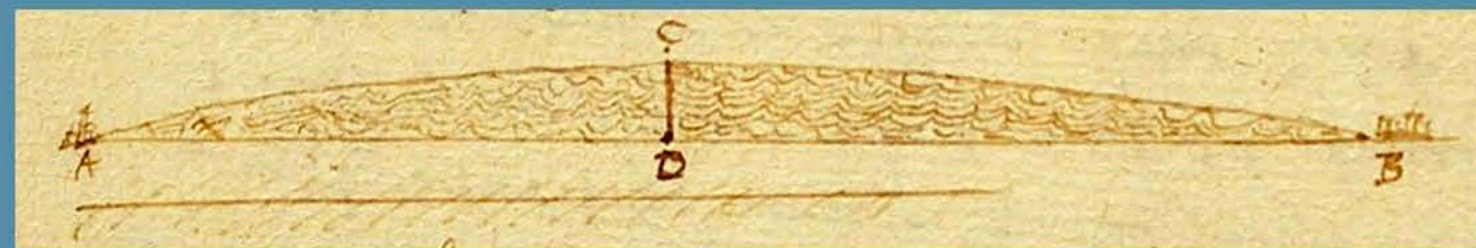


Circulation Transmission Héritage

Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » sont différents. Cet ouvrage explore des moments historiques où des décalages, petits ou grands, nourrissent des héritages et furent le fruit des circulations et des transmissions. Il invite à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études qu'il rassemble mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.



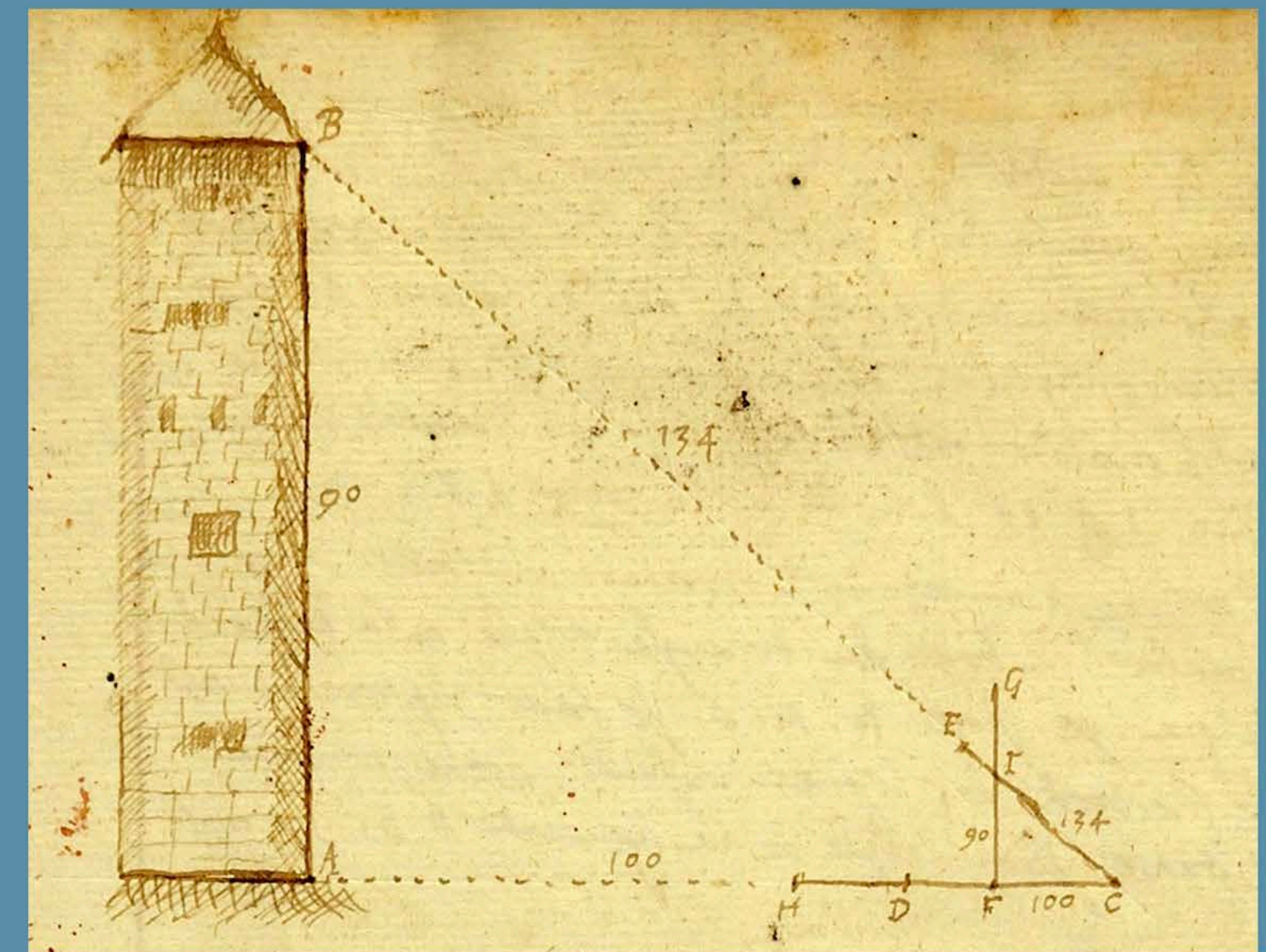
ISBN : 978-2-902498-06-2

Édition et diffusion : IREM de Basse-Normandie
juin 2011

IREM
de Basse-
Normandie

Circulation Transmission Héritage *histoire et épistémologie des mathématiques*

Circulation Transmission Héritage



Actes du 18^e colloque inter-IREM
histoire et épistémologie
des mathématiques
mai 2011

Université de Caen Basse-Normandie

Circulation Transmission Héritage

Actes du XVIII^e colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-2. – Transmettre et s’approprier

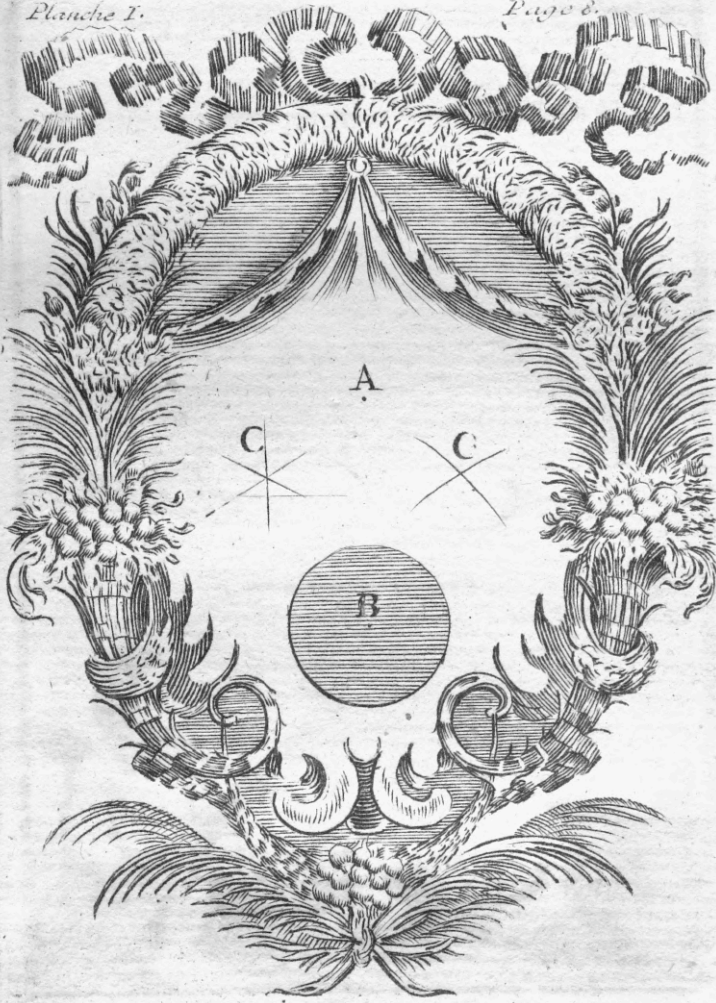
II-2-V. Pages 481-501

H. G. Grassmann : une destinée linéaire ?

François Plantade

Circulation Transmission Héritage

Histoire et épistémologie des mathématiques



Commission inter-IREM
Épistémologie et histoire des mathématiques

Circulation Transmission Héritage

Actes du XVIII^e colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

ISBN : 978-2-902498-06-2

© IREM de Basse-Normandie (Université de Caen Basse-Normandie), juin 2011

Directeur de publication : Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Diffusion : IREM de Basse-Normandie, Université de Caen Basse-Normandie,

campus 2, 14032 Caen Cedex

Tél. : 02 31 56 74 02 – Fax. : 02 31 56 74 90

Adresse électronique : irem@unicaen.fr

Site Internet : <http://www.math.unicaen.fr/irem/>

Coordination : Évelyne Barbin et Pierre Ageron

Comité de lecture : Pierre Ageron, Didier Bessot, Richard Choulet, Gilles Damamme, Guy Juge, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff, Pierrick Meignen, Thierry Mercier, François Plantade, Danielle Salles, Didier Trotoux et Éric Trotoux

Relecture générale : Pierre Ageron, Jean-Pierre Le Goff

Conception, illustration et mise en page du volume : Jean-Pierre Le Goff, Pierre Ageron, Didier Bessot et Didier Trotoux

Conception de l'affiche du colloque et de la couverture des actes : Patrice Gourbin

Impression et façonnage : Corlet numérique, 14110 Condé-sur-Noireau

Crédits photographiques de la couverture :

Bibliothèque de Caen, deux images tirées du manuscrit *in-fol.* 27 : *Pratique de geometrie*, de la main de Samuel Bochart (1599-1667)

– 1^{ère} de couverture : mesure au *gonomètre* de la hauteur d'une tour, $f^{\circ}8\ r^{\circ}$

– 4^{ème} de couverture : mesure de la *gibbosité* de la mer entre Dieppe et la Rie (Rye), $f^{\circ}42\ v^{\circ}$

Illustrations hors-texte :

Les 16 planches hors-texte des pages de l'ouvrage, paginées ii, viii, xiv, 28, 50, 94, 122, 240, 338, 360, 386, 446, 480, 502, 544 et 582, sont tirées de la *Pratique de la Geometrie, sur le papier et sur le terrain ; où par une methode nouvelle & singuliere l'on peut avec facilité & en peu de tems se perfectionner en cette science*, Par Sebastien Leclerc, Graveur du Roi. A Paris, Chez Ch. A. Jombert, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame. M. DCC. XLIV. (1744). *Avec Privilege du Roi.* (coll. part., clichés : jplg)

Sommaire

Sommaire	v
<i>Pierre Ageron</i>	
Avant-propos	ix
<i>Évelyne Barbin</i>	
Présentation	xi

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

<i>Ahmed Djebbar</i>	
Les mathématiques en pays d'Islam : héritages, innovations et circulation en Europe	3
<i>Frédéric Laurent</i>	
Les éléments d'une transmission : petite histoire de la transmission des <i>Éléments</i> d'Euclide en Arménie	29
<i>Isabelle Martinez-Labrousse</i>	
Un essai de synthèse entre le théorème de Pythagore et la procédure <i>gou-gu</i>	51
<i>Gérard Hamon & Lucette Degryse</i>	
Le livre IX des <i>Quesiti et inventioni diverse</i> de Niccolò Tartaglia : langue et mathématiques	71
<i>Pierre Ageron</i>	
Les sciences arabes à Caen au XVII ^e siècle : l'héritage arabe entre catholiques et protestants	95
<i>Jean-Pierre Le Goff</i>	
La perspective selon Andrea Pozzo et son adaptation chinoise, ou, questions de regards obliques et croisés : de la distance entre deux pensées de la représentation	123

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

Martine Bühler & Anne Michel-Pajus

Règle de trois et proportionnalité dans une arithmétique
pratique niçoise du XVI^e siècle et dans ses sources 155

Pierre Ageron & Didier Bessot

De Varignon au père André :
tribulations normandes d'un cours de géométrie 181

Anne Boyé & Guillaume Moussard

L'enseignement des vecteurs au XX^e siècle : diversité
des héritages mathématiques et circulation entre disciplines 201

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

Jeanne Peiffer

La circulation mathématique dans et par
les journaux savants aux XVII^e et XVIII^e siècles 219

Christian Gérini

Pour un bicentenaire : polémiques et émulation dans
les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne,
premier grand journal de l'histoire des mathématiques (1810-1832) 241

Norbert Verdier

Le *Journal de Liouville* et la presse de son temps : hériter, transmettre
et faire circuler des mathématiques au XIX^e siècle (1824-1885) 255

I-4. – Les figures : accompagner les mots

Olivier Keller

Surface, figure, ligne et point : un héritage de la préhistoire 281

Jean-Pierre Cléro

Qu'est-ce qu'une figure ? 297

II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-1. – Hériter et inventer

Gilles Damamme

Quel héritage se transmet à partir des biographies de grands mathématiciens ?	331
--	-----

Pierre Ageron

Ibn Hamza a-t-il inventé les logarithmes ? Constitution et circulation du discours islamocentré sur l’histoire des mathématiques	339
---	-----

Jean-Paul Guichard

L’algèbre nouvelle de Viète et ses héritiers	361
--	-----

Denis Lanier, Jean Lejeune & Didier Trotoux

L’invention de la médiane	387
---------------------------------	-----

Dominique Tournès

Une discipline à la croisée d’intérêts multiples : la nomographie	415
---	-----

II-2. – Transmettre et s’approprier

Évelyne Barbin

Pourquoi les contemporains de Descartes n’ont-ils pas compris sa <i>Géométrie</i> de 1637 ?	449
--	-----

Jean Lejeune, Denis Lanier & Didier Trotoux

Jules Gavarret (1809-1890) : précurseur de l’introduction des statistiques inférentielles en épidémiologie ?	465
---	-----

François Plantade

H. G. Grassmann : une destinée linéaire ?	481
---	-----

Jean-Pierre Le Goff

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la vie et l’œuvre de Salomon de Caus	503
---	-----

Maryvonne Ménéx-Hallé

La question du mathématique	545
-----------------------------------	-----

II-3. – Lire les Anciens, aujourd’hui

Alain Bernard

Les <i>Arithmétiques</i> de Diophante : introduction à la lecture d’une œuvre ancrée dans différentes traditions antiques	557
--	-----

Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff & Didier Trotoux

Une relecture de la proposition 46 du livre IV des <i>Coniques</i> d’Apollonios de Pergé, de ses éditions et de ses traductions	583
--	-----

II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-1. – Hériter et inventer

Gilles Damamme

- Quel héritage se transmet
à partir des biographies de grands mathématiciens ? 331

Pierre Ageron

- Ibn Hamza a-t-il inventé les logarithmes ? Constitution et circulation
du discours islamocentré sur l’histoire des mathématiques 339

Jean-Paul Guichard

- L’algèbre nouvelle de Viète et ses héritiers 361

Denis Lanier, Jean Lejeune & Didier Trotoux

- L’invention de la médiane 387

Dominique Tournès

- Une discipline à la croisée d’intérêts multiples : la nomographie 415

II-2. – Transmettre et s’approprier

Évelyne Barbin

- Pourquoi les contemporains de Descartes
n’ont-ils pas compris sa *Géométrie* de 1637 ? 449

Jean Lejeune, Denis Lanier & Didier Trotoux

- Jules Gavarret (1809-1890) : précurseur de l’introduction
des statistiques inférentielles en épidémiologie ? 465

François Plantade

- H. G. Grassmann : une destinée linéaire ?** 481

Jean-Pierre Le Goff

- Tout ce que vous avez toujours voulu savoir
sur la vie et l’œuvre de Salomon de Caus 503

Maryvonne Ménéz-Hallez

- La question du mathématicien 545

II-3. – Lire les Anciens, aujourd’hui

Alain Bernard

- Les *Arithmétiques* de Diophante : introduction à la lecture
d’une œuvre ancrée dans différentes traditions antiques 557

Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff & Didier Trotoux

- Une relecture de la proposition 46 du livre IV des *Coniques*
d’Apollonios de Pergé, de ses éditions et de ses traductions 583

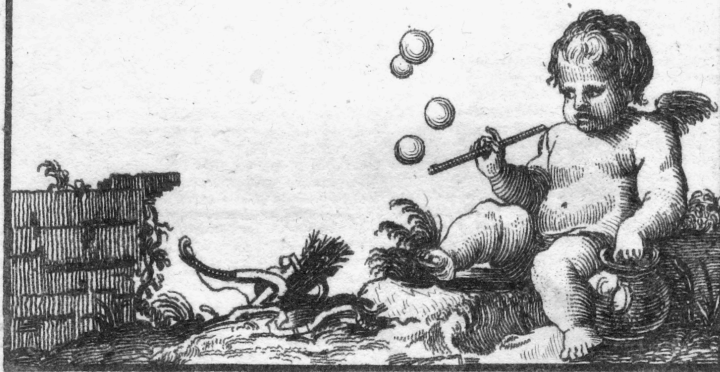
A ————— B

C ————— D

E ————— F

C ————— D

V —————



Avant-propos

L'IREM de Basse-Normandie, institué dans l'université de Caen le 23 octobre 1973, cultive par précellence l'histoire des mathématiques. Dès l'origine, plusieurs de ses animateurs, professeurs de lycée, étaient conduits par une intuition : introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques serait de nature à aider les élèves à y retrouver du sens, sens que le formalisme – des “maths modernes”, notamment – tendait à dissimuler. Mais la discipline “histoire des sciences” n'était alors guère développée dans les universités. C'est ainsi que commença un colossal travail de recherche fondamentale et appliquée, d'édition de sources, de formation initiale et continue, d'actions interdisciplinaires. Nombreux sont ceux qui y ont contribué ; je veux citer au moins les noms de Jean-Pierre Le Goff, Didier Bessot et Denis Lanier et leur rendre ici un hommage plein d'amitié et d'admiration.

C'est à l'IREM de Basse-Normandie qu'il revint d'organiser le tout premier colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, au château de Tailleville, en mai 1977, puis le X^e colloque d'une série devenue bisannuelle, sur le thème *La mémoire des nombres* – c'était à Cherbourg en mai 1994. Entre les deux, l'IREM de Basse-Normandie avait organisé, à l'initiative de l'Association pour le développement des études et recherches en histoire et épistémologie des mathématiques (ADERHEM), un colloque exceptionnel baptisé *Destin de l'art, dessein de la science* (octobre 1986). Enfin le XVIII^e colloque inter-IREM, dont vous tenez en main les actes, s'est tenu en mai 2010 au cœur de l'université caennaise, dans l'amphithéâtre Henri Poincaré (qui enseigna deux années à Caen). Le thème retenu, *Circulation – Transmission – Héritage*, invitait à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études ici rassemblées mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Basse-Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

Je remercie les institutions qui ont compris l'intérêt de cette manifestation : le ministère de l'Éducation nationale (via l'Assemblée des directeurs d'IREM), la région Basse-Normandie, la ville de Caen, l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (régionale de Basse-Normandie), l'ADERHEM, et notre *alma mater* l'université de Caen Basse-Normandie.

Ce colloque n'aurait pu être organisé sans l'énergie déployée par Geneviève Jean, secrétaire de l'IREM, et par de nombreux animateurs de l'IREM, notamment Guy Juge, Éric Trotoux et Didier Trotoux. Enfin Jean-Pierre Le Goff, Didier Trotoux et Didier Bessot m'ont apporté une aide précieuse dans l'édition de ces actes. Que tous soient très chaleureusement remerciés.

Pierre Ageron
directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Présentation

Auteurs, destinataires et lecteurs d'un texte :
histoires de décalages.

Évelyne Barbin,
IREM des Pays de la Loire,
Centre François Viète, Université de Nantes

*La plus grande partie d'une œuvre se déroule sous la
tyrannie de sa réception.*

Christophe Prochasson, « Ce que le lecteur fait de l'œuvre. Héritages
et trahisons : la réception des œuvres », *Mill neuf cent*, 12, 1994.

Le Colloque inter-IREM « Histoire des mathématiques : circulation, transmission, héritage » s'inscrit bien dans la visée de « la réception des œuvres » de Hans Robert Jauss, dont Christophe Prochasson indique l'intérêt pour l'historien dans le texte cité en exergue. Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Le cas des manuels, y compris les plus récents, n'échappe pas à cette distinction, que connaît bien l'enseignant : le destinataire du manuel est l'élève de classe de quatrième, mais la lectrice est Vanessa. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » – en utilisant l'expression de Jauss – sont différents. Cet ouvrage propose quelques moments historiques de décalages, petits ou grands, qui nourrissent les héritages, qui sont le fruit des circulations et des transmissions.

Les aspects matériels de la circulation des textes, leurs véhicules, font l'objet de la première partie. L'histoire des mathématiques arabes est intéressante, puisqu'elles sont au carrefour de langues diverses, elles commencent avec des traductions et se perpétuent avec d'autres traductions, dans une sphère culturelle large, comme le montrent Ahmed Djebbar et Pierre Ageron. Avec la transmission des *Éléments* d'Euclide en Arménie, Frédéric Laurent délivre une partie peu connue de l'histoire. L'ouvrage d'Euclide, transmis par les Jésuites en Chine, y connut un sort étrange, puisque les lecteurs orientaux négligèrent

les démonstrations qui faisaient le succès des *Éléments* ailleurs. L'exemple du décalage très abrupt de l'attente entre Occidentaux et Chinois est illustré dans cet ouvrage par Isabelle Martinez et Jean-Pierre Le Goff. L'écart plus ténus entre langue savante, le latin, et langue vernaculaire, ici un dialecte italien, est examiné avec précision par Gérard Hamon et Lucette Degryse à propos des *Quesiti* de Nicollo Tartaglia au XVI^e siècle.

Il existe deux types de véhicules adaptés à des destinataires particuliers, ce sont les manuels et les revues mathématiques. Les manuels sont écrits à partir de sources diverses et à destination de commençants, avec le souci d'un rendu intégral des « idées » ou à l'inverse dans celui d'une « adaptation » aux élèves. Du côté des sources, Martine Bühler et Anne Michel-Pajus analysent celles d'un ouvrage d'arithmétique niçois du XVI^e siècle. Du côté des réceptions, Pierre Ageron et Didier Bessot retracent les tribulations d'un manuel de géométrie au XVIII^e siècle. Comme le montrent Anne Boyé et Guillaume Moussard, l'enseignement des vecteurs présente un cas très complexe aux sources multiples – géométriques, algébriques et physiques –, qui a beaucoup changé selon les destinataires à différentes époques.

L'édition des revues scientifiques commence au XVII^e siècle. Les journaux savants sont écrits par des « savants » à destination de leurs confrères, membres d'Académies nationales ou de Sociétés provinciales. La spécialisation de revues aux seules mathématiques au XIX^e siècle est contemporaine de publications pour des publics eux aussi plus spécialisés, qu'ils soient enseignants, amateurs ou bien mathématiciens. La transmission par des revues multiplie le nombre de possibilités de mise en évidence de décalages, en augmentant le nombre des auteurs et en accordant la plume aux lecteurs. Les articles de Jeanne Peiffer, de Christian Gérini et de Norbert Verdier offrent un large panel de périodes et de publics pour diverses revues sur trois siècles.

Les figures mathématiques ne transcendent-elles pas les questions de transmission en offrant un langage qui serait universel ? De plus, ne s'agit-il pas d'un langage qui précède l'écriture ? Ces questions trouveront des éléments de réponse dans les articles d'Olivier Keller et de Jean-Pierre Cléro. Prise du point de vue de la réception historique des « textes », la première question recevrait une réponse plutôt relativiste. Un triangle est vu comme une aire par Euclide et comme ses trois côtés par Descartes, il est désigné par des lettres chez les mathématiciens grecs et par des couleurs chez les chinois.

La seconde partie de cet ouvrage retourne à l'auteur d'un texte, mais sans abandonner la perspective du destinataire et du lecteur. En effet, l'auteur est lui-même un lecteur, et donc un texte peut être lu comme un maillon dans un échange dialogique. Car, comme l'explique Mikhaïl Bakhtine, un texte est écrit

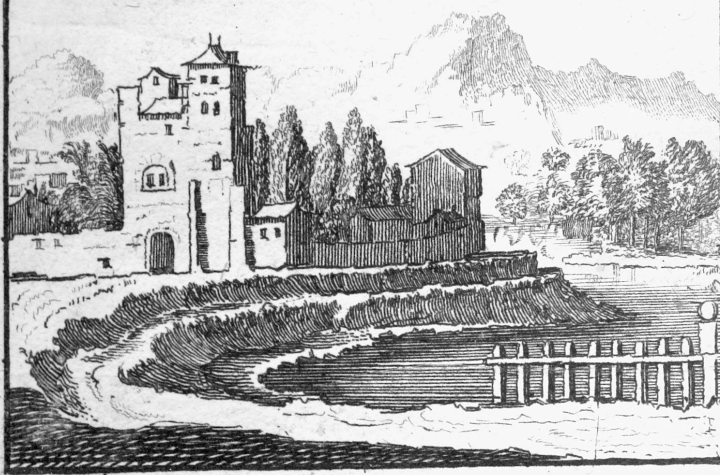
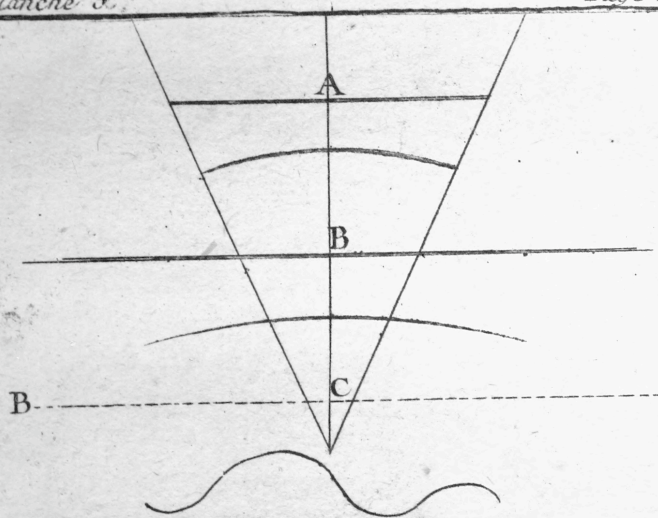
en réponse à d'autres auteurs de textes et il s'adresse à des lecteurs qui ont une « attitude responsive active ».

Lorsqu'un auteur doit écrire quelque chose qui lui paraît nouveau, c'est-à-dire susceptible d'aller au-delà des conceptions contemporaines, il doit aménager son texte. Autrement dit l'invention pose des problèmes accrus de transmission. C'est ce qu'analysent les articles de Jean-Paul Guichard, de Denis Lanier, Jean Lejeune et Didier Trotoux pour deux inventions mathématiques. L'histoire des mathématiques, qu'elle s'intéresse à des inventions ou des inventeurs, ne peut pas passer outre leurs intérêts sous-jacents, par exemple pour la nomographie présentée par Dominique Tournès. Le renouveau du genre biographique en histoire, indiqué par Gilles Damamme, va de pair avec une histoire des inventeurs dans le contexte intellectuel, social et culturel de leur époque. En suivant les propos de Pierre Ageron, cette perspective peut aussi être prise en compte dans l'écriture de l'histoire.

Le décalage entre un auteur et l'horizon d'attente de ses lecteurs contemporains est au cœur de la partie suivante. Évelyne Barbin explique que les contemporains de Descartes n'ont pas compris sa *Géométrie* de 1637 alors qu'elle semble aller de soi aujourd'hui. Lorsque que Jean Lejeune, Denis Lanier et Didier Trotoux utilisent le terme de précurseur, au dépit de l'histoire, n'est-ce pas pour écrire un grand décalage entre Gavarret et ses lecteurs ? Avec François Plantade et Jean-Pierre Le Goff, sont retracées les réceptions des œuvres de Grassmann et de Salomon de Caus. En vis-à-vis de ces articles, qui invitent à un relativisme constructif des « vérités mathématiques », Maryvonne Menez-Hallez pose la question du « mathématique ».

La dernière partie de l'ouvrage est plus orientée vers la lecture historique des textes. Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff et Didier Trotoux proposent une relecture d'une proposition d'Apollonius à partir de ses éditions et de ses traductions. Alain Bernard lit les *Arithmétiques* de Diophante comme un texte ancré dans différentes traditions antiques. Ainsi que le remarque Christophe Prochasson, « la tradition n'est pas un processus autonome de transmission », elle est au contraire un mécanisme de réappropriation du passé.

La thématique du colloque croise les questions d'enseignement et elle a vivement intéressé ceux qui dans les IREM associent l'histoire des mathématiques à son enseignement. Le riche sommaire de cet ouvrage en est le témoin.



Section II

D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

2. – Transmettre et s'approprier

Circulation Transmission Héritage

Actes du XVIII^e colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-2. – Transmettre et s’approprier

II-2-V. Pages 481-501

H. G. Grassmann : une destinée linéaire ?

François Plantade

H. G. Grassmann : une destinée linéaire ?

François Plantade,
IREM de Basse-Normandie & lycée Malherbe de Caen,
fplantade@wanadoo.fr

En septembre 2009 eut lieu un colloque international à l'université de Potsdam commémorant le bicentenaire de la naissance de Hermann Günther Grassmann. C'était un colloque de plusieurs journées avec nombre d' "invités de marque" ; Potsdam se trouve aux environs de Berlin, là où étudia Grassmann. C'est l'occasion de se demander qui fut ce Grassmann et quelle fut son œuvre – apparemment assez riche et d'actualité pour justifier un tel événement. Pour ce faire, nous chercherons tout d'abord quelles traces subsistent de son œuvre dans la culture mathématique actuelle. Nous présenterons ensuite brièvement – de manière *linéaire* et synthétique – sa vie et son œuvre ; puis, afin d'en montrer la modernité, la complexité, la richesse et la difficulté, nous ferons une lecture analytique du début de l'*Ausdehnungslehre* de 1844 – son principal ouvrage. Enfin nous mettrons en perspective ces différents aspects, en vue de "tirer au clair cette affaire Grassmann".

1. – Traces visibles

Quels concepts, quels résultats sont associés de nos jours au nom de Grassmann dans la culture mathématique universitaire ? Nous avons recherché les traces explicites de Grassmann dans divers manuels d'algèbre linéaire de premier cycle universitaire ou de classes préparatoires, ainsi que de géométrie – algébrique notamment – de second cycle universitaire, récents (moins d'une vingtaine d'années) ou plus anciens (années 1970 - 1980). Nous n'avons dénombré en tout que quatre occurrences de son nom. La première est la fameuse "formule de Grassmann" (qui, assez souvent, ne porte pas de nom) stipulant que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un même K -espace vectoriel, alors :

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$$

La deuxième est bien connue également : si E est un K -espace vectoriel de dimension n et si k est un entier naturel, on définit la "grassmannienne" $G(n, k)$ comme l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension k . La troisième est relative au concept d' "algèbre de Grassmann",

plus souvent dite algèbre extérieure, d'un K -espace vectoriel E de dimension n : il s'agit de la K -algèbre "la plus générale" qui contient E et dans laquelle $x \wedge x$ est nul pour tout x dans E .¹ Cette algèbre, notée ΛE , est non commutative et de dimension 2^n sur K . Si $x_1, \dots, x_m \in E$, le produit $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_m$ est nul si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_m)$ est liée. L'algèbre de Grassmann de E est donc liée aux déterminants, et aussi aux grassmanniennes. On peut démontrer² que $G(n, k)$ est une sous-variété algébrique de l'espace projectif $P(\Lambda^k E)$. Pour ceci, et c'est la quatrième et dernière occurrence du nom de Grassmann que nous avons recensée, on utilise les "coordonnées grassmanniennes" : un plongement (algébrique) de $G(n, k)$ dans $P(\Lambda^k E)$.³ La structure de variété algébrique et topologique de $G(n, k)$ fait encore de nos jours l'objet d'études.⁴

Ces quatre formules ou expressions reflètent-elles le rôle réel de Grassmann en mathématiques ? Disons-le d'emblée : la réponse est non. L'apport de Grassmann est plus large : il est notamment le créateur de l'algèbre linéaire – en tant que théorie unifiée, discipline centrale en mathématiques. Quelles sont alors les raisons de cette piètre notoriété dans la littérature mathématique ?

2. – Vie et œuvre de Grassmann

Présentons tout d'abord l'homme : Hermann Günther Grassmann (le portrait reproduit à la fin de cet article est à peu près le seul qu'on ait de lui). Il naquit en 1809 à Stettin⁵ – ville prussienne à l'époque, polonaise depuis 1945, située à l'embouchure de l'Oder, à une centaine de kilomètres au nord-est de Berlin. Son père⁶ était enseignant de mathématiques et physique au lycée de Stettin et sa mère, fille de pasteur, tenait le foyer ; Hermann était le troisième de leurs neuf enfants. Après avoir passé son baccalauréat en 1827, il partit étudier à Berlin avec son frère aîné. Il y étudia la théologie⁷ durant cinq semestres, les lettres classiques et la littérature durant un semestre. Il se destinait alors au pastorat. Au bout de ces trois années passées à Berlin, Hermann revint à Stettin, épuisé et malade. Il rentra chez ses parents et c'est à

¹ Pour plus de détails, voir par exemple les deux premiers chapitres de [Schw].

² Voir [Au] par exemple.

³ Pour lire, dans le cas où $\dim(E) = 3$, des réalisations de l'algèbre extérieure et le lien avec les coordonnées grassmanniennes, voir [Av].

⁴ Un récent lauréat de la médaille Fields a travaillé sur la « chirurgie » des grassmanniennes, procédé de transformations successives (déformations, découpages, recollements,...) permettant de comparer différentes variétés [La].

⁵ Stettin est orthographié Szczecin de nos jours.

⁶ Justus Günther Grassmann (1779-1852) enseigna au lycée de Stettin durant 46 ans ; il publia différents manuels et quelques articles notamment en cristallographie.

⁷ Avec Neander, Schleiermacher, Hengstenberg, Strauss, Marheinecke. L'influence de ses études sur sa vision des mathématiques est intéressante à étudier. Pour une première approche, voir [Le].

ce moment qu'il s'intéressa aux sciences. N'ayant pas suivi d'enseignements supérieurs de mathématiques ou de physique, il se forma auprès de son père, profitant de ses cours, de ses recherches, de sa bibliothèque⁸. En décembre 1831, il passa un premier examen *pro facultate docendi* lui permettant d'enseigner dans divers types d'écoles ; il commença à enseigner au printemps 1832. Dès cette période, il commença ses recherches, comme il l'écrivit au mathématicien Saint-Venant dans une lettre datée du 18 avril 1847 [Gr, *Werke*, I, 2, p. 433-434] :

depuis l'année 1832 [...] j'ai conçu la première idée de la somme et de la différence géométriques de deux ou plusieurs lignes et du produit géométrique de deux ou trois lignes.

Parallèlement, Grassmann poursuivait ses études en théologie : il passa un premier examen en 1834 et un second en 1839 ; il renonça alors à devenir pasteur. En mai 1840, il passa son second examen *pro facultate docendi*, ce qui lui permit d'enseigner à tous les niveaux du lycée (*Gymnasium*) en mathématiques, physique, chimie et minéralogie. Lors de cet examen, il présenta sa thèse *Théorie des flots et marées* [G1] : en appliquant ses idées sur les opérations "des lignes", il put retrouver de manière plus rapide les résultats de Lagrange. Dès 1840, il enseigna, dans différents lycées ou écoles proches de Stettin, des disciplines très variées : la trigonométrie plane, la géologie, l'arithmétique, la géométrie, l'allemand, l'histoire, la géographie, le latin, les sciences naturelles, la religion, la chimie, la minéralogie... Il publia également des manuels d'enseignement très divers : un manuel de latin pour l'école primaire, cours de trigonométrie supérieure...

Il poursuivit ses recherches sur les opérations "des lignes" et publia à Leipzig en 1844 un ouvrage intitulé *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert* [Gr, 1844] souvent raccourci en *Die lineale Ausdehnungslehre*. On peut traduire en français par : *La science de la grandeur extensive, une nouvelle discipline mathématique représentée et illustrée par des applications en statique, mécanique, magnétisme et cristallonomie*. C'est son œuvre principale : il y développa, ce qu'on appellerait de nos jours les éléments de la théorie des espaces vectoriels, du calcul extérieur et du produit scalaire, en toute généralité, et appliqua ces idées à la physique et aux fonctions. Il expliqua ainsi sa méthode, au début du premier chapitre (traduction de [Gr, 1994]) :

[Je me] rattache partout à la géométrie pour la déduction des concepts nouveaux, dont notre science constitue la base. Mais en posant toujours à la base le concept abstrait pour la déduction des vérités qui constituent le

⁸ Celle-ci contenait entre autres des ouvrages de Legendre (géométrie), J. T. Meyer (analyse), F. W. Schneider (mécanique) et E. G. Fischer.

contenu de cette science, sans jamais me fonder sur une vérité démontrée en géométrie, j'obtiens cependant ainsi la science dans son contenu totalement pure et indépendante de la géométrie...

Grassmann fit parvenir son *Ausdehnungslehre* à différents mathématiciens de son temps, ce qui lui assura une certaine circulation. Dès les années 1844-1850, les mathématiciens Gauss, Saint Venant, Möbius, Cauchy, Kummer, Plücker et d'autres personnes s'intéressant aux mathématiques, comme les philosophes Baltzer, Drobisch, Apelt avaient lu l'*Ausdehnungslehre*. Comment fut-elle accueillie ? Les avis étaient très partagés sur le contenu, mais généralement négatifs sur la forme. Gauss écrivit dans une lettre à Grassmann datée du 14 décembre 1844 [Gr, *Werke*, I, 2, p. 397-398] :

Parcourant votre livre, submergé d'autres travaux hétérogènes, je crois remarquer que les tendances de celui-ci rencontrent "parfois" les voies sur lesquelles j'ai moi-même déambulé il y a maintenant près d'un demi-siècle..., à savoir, la "métaphysique" concentrée des grandeurs complexes [...] ; et je vois bien que pour découvrir le noyau propre de votre œuvre, il sera nécessaire de se familiariser avec vos terminologies particulières.

Le philosophe Apelt, dans une lettre à Möbius du 2 février 1845 [E, p. 101] :

Avez-vous lu la bizarre *Ausdehnungslehre* de Grassmann ? Je la connais seulement de *Grunerts Archiv*, mais il me semble qu'une fausse philosophie des mathématiques est à la base. Le caractère essentiel de la connaissance mathématique, l'intuition, en semble complètement bannie. Une telle *Ausdehnungslehre* 'abstraite', telle qu'il l'a cherchée, pourrait être développée uniquement à partir des concepts. Mais la source de la connaissance mathématique ne repose pas sur des concepts mais sur l'intuition. »

Möbius, répondant à Apelt le 5 janvier 1846 [E, p. 10] :

les nouvelles manières de calculer qu'y établit Grassmann [...] semblent mériter toute l'attention. (Mon calcul barycentrique en est, pour ainsi dire, l'exemple le plus facile.)

Enfin, Kummer s'exprima ainsi dans un rapport daté du 12 juin 1847 [Gr, *Werke*, I, 2, p. 481-485] :

L'*Ausdehnungslehre* s'annonce comme une nouvelle discipline mathématique qui veut prendre sa place entre l'analyse et la géométrie sans être un lien entre ces disciplines mathématiques, telle la géométrie analytique. [...] En ce qui concerne d'abord la forme ou la représentation du traité, alors il faut en général convenir d'un échec ; car bien que le style soit bon et fait montre d'esprit, il manque partout un regroupement convenable de la matière où les points principaux se distingueraient clairement des choses de moindre importance...

On voit que quelques mathématiciens reconnus furent vivement intéressés par le livre de Grassmann. Mais on regrettait sa difficulté : son degré d'abstraction élevé et l'excès de vocabulaire inventé notamment. Il est vrai que Grassmann n'utilisait quasiment que des mots d'origine germanique – et non grecque ou latine – : par exemple pour désigner un parallélogramme, il employait le terme *Spathek* à la place du classique *Parallelogramm*. Globalement, peu de mathématiciens lurent ou comprirent l'*Ausdehnungslehre*, et cette œuvre eut peu d'écho dans les années 1844-1850. Grassmann, qui cherchait une meilleure position académique, ne put avoir de poste à l'université. Il délaissa alors quelque peu la recherche mathématique. Dans les années 1847-1851, il publia principalement des articles politiques ; en 1849, il épousa Maria Therese Knappe et, dès 1849, se lança dans des études de linguistique et de sanscrit. Vers 1851, il reprit ses recherches mathématiques, publia dans le *Journal* de Crelle plusieurs articles sur les courbes algébriques et des propriétés projectives. Il publia également un manuel d'allemand, une théorie des couleurs, un résumé sur l'acoustique et un traité élémentaire d'optique.

Dans cette période, différents mathématiciens découvrirent le travail de Grassmann et en témoignèrent, ponctuellement. Dans les années 1850-1860, Hamilton et De Morgan lurent l'*Ausdehnungslehre* comme le montre cette lettre de Hamilton à De Morgan du 26 octobre 1852 [Grav, III, p. 424] :

In page XIV of Preface to Grassmann's *Ausdehnungslehre*, a very original work, published at Leipzig in 1844 [...] Grassmann has a non-commutative principle of multiplication of his own [...]⁹.

En France, Cauchy semble lui avoir emprunté des idées sur le déterminant – les “clefs algébriques” [Cau ; Sa ; Pe, p. 69 et *seq.*]. Le 24 novembre 1866, Hermann Hankel, qui avait étudié les *Lectures on quaternions* de Hamilton, prit contact avec Grassmann et lui témoigna de son estime [E, p. 270] :

Je crois que justement l'incorporation des fondements essentiels de votre développement de la grandeur extensive en un traité d'une discipline à laquelle sans aucun doute l'avenir appartiendra, servira à réaliser l'espoir que vous avez exprimé dans préface de votre ultérieure *Ausdehnungslehre*.

En 1862, Grassmann publia une deuxième version de l'*Ausdehnungslehre*, plus rigoureuse, avec des commentaires moins philosophiques, mais encore présentée sous une forme “euclidienne”. Elle aussi eut peu d'écho et Grassmann n'obtint toujours pas de poste à l'université. À nouveau, il délaissa la recherche mathématique. En linguistique, il travailla alors principalement sur

⁹ On cite ce jeu de mots de De Morgan sur Grassmann dans une lettre à Hamilton : « quere, is his Christian name Nebuchadnezzar ? » (*quere* = quacre ; *Gras* en allemand = herbe ; la Bible (*Dan*, IV.20) dit de Nabuchodonosor qu'il a mangé de l'herbe pendant sept ans).

le sanscrit : il publia de 1872 à 1875 un *Wörterbuch zum Rigveda*, puis une traduction du *Rigveda* en 1876 et 1877 ; son succès dans le monde des langues orientales fut immédiat. En 1869, alors qu'il s'était détourné des mathématiques, son fils Justus, qui commençait des études de mathématiques à Göttingen, fit parvenir un exemplaire de l'*Ausdehnungslehre* (édition de 1862) aux mathématiciens Clebsch et Stern. Ce dernier en parla à Felix Klein – qui connaissait déjà l'ouvrage de Hankel [Han ; K]. Sous l'impulsion de Klein, Grassmann devint correspondant de la Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, ce qui constituait une reconnaissance du milieu mathématique. Victor Schlegel publia en 1872 un *System der Raumlehre* [Schl, 1872-75], résumé clair des méthodes, de la portée et du rôle de l'*Ausdehnungslehre*, et, en 1878, une biographie de Grassmann [Schl, 1878]. En 1874, Noth, enseignant au lycée de Freiburg, établit une présentation simplifiée de l'*Ausdehnungslehre*, qui aurait été utilisée par Sturm pour la résolution de problèmes mécaniques [Gr, 1994, p. 35 ; SSS].

Grassmann mourut en 1877 des suites de problèmes cardiaques chroniques. Après sa mort, grâce notamment à son fils Hermann Ernst Grassmann – professeur à l'université de Giessen, auteur de traités sur l'*Ausdehnungslehre* [Gr] –, d'autres mathématiciens s'inspirèrent de son œuvre. En 1888, Peano publia son *Calcolo geometrico* [Pea] et en 1895, son article « Elenco bibliografico sull' 'Ausdehnungslehre' di H. Grassmann ». Les mathématiciens Rudolf Mehmke [Me] et Alfred Lotze [Lo] furent des promoteurs des idées de Grassmann en Allemagne. En France, Ferdinand Caspary [Cas] fit découvrir son œuvre. Aux États-Unis, ce sont Gibbs [Gi] et Clifford [Cl], dans la lignée de Hankel, qui en furent les divulgateurs. Vers 1890, Klein suggéra la réalisation d'une édition des œuvres mathématiques et physiques de Grassmann ; menée sous la direction de Engel, elle fut terminée en 1911 [Gr, *Werke*]. Poincaré [Po] et Élie Cartan [Car, 1922 ; Car, 1952], partant de l'œuvre de Grassmann, définirent l'algèbre “extérieure de Grassmann”, utilisée dans la théorie des invariants et en géométrie différentielle [Fl]. Plus tard, Rota, Barnabei et Brini [RBB] développèrent aussi le programme de Grassmann.

Cet aperçu (non exhaustif) sur les lecteurs, les “vulgarisateurs”, les utilisateurs de l'*Ausdehnungslehre* a été établi à partir de sources diverses [E ; Schl, 1878 ; Schl, 1896 ; Pet ; Gr, 1994, introduction].

Afin de compléter cette brève présentation, de montrer l'immense œuvre – éclectique – de Grassmann et de la mettre en perspective avec d'autres ouvrages importants sur les thèmes de recherche de Grassmann, nous rassemblons ici les principales informations biographiques et bibliographiques sous la forme d'un tableau.

An- née	Publication de recherche <i>mathématique</i>	Publication de recherche <i>autres domaines</i>	Publication de <i>manuel</i> d'enseignement	Vie académique	Publication <i>d'autres mathéma- ticiens</i>
1809	naissance à Stettin				
1827	obtention du baccalauréat				
1827 -1830	études de théologie (5 semestres) & lettres classiques / littérature (1 semestre)				
1831				1 ^{er} examen <i>pro facultate docendi</i> en mathématiques	
1834				1 ^{er} examen en théologie	
1839	1 article ¹⁰ (cristallographie)			2 ^e examen en théologie, renonce à devenir pasteur	
1840	thèse : <i>Théorie des flots et marées</i> [Gr, 1840]			2 ^e examen <i>pro facultate docendi</i> (mathématiques, physique, chimie, minéralogie)	
1842	2 articles ¹¹			1 manuel ¹² (allemand)	
1843	1 article ¹³		2 manuels ¹⁴ (latin et allemand, école)		<i>Elemente der Mechanik des Himmels</i> Möbius
1844	première <i>Die lineale Ausdehnungslehre</i> [Gr, 1844]				
1845	rapport ¹⁵ sur <i>Die lineale Ausdehnungslehre</i>	1 article ¹⁶ (électro-dynamique)			

¹⁰ « Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung », *Programm der Stettiner Ottoschule*, 1839.

¹¹ « Theorie der Zentralen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 24, 1842, p. 262-282, 372-380

¹² « Grundriss der deutschen Sprachlehre », mars 1842, *Programm der Stettiner Ottoschule*.

¹³ « Theorie der Zentralen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 25, 1843, p. 57-73.

¹⁴ « Leitfaden für den ersten Unterricht in der lateinischen Sprache » et « Leitfaden für den ersten Unterricht in der deutschen Sprache », *Programm der Friedrich-Wilhelmsschule*, 1843

¹⁵ « Kurze Übersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre », *Archives de Grunert* 6, 1845, p. 337-350.

¹⁶ « Neue Theorie der Elektrodynamik », *Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie* 64, 1845, p. 1-18.

1847	1 article ¹⁷ (géométrie analytique)				
1851	2 articles ¹⁸ (perspective , courbes algébriques)				
1852	1 article ¹⁹ (courbes algébriques)		1 manuel ²⁰ (allemand)	titre honorifique de <i>Professor</i> (sans poste)	
1853		1 mémoire ²¹ (théorie des couleurs) 1 article ²² (optique)	1 résumé (acoustique)		<i>Lectures on Quaternions</i> Hamilton ; « Sur les clefs algébriques » Cauchy
1855	6 articles ²³ (courbes algébriques, multiplications de vecteurs)				
1860		1 article ²⁴ (linguistique)			
1861		1 article ²⁵ (linguistique)	cours ²⁶ (arithmétique supérieure)		

¹⁷ *Die geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*, Leipzig, 1847.

¹⁸ « Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischen Kurven durch Bewegung gerader Linien », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 42, 1851, p. 187-192.

« Die höhere Projektivität und Perspektivität in der Ebene, dargestellt durch geometrische Analyse », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 42, 1851, p. 193-203.

¹⁹ « Erzeugung der Kurven vierter Ordnung durch Bewegung gerader Linien », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 44, 1852, p. 1-26.

²⁰ *Leitfaden der deutschen Sprache, mit zahlreichen Übungen versehen*, Stettin, 1852.

²¹ « Zur Theorie der Farbenmischung », *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 89, 1853, p. 69-84.

²² « Übersicht der Akustik und der niederen Optik », *Programm des Königlichen und Stadtgymnasiums zu Stettin*.

²³ « Allgemeiner Satz über die lineale Erzeugung aller algebraischen Oberflächen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 49, 1855, p. 1-9 ; « Grundsätze der stereometrischen Multiplikation », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 49, 1855, p. 10-20 ; « Über die verschiedene Arten der linealen Erzeugung algebraischer Oberflächen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle) 49, 1855, p. 21-36 ; « Die stereometrische Gleichung zweiten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 49, 1855, p. 37-46 ; « Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades und die dadurch erzeugten Oberflächen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 49, 1855, p. 47-65 ; « Sur les différents genres de multiplication », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 49, 1855, p. 123-141.

²⁴ *Kuhns Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung* IX, 1860, p. 1-35.

²⁵ *Kuhns Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung* XI, 1861.

²⁶ *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Berlin, 1861.

1862	deuxième <i>Ausdehnungslehre</i> [Gr, 1862]	2 articles ²⁷ (linguistique)		demande en vain d'un poste universitaire	
1865			traité ²⁸ (trigo- nométrie supérieure)		
1866					<i>Elements of Quaternions</i> Hamilton
1867		1 mémoire ²⁹ (linguistique)	cours ³⁰ (mécanique, école)		<i>Theorie der complexen Zahlensysteme</i> Hankel
1870– 1872		1 mémoire ³¹ (linguistique- botanique)	2 articles (mathématiques, école)		
1873		dictionnaire ³² du <i>Rigveda</i> (sanskrit)			
1874					<i>Théorie élémentaire des quantités complexes</i> Jules Houël
1876		traduction ³³ du <i>Rigveda</i> (sanskrit)		docteur <i>honoris causa</i> (philosophie, Tübingen)	
1877	3 articles ³⁴ (mécanique, quaternions, théorie des polaires)	1 article ³⁵ (linguistique) 1 article ³⁶ (physique)		membre de l'American Oriental Society	
1877	mort à Stettin				

²⁷ *Kuhns Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung* XII, 1862-3, p. 81-110, 110-138, 241-266.

²⁸ *Lehrbuch der Trigonometrie für höhere Lehranstalten*, Berlin, 1865.

²⁹ *Kuhns Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung*, XVI, 1867, p. 101-119, 161-182.

³⁰ « Grundriss der Mechanik (für den Unterricht in Prima) », Schulprogrammschrift.

³¹ *Deutsche Pflanzennamen*.

³² *Wörterbuch zum Rigveda*.

³³ « ...übersetzt und mit kritischen Anmerkungen versehen », 1876-77.

³⁴ « Zur Elektrodynamik », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle) 83, 1877, p. 57-64.

« Die Mechanik nach den Prinzipien der Ausdehnungslehre », *Mathematischen Annalen* 12, 1877, p. 222-240.

« Der Ort der Hamiltonschen Quaternionen in der Ausdehnungslehre », *Mathematischen Annalen* 12, 1877, p. 375-386.

³⁵ *Kuhns Zeitschrift für vergleichende Sprachforschung* XXIII, 1877, p. 559-579, 161-182.

³⁶ *Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie* I-4, 1877, p. 606-629.

3. – Un aperçu sur l'*Ausdehnungslehre*

Afin de tenter d'expliquer le retard de circulation de l'*Ausdehnungslehre*, nous allons étudier le début de la première édition (1844), jusqu'à la première moitié du chapitre 1 de la section 1 : cela devrait donner une assez bonne idée de la difficulté de lecture... Nous utiliserons la seule traduction disponible en français, celle de Dominique Flament [Gr, 1994] ; le texte allemand original se trouve aisément sur Internet. L'ouvrage est précédé d'une préface, d'une introduction et d'un « Aperçu de la théorie générale des formes ». La préface occupe sept pages ; le style de Grassmann y est empreint d'une certaine lourdeur : il y a souvent des répétitions – probablement dans un souci de non ambiguïté. Grassmann explique la genèse de sa théorie ; le passage suivant est assez significatif :

La considération du négatif en géométrie m'avait donné la première impulsion ; je m'habituais à voir dans les segments AB et BA des grandeurs opposées ; d'où résultait que, si A, B, C sont des points d'une ligne droite, $AB + BC = AC$ est également toujours vrai, et quand AB et BC sont désignés pareillement, et quand ils sont opposés, c'est-à-dire quand C est placé entre A et B . Dans ce dernier cas AB et BC n'étaient pas vus seulement comme de simples longueurs, mais il y était fixé en même temps la direction au moyen de laquelle justement ils étaient opposés. S'imposait ainsi la distinction entre la somme des longueurs et la somme de tels segments où était fixée la direction. D'où résultait l'exigence de fixer ce dernier concept de somme non seulement pour le cas où les segments sont dirigés dans le même sens ou dans le sens opposé, mais aussi pour les autres cas. Cela pouvait se faire de la façon la plus simple en maintenant encore la loi $AB + BC = AC$ même quand A, B, C n'étaient pas sur une ligne droite. Ainsi fut fait le premier pas vers une analyse qui menait par la suite vers la nouvelle branche de la mathématique que voici. Mais je n'avais aucune idée de la richesse et du caractère fructueux du domaine auquel j'étais parvenu ; au contraire ce résultat ne me semblait pas très remarquable jusqu'au moment où je l'ai combiné avec une idée connexe. En suivant le concept de produit en géométrie, tel qu'il fut conçu par mon père, je trouvai que non seulement le rectangle mais somme toute aussi le parallélogramme est à considérer comme le produit de deux côtés contigus, quand on prenait en effet, là encore, non pas le produit des longueurs, mais celui des segments en tenant compte de leurs directions. En combinant alors ce concept de produit avec celui de somme exposé précédemment, j'obtins l'harmonie la plus frappante ...

L'introduction essaie d'expliquer des points de vue logique et philosophique quelle est la place "scientifique" de l'*Ausdehnungslehre* en tant que nouvelle discipline mathématique. Elle comporte quatre parties. Dans la première,

Grassmann définit la mathématique pure. Pour ce faire, il distingue « les sciences réelles et les sciences formelles ». Les premières, explique-t-il, « figurent l'être dans la pensée, un être lui-même indépendant de cette pensée, et leur vérité est donnée par la concordance de la pensée avec cet être ; les secondes, cependant, ont pour objet ce qui est posé par la pensée elle-même, et leur vérité est donnée par la concordance entre eux des processus de pensée. » La mathématique pure est alors « la science de l'être particulier en tant que devenu par la pensée ». Dans la deuxième partie, Grassmann analyse la mathématique pure et y distingue différentes théories :

Nous pouvons appeler forme algébrique ce qui est devenu par l'égal et forme combinatoire ce qui est devenu par le distinct. [...] Les sciences du discret sont alors la théorie des nombres et la théorie des combinaisons (théorie des liaisons) [...] De la même manière, la forme continue ou grandeur se sépare en forme algébrique continue ou grandeur intensive et en forme combinatoire-continue ou grandeur extensive. La grandeur intensive est alors ce qui est devenu par la génération de l'égal ; la grandeur extensive ou extension est ce qui est devenu par la génération du distinct.

Grassmann procède à des différenciations logico-philosophiques liées à la nature des « formes » : ses phrases sont compliquées et le vocabulaire est abstrait. Tout mathématicien – même allemand du XIX^e siècle – serait dérouté par ces considérations. Dans la troisième partie, Grassmann définit – toujours dans l'esprit d'abstraction qui l'anime – le concept d'*Ausdehnungslehre* ; nous l'aborderons en expliquant le début du texte en lui-même. Dans la quatrième et dernière partie, Grassmann explique quelle doit être la méthode d'exposition – et quelle sera la sienne – en mathématiques :

La présentation mathématique est essentiellement un enchaînement de deux séries de développements dont l'une conduit en conséquence d'une vérité à l'autre et forme le contenu propre, cependant que l'autre gouverne le processus lui-même et détermine la forme. En mathématique, ces deux séries de développements sont les plus distantes l'une de l'autre. Cela fait déjà longtemps qu'en mathématique, Euclide lui-même en a donné le modèle [...] Dans l'œuvre présente, j'ai alors pris le chemin indiqué, et cela me semblait être d'autant plus nécessaire pour une nouvelle science dont justement l'idée doit être tout de suite mise en lumière.

On l'entrevoit, Grassmann a une vision philosophique et très abstraite des mathématiques. Dans l'« Aperçu de la théorie générale des formes » qui suit l'introduction, il est le premier mathématicien qui expose une théorie des opérations algébriques – comme on pourrait l'exprimer de nos jours. Cette théorie n'est pas du tout gratuite, mais permet à son auteur d'alléger certaines démonstrations dans la suite du texte en invoquant des propriétés générales :

Nous comprenons par théorie générale des formes la série de vérité qui, de la même manière, se rapportent à toutes les branches des mathématiques et qui ne supposent donc que les concepts généraux d'égalité, de diversité, de liaison, de séparation. Ainsi, la théorie générale des formes devrait précéder toutes les branches spéciales des mathématiques ; mais comme cette branche générale en tant que telle n'existe pas encore et comme nous ne pouvons pas la laisser de côté sans nous engager en d'inutiles longueurs, il ne nous reste alors qu'à développer celle-ci de manière dont nous en aurons besoin ici pour notre science.

Grassmann étudie avec son propre langage les lois internes, l'associativité, l'existence d'inverse, la distributivité, etc. Les lois sont appelées « liaisons », une « liaison simple » est une loi associative ; la « liaison synthétique » est la loi inverse d'une « liaison analytique ». Puis il démontre quelques propriétés, par exemple :

Si une liaison est d'espèce telle qu'on a le droit, sans modifier le résultat, de disposer à volonté les parenthèses pour trois membres et de modifier l'ordre pour deux, alors la position des parenthèses et l'ordre pour un nombre quelconque de membres sont aussi indifférents pour le résultat. [...] Si les facteurs d'un produit sont articulés par l'addition et la soustraction, alors sans changement du résultat final on peut multiplier chaque terme d'un facteur par chaque terme de l'autre et lier les produits ainsi obtenus en les faisant précéder des signes d'addition et de soustraction suivant que les signes de leurs facteurs étaient ou non les mêmes.

Le corps de l'ouvrage se compose de deux sections. La première, intitulée « La grandeur d'extension », traite de l'« Addition et soustraction des extensions simples de premiers échelons » (chapitre 1), de leur « Multiplication extérieure » (chapitre 2), de la « Liaison des grandeurs extensions de plus hauts échelons » (chapitre 3), de la « Division extérieure, grandeur de nombre » (chapitre 4), des « Équations, projections » (chapitre 5). En termes plus accessibles et modernes, Grassmann définit en toute généralité les espaces vectoriels (réels), les vecteurs, l'addition de vecteurs, la multiplication (extérieure) et le produit scalaire de deux vecteurs ; il en donne des applications à la géométrie, l'algèbre et la physique. Dans la seconde section, intitulée « La grandeur élémentaire » et comportant quatre chapitres, Grassmann applique les résultats de la première section à des espaces de fonctions. Le plan de cette section est donc un écho de la première. Tous les chapitres de l'*Ausdehnungslehre* ont la même structure (environ 20 pages) : un développement théorique (partie A) mêlant nouvelles définitions, remarques et théorèmes, puis des applications géométriques et/ou physiques (partie B), dans une proportion à

peu près égale.

Voici maintenant le plan du premier chapitre de la première section :

A) Développement théorique.

a) (§13-14) La formation d'extension, le simple et le système de premier échelon.

b) (§15) Addition et soustraction de segments de même espèce.

c) (§16) Systèmes d'échelons plus élevés.

d) (§17-19) Addition et soustraction de segments d'espèces différentes.

e) (§20) Indépendance des systèmes d'échelons plus élevés.

B) Applications.

a) (§21-23) Impossibilité de maintenir la base de la géométrie qui a existé jusqu'à présent et essai d'un nouveau fondement.

b) (§24) Exercices et théorèmes géométriques, le centre de plusieurs points.

c) (§25) Les lois fondamentales de la mécanique de Newton.

d) (§26) Mouvement total, mouvement du centre de gravité.

e) (§27) Remarque sur l'applicabilité de la nouvelle analyse.

Notons la parfaite symétrie des deux parties du chapitre. Nous en proposons une brève analyse pour mieux comprendre la méthode de Grassmann et son souci de généralité et d'abstraction. Nous conservons l'indexation des paragraphes ci-dessus.

A) a) Après avoir annoncé qu'il se rattachera à la géométrie sans jamais se fonder sur elle, Grassmann commence par une analyse de ce qu'est une ligne géométrique :

c'est un point générateur qui prend des positions différentes dans une suite continue ; et la totalité des points, en lesquels le point générateur se transforme lors de ce changement, constitue la ligne.

Elle lui permet de donner une définition abstraite de « ligne », à laquelle il consacre neuf lignes et qui permet d'éclairer quelque peu certaines phrases de son introduction :

nous posons à la place du point, c'est-à-dire du particulier, l'élément, par lequel nous comprenons le particulier en tant que tel pris comme distinct des autres particuliers [...] Ce concept d'élément est commun à notre science et à la théorie des combinaisons, et pour cette raison la notation des éléments (par des lettres différentes) leur est aussi commune.

Notons que Grassmann ne disposait pas de la théorie des ensembles moderne ; le « point » pour Grassmann n'est autre qu'un élément d'un ensemble d'un point de vue naïf. Conformément à sa méthode, il définit en toute généralité « la ligne » en calquant la génération de la ligne géométrique à partir d'un point :

Les éléments différents peuvent alors être compris en même temps comme des états différents du même élément générateur, et cette différence abstraite des états est celle qui correspond à la différence des lieux.

À cela, il ajoute quelques définitions :

Nous appelons la transition de l'élément générateur d'un état à un autre le changement de celui-ci ; et ce changement abstrait de l'élément générateur d'un état à un autre correspond alors au changement de lieu ou au mouvement du point en géométrie [...] Par formation d'extension du premier échelon, nous entendons la totalité des éléments en lesquels un élément générateur se transforme lors d'un changement continu.

Après ces définitions très générales, Grassmann "rétrécit son champ conceptuel" en définissant un cas particulier – le plus simple – de « formation d'extension simple » :

La formation d'extension se présentera seulement comme simple si les changements que l'élément générateur subit sont toujours posés égaux entre eux ; ainsi donc, si l'élément b résulte par un changement d'un autre élément a , et si les deux éléments appartiennent à cette même formation d'extension, alors par un même changement un élément c de la même formation d'extension est engendré par b , et cette égalité devra encore avoir lieu si a et b sont conçus comme des éléments contigus. Nous pouvons appeler un tel changement, par lequel d'un élément d'une forme continue un autre est engendré qui est voisin, un changement fondamental.

Ces définitions sont très abstraites – et c'est exprès évidemment. Grassmann prend, par souci de pédagogie, l'exemple de la géométrie plane : deux manières de « changement fondamental » sont égales si les deux directions sont égales ; la formation d'extension simple est alors le représentant d'un vecteur (comme classe d'équivalence) comme on pourrait le dire de nos jours et la grandeur d'extension est le vecteur en tant que classe d'équivalence. Enfin, Grassmann pose cette définition :

Enfin, nous appelons la totalité des éléments qui sont engendrés par la poursuite d'un même changement fondamental et par son opposé un système de premier échelon.

C'est ce que nous appelons espace vectoriel de dimension 1 ou droite vectorielle.

b) Grassmann se donne tacitement un « changement fondamental » et se place dans un « système de premier échelon ». Dans ce cadre, il définit une addition, qu'il appelle « liaison de deux segments ».

Si l'engendrement continu du segment est pensé interrompu au cours de son mouvement pour être ensuite poursuivi, alors le segment entier se présente comme deux segments qui sont attachés continûment l'un à l'autre et dont l'un se présente comme le prolongement de l'autre.

Grassmann définit donc "l'addition" de "segments" via la relation "de Chasles". À partir de cette définition, il prouve que cette loi interne est associative, commutative, qu'elle possède un élément neutre (comme on dirait aujourd'hui). Il invoque sa théorie des formes pour définir la soustraction comme « liaison synthétique » de l'addition – on appelle cette "liaison" une addition car elle en possède les propriétés. Enfin, Grassmann prouve que son addition ne dépend pas "des représentants" des segments.

c) Grassmann généralise ses définitions de a). Il commence par définir des systèmes d'échelon de plus en plus élevé :

Si je suppose maintenant [...] deux changements fondamentaux différents et si je prolonge à volonté un élément du premier changement fondamental (ou son opposé) et prolonge à volonté l'élément ainsi changé, suivant la deuxième manière de changement, je pourrais alors engendrer d'un élément une infinité d'éléments nouveaux, et j'appelle système du deuxième échelon la totalité des éléments ainsi engendrés [...]

Si je prends un troisième changement fondamental, qui à partir de l'élément initial ne fait pas revenir à un élément de ce système de deuxième échelon [...] indépendant de ces deux derniers changements [...] cette manière d'engendrer n'a, conceptuellement, aucune limite et je pourrai ainsi parvenir à des systèmes d'échelon à volonté.

C'est la définition géométrique de nos espaces vectoriels (en dimension quelconque) en termes de systèmes générateurs. Grassmann fait ici remarquer qu'il est important « de retenir que tous les éléments ainsi engendrés, ne doivent pas être conçus comme déjà donnés auparavant, mais qu'ils sont engendrés dans l'immédiat ». Cela fait allusion au fait que les points sont indissociables, à ce stade de la théorie, de la façon dont ils ont été engendrés. Nous verrons plus loin que grâce au concept d'« indépendance », il est possible de définir les éléments d'un système du m -ième échelon sans prêter attention à ces changements fondamentaux et à l'ordre de leur apparition. Grassmann généralise ensuite le b) en se plaçant dans un système du m -ième échelon – tacitement. Il se donne donc m changements fondamentaux. Il définit la liaison de deux segments par Chasles de manière analogue au b). Il vérifie que cette « liaison » est associative, car « l'acte de la réunion ne change pas l'état de l'élément ». Pour ce qui est de la commutativité, il remarque qu'il est nécessaire de poser une nouvelle hypothèse :

si a et b sont deux segments dont a appartient à un changement passé et b à un changement à venir, alors, pour l'engendrement du système, un élément peut faire suivre au changement a le changement b mais non inversement.

Grassmann explicite cette lacune et conclut les deux points suivants :

Si, d'un système du m -ième échelon, un segment, qui appartient à l'une des m manières passées qui constituent le système, est soumis à une des manières de changement à venir, et cela d'une façon telle que tous les éléments sont soumis à la même manière de changement, alors les changements fondamentaux correspondant au segment originaire et au segment qui est né par ce changement doivent être dits égaux entre eux.

Si on soumet un segment qui appartient à l'une des m manières de changements originaires du système, aux changements qui appartiennent aussi à ces manières de changement, et pour préciser tous les éléments aux mêmes changements, alors le segment, résultant de ce changement est égal à celui d'origine.

Dans notre langage moderne, Grassmann explique qu'on peut remplacer dans une somme un vecteur par un vecteur qui lui est égal. Finalement, Grassmann démontre que la « liaison » est une « addition » et qu'elle possède une « liaison synthétique » : la soustraction. De même qu'à la fin du b), il doit vérifier que l'addition ne dépend pas « des représentants ». C'est évidemment plus compliqué qu'au b). Il procède en trois temps. Il commence par démontrer qu'étant donnés deux éléments du système du m -ième échelon, ils définissent un système du premier échelon. Dans ce système du premier échelon, la relation de Chasles est utilisable sans ambiguïté. Dans un second temps, il démontre l'unicité de ce système du premier échelon :

Soient a et b les deux éléments du système ; en exposant la manière d'engendrer le système, nous avons déjà montré que b peut toujours être engendré de a par les m manières de changement du système ; pour préciser : il peut être engendré d'une seule façon si l'ordre est donné. Soient $a, b, c, \dots$ ces changements, il importe alors de d'abord montrer qu'on peut toujours prendre ces segments des changements fondamentaux mutuellement correspondants tels que $a, b, c, \dots$ deviennent des segments correspondants, et que b devienne alors [...] un élément du système du premier échelon engendré par les changements fondamentaux correspondants [...] un autre système du premier échelon ne pourrait naître que si les changements fondamentaux des autres segments $b, c, \dots$ qui correspondent au changement fondamental en a , étant pris d'une manière différente.

De cela, Grassmann déduit :

le concept de somme n'est pas seulement déterminé pour les changements mais aussi pour les segments eux-mêmes. [...] il suit qu'une manière de changement est dépendante d'autres si les segments de la première se laissent représenter comme somme des segments qui appartiennent aux dernières, en revanche elle est indépendante de celles-ci si cela n'est pas possible.

Puis – c'est le troisième temps –, à la lumière de ce qu'il vient de prouver, il reprend sa définition de système de m -ième échelon :

Jusqu'ici nous avons fait dépendre le concept de somme des segments de la manière particulière d'engendrer le système entier en construisant si les éléments initial et final de la somme sont donnés par une juxtaposition continue des segments, le segment entre les deux éléments qui fait partie d'un système du premier échelon par les m manières de changements originaires du système entier.

Grâce à cela, il démontre que la relation de Chasles est désormais sans ambiguïté. Enfin, dans e), avec les mêmes hypothèses qu'au d), l'auteur reprend la notion d'indépendance ; il démontre que :

Chaque segment d'un système de m -ième échelon peut être représenté comme la somme de m segments qui appartiennent à m manières de changements indépendantes données du système, et ce toujours d'une seule façon.

La démonstration utilise un raisonnement par récurrence et le fait suivant :

si le système peut être engendré par m manières de changements quelconques, alors je peux introduire au lieu d'une manière quelconque d'entre elles une nouvelle manière de changement qui est indépendante des $(m - 1)$ autres et qui appartient aussi à ce système du m -ième échelon.

B) Dans cette partie, Grassmann propose une nouvelle axiomatique de la géométrie à l'aide des segments, réécrit les lois de la dynamique et montre la supériorité de son calcul par rapport à celui de Lagrange. Nous n'analyserons pas ces applications qui sont plus accessibles que le développement théorique.

Au-delà des problèmes de traduction liés au vocabulaire (germanique) de l'auteur, on a bien le sentiment d'un texte extrêmement difficile à lire et comprendre. De par le choix d'exposition, il est ardu de lire les chapitres indépendamment ; de plus, le degré de généralité, les nombreuses définitions, le nouveau vocabulaire peuvent rebuter le lecteur. Il est à remarquer que notre théorie des espaces vectoriels n'est pas si différente de celle de Grassmann : les termes sont facilement transposables. Mais le point de vue de Grassmann est résolument géométrique. La difficulté de lecture de l'*Ausdehnungslehre* reflète un réel "obstacle épistémologique", pour reprendre la notion de Bachelard,

obstacle qui se retrouve dans l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les premières années d'université. Il n'est pas rare que les étudiants soient noyés sous l'ensemble des définitions et la généralité des résultats. C'est une vraie théorie à part entière !

4. – Conclusions

Nous allons reprendre les différents éléments développés précédemment et les mettre en perspective afin d'expliquer – si possible – quelques paradoxes qui concernent l'œuvre de Grassmann.

Notre but principal était d'expliquer pour quelles raisons l'*Ausdehnungslehre* a circulé avec difficulté et semble avoir été oubliée. Nous avons d'abord montré que la position sociale de Grassmann – professeur de lycée –, mais aussi son apprentissage autodidacte des mathématiques, son esprit d'abstraction et de généralité et son style de rédaction ont retardé la circulation de son œuvre. Rappelons aussi que Grassmann fut un humaniste : intéressé par la théologie, les mathématiques, la physique, la botanique, les langues, la linguistique, il produisit tout au long de sa vie des articles de recherche et d'enseignement dans toutes ces disciplines et n'en délaissa aucune – ce qui a pu contribuer à brouiller son image. En mathématiques, puisque là est notre intérêt, on remarque que si l'*Ausdehnungslehre* de 1844 fut lue par différents mathématiciens importants, elle fut reçue avec un certain scepticisme et “circula” difficilement. Un peu d'écho parvint cependant, mais avec dix à quinze ans de retard. La version de 1862 fit lentement son chemin dans le milieu mathématique allemand – à un moment où Grassmann avait délaissé les mathématiques pour les études orientales et où des “vulgarisateurs”, proches de son état d'esprit et de son “programme”, “affinèrent” l'*Ausdehnungslehre* sans en changer les idées fondamentales. Après sa mort, les idées de Grassmann continuèrent de circuler et furent largement mises à profit, jusqu'à nos jours. Nous avons évoqué ces “reprises” successives et tenté de préciser qui a lu l'*Ausdehnungslehre*, qui l'a “vulgarisée”, qui l'a utilisée.

Il reste une question que l'on se pose naturellement : l'algèbre linéaire actuellement enseignée dans les premières années d'université est-elle issue de l'*Ausdehnungslehre* ? Certes Grassmann n'avait pas la théorie des ensembles à sa disposition. Il avait une vision très géométrique des “vecteurs”, qu'il définissait à partir d'une structure “affine” sous-jacente : ce n'est pas gênant *a posteriori* en dimension finie, mais en dimension infinie, c'est plus compliqué. À ces réserves près, les notions d'“espace vectoriel de dimension finie”, de sous-espace engendré et d'indépendance linéaire que nous connaissons sont bien celles qu'il a définies. Enfin, la modernité de Grassmann réside aussi dans son approche générale des opérations algébriques et dans l'usage qu'il en fait. Il a réellement défini, le premier, les espaces vectoriels dans toute leur généralité :

Möbius, Bellavitis et quelques autres ont bien travaillé sur des “vecteurs”, mais uniquement dans le plan ou l’espace, et Hamilton n’a manipulé des “structures vectorielles” plus générales qu’à propos des quaternions. L’algèbre linéaire abstraite enseignée aujourd’hui semble vraiment pour une grande part héritée de cette œuvre brillante et prodigieuse que fut l’*Ausdehnungslehre*. La théorie de Grassmann s’est imposée au fil des ans comme unificatrice, pratique, fructueuse, indispensable. Cette « science de la grandeur extensive » est devenue une science à part entière, entre l’algèbre et l’analyse. Si le nom de Grassmann a été oublié presque complètement, c’est peut-être parce qu’il devrait apparaître presque partout ... Il me semble que ce n’est pas juste, historiquement parlant : il faut rendre à Grassmann ce qui appartient à Grassmann ! À cette fin, je propose que tout cours sur les éléments de l’algèbre linéaire commence par quelques mots sur le père de cette théorie, afin de faire vivre la mémoire de Hermann Günther Grassmann.



Ill. – Portrait de H. G. Grassmann

Bibliographie

- [Au] Michèle AUDIN, *Géométrie*, Paris : EDP sciences, 2006.
- [Av] Lilian AVENEAU, « Les coordonnées de Plücker revisitées », *Revue électronique francophone d'informatique graphique* 3-2, 2009, p. 59-68.
- [Cas] Ferdinand CASPARY, « Sur une méthode générale de la géométrie, qui forme le lien entre la géométrie synthétique et la géométrie analytique », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* 2^e série 13, 1889, p. 202-240.
- [Cau] Augustin Louis CAUCHY, « Sur les clefs algébriques », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 36, 1853, p. 70-75, 129-136 et 161-169.
- [Car, 1922] Élie CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris : Hermann, 1922.
- [Car, 1952] Élie CARTAN, *Œuvres complètes*, 6 vol., Paris : Gauthiers-Villars, 1952 (rééd. CNRS, 1984).
- [Cl] William Kingdon CLIFFORD, *Mathematical Papers*, London, 1882, rééd. New York, 1968.
- [E] Friedrich ENGEL, « Grassmanns Leben », in : [Gr, *Werke*], vol. III, 2.
- [Fl] Dominique FLAMENT, « La “lineale Ausdehnungslehre” (1844) de Hermann Günther Grassmann », in : *1830-1930 : A Century of Geometry*, Lectures Notes in Physics 402, 1992, p. 205-221.
- [Gi] J. Willard GIBBS (dir.), *Vector Analysis, a text-book for the use of students of mathematics and physics founded upon the lectures of J. Willard Gibbs*, by E. B. Wilson, New York, 1901.
- [Gr, 1840] Hermann Günther GRASSMANN, *Theorie der Ebbe und Flut*, 1840, repris in : [Gr, *Werke*], vol. III, 1, p. 1-238.
- [Gr, 1844] Hermann Günther GRASSMANN, *Die lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, Leipzig, 1844.
- [Gr, 1847] Hermann Günther GRASSMANN, *Die geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*, Leipzig, 1847.
- [Gr, 1862] Hermann Günther GRASSMANN, *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form bearbeitet*, Berlin, 1862.
- [Gr, 1994] Hermann Günther GRASSMANN, *La science de la grandeur extensive. La lineale Ausdehnungslehre*, traduction et préface de D. Flament et B. Bekemeier, Paris : Albert Blanchard, 1994.
- [Gr, *Werke*] Hermann Günther GRASSMANN, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, 3 vol., Leipzig, 1894-1911.
- [Gr^r] Hermann Ernst GRASSMANN, *Projektive Geometrie der Ebene, unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt*, 3 vol., Halle, 1909-1923.
- [Grav] Robert Perceval GRAVES, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vol., Dublin, 1866.
- [Ham, 1853] William Rowan HAMILTON, *Lectures on Quaternions*, Dublin, 1853.
- [Ham, 1866] William Rowan HAMILTON, *Elements on Quaternions*, Dublin, 1866.
- [Han] Hermann HANKEL, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig, 1867.
- [Hin] Friedrich HINDENBURG, *Novi systematis permutationum...*, Leipzig, 1781.
- [K] Felix KLEIN, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin, 1928.
- [La] Laurent LAFFORGUE, *Chirurgie des grassmanniennes*, AMS, 2003.
- [Le] Albert C. LEWIS, « Grassmann's 1844 *Ausdehnungslehre* and Schleiermacher's Dialektik », *Annals of Science* 34, 1977, p. 103-162.
- [Lo] Alfred LOTZE, *Die Grundgleichungen der Mechanik, neu entwickelt mit Grassmanns Punktrechnung*, Leipzig, 1922.
- [Me] Rudolf MEHMKE, *Anwendung der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie der Kreise in der Ebene*, Stuttgart, 1880.
- [Mö] Augustus Ferdinand MÖBIUS, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig, 1827.
- [Pea] Giuseppe PEANO, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica dettativa*, Torino, 1888.
- [Pet] Hans-Joachim PETSCHE, *Hermann Grassmann*, Bâle : Birkhäuser, 2009.

- [Pl] François PLANTADE, *Étude du premier chapitre, première section de la lineale Ausdehnungslehre de 1844 de H. G. Grassmann*, mémoire de maîtrise, Paris : Université Denis Diderot, 1995, sous la direction d'André Deledicq.
- [Po] Henri POINCARÉ, *Œuvres*, 11 vol., Paris : Gauthiers-Villars, 1916-56.
- [RBB] G. C. ROTA, M. BARNABEI & A. BRINI, « On the Exterior Calculus of Invariant Theory », *Journal of Algebra* 96, 1985, p. 120-160.
- [Sa] Adhémar Barré DE SAINT-VENANT, « Sur l'interprétation (géométrique) des clefs algébriques et des déterminants », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* 36, 1853, p. 582-585.
- [SSS] Rudolf STURM, Ernst SCHRÖDER, Leonhard SOHNKE, « Hermann Grassmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten », *Mathematische Annalen* 14, 1879, p. 1-45.
- [Schl, 1872-75] Victor SCHLEGEL, *System der Raumlehre. Nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre*, 2 vol., Leipzig, 1872-1875.
- [Schl, 1878] Victor SCHLEGEL, *Hermann Grassmann. Sein Leben und seine Werke*, Leipzig, 1878.
- [Schl, 1896] Victor SCHLEGEL, *Die Grassmannsche Ausdehnungslehre. Ein Betrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten 50 Jahren*, Leipzig, 1896.
- [Schw] Laurent SCHWARTZ, *Les tenseurs*, Paris : Hermann, 1975.

