".

Certains problèmes comprennent, avant l'instanciation, un « diorisme » (*prosdiorismos*), c'est-à-dire l'énoncé de limites assignables aux nombres donnés qu'on peut spécifier. Je passe ici sur cette notion qui mériterait une étude particulière. Le point important ici est d'identifier correctement le contenu du traitement du problème, c'est-à-dire de sa *solution* : le processus par étapes qui, conformément à la préface, permet de dénouer la difficulté. Le concept crucial qui structure la plupart des solutions diophantienne est celle de position (*hypostasis)*, à laquelle la préface ne fait qu'une allusion rapide et insuffisante pour être compréhensible à ce stade. Dans le premier problème, par exemple, trois positions sont prises, qui sont autant de correspondances entre un nombre évoqué dans l'énoncé ou bien une combinaison de ces derniers et une espèce "fabriquée" à partir des termes de la théorie arithmétique. Ici nous avons trois positions dont deux sont *déduites* des précédentes à l'aide de la structure de l'énoncé :

---

[35] C'est-à-dire sans donner l'exemple d'aucun nombre. De tels exemples ne sont précisés que dans un second temps.

Ordre	Position (correspondance)	Explication
1	Le moindre nombre est posé un arithme.	Sans justification.
2	Le plus grand nombre est *donc* un arithme et quarante unités.	Renvoi implicite à la prescription, qui fixe la différence entres les nombres partagés.
3	Les deux ensembles, *donc*, deviennent 2 arithmes et 40 unités.	Reconstitution du nombre partagé, qui est par ailleurs donné.

Ici, c'est le fait que le nombre partagé soit donné qui autorise à déduire de la dernière position atteinte une *équation* : cent unités égalent deux arithmes et quarante unités. C'est cette équation qui fait ensuite l'objet du traitement dont les étapes sont schématiquement indiquées dans la préface et qui permet d'en déduire l'arithme comme une certaine quantité d'unités, ici trente unités.

La dernière étape fait alors une sorte de synthèse entre le *catalogue des positions*, qui comprend les positions des deux nombres ici cherchés et les unités déterminées trouvées pour l'arithme : chaque position répertoriée indique au fond le calcul à faire pour déduire des nombres déterminées qui vérifient ou "font" le problème. Il est important de noter que ces nombres trouvés ne sont rien de plus que des nombres qui conviennent au problème : ils n'en sont pas les "solutions" au sens moderne. Il n'y a ici, pour Diophante, qu'une solution, et c'est le dénouement du problème qui est obtenu dès que les positions convenables ont été prises. Le reste n'est que calcul et vérification.

Je m'arrête encore à la "chaîne des positions" qui ouvre le traitement : en fait, on s'aperçoit très vite que cette chaîne forme la partie essentielle de la solution-dénouement, car dans les problèmes suivants les parties finales (résolution de l'équation, détermination de l'arithme et calcul des nombres trouvés, éventuellement preuve) ne sont plus qu'esquissées et laissées aux soins du lecteur. Voici par exemple l'énoncé et le traitement du problème I. 22 [*Arithm.* 50.21 - 52.19.] :

> *Trouver trois nombres, tels que chacun d'eux cédant une fraction proposée de celui qui le suit, les nombres ayant ainsi cédé et reçu deviennent égaux.*[36]
>
> Que soit donc proposé que le premier <nombre > donne au second le tiers de lui-même, que le second <donne> au troisième le quart, puis que

[36] Comme le montre la lecture de la solution, il faut comprendre ce problème comme si ces nombres étaient les fortunes de trois personnages qui décideraient de *d'abord* donner simultanément une part (différente pour chacun) de leur fortune au suivant (dans un certain ordre), puis de recevoir simultanément les parts concédées par les précédents. La prescription est alors qu'à l'issue de ces deux opérations, les fortunes deviennent égales.

> le troisième <donne> au premier le cinquième, et qu'ils deviennent égaux après l'échange.
>
> Que le premier <nombre cherché> soit posé une certaine <quantité> d'arithmes ayant une tierce fraction, puisqu'il cède son tiers : soit donc 3 n. Et que le second <soit posé> une certaine <quantité> d'unités ayant une quatrième fraction, puisqu'il donne le quart : que ce soit donc 4 u. Dès lors, le second nombre cédant et recevant devient 1 n 3 u. Il reste que le premier <nombre> cédant et recevant doit aussi devenir 1 n 3 u. Mais donnant de soi-même le tiers, 1 n, et recevant 3 u Df 1 n, il devient 1 n 3 u. Donc, 3 u Df 1 n est la cinquième partie du troisième <nombre>. Ce dernier, donc, est lui-même 15 u Df 5 n. Il faudra encore que le troisième <nombre cherché>, cédant le cinquième de lui-même, et recevant du second le quart, <soit> 1 u, devienne 1 n 3 u. Mais cédant le cinquième de lui-même, <soit> 3 u Df 1 n, le reste est 12 u Df 4 n. Ces derniers sont égaux à 1 n 3 u, et l'arithme devient 2 u.
>
> Retour aux positions. Le premier <nombre> sera 6 u, le second 4 u, et le troisième 5 u. Et les <prescriptions> de l'énoncé sont manifestement <vérifiées>.

Ce nouveau problème est intéressant à plus d'un égard. Il montre à l'évidence, et ce cas est représentatif de la majorité des traitements du livre I outre les tous premiers, que la partie essentielle de la solution est bien l'enchaînement des positions : ici les détails qui mènent de l'équation à la détermination de l'arithme sont sous-entendues, ainsi que la preuve. Il y a ici sept positions, dont les cinq dernières sont déduites, directement ou non, des deux initiales. Il montre en outre clairement que l'objet n'est absolument pas de trouver toutes les solutions : en termes algébriques modernes, les conditions de l'énoncé reviennent à deux équations à trois inconnues et non équivalentes, les solutions forment donc une droite vectorielle, il y en a une infinité. Mais dans l'esprit d'une solution diophantienne on se contente de trouver deux nombres, en pleine conscience que d'autres seraient possibles : mais épuiser ces possibilités n'est pas l'objet de la discussion. Le problème est, à nouveau, d'entrer en capacité concrète de les trouver, de les inventer, ce qui a bien peu à voir avec une "analyse des problèmes" ou de leur structure comme celle que l'algèbre moderne rend possible.

La deuxième remarque qu'on peut faire en comparant ces solutions est qu'elles suivent à l'évidence un même schéma global. Même si certaines étapes sont sous-entendues, on passe uniformément d'un énoncé générique à un énoncé instancié (dont les limites sont éventuellement précisées), puis à un enchaînement de positions, qui se clôt par l'obtention d'une équation, laquelle est résolue de façon à déterminer l'arithme ; enfin, par retour aux positions, les nombres cherchés sont à leur tour déterminés et une preuve est éventuellement faite. Ce schéma se retrouve systématiquement dans tous les traitements, quitte à ce que certaines étapes, comme la résolution de l'équation, soient laissées dans l'implicite. On peut dire qu'il s'agit là d'une méthode, au sens strict qu'elle est répétitive : sa répétitivité accompagne, soutient et rend possible le *travail essentiel*, qui consiste à *apprendre à bien poser* les correspondances ou positions qui forment le cœur de la solution. La méthode, littéralement le "soutien de la voie", autorise ce que, jusqu'au XIXe siècle, on appelait dans l'enseignement classique la lente imprégnation, l'apprentissage progressif et par variations lentes de techniques d'invention et d'écriture.

À cet égard, il est possible d'aller plus loin et d'analyser plus en finesse la façon dont les différentes positions sont obtenues. On l'aura remarqué en effet sur les deux exemples ci-dessus, la plupart des positions, à l'exception des premières, sont *explicitement déduites* des précédentes. Les formules comme 'donc', 'par conséquent', 'puisque..' sont fréquentes et ponctuent le passage d'une ou de plusieurs positions à la ou aux suivantes. Même les positions initiales, si elles ne sont pas justifiées ou justifiables en rapport à des positions précédentes, inexistantes par définition, s'éclairent en fait par la comparaison des traitements : par exemple, la façon de poser pour le moindre nombre cherché un arithme, en première position, ne concerne pas que le seul premier problème mais les quatre suivants. De même, c'est dans le problème 22 qu'apparaît pour la première fois l'idée qu'on puisse poser non seulement un des nombres cherchés, mais aussi et simultanément un autre qui n'est donc pas déduit du premier : cette méthode est introduite, mais est ensuite longuement répétée tout au long des dernières problèmes du livre I et des premiers du livre II, préparant ainsi à l'introduction de méthodes plus complexes.

De manière générale, une enquête plus approfondie permet d'établir une typologie de ces déductions (pour les positions dérivées) ou de ces "manières répétitives" (pour les premières positions), chaque classe de cette typologie pourrait être baptisée une *méthode d'invention*, dans l'esprit indiqué ci-dessus. Cet inventaire, que je n'ai pas la place de proposer dans les limites de cet article,[37] conduit à deux conclusions simples mais importantes : le nombre de ces méthodes d'invention est limité (il se borne à une dizaine sur l'ensemble des problèmes compris dans les trois premiers livres) et leur ordre d'introduction est clairement progressif, passant des plus simples au plus complexes. Autrement dit, la cohérence des problèmes diophantiens semble bien devoir être recherché là où Diophante l'indique lui-même, c'est-à-dire *au niveau des séries de solutions* et de leur progressivité. C'est un résultat important pour la recherche historique, car il permet au moins d'analyser en profondeur lien revendiqué entre le projet indiqué dans la préface et la structure des problèmes elle-même. D'un point de vue en quelque sorte programmatique, celui du

---

37 C'est l'objet de la première étude que J. Christianidis et moi-même avons préparée que de proposer une telle analyse.

lecteur moderne, cette conclusion offre une leçon aussi simple qu'importante : c'est dans la manière d'organiser les traitements des problèmes que repose la voie proposée par Diophante et que sa fécondité doit être reconnue. Nous en revenons en fait à un conseil maintes fois donné par les interprètes de Diophante : on ne peut le comprendre qu'en le lisant, tout résumé le trahit ;[38] sauf que le problème ne tient pas à un manque de méthode, il faut inverser la proposition : la méthode tient dans la progressivité, et le seul problème est d'admettre, comme nous le propose Diophante lui-même dans les premiers mots, que la familiarité avec ces manières de faire ne nous viendra pas *d'un coup*, mais *au long*.

Cet aperçu de l'agencement des problèmes diophantiens est probablement trop bref, mais la chose est à la fois obligée et voulue : la lecture que je propose, et que je donne pour fidèle à l'esprit du texte, consiste au fond à redoubler convenablement l'invitation que fait Diophante à le suivre, en faisant comprendre cette invitation, en formant le regard à l'accepter. Pour conclure cette partie, donc, je propose de relire les deux traitements du célèbre problème II.8 qui, déjà dans l'Antiquité, donnait du fil à retordre aux commentateurs [*Arithm.* 90.8-92.14] :

> *Partage un carré prescrit en deux carrés.*
>
> Qu'on propose de partager le <nombre carré> 16 en deux <nombres> carrés.
>
> Et que le premier <carré cherché> soit posé 1 Ca ; l'autre <carré cherché>, par conséquent, sera 16 u Df 1 Ca ; il faudra donc que 16 u Df 1 Ca soit égales à un carré. Je forme donc ce carré à partir d'un nombre quelconque d'arithmes en défaut d'autant d'unités qu'il y a dans le côté des 16 unités. Que ce soit <à partir de> 2 n Df 4 u. Le carré lui-même sera 4 Ca 16 u Df 16 n. Lesquelles sont égales à 16 u Df 1 Ca.
>
> Qu'on ajoute de part et d'autre le défaut, et <qu'on retranche> les semblables des semblables. 5 Ca, donc, sont égaux à 16 n, et l'arithme devient 16 cinquièmes. L'un <des nombres trouvés> est $^{256}/_{25}$, l'autre $^{144}/_{25}$, et les deux ajoutés font $^{400}/_{25}$, soit encore 16 u, et chacun d'eux est <bien> un <nombre> carré.
>
> Autrement
>
> Que, de nouveau, le <nombre carré> 16 soit à diviser en deux <nombres> carrés.
>
> Qu'on pose de nouveau que le côté du premier <carré cherché> 1 n, et pour l'autre un nombre quelconque d'arithmes, en défaut d'autant d'unités qu'il y en a dans le carré qu'on divise. Que ce soit 2 n Df 4 u. Les carrés eux-mêmes seront, pour l'un 1 Ca, et pour l'autre 4 Ca 16 u Df 16 n. Je veux en outre que les deux ajoutés ensembles soit égaux à 16 unités. 4 Ca,

---

38 Voir par exemple [He, p. 54-58].

> donc, <et> 16 u Df 16 n sont égaux à 16 u, et l'arithme devient 16 cinquièmes.
>
> Le côté du premier <carré> sera dont 16 cinquièmes – lui-même sera $^{256}/_{25}$; le côté du second est $^{12}/_{5}$ – lui-même sera donc $^{144}/_{25}$. Et la preuve est claire.

L'intérêt de cette proposition est la présence de deux solutions, la seconde étant une alternative à la première. Le regard pressé trouvera peut-être que les deux solutions "reviennent pour l'essentiel au même" ; si on en reste à l'esprit de la progression, qui consiste à mettre le lecteur en capacité d'inventer des solutions, en établissant des chaînes de positions convenables, on voit que les deux enchaînements diffèrent sensiblement.

Dans la première solution, la plus courte puisqu'elle ne comporte que quatre positions, la première position est pour un des carrés qu'on veut obtenir : le second est alors déduit et, pour dénouer la difficulté, on utilise une méthode introduite ici pour la première fois dans les problèmes diophantiens, savoir la méthode introduite le plus souvent par la formule *plassô* ("je forme") : elle consiste en la *formation* d'un carré tel, que l'équation qui en résultera sera du type attendu (une espèce égale à une espèce). Cette méthode est employée en général, dans la suite du livre II et des autres livres où on l'utilise, pour former adéquatement un carré ou un cube *qu'on veut obtenir*, comme c'est le cas ici (le second nombre du partage doit être carré).

Dans la seconde solution, par contre, on pose simultanément les *côtés* des deux carrés du partage, par une méthode qui est donc semblable à celle qu'on a vu employée pour le problème I. 22 et qui est reprise longuement dans les solutions qui sont entre ces deux problèmes. La seconde solution est donc plus proche que ne l'est la première des solutions précédentes, et tout se passe comme si on avait voulu "adoucir" la nouveauté de cette première introduction de la méthode "*plassô*" par une solution alternative, plus conforme à ce qui précédait.

Comme le problème I. 22, enfin, ces deux solutions partagent la caractéristique troublante, pour un lecteur moderne, que le nombre d'arithmes introduit dans la méthode "*plassô*" est arbitraire : Diophante choisit ici deux arithmes comme il pourrait choisir un autre nombre, comme il l'indique à plus loin. L'accent n'est pas ici mis sur ce nombre arbitraire ni sur l'ensemble des nombres qu'on pourrait ainsi choisir, mais bien sur le choix du 4 qui, lui, doit être la racine du nombre divisé, si toutefois on cherche à ce que les calculs subséquents aboutissent à une équation convenable : l'objectif est de nous mettre en capacité d'inventer des nombres et de dénouer une difficulté, non pas d'analyser le problème ou "ses solutions" au sens moderne. En outre ce problème a pour vertu essentielle d'introduire une nouvelle méthode, cette introduction ne prenant en fait sens et "épaisseur" qu'au fur et à mesure qu'on lit les *autres* problèmes où elle est réemployée. Il y a donc peu d'intérêt, dans cet esprit, à se demander pourquoi deux plutôt qu'un autre nombre ont été choisis : ce qui compte est qu'on tient ici un problème très simple qui permet de gagner un nouveau "tour de main" dans l'art de "bien poser" les nombres quand, comme ici, la prescription oblige à obtenir *in fine* un carré.

3. – Ce qu'on peut tirer de telles lectures pour l'enseignement et la formation

Lire Diophante, pour réfléchir à la manière d'énoncer puis de poser un problème

Même si elle est schématique et incomplète, la présentation précédente, en forme de diptyque, suffit pour revenir sur quelques problèmes évoqués en introduction, et qui constituent en réalité ma principale motivation à mettre en place mes "ateliers de lecture".

Je reviens donc tout d'abord sur le premier objectif déclaré de ces ateliers : faire réfléchir à la manière dont on laisse ou non l'initiative à autrui (à nos élèves) de poser les termes de la solution d'un problème. La question est très simple : lui laissons-nous effectivement cette initiative ? En effet, beaucoup des exercices qu'on trouve dans nos manuels d'enseignement, *par souci pédagogique revendiqué*, n'invitent pas l'élève, le plus souvent, à s'interroger sur la manière dont il ou elle pose un problème ni sur le vaste appareillage de traductions potentielles qui lui sont possibles. On ne l'invite pas non plus toujours à réfléchir au fait que différentes façons de 'traduire' un problème entraînent différents calculs, plus ou moins complexes. L'usage s'est au contraire répondu d'insérer *dans les énoncés eux-mêmes* des éléments qui n'appartiennent en propre qu'à *une* traduction possible du problème – induisant l'idée que ce choix n'en est pas un, puisqu'il est contenu dans les termes de l'énoncé lui-même. Un peu comme ces questions "codées" qui, dans la conversation courante, contiennent déjà une grande partie de la réponse, ces problèmes invitent d'emblée (quand ils ne l'imposent pas) à suivre une voie particulière qu'elle prescrit plus ou moins insidieusement.

L'intérêt du calculateur, aussi bien d'un point de vue pratique que théorique, est généralement de simplifier les calculs pour arriver vite à une équation et de préférence la plus simple possible ; l'intérêt du mathématicien et du pédagogue est généralement de ne pas perdre le sens de ce qu'on fait. De ces deux points de vue, négliger la phase de traduction d'un problème en langage savant, pour se complaire à une démarche algébrique lourde en calculs ou pour arriver à une équation difficile à résoudre, paraît contraire à ces deux objectifs naturels.

Cette problématique en rejoint pour moi une autre, qui est en plein dans l'actualité (toujours changeante) de nos programmes d'enseignement : ces derniers promeuvent, notamment dans le cadre du "socle commun", la démarche d'investigation et la résolution de problèmes qui apparaissent dans une situation-problème complexe. Cela conduit les programmes à souligner l'importance des opérations de modélisation et de leur prise de conscience. Or ces opérations de modélisations, qui partent nécessairement et par définition de segments de situations dites "*réelles*" ou données comme telles, s'apparentent étroitement à ces opérations de *choix* qu'on fait sur ces situations franchement artificielles que sont les problèmes qu'on pose "en mathématiques". Cela peut se lire à double entrée : ou bien on considère que l'opération intellectuelle de modélisation et ses contraintes propres peut introduire efficacement à la problématique du choix et à "l'ouverture des possibles" quand on pratique en mathématiques la résolution de problèmes ; ou bien on considère, à l'inverse et dans une perspective plus classique, que s'entraîner sur des problèmes mathématiques prépare à s'affronter à des situations plus complexes de modélisation. Je suggère pour ma part que toute dispute sur laquelle de ces deux lectures doit être privilégiée, est vaine : c'est affaire de préférence et surtout d'opportunité. Par contre, la dialectique entre ces deux opérations parentes n'est possible que si, au niveau de la résolution des problèmes mathématiques, *l'ouverture des possibles* a été maintenue dans la manière même de les énoncer, puis d'inviter autrui (les élèves) à en aborder la solution.

Quoi qu'il en soit, il me semble que la lecture de Diophante peut de ce point de vue provoquer des prises de consciences aussi utiles qu'efficaces, dans la mesure où les problèmes concernés ne sont pas nécessairement d'une résolution complexe. Par contre, percevoir les nuances dans les stratégies possibles de résolution, *même sur un problème "simple"* en termes de calculs, présente une complexité propre, comme nous l'avons vu plus haut au sujet du problème II. 8.

Je ne songe pas ici à *faire lire* Diophante à des élèves : l'intérêt d'une telle prise de conscience concerne surtout la formation des enseignants, d'où mes propres tentatives pour introduire ces lectures dans le cadre d'une formation continue ou des ateliers mentionnés en introduction. En formation initiale, j'ai songé à utiliser très modestement l'esprit diophantien dans le cadre d'une leçon de préparation à l'oral du CAPES, sur des problèmes de collège. Une des difficultés classiques à laquelle il s'agit en effet d'initier les étudiants, dans ce contexte, est le fait que la plupart des problèmes arithmétiques posés au niveau du collège se résolvent par bien d'autres méthodes qu'algébriques, y compris pour les problèmes qui sont censés exercer ou tester la capacité à poser et résoudre un problème en termes algébriques. J'ai ainsi fait travailler des étudiants sur ce problème très simple, tirés d'une épreuve de brevet antérieure au passage à l'euro :

> *Une rose coûte 8 F de plus qu'une marguerite. Un bouquet de cinq marguerites et de sept roses coûte 104 F. Quel est le prix d'une rose ? Quel est le prix d'une marguerite ?*

Cet exercice est un excellent exemple de la manière insidieuse par laquelle on inculque précocement à des élèves que les problèmes doivent se résoudre par l'algèbre : la formulation stéréotypée renvoie en effet à un type d'exercice qui n'est généralement utilisé que pour exercer les méthodes de résolutions algébrique avec une ou deux inconnues. Un élève[39] peut néanmoins s'affranchir des stéréotypes et se poser ce problème sans préjuger de la meilleure méthode pour le résoudre. Or ces méthodes sont multiples : on peut y parvenir par calcul mental, à l'aide d'un tableur, par fausse position, par essai-erreur, etc. Toutes ces méthodes se révèlent plus efficaces qu'un calcul algébrique quand on a posé une ou deux inconnues. On peut alors ajouter une méthode qui ressemble à la méthode algébrique, mais en diffère puisqu'elle suit davantage l'esprit diophantien, l'arithme étant ici devenu un "truc" :

– Posons que le prix d'une rose est un truc ;

– Le prix d'une marguerite est donc un truc auquel manquent 8 F ;

– Le prix de sept roses, en outre, sera sept trucs ;

– … et le prix de cinq marguerites, 5 trucs auxquels manquent 40 F ;

– Donc, le prix de sept roses et de cinq marguerites sera douze trucs auxquels manquent 40 F ;

– Mais ce prix est aussi 104 F. On en tire facilement le truc : 12 F ;

– Revenons à ce que nous avons posé plus haut : le prix d'une rose est 12 F, celui d'une marguerite est 4 F.

Les calculs algébriques ont été mis dans un coin, quelque part sous le tapis, à la manière de Diophante : une phrase elliptique indique que, d'une équation facile, on peut tirer la valeur du truc qu'on a posé. Mais l'essentiel du raisonnement tient ici dans l'enchaînement des positions, et signale à chaque instant le *sens* de ce qu'on calcule. C'est précisément ici qu'on mesure la distance énorme qui sépare un calcul algébrique, où l'on ne pense pas et ne doit pas penser, sinon à observer les règles du calcul.

Lire Diophante, pour le pur plaisir de se sentir mal à l'aise

Un second avantage de la lecture de Diophante m'est apparu au cours même de mes premières expériences pour construire une formation à partir de la lecture de ces textes. Comme je l'ai signalé plus haut, je me suis rendu compte à l'usage, en quelque sorte, que la lecture que j'appellerais "prudente" de Diophante, c'est-à-dire celle que j'ai fait pratiquer et qui met systématiquement à distance l'idée qu'une traduction algébrique soit un outil

[39] Ou, à plus forte raison, un étudiant pour qui les souvenirs de collège sont loin…

légitime de compréhension, avait un effet profondément déstabilisant pour bien des collègues. Ce que j'avais au fond mal anticipé, alors, était que les habitudes de lecture que j'avais prises à force de lire et relire mille fois ce texte, que j'ai *appris à aimer*, n'étaient pas celles de mes auditeurs, qui devaient en rester à leurs premières surprises : celles qui avaient été en fait les miennes quand j'ai découvert Diophante pour la première fois. Le sentiment d'une lecture fastidieuse, d'une méthode apparemment inutile et répétitive. Tout notre héritage, depuis Viète au moins, nous a appris à ne lire Diophante que pour le dépasser, que pour voir "mieux" ou "plus loin" que ce qu'on trouve dans son texte. Ce qui m'a du même coup frappé, c'est que la confrontation entre mon approche et mes commentaires, qui soulignaient malignement ce que les collègues ne pouvaient plus voir, et l'attente naturelle des collègues, qui était de quitter le "bourbier" des problèmes diophantiens par une traduction algébrique qui en révélait la structure, produisait un conflit désagréable.

Ce malaise et cette curiosité pour l'étrange, à ma surprise, les collègues les ont éprouvés dès la lecture de la préface de Diophante, qui expose apparemment l'échelle de "l'inconnue et de ses puissances" dans un ordre tout à fait exotique à nos yeux : d'abord en commençant par une autre échelle, qui n'a rien à voir avec une quelconque théorie algébrique ; puis en terminant par l'inconnue plutôt qu'en commençant par elle ; enfin en utilisant des noms qui laissent entendre un calcul, plutôt que des symboles qui sont censés résumer intelligiblement les rapports réciproques des "puissances" entre elles. Mais quel était alors, et quel est, le désagrément ? Où est ici "le malaise" ?

À la réflexion, j'ai redécouvert au fond cette chose simple, savoir que l'algèbre est pour nous, enseignants de mathématiques, une sorte de "réflexe identitaire" – pour employer une expression à la mode. Non seulement bien des élèves, influencés par les représentations communes, identifient directement la pratique des mathématiques avec l'usage de *formules symboliques*, mais bien des collègues s'identifient eux-mêmes à partir de ces symboles qui sont comme la langue de notre guilde. Insinuer *pour une fois* l'idée que cette langue pourrait *masquer* le sens de ce que nous faisons, plutôt que le dévoiler, et l'insinuer à l'endroit d'un texte qui semble merveilleusement se prêter à une "traduction algébrique", a un effet puissamment déstabilisateur. Si cette déstabilisation peut être désagréable, elle a peut-être la vertu de mettre l'identité à distance, un peu comme dans ces spectacles de marionnettes que Freud proposait comme une des expériences paradigmatiques d'« inquiétante étrangeté ».

Je crois qu'il faut ici suivre Freud ou Guitart, et tourner le malaise et le vice en vertu : il est bien, je crois, d'éprouver un tel malaise et de découvrir tout ce qu'algèbre recèle de perte de sens, en plus d'alourdir les calculs. *Accepter* de lire Diophante, accepter de s'ennuyer, dans le sens au fond assez fort et classique que garde encore parfois ce terme, c'est accepter de "revenir" de l'illusion qui nous a été inculquée par Viète et bien d'autres après lui : que la logistique spécieuse serait la solution au "problème des problèmes", savoir résoudre *tous les problèmes*. Grande idée, et combien importante pour tout le développement des mathématiques modernes, mais aussi poison redoutable. Nous qui avons besoin aujourd'hui de ne pas voir l'algèbre comme l'unique méthode de résolution des problèmes, il nous faut désapprendre Viète, et comprendre simultanément comment il a travesti Diophante.

Dans un autre monde, pour faire lire Diophante à des élèves

J'ai caressé une dernière idée, à la fois spéculative et d'une ambition délirante. Comme les idées et les délires ne coûtent rien, je la livre telle quelle au lecteur peut-être intéressé et plus courageux que moi : pourquoi ne pas songer, dans un cadre propice, à faire lire Diophante aux élèves ? Ou, du moins, un Diophante travesti, remis en scène, reconstitué à partir de ce qu'on peut se complaire à imaginer : un enseignement oral, progressif, enchaînant problème sur problème et invitant le lecteur à se familiariser avec un certain "tour de main" dans la résolution des problèmes. L'enseignant nostalgique que cette idée folle aurait conquis se draperait d'une toge, ainsi que les élèves qu'on munirait de *petites* tablettes de cire, juste assez pour qu'ils inscrivent, en abrégé, leurs principales positions ; mais obligation leur serait faite de dire tout haut, *oralement*, l'enchaînement de leurs calculs.

Dans mon rêve, on finirait de telles séances par un sacrifice aux dieux et la lecture à haute voix, entourée d'un rite approprié, de la préface de Diophante : les élèves (forcément ravis) découvriraient alors l'effort de réciter les solutions des problèmes et d'en inventer de nouvelles. Ils comprendraient le sens de cette entreprise dans un contexte plus large, le seul qui vaille peut-être : celui d'une éducation libérale. Tout ceci serait d'ailleurs combiné avec des exercices de rhétorique que feraient pratiquer simultanément des collègues de lettres, sur des sujets de déclamation bien choisis.

Plus sérieusement, la lecture de Diophante, et au moins de morceaux choisis de la préface (à défaut de faire étudier ses problèmes), me semble susceptible de faire prendre conscience aux élèves du sens profond qu'il y a à étudier des problèmes dans notre discipline : non pas seulement pour le plaisir assez vain et frustrant d'avoir réussi un calcul ou "obtenu les solutions", mais pour se former à en inventer de nouveaux et à devenir autonome, non par génie, mais par exercice.

Bibliographie

[*Arithm.*] Cette abréviation renvoie à l'édition du texte grec des *Arithmétiques* par Paul Tannery dans [Ta, 1893-95, vol.I]. Ainsi *Arithm.* 4.4-7 renvoie à la page 4 du volume I, lignes 4 à 7.

[Al] André ALLARD, *Diophante d'Alexandrie : les Arithmétiques*, histoire du texte grec, édition critique, traductions et scholies par A. Allard, 2 vol., Tourpes : FNRS, 1980.

[Be] Alain BERNARD, « Sophistique et mathématique dans le monde grec sous domination romaine », *in* : *4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée* (actes du XIIIe colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, Rennes, 2000), Rennes : IREM, 2002, p. 189-207.

[Ch] Jean CHRISTIANIDIS, "The way of Diophantus : Some clarifications on Diophantus' method of solution", *Historia Mathematica* 34*,* 2007, p. 289-305.

[Ci] Giovanna CIFOLETTI, "The creation of the history of algebra in the sixteenth century", *in* : C. Goldstein, J. Gray, J. Ritter (dir.), *L'Europe mathématique*, Paris : éd. de la Maison des sciences de l'homme, 1996, p. 121-141.

[Du] Jean-Paul DUMONT (éd.), Daniel DELATRE, Jean-Louis POIRIER, *Les Présocratiques*, Paris : Gallimard, 1988.

[Gu] Jean-Paul GUICHARD, « Un problème de Diophante au fil du temps », *in* : *4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée* (actes du XIIIe colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, Rennes, 2000), Rennes : IREM, 2002, p. 41-55.

[He] Thomas HEATH, *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra,* 1ère éd. 1884, 2e éd. 1910, Cambridge : Cambridge University Press., réimpr. 1964, New York : Dover, 1964.

[Kl] Jacob KLEIN, *Greek Mathematical Thought and the Origin of* Algebra, trad. Eva Brann, Cambridge, Mass. : M.I.T. Press, 1968, réimpr. New York : Dover, 1992.

[Ma] Pierre MARÉCHAUX, *Plutarque : Comment écouter*, trad. du grec et postface, Paris : Rivages poche, 1995.

[Ra] Roshdi RASHED, *Diophante, Les arithmétiques, tome 3 : livre IV, tome 4 : livres V–VII*, Paris : Les Belles Lettres, 1984.

[Sch, 2002] Norbert SCHAPPACHER, « Diophante et son histoire », *in* : *4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée* (actes du XIIIe colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, Rennes, 2000), Rennes : IREM, 2002, p. 15-39.

[Sch, 2005] Norbert SCHAPPACHER, "Diophantus of Alexandria : a Text and its History", version en ligne sur le site personnel de l'auteur, 2005.

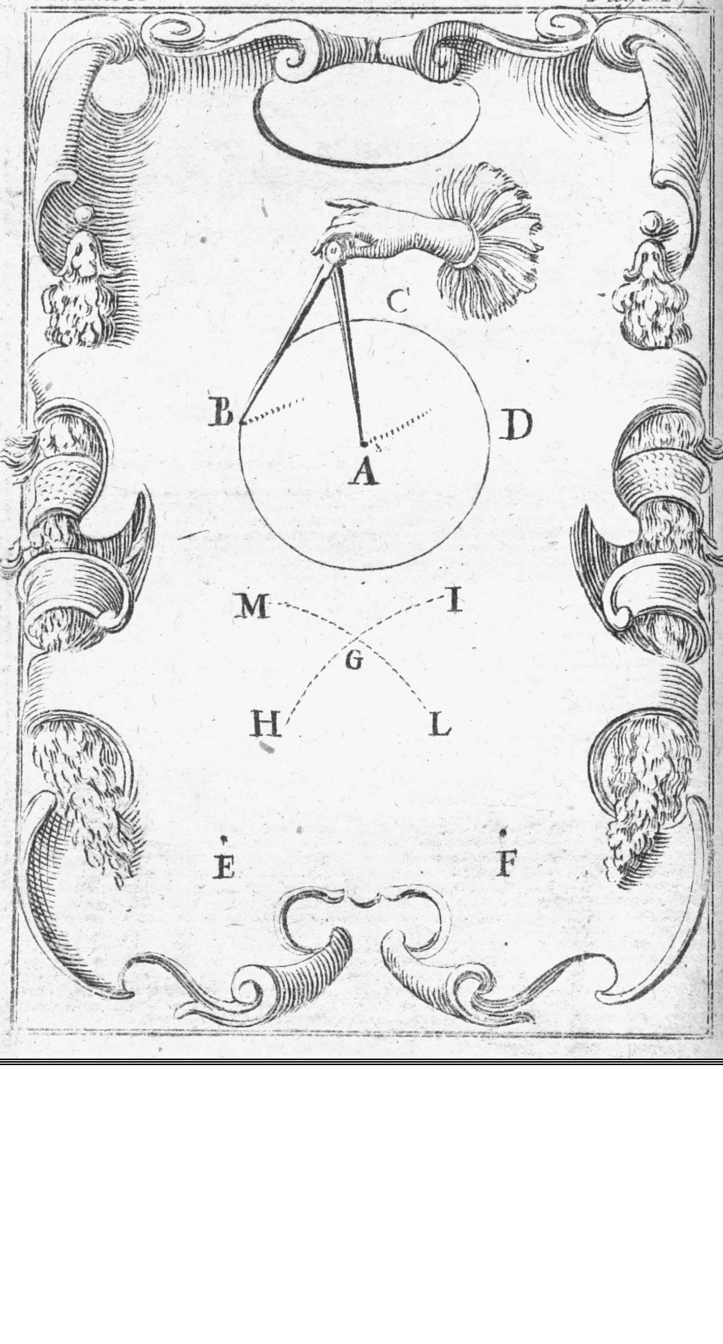
[Se] Jacques SESIANO, *Books IV to VII of Diophantus'* Arithmetica *in the Arabic translation attributed to Qustâ Ibn Lûqâ*, New York : Springer-Verlag, 1982.

[Ta, 1893-95] Paul TANNERY, *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum Graeciis commentariis, edidit et latine interpretatus est P. Tannery*, 2 vol., Leipzig : Teubner, 1893-1895, rééd. Stuttgart : Teubner 1974.

[Ta, 1912] Paul TANNERY, « Sur la religion des derniers mathématiciens de l'Antiquité », *Annales de Philosophie chrétienne* XXXIV, 1896, p. 26-36, réimpr. *in* : *Mémoires Scientifiques*, t. II, 1912, p. 527-539.

[VE] Paul VER EECKE, *Diophante d'Alexandrie, Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Bruges : Desclée, 1926, nouveau tirage Paris : Albert Blanchard, 1959.

[Vi] Bernard VITRAC, « Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes ? », Âyene-ye Mirâs (*Mirror of Heritage*, New Series) 3 (28), Téhéran, 2005, p. 1-44, en ligne sur Hal-SHS.


C
B
D
A
M
I
G
H
L
E
F