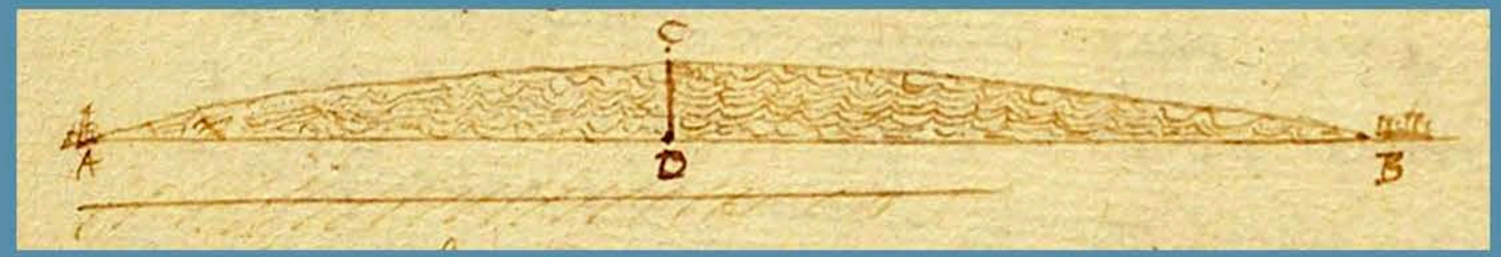
Circulation Transmission Héritage

Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » sont différents. Cet ouvrage explore des moments historiques où des décalages, petits ou grands, nourrirent des héritages et furent le fruit des circulations et des transmissions. Il invite à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études qu'il rassemble mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

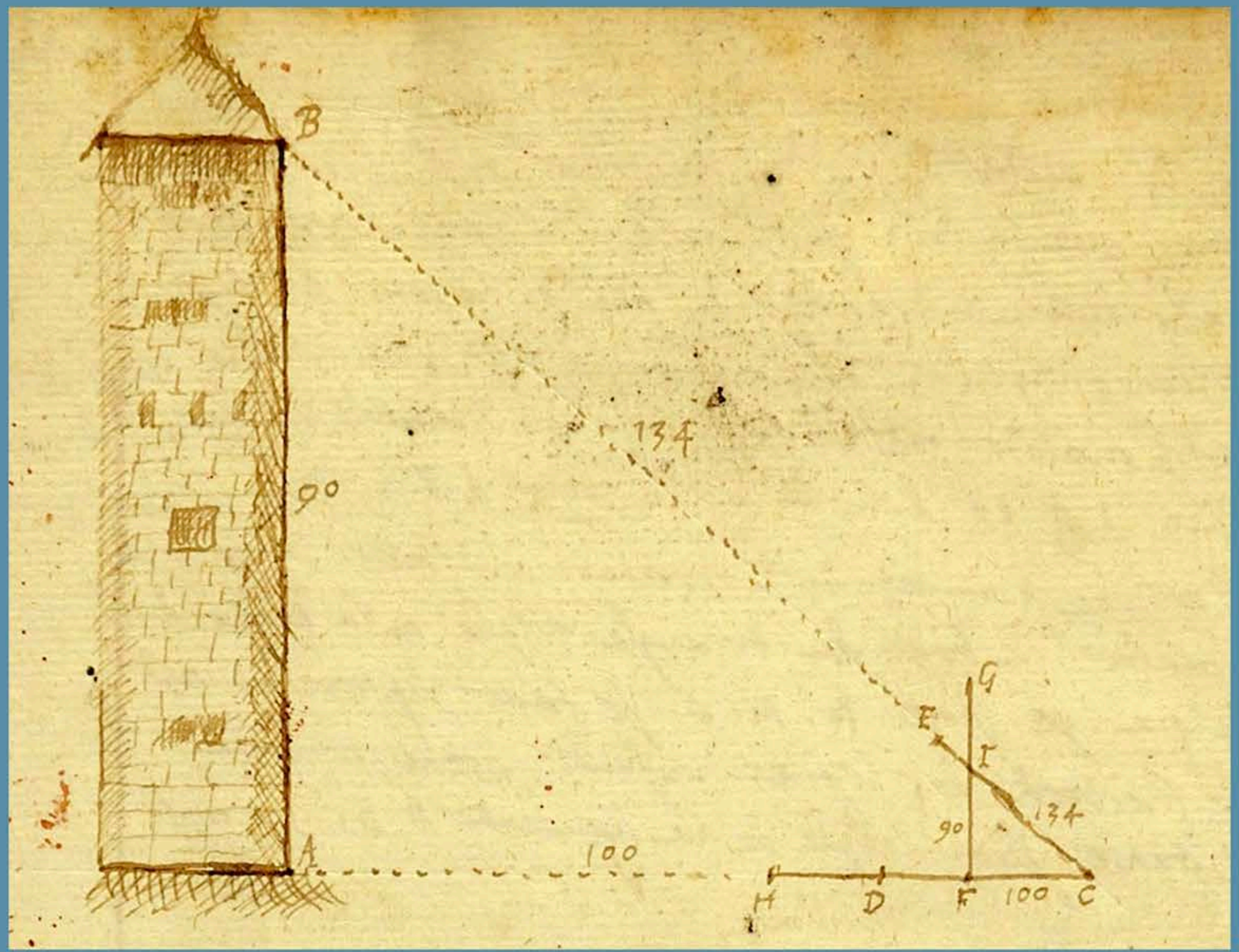


ISBN : 978-2-902498-06-2
Édition et diffusion : IREM de Basse-Normandie
juin 2011

IREM
de Basse-
Normandie

Circulation Transmission Héritage
histoire et épistémologie des mathématiques

Circulation Transmission Héritage



Actes du 18e colloque inter-IREM
histoire et épistémologie
des mathématiques
mai 2011

Université de Caen Basse-Normandie

Circulation Transmission Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-2. – Transmettre et s'approprier

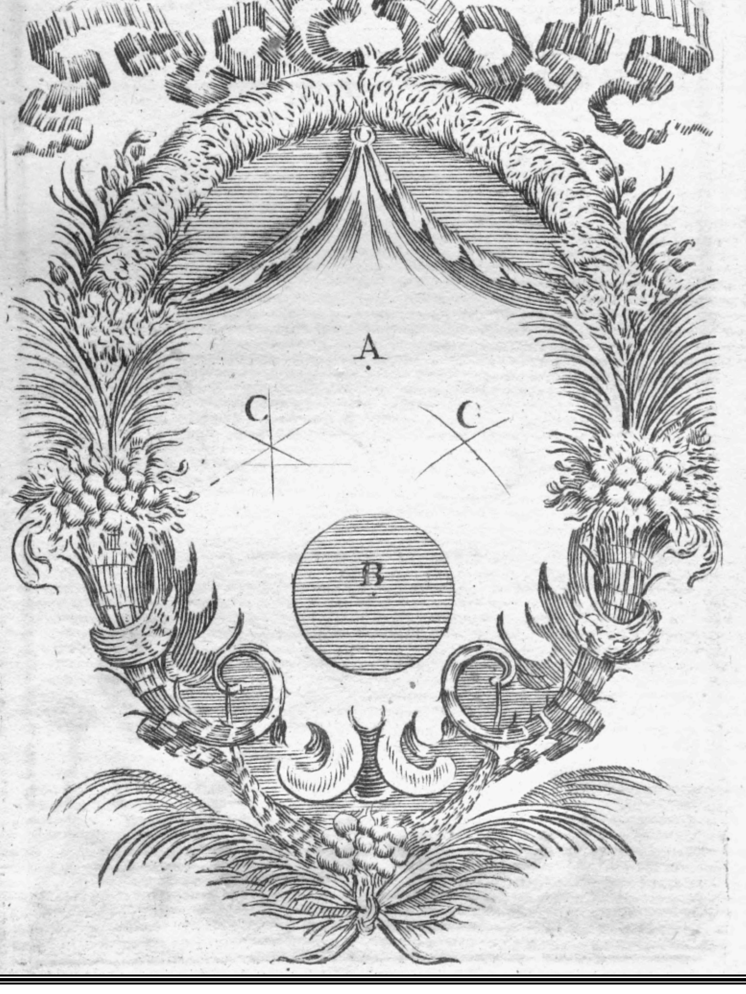
II-2-T.
Pages 449-464

Pourquoi les contemporains de Descartes n'ont-ils pas compris sa *Géométrie* de 1637 ?

Évelyne Barbin

Circulation
Transmission
Héritage

Histoire et épistémologie des mathématiques


A.
C
C
B

Commission inter-IREM
Épistémologie et histoire des mathématiques

Circulation Transmission Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

ISBN : 978-2-902498-06-2

Directeur de publication : Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie
Diffusion : IREM de Basse-Normandie, Université de Caen Basse-Normandie,
campus 2, 14032 Caen Cedex
Tél. : 02 31 56 74 02 – Fax. : 02 31 56 74 90
Adresse électronique : irem@unicaen.fr
Site Internet : http ://www.math.unicaen.fr/irem/
Coordination : Évelyne Barbin et Pierre Ageron
Comité de lecture : Pierre Ageron, Didier Bessot, Richard Choulet, Gilles Damamme, Guy Juge, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff, Pierrick Meignen, Thierry Mercier, François Plantade, Danielle Salles, Didier Trotoux et Éric Trotoux
Relecture générale : Pierre Ageron, Jean-Pierre Le Goff
Conception, illustration et mise en page du volume : Jean-Pierre Le Goff, Pierre Ageron, Didier Bessot et Didier Trotoux
Conception de l'affiche du colloque et de la couverture des actes : Patrice Gourbin
Impression et façonnage : Corlet numérique, 14110 Condé-sur-Noireau

Crédits photographiques de la couverture :
Bibliothèque de Caen, deux images tirées du manuscrit *in-fol.* 27 : *Pratique de geometrie*, de la main de Samuel Bochart (1599-1667)
– 1ère de couverture : mesure au *gonomètre* de la hauteur d'une tour, *f* °8 *r* °
– 4ème de couverture : mesure de la *gibbosité* de la mer entre Dieppe et la Rie (Rye), *f* °42 *v* °
Illustrations hors-texte :
Les 16 planches hors-texte des pages de l'ouvrage, paginées ii, viii, xiv, 28, 50, 94, 122, 240, 338, 360, 386, 446, 480, 502, 544 et 582, sont tirées de la *Pratique de la Geometrie, sur le papier et sur le terrein ; où par une methode nouvelle & singuliere l'on peut avec facilité & en peu de tems se perfectionner en cette science*, Par Sebastien Leclerc, Graveur du Roi. A Paris, Chez Ch. A. Jombert, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame. M. DCC. XLIV. (1744). *Avec Privilege du Roi.* (coll. part., clichés : jplg)

Sommaire

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

I-4. – Les figures : accompagner les mots

II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-1. – Hériter et inventer

II-2. – Transmettre et s'approprier

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

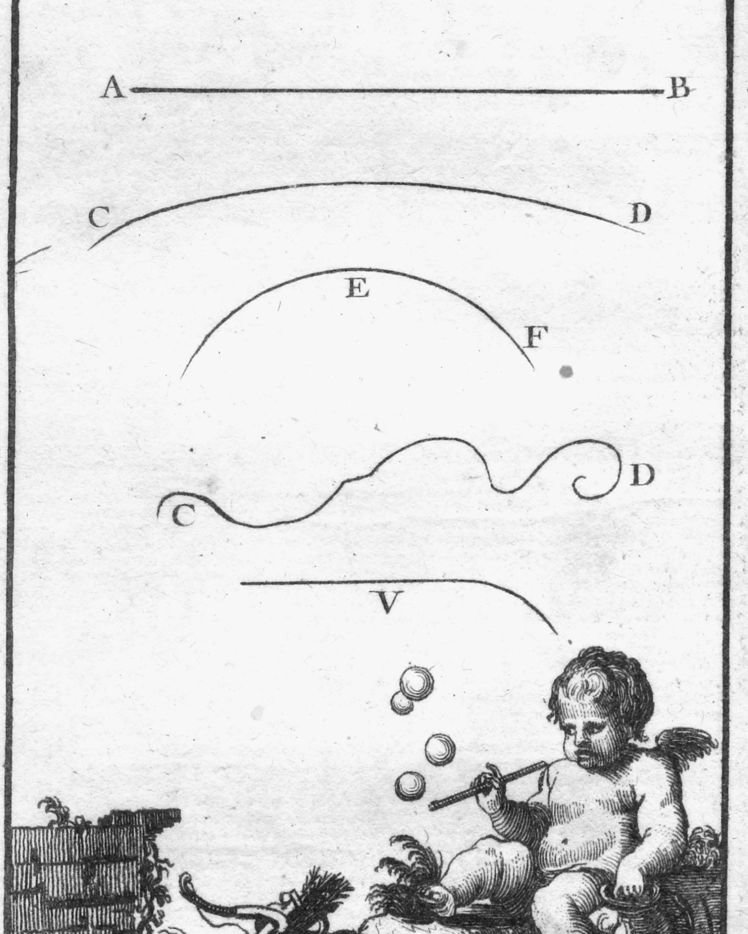
II. – D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

II-1. – Hériter et inventer

II-2. – Transmettre et s’approprier

II-3. – Lire les Anciens, aujourd’hui

Planche 2. Page 9.



Avant-propos

L'IREM de Basse-Normandie, institué dans l'université de Caen le 23 octobre 1973, cultive par précellence l'histoire des mathématiques. Dès l'origine, plusieurs de ses animateurs, professeurs de lycée, étaient conduits par une intuition : introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques serait de nature à aider les élèves à y retrouver du sens, sens que le formalisme – des "maths modernes", notamment – tendait à dissimuler. Mais la discipline "histoire des sciences" n'était alors guère développée dans les universités. C'est ainsi que commença un colossal travail de recherche fondamentale et appliquée, d'édition de sources, de formation initiale et continue, d'actions interdisciplinaires. Nombreux sont ceux qui y ont contribué ; je veux citer au moins les noms de Jean-Pierre Le Goff, Didier Bessot et Denis Lanier et leur rendre ici un hommage plein d'amitié et d'admiration.

C'est à l'IREM de Basse-Normandie qu'il revint d'organiser le tout premier colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, au château de Tailleville, en mai 1977, puis le X^e^ colloque d'une série devenue bisannuelle, sur le thème *La mémoire des nombres* – c'était à Cherbourg en mai 1994. Entre les deux, l'IREM de Basse-Normandie avait organisé, à l'initiative de l'Association pour le développement des études et recherches en histoire et épistémologie des mathématiques (ADERHEM), un colloque exceptionnel baptisé *Destin de l'art, dessein de la science* (octobre 1986). Enfin le XVIII^e^ colloque inter-IREM, dont vous tenez en main les actes, s'est tenu en mai 2010 au cœur de l'université caennaise, dans l'amphithéâtre Henri Poincaré (qui enseigna deux années à Caen). Le thème retenu, *Circulation – Transmission – Héritage*, invitait à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études ici rassemblées mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Basse-Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

Je remercie les institutions qui ont compris l'intérêt de cette manifestation : le ministère de l'Éducation nationale (via l'assemblée des directeurs d'IREM), la région Basse-Normandie, la ville de Caen, l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (régionale de Basse-Normandie), l'ADERHEM, et notre *alma mater* l'université de Caen Basse-Normandie.

Ce colloque n'aurait pu être organisé sans l'énergie déployée par Geneviève Jean, secrétaire de l'IREM, et par de nombreux animateurs de l'IREM, notamment Guy Juge, Éric Trotoux et Didier Trotoux. Enfin Jean-Pierre Le Goff, Didier Trotoux et Didier Bessot m'ont apporté une aide précieuse dans l'édition de ces actes. Que tous soient très chaleureusement remerciés.

Pierre Ageron
directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Présentation

Auteurs, destinataires et lecteurs d'un texte : histoires de décalages.

Évelyne Barbin,
IREM des Pays de la Loire,
Centre François Viète, Université de Nantes

La plus grande partie d'une œuvre se déroule sous la tyrannie de sa réception.
Christophe Prochasson, « Ce que le lecteur fait de l'œuvre. Héritages et trahisons : la réception des œuvres », *Mill neuf cent*, 12, 1994.

Le Colloque inter-IREM « Histoire des mathématiques : circulation, transmission, héritage » s'inscrit bien dans la visée de « la réception des œuvres » de Hans Robert Jauss, dont Christophe Prochasson indique l'intérêt pour l'historien dans le texte cité en exergue. Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Le cas des manuels, y compris les plus récents, n'échappe pas à cette distinction, que connaît bien l'enseignant : le destinataire du manuel est l'élève de classe de quatrième, mais la lectrice est Vanessa. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » – en utilisant l'expression de Jauss – sont différents. Cet ouvrage propose quelques moments historiques de décalages, petits ou grands, qui nourrissent les héritages, qui sont le fruit des circulations et des transmissions.

Les aspects matériels de la circulation des textes, leurs véhicules, font l'objet de la première partie. L'histoire des mathématiques arabes est intéressante, puisqu'elles sont au carrefour de langues diverses, elles commencent avec des traductions et se perpétuent avec d'autres traductions, dans une sphère culturelle large, comme le montrent Ahmed Djebbar et Pierre Ageron. Avec la transmission des *Éléments* d'Euclide en Arménie, Frédéric Laurent délivre une partie peu connue de l'histoire. L'ouvrage d'Euclide, transmis par les Jésuites en Chine, y connut un sort étrange, puisque les lecteurs orientaux négligèrent les démonstrations qui faisaient le succès des *Éléments* ailleurs. L'exemple du décalage très abrupt de l'attente entre Occidentaux et Chinois est illustré dans cet ouvrage par Isabelle Martinez et Jean-Pierre Le Goff. L'écart plus ténu entre langue savante, le latin, et langue vernaculaire, ici un dialecte italien, est examiné avec précision par Gérard Hamon et Lucette Degryse à propos des *Quesiti* de Nicollo Tartaglia au XVI^e^ siècle.

Il existe deux types de véhicules adaptés à des destinataires particuliers, ce sont les manuels et les revues mathématiques. Les manuels sont écrits à partir de sources diverses et à destination de commençants, avec le souci d'un rendu intégral des « idées » ou à l'inverse dans celui d'une « adaptation » aux élèves. Du côté des sources, Martine Bühler et Anne Michel-Pajus analysent celles d'un ouvrage d'arithmétique niçois du XVI^e^ siècle. Du côté des réceptions, Pierre Ageron et Didier Bessot retracent les tribulations d'un manuel de géométrie au XVIII^e^ siècle. Comme le montrent Anne Boyé et Guillaume Moussard, l'enseignement des vecteurs présente un cas très complexe aux sources multiples – géométriques, algébriques et physiques –, qui a beaucoup changé selon les destinataires à différentes époques.

L'édition des revues scientifiques commence au XVII^e^ siècle. Les journaux savants sont écrits par des « savants » à destination de leurs confrères, membres d'Académies nationales ou de Sociétés provinciales. La spécialisation de revues aux seules mathématiques au XIX^e^ siècle est contemporaine de publications pour des publics eux aussi plus spécialisés, qu'ils soient enseignants, amateurs ou bien mathématiciens. La transmission par des revues multiplie le nombre de possibilités de mise en évidence de décalages, en augmentant le nombre des auteurs et en accordant la plume aux lecteurs. Les articles de Jeanne Peiffer, de Christian Gérini et de Norbert Verdier offrent un large panel de périodes et de publics pour diverses revues sur trois siècles.

Les figures mathématiques ne transcendent-t-elles pas les questions de transmission en offrant un langage qui serait universel ? De plus, ne s'agit-il pas d'un langage qui précède l'écriture ? Ces questions trouveront des éléments de réponse dans les articles d'Olivier Keller et de Jean-Pierre Cléro. Prise du point de vue de la réception historique des « textes », la première question recevrait une réponse plutôt relativiste. Un triangle est vu comme une aire par Euclide et comme ses trois côtés par Descartes, il est désigné par des lettres chez les mathématiciens grecs et par des couleurs chez les chinois.

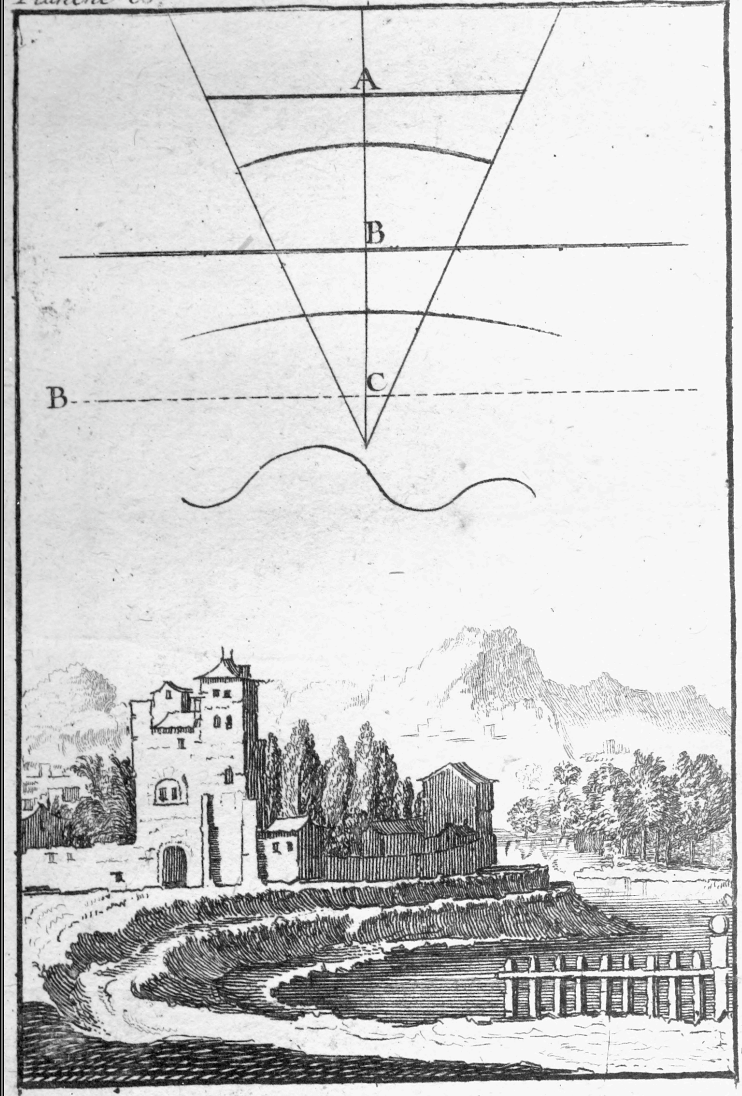
La seconde partie de cet ouvrage retourne à l'auteur d'un texte, mais sans abandonner la perspective du destinataire et du lecteur. En effet, l'auteur est lui-même un lecteur, et donc un texte peut être lu comme un maillon dans un échange dialogique. Car, comme l'explique Mikhaïl Bakhtine, un texte est écrit en réponse à d'autres auteurs de textes et il s'adresse à des lecteurs qui ont une « attitude responsive active ».

Lorsqu'un auteur doit écrire quelque chose qui lui paraît nouveau, c'est-à-dire susceptible d'aller au-delà des conceptions contemporaines, il doit aménager son texte. Autrement dit l'invention pose des problèmes accrus de transmission. C'est ce qu'analysent les articles de Jean-Paul Guichard, de Denis Lanier, Jean Lejeune et Didier Trotoux pour deux inventions mathématiques. L'histoire des mathématiques, qu'elle s'intéresse à des inventions ou des inventeurs, ne peut pas passer outre leurs intérêts sous-jacents, par exemple pour la nomographie présentée par Dominique Tournès. Le renouveau du genre biographique en histoire, indiqué par Gilles Damamme, va de pair avec une histoire des inventeurs dans le contexte intellectuel, social et culturel de leur époque. En suivant les propos de Pierre Ageron, cette perspective peut aussi être prise en compte dans l'écriture de l'histoire.

Le décalage entre un auteur et l'horizon d'attente de ses lecteurs contemporains est au cœur de la partie suivante. Évelyne Barbin explique que les contemporains de Descartes n'ont pas compris sa *Géométrie* de 1637 alors qu'elle semble aller de soi aujourd'hui. Lorsque que Jean Lejeune, Denis Lanier et Didier Trotoux utilisent le terme de précurseur, au dépit de l'histoire, n'est-ce pas pour écrire un grand décalage entre Gavarret et ses lecteurs ? Avec François Plantade et Jean-Pierre Le Goff, sont retracées les réceptions des œuvres de Grassmann et de Salomon de Caus. En vis-à-vis de ces articles, qui invitent à un relativisme constructif des « vérités mathématiques », Maryvonne Menez-Hallez pose la question du « mathématique ».

La dernière partie de l'ouvrage est plus orientée vers la lecture historique des textes. Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff et Didier Trotoux proposent une relecture d'une proposition d'Apollonius à partir de ses éditions et de ses traductions. Alain Bernard lit les *Arithmétiques* de Diophante comme un texte ancré dans différentes traditions antiques. Ainsi que le remarque Christophe Prochasson, « la tradition n'est pas un processus autonome de transmission », elle est au contraire un mécanisme de réappropriation du passé.

La thématique du colloque croise les questions d'enseignement et elle a vivement intéressé ceux qui dans les IREM associent l'histoire des mathématiques à son enseignement. Le riche sommaire de cet ouvrage en est le témoin.


A
B
B
C

Section II

D’une idée à l’autre, d’un auteur à l’autre

2. – Transmettre et s’approprier

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-2. – Transmettre et s'approprier

II-2-T.
Pages 449-464

Pourquoi les contemporains de Descartes n'ont-ils pas compris sa *Géométrie* de 1637 ?

Évelyne Barbin

Pourquoi les contemporains de Descartes n'ont-ils pas compris sa *Géométrie* de 1637 ?

Évelyne Barbin,
IREM des Pays de la Loire & Centre F. Viète (université de Nantes),
evelyne.barbin@wanadoo.fr

Paul Veyne écrit que ce qui fait la saveur de l'histoire est de « s'étonner de ce qui va de soi » [Ve, p. 18]. Pour l'historien des mathématiques, ceci suppose de mettre en suspens ses connaissances mathématiques pour lire un texte dans son contexte. Cette lecture est celle qui permet le dépaysement propre à une réflexion épistémologique sur les obstacles et sur la portée des savoirs. De ce point de vue, *La géométrie* de Descartes est particulièrement intéressante, car nous pouvons y retrouver « tout ce que nous connaissons bien » : l'usage des opérations arithmétiques en géométrie, le segment « unité », la résolution algébrique d'un problème, l'équation d'une courbe. La résolution « analytique » des problèmes à la manière cartésienne est bien différente de la démonstration axiomatico-déductive euclidienne. Ainsi, l'enseignement de la géométrie recouvre d'une certaine façon deux aspects de la preuve. D'où l'intérêt de lire *La géométrie* de 1637 de Descartes. Je propose la lecture des trois premières pages de cet ouvrage aussi bien à des étudiants en formation initiale qu'à des enseignants en formation continue. Afin de les mettre dans une posture d'étonnement, je commence toujours par indiquer que beaucoup de contemporains de Descartes n'ont pas compris son texte et que le géomètre écrit à son ami Marin Mersenne qu'il en est fâché.

Pourquoi les contemporains de Descartes n'ont-ils pas compris *La géométrie* de 1637 ? Pour répondre, je propose [Bar, 2011b] de lire ce texte comme une réplique dans un dialogue [Bak], c'est-à-dire comme une réponse de Descartes à ses prédécesseurs et comme une adresse à ses contemporains. La lecture des trois premières pages est pensée comme celles d'un héritier de la géométrie grecque, de l'algèbre du Moyen Âge arabe et de la Renaissance. Cet héritier accepte, mais rejette aussi une partie son héritage. C'est en lisant d'autres textes de Descartes que nous prendrons la mesure des critiques cartésiennes vis-à-vis de ses prédécesseurs.

Nous lirons aussi les réactions de certains lecteurs, des premiers commentateurs et des héritiers de *La géométrie* de Descartes. Florimond de Beaune rédige peu après la parution de l'ouvrage des « Notes brèves sur la géométrie de Descartes » [DB], dont Descartes écrit en février 1639 qu'il n'y a

« pas trouvé un seul mot qui ne soit entièrement selon mon sens ». Claude Rabuel écrit en 1730 des *Commentaires sur la géométrie de M. Descartes*, ouvrage qui est conçu pour la « rendre plus facile à ceux qui l'étudient pour la première fois » [Ra], donc bien utile pour notre propos. Du côté des héritiers de Descartes, nous nous tournons vers deux auteurs "d'Éléments de géométrie", car si Descartes n'a pas composé d' "Éléments", cependant nos auteurs s'en inspirent. Antoine Arnauld écrit en 1667 des *Nouveaux éléments de géométrie* [Arn] tandis que Bernard Lamy publie en 1685 des *Éléments de géométrie* six fois réédités [La] dans lesquels un livre est consacré à « la méthode » (cartésienne).

Descartes et la notion de problème

Nous commençons par le titre choisi : *La géométrie*. Il ne s'agit pas d'un ouvrage du type euclidien, débutant par des définitions et des axiomes pour se poursuivre par une liste de propositions. Le propos est de donner un "Essai" de la méthode que Descartes expose dans *Le discours de la méthode*, méthode qui est d'abord pour lui un art d'inventer et de résoudre des problèmes [Bar, 2006]. En effet, le livre I de *La géométrie* s'ouvre ainsi [De, 1637, p. 297 ou rééd. 1987, p. 333] :

> Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites.
>
> Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Les géomètres de l'Antiquité distinguent trois sortes de propositions : les théorèmes, les problèmes et les porismes. Ainsi, Pappus d'Alexandrie écrit au III^{e} siècle [Pa, p. 486] :

> Les Anciens [...] ont dit que le théorème est une proposition faite en vue d'une démonstration de ce qui est proposé ; que le problème est une proposition faite en vue d'une construction de ce qui est proposé, et que le porisme est une proposition faite en vue de l'acquisition de ce qui est proposé.

Le mot grec correspondant à "problème" est *proballein*. Il signifie ce que l'on a devant soi, un obstacle, une question. Il vise spécifiquement en géométrie des questions de constructions, par intersections de droites et de cercles ou, de manière moderne, avec la règle et le compas. Dans les *Éléments* d'Euclide du III^{e} siècle avant J.-C., les propositions sont des théorèmes ou des constructions. Elles sont intriquées les unes aux autres, puisqu'un théorème ne peut être énoncé que si la figure concernée est construite par droites et cercles, et qu'une construction doit être validée par une démonstration, qui s'appuie sur des propositions.

Le titre, « des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites », peut laisser croire que le géomètre du XVII^e siècle s'inscrit dans la lignée des problèmes grecs[1], puisqu'il est question de cercles et de droites. Mais il n'en est rien. D'une part, la fin de la phrase indique qu'il s'agit de construire en ne connaissant que la longueur de quelques droites. D'autre part, la notion de problème chez Descartes ne recouvre pas exactement celle de construction de figures, puisqu'elle désigne plus largement l'activité du mathématicien. Il écrit dans la Règle III [De, 1970, p. 12] :

> Nous ne deviendrons jamais mathématiciens, par exemple, bien que notre mémoire possède toutes les démonstrations faites par d'autres, si notre esprit n'est pas capable de résoudre toutes sortes de problèmes.

Rabuel ne trouve pas mieux, pour initier son lecteur à ces nouvelles conceptions, que d'énoncer et de résoudre quatre problèmes, dès le début de ses *Commentaires*, en utilisant la méthode qui n'est décrite qu'en troisième page de *La géométrie*.

Les quatre problèmes de Rabuel pour faire exemples

Dans ces quatre problèmes, il faut trouver un point ou un segment, mais aucun n'aboutit à une construction géométrique avec des droites et des cercles. Ils se terminent tous par une expression algébrique comprenant des racines carrées ou cubiques. Le problème I de Rabuel est énoncé et résolu dans les *Éléments* d'Euclide [Ra, p. 3]. Pour son lecteur, c'est donc le moyen de comparer d'emblée les deux « constructions ». Il s'agit de la « section dorée » :

> Problème I. la ligne AB étant donnée, il faut trouver sur cette ligne le point H, qui la divise de telle sorte, que le rectangle sous la toute AB et le moindre segment BH soit égal au quarré du plus grand segment AH, c'est la Prop 11. L.2. Elem. d'Euclide.

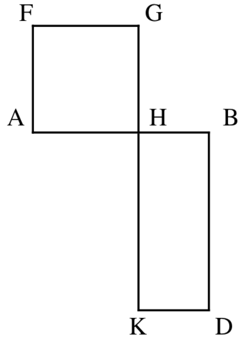


Fig. 1

Dans la proposition 11 du livre II [Eu, p. 353-356], Euclide demande de construire le point H de AB tel que le rectangle HBDK avec AB = BD soit égal en aire au carré de côté AH [Fig. 1].

[1] C'est ainsi que beaucoup d'historiens commentent le texte cartésien.

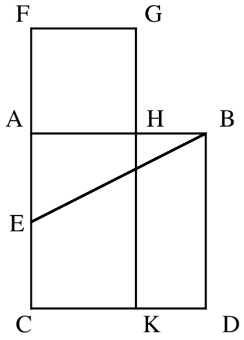


Fig. 2

La construction passe par celles du carré ABDC, du milieu E de AC, du point F tel que EB = EF et du carré AFGH (par des droites et des cercles selon les propositions du livre I). Euclide démontre que le rectangle HBDK égale (en aire) le carré AFGH [Fig. 2].

La démonstration constitue une suite de conséquences rigoureuses des axiomes et des propositions précédentes. Mais pour Descartes ceci serait insuffisant. En effet, il écrit dans les *Règles pour la direction de l'esprit* son insatisfaction à la lecture des ouvrages de géométrie en ces termes [De, 1970, p. 23] :

> Quant aux figures, il y avait beaucoup de choses qu'ils me mettaient en quelque sorte sous les yeux mêmes et qui étaient la suite de conséquences rigoureuses. Mais pourquoi il en était ainsi et comment on parvenait à le trouver, ils ne me paraissaient pas suffisamment le montrer à l'intelligence elle-même.

L'écrit euclidien n'indique pas pourquoi cette construction, c'est-à-dire la raison pour laquelle elle est énoncée (pourquoi elle est proposée). Pour le savoir, le lecteur attentif devra attendre le livre IV des *Éléments*, quand elle sera utilisée pour la construction du pentagone régulier. L'écrit euclidien n'indique pas non plus comment la construction a été trouvée.

La résolution de la proposition 11 par Rabuel utilise les quatre étapes de la méthode cartésienne que donne plus loin Descartes. D'abord, il faut supposer le problème résolu, donc la division faite au point C de telle sorte que le carré AFGH égale en aire le rectangle HBDK. Puis il faut nommer les longueurs connues et les inconnues : il pose AB = a et AH = x. Ensuite, « par la nature du problème » :

$$xx = a(a - x).$$

Enfin, il faut résoudre l'équation ; Rabuel obtient :

$$x = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

La résolution du problème passe par l'analyse, qui était distinguée de la synthèse par les Anciens. Pappus écrit dans la *Collection mathématique* [Pa, p. 477] :

> L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant dans

> l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui entre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse.

Mais l'analyse de Descartes n'est pas seulement la voie inverse de la synthèse, elle signifie aussi une décomposition des figures en choses simples (à savoir des droites finies). La présence de racines cubiques parmi les problèmes de Rabuel est révélatrice d'un point de vue radicalement différent de celui des Anciens, puisque les racines cubiques n'ont jamais été construites avec des droites et des cercles. Elles ont été construites avec des intersections de coniques par les géomètres grecs et arabes, et elles ont été données par des formules dans l'algèbre de la Renaissance.

Connaître la longueur de quelques lignes droites

> Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites.
>
> Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Dans l'expression « lignes droites », le mot droite signifie "droite finie", c'est-à-dire ce que nous appelons segment. La géométrie grecque est fondée sur la notion de grandeur et sur la distinction entre les grandeurs lignes, surfaces et solides. Par exemple, on ne peut pas faire le rapport d'une longueur par une aire, on ne peut pas adjoindre une longueur à un solide. Descartes annonce d'emblée que dans sa géométrie, toutes ces distinctions ne sont plus de mise. Il a écrit quelques années plus tôt [De, 1970, p. 120] :

> En géométrie presque tout le monde conçoit à tort trois espèces de quantités : la ligne, la surface et le corps [...]. Mais si on les considère simplement comme abstraites par l'entendement [...] les trois dimensions des corps, la longueur, la largeur et la profondeur ne diffèrent entre elles que par les mots.

Après avoir montré l'usage de la méthode cartésienne, Rabuel estime qu'il n'y a rien à redire à ceci : « Ceux qui ont déjà résolu quelques problèmes de géométrie, auront pu s'apercevoir, que dans tous les cas, il ne faut pour construire un problème, que trouver la longueur d'une ou de plusieurs lignes droites » [Ra, p. 3].

La méthode cartésienne, exprimée dans les *Règles* ou dans le *Discours*, est une mise en ordre des choses, allant des choses simples aux choses composées. La science consiste en une analyse, décomposition en choses simples, qui sont les droites en géométrie [De, 1970, p. 92] :

> Toute la science humaine consiste uniquement à voir d'une manière distincte comment ces natures simples concourent ensemble à la composition des autres choses.

L'ordre cartésien des choses est au départ de l'entreprise des *Nouveaux éléments de géométrie* par Arnaud qui constate dans sa préface [Arn, p. xii] :

> Les *Éléments* d'Euclide étaient tellement confus et brouillés, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion.

Selon Arnauld, Euclide a suivi un ordre déductif de propositions, mais il n'a pas suivi « l'ordre naturel », qui va des choses simples aux choses composées, c'est-à-dire l'ordre cartésien. Par exemple, Euclide démontre par les aires (choses composées) le "théorème de Thalès", qui concerne les rapports de droites (choses simples), détruisant ainsi le véritable ordre.

Arnauld traite successivement des lignes, droites et circulaires, des angles, puis des triangles et quadrilatères selon leurs côtés et angles, avant d'en venir aux aires. Mais les *Nouveaux éléments* ont aussi ceci de cartésien, qui est de commencer par traiter des grandeurs et des opérations arithmétiques sur ces grandeurs.

Revenons à Descartes et au paragraphe suivant de *La géométrie*, intitulé « Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie » [De, 1637, p. 297].

Calculs arithmétiques et opérations géométriques

> Et comme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, et l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de Division : ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter.

Dans les mathématiques grecques, l'existence de l'irrationalité du rapport entre des grandeurs est au fondement de la séparation entre la géométrie et l'arithmétique. Selon Aristote, il ne faut pas les mélanger car leurs genres ne sont pas communicables [Ari, p. 44]. Ainsi, les trois livres d'arithmétique d'Euclide sont quasiment étanches à ceux qui sont destinés à la géométrie. Les quatre opérations de l'arithmétique concernent les nombres (c'est-à-dire des nombres qu'on appelle aujourd'hui nombres entiers), à savoir l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Il n'y a aucun nombre dans la géométrie euclidienne : il y a des grandeurs. On peut juxtaposer ou découper ces grandeurs, on peut considérer leurs rapports si elles sont homogènes. Donc le titre du paragraphe est pour le moins surprenant pour un lecteur d'Euclide, mais Descartes écrit à la fin de ce paragraphe : « Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible ».

Descartes introduit aussi « l'extraction des racines », qui n'est pas une opération arithmétique, puisque la racine carrée de 2 n'est pas rationnelle (ce n'est ni un entier, ni un rapport de deux entiers). La racine carrée d'un nombre fait partie de l'héritage de l'algèbre arabe, mais *La géométrie* n'est pas un ouvrage d'algèbre.

Examinons comment les commentateurs répondent (au sens de Bakhtine[2]) à ceci. Florimond de Beaune note que l'opération d'extraction de la racine carrée peut donner des « quantités incommensurables » et choisit de désigner très vite les droites géométriques par des lettres, comme en algèbre. Van Schooten remarque qu'en arithmétique, il y a des racines qui ne sont pas exprimables par des fractions alors que la géométrie « n'a pas plus de difficulté à travailler sur les lignes incommensurables que sur les commensurables » [Sc]. Rabuel note une différence entre arithmétique, algèbre et géométrie. Il écrit qu'en arithmétique on ne peut tirer la racine carrée que d'un nombre qui est un carré parfait, et qu'en algèbre, on ne peut tirer la racine que d'une grandeur que si elle est exprimée en formule de carré :

$$aa,\ aa - 2ab + bb, \text{ etc.}$$

Tandis qu'en géométrie, on extrait la racine carrée de toute ligne droite. Tous commentent la distinction que Descartes dit à ses lecteurs de ne plus faire, mais pour la maintenir.

Les quatre opérations sont présentes chez les géomètres Arnauld et Lamy. Le titre du livre I d'Arnauld est « Des grandeurs en général, et des quatre opérations, ajouter, soustraire, multiplier, diviser en tant qu'elles se peuvent appliquer à toutes sortes de grandeurs ». Mais Arnauld n'envisage pas de prendre la racine carrée d'une grandeur. Lamy aborde les quatre opérations arithmétiques au livre III, dans un esprit proche de celui d'Arnauld. Il y revient dans le livre VI sur « La méthode » en incluant cette fois l'extraction de la racine carrée. Les deux géomètres introduisent des lettres pour désigner les droites (finies) et pour appliquer les quatre opérations arithmétiques. Ils sont ainsi conduits à énoncer la règle « moins par moins donne plus ». Lamy

2 Bakhtine parle de « l'attitude responsive active » du lecteur [Bak].

explique que « cette manière générale d'exprimer toute grandeur et de faire sur elle les opérations qu'on fait sur les nombres est ce qu'on appelle l'algèbre ».

Dans la géométrie d'Euclide, on considère le rectangle fait par deux droites, où le carré construit sur une droite. Le rectangle et le carré sont des grandeurs (aires) qui peuvent être comparées. On n'associe pas de nombres aux aires et il n'y a pas de formules d'aires. On recherche l'égalité ou le rapport de deux aires, rapport qui peut être celui de deux nombres. Dans l'arithmétique d'Euclide, les nombres sont représentés par des droites, la multiplication de deux nombres est représentée par un rectangle, donc une aire.

Tandis que, comme le note Lamy, les algébristes utilisent des opérations arithmétiques en géométrie, ils associent en effet l'addition à une juxtaposition de figures géométriques et la soustraction à un découpage, la multiplication à un rectangle, ceci dans les preuves géométriques des algorithmes de résolution des équations. Pour les géomètres comme pour les algébristes, avec deux droites on produit un rectangle (compris comme une grandeur aire)[3]. Mais pour Descartes, il faut que la multiplication de deux droites soit encore une droite. Pour cela, il va introduire une droite qui sera prise comme « une unité » [De, 1637, p. 297].

L'introduction d'une unité en géométrie

> Ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux, comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la Multiplication [...]. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

Dans le livre VII des *Éléments*, Euclide définit le nombre comme un assemblage d'unités. Il n'est pas possible de considérer que l'unité soit constitutive des grandeurs géométriques à cause de l'irrationalité. Donc, comme l'écrit Descartes, c'est par décision et par analogie qu'il introduit une grandeur qui sera prise comme « unité ». Dans l'arithmétique grecque et dans l'algèbre arabe, les nombres (entiers) sont représentés par des droites (finies), donc par des grandeurs géométriques. Descartes procède à l'inverse, en faisant opérer les opérations arithmétiques sur les grandeurs géométriques.

Descartes n'est pas suivi par Arnauld et par Lamy : l'unité disparaît chez les deux géomètres cartésiens. Le premier n'introduit pas d'unité dans l'exposé des quatre opérations sur les grandeurs qu'il donne au Livre I des *Nouveaux éléments de géométrie*, ne faisant qu'évoquer cette possibilité. Le second fait de même dans

---

3 On doit exclure ici des tentatives antérieures comme celle de Cardan, mais qui n'ont pas le caractère systématique que donne Descartes [Bar, 2011a].

le livre III de son ouvrage, alors qu'il introduit et note « 1 » l'unité dans le livre VI sur « La méthode ».

L'introduction abrupte et systématique d'une droite unité dans *La géométrie* permet de construire aisément la multiplication et la division de deux droites [De, 1637, p. 298].

Multiplier ou diviser deux lignes entre elles

> Soit par exemple AB l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette Multiplication.
> Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division. [Fig. 3]

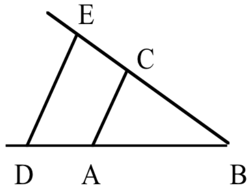


Fig. 3

Descartes fait ici un "mélange des genres ". Il utilise le "théorème de Thalès" qui est démontré à la proposition 2 du livre géométrique VI des *Éléments* d'Euclide : le rapport de AB à BD est égal au rapport de BC à BE. Dans la proposition 14 du livre VI, Euclide démontre que, dans ce cas, le rectangle construit sur AB et BE est égal (en aire) au rectangle construit sur BD et BC. L'équivalent de ce théorème est démontré pour les égalités de rapport de nombres à la proposition 19 du livre arithmétique VII : si quatre nombres A, B, C, D sont tels que le rapport de A à B est égal au rapport de C à D, alors le multiplié de A par D est égal au multiplié de B par C. Descartes mélange les deux propositions dans un esprit contraire à la science grecque. Arnauld, dans son livre I sur les grandeurs, associe une « grandeur plane » à la multiplication de deux « grandeurs linéaires » [Ar, p. 3]. Ainsi, il suit l'arithmétique euclidienne où le produit de deux nombres est représenté par un rectangle [Fig. 4].

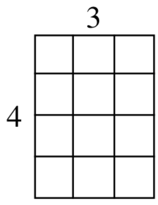


Fig. 4

Lamy fait de même dans le livre III de ses *Éléments* [La, p. 124] en utilisant les indivisibles [Fig. 5] et en considérant que le rectangle est constitué de l'agrégat de ses indivisibles (segments ici) perpendiculaires à BC et de longueur AB.

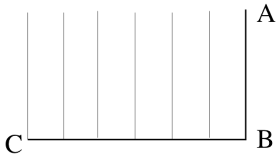


Fig. 5

Dans son livre VI, il associe une droite à la multiplication de deux droites après avoir introduit l'unité, notée 1.

Arnauld et Nicole ont deux attitudes différentes pour ce qui concerne la division. La division d'une droite par une autre n'a pas de place dans la géométrie des Anciens. Il y a des rapports de droites ou de nombres que l'on compare. Arnauld estime que « la division est de peu d'usage dans le traité de la grandeur en général ». Il considère des rapports de grandeurs et des proportions, il écrit ainsi "le rapport de *a* à *b* est comme le rapport de *c* à *d*" :

$$a : b :: c : d$$

Contrairement à Arnauld, au fur et à mesure des éditions successives de ses *Éléments de géométrie*, Lamy associe de plus en plus la notion de rapport à celle de division. Dans l'édition de 1731, il donne un nom au rapport de *a* à *b*, celui d'« exposant », qu'il considère comme le quotient de *a* par *b* et qu'il écrit avec la barre de fraction[4].

Cependant, Descartes poursuit avec ce qui est encore plus étonnant : la racine carrée d'une droite [De, 1637, p. 298].

L'extraction de la racine carrée

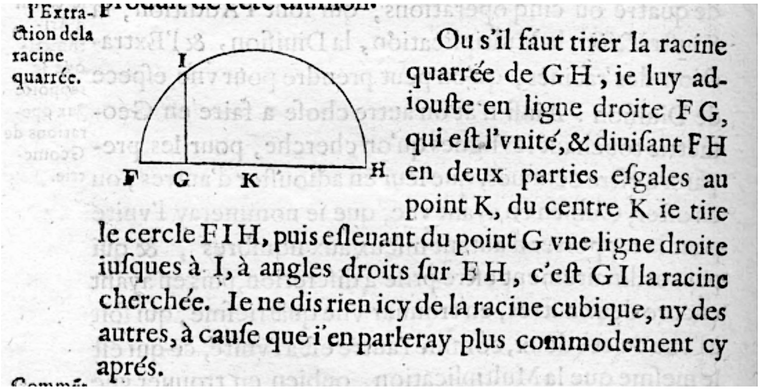
> Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH, je lui ajoute en ligne droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusqu'à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

La "racine carrée d'une droite" n'a pas de sens dans la géométrie héritée des Anciens, qui considèrent en place le côté d'un carré. La terminologie "racine carrée" vient de l'algèbre des mathématiciens arabes [Dj] qui se développe à partir du IX[e] siècle. Dans cette algèbre, les nombres et les grandeurs géométriques sont mélangés. Avec le symbolisme algébrique qui se généralise à

---

4 Pour une comparaison de ce point de vue entre les démarches d'Arnauld et Lamy, voir [Bar, 2010a].

la Renaissance, les "racines" sont représentées par des symboles et commencent à se voir attribuer un statut de nombre. Mais dans la géométrie cartésienne, il n'y a pas de nombre, mais des grandeurs.



l'Extra-ction dela racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur F H, c'est G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Ill. 1 – L'extraction de la racine carrée dans la *Géométrie* de 1637, p. 298.

La figure de Descartes se trouve dans les *Éléments* d'Euclide dans la proposition 14 du livre II pour obtenir la quadrature d'un rectangle, c'est-à-dire pour construire avec des droites et des cercles le côté d'un carré de même aire qu'un rectangle donné. En effet, si on considère un rectangle de côtés FG et GH et si on construit la figure indiquée, alors le carré de côté IG est égal (en aire) au rectangle donné. La figure se trouve aussi dans la proposition 8 du Livre VI où il faut déterminer la « moyenne proportionnelle entre deux droites » : ici FG est à GI comme GI est à GH donc GI est la moyenne proportionnelle de FG et GH. Mais si on peut en conclure encore l'égalité (en aire) de deux figures, il ne peut pas être dit que GI est « la racine carrée » d'un rectangle car cela n'a pas de sens géométrique.

Arnauld ne mentionne pas l'extraction de la racine carrée dans son arithmétique des grandeurs. Il consacre un livre entier (le livre IV) aux grandeurs commensurables et incommensurables, selon une thématique héritée des Anciens, même si son traitement est bien différent. Il utilise le terme algébrique de « racine » lorsqu'il considère les opérations sur les nombres. Lamy reprend la figure de Descartes dans son livre VI sur « La méthode ».

L'arithmétisation de la géométrie

Maintenant que les opérations arithmétiques opérent sur ces droites (finies) pour obtenir encore des droites, Descartes a arithmétisé la géométrie et il peut utiliser les symboles de l'algèbre. Mais il n'y a plus à se conformer à une homogénéité géométrique : on peut ajouter des lignes à des surfaces ou extraire la racine cubique d'un carré, car on ne fait que manipuler des droites[5]. François

5 Descartes arithmétise la géométrie, mais il ne la numérise pas. Voir [Bar, 2007].

Viète, qui a introduit dans les années 1600 les lettres pour désigner les inconnues aussi bien que les variables, n'a cependant pas dérogé à cette homogénéité. René Descartes peut le faire [De, 1637, p. 298-299] :

> Comment on peut user de chiffres en géométrie.
>
> Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; Et $a - b$, pour soustraire b de a ; Et ab, pour les multiplier l'une par l'autre ; Et a / b, pour diviser a par b ; Et aa, ou a^2, pour multiplier a par soi-même ; Et a^3, pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini ; Et, $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour tirer la racine carrée de $a^2 + b^2$; Et, $\sqrt{Ca^3 - b^3 + abb}$ pour tirer la racine cubique de $a^3 - b^3 + abb$, et ainsi des autres.
>
> Où il est à remarquer que par a^2 ou b^3 ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'Algèbre, je les nomme des carrés ou des cubes, etc.
>
> Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne, se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme ici a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont se compose la ligne que j'ai nommée $\sqrt{Ca^3 - b^3 + abb}$. Mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même.
>
> Au reste afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple.
>
> AB = 1, c'est-à-dire AB égal à 1,
> GH = a,
> BD = b, etc.

Ayant pu mesurer les obstacles que Descartes doit faire franchir à ses lecteurs pour qu'ils le suivent, nous pouvons lire ces quelques lignes comme des mises en garde : « il est à remarquer », « il est aussi à remarquer ». Le géomètre estime que les conséquences de son arithmétisation risquent ici de trop heurter les pratiques de ses lecteurs. Habilement, il utilise l'introduction de l'unité pour expliquer les nouvelles écritures de la géométrie. Tout est maintenant en place, y compris le registre, pour énoncer la méthode qui permettra de résoudre tous les problèmes de géométrie.

La méthode géométrique cartésienne

> Comment il faut venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes.
>
> Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues, qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en qu'elle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Équation ; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles Équations, qu'on a supposé de lignes, qui étaient inconnues. [De, 1637, p. 300]

Nous avons vu que Rabuel emploie cette méthode pour expliquer tout le reste. Ceci est peut-être une manière de montrer l'efficacité qu'elle offre, avant de passer par toutes les difficultés qu'elle présente au géomètre néophyte. D'une certaine manière il suit Descartes, qui, après avoir énoncé la méthode, l'utilise pour résoudre un problème difficile, hérité de Pappus et jamais encore résolu.

Dans son livre VI consacré à la méthode, Lamy préfère choisir un exemple simple, qui montre la force de la méthode cartésienne en terme de généralité. Il écrit [La, p. 365] :

> On peut tenter la résolution d'un problème par deux voies. La première n'est qu'une application des Éléments, qui font découvrir quelque moyen particulier au problème dont il s'agit, et qui ne peut pas servir dans un autre. La seconde voie est l'ordre que prescrit la méthode que nous enseignons ici, selon laquelle on trouve ce que l'on cherche d'une manière d'autant plus excellente, qu'elle s'étend généralement à tout problème. Donnons un exemple de ces deux voies.

Il donne à la suite un premier problème fort simple : « BAC est isocèle, on propose de couper les côtés AB, AC par une parallèle à la base BC ; de sorte que cette parallèle soit égale à ce qui reste des côtés, c'est-à-dire (je suppose la chose faite) que DB = DE ». [Fig. 6]

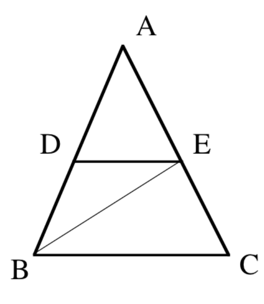


Fig. 6

La « première manière » est une suite de déductions logiques utilisant les propositions déjà démontrées. Mais Lamy procède par l'analyse, à la manière de Pappus [La, p. 365] :

> Je suppose la chose faite, savoir que DB = DE, donc le triangle BDE est isocèle, ainsi les angles DBE et DEB sont égaux. Or les angles CBE et BED sont aussi égaux [...] partant EBC et EBD sont égaux ; partant la ligne BE coupe par la moitié l'angle DBC. D'où je connais que dans un triangle isocèle, tel que BAC, en divisant en deux l'angle ABC par une ligne droite BE, et menant par E une parallèle à BC, elle sera égale à DB. Ainsi par cette propriété du triangle isocèle, je trouve le moyen de résoudre le problème proposé. Mais comme vous voyez, ce moyen est particulier et propre à ce seul problème.

La « seconde manière » suit à la lettre la méthode cartésienne :

> Supposant la chose faite, je nomme AB qui est connu, a et d, la base BC, aussi connue, et x, la grandeur inconnue AE que l'on cherche ; ainsi comme EC $= a - x$, aussi DE $= a - x$, il est évident que $a : d :: x : a - x$, donc $aa - ax = dx$. J'ajoute de part et d'autre ax, et il vient $aa = dx + ax$; je suppose $c = d + a$, ainsi $cx = dx + ax$; et par conséquent au lieu de $dx + ax$, mettant cx j'ai $aa = cx$; ainsi il ne s'agit que de trouver une troisième proportionnelle aux deux lignes connues c et a. Cette seconde manière analytique est générale, et n'est point particulière à ce problème.

La méthode cartésienne s'applique à tous les problèmes. Ici, le problème plus général de demander que DB et DE soient dans un rapport donné serait résolu de manière identique. Alors que le géomètre euclidien serait obligé de recourir à d'autres propositions et à un tout autre discours.

Conclusion : une lecture dialogique des textes

> Un énoncé est rempli des échos et des rappels d'autres énoncés, auxquels il est relié à l'intérieur d'une sphère commune de l'échange verbal. Un énoncé doit être considéré, avant tout, comme une réponse à des énoncés antérieurs à l'intérieur d'une sphère donnée : il les réfute, les confirme, les complète, prend appui sur eux, les suppose connus et, d'une façon ou d'une autre, il compte avec eux.
>
> Bakhtine, « Les genres du discours », 1952-1953 [Bak]

La lecture que nous avons proposée des trois premières pages de *La géométrie* de 1637 suppose d'avoir lu au moins quelques textes dont hérite Descartes, en particulier des extraits des *Éléments* à la manière d'Euclide, des traités d'algèbre comme ceux d'Al-Khwârizmi et de Cardan. Cette lecture "dialogique" peut permettre aux enseignants de "s'étonner de ce qui va de soi" pour eux, mais par pour leurs élèves. Elle insiste sur ce "segment unité" que nous portons de manière automatique sur les axes de coordonnées, sans y reconnaître le fondement de la géométrie analytique. Elle peut permettre d'établir un dialogue avec les élèves ou les étudiants, en introduisant dans la classe de nombreux interlocuteurs. Le texte mathématique est quelque chose qui peut et doit surprendre, qui peut être discuté. Cette lecture dialogique engage aussi une réflexion sur l'articulation entre les deux enseignements de la géométrie élémentaire, à la manière euclidienne et à la manière cartésienne, ainsi que sur les problèmes posés par la confusion entre arithmétisation et numérisation de la géométrie.

Bibliographie

[Ari] ARISTOTE, *Les seconds analytiques*, Organon t. IV, trad. Jean Tricot, Paris : Vrin, 1987.

[Arn] Antoine ARNAULD, *Titre d'ouvrage*, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris : Savreux, 1667.

[Bak] Mikhaïl BAKHTINE, *Esthétique de la création verbale*, Moscou : Iskounov, trad. Aucouturier, Paris : Gallimard, 1984.

[Bar, 2006] Évelyne BARBIN, *La révolution mathématique du XVIIe siècle*, Paris : Ellipses, Paris, 2006.

[Bar, 2007] Évelyne BARBIN, « L'arithmétisation des grandeurs », *Repères IREM* 68, 2007, p. 5-20.

[Bar, 2009] Évelyne BARBIN, « The notion of Magnitude in Teaching : The new Elements of Arnauld and his inheritance », *International Journal for the History of Mathematics Education*, vol. 4, n° 2, 2009, p. 1-18.

[Bar, 2010a] Évelyne BARBIN, « Evolving Geometric Proofs in the 17th Century: From Icons to Symbols », *in* : Hanna G., Jahnke N., Pulte H., ed. *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, Springer-Verlag, 2010, p. 237-252.

[Bar, 2010b] Évelyne BARBIN, « Une approche bakhtinienne des textes d'histoire des sciences », *in* : A.-L. Rey (éd.), *Méthode et histoire. Quelle histoire font les historiens des sciences et des techniques* ?, Paris : Publications de la SFHST, 2010, p. 202-216.

[Bar, 2011a] Évelyne BARBIN, « L'héritage du troisième degré : Cardan, Viète, Descartes », *in* : J.-Y. Boriaud (éd.), *La pensée scientifique de Girolamo Cardano*, Paris : Les Belles lettres, à paraître en 2011.

[Bar, 2011b] Évelyne BARBIN, « Dialogism in Mathematical writing: historical, philosophical and pedagogical issues" », *in* : V. Katz, K. Tzanakis (éd.), *Recent Developments on Introducing a Historical dimension in Mathematics Education*, Mathematical Association of America, à paraître en 2011.

[DB] Florimond DE BEAUNE « Notæ Breves », *in* : R. Descartes, *Geometria*, Frans van Schooten éd., édition latine de *La géométrie*, 1649.

[De, 1637] René DESCARTES, *Discours de la méthode* […] *plus La dioptrique, Les météores et La géométrie*, Leyde, 1637, rééd. Paris : Fayard, 1987.

[De, 1970] René DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, écrit posthume latin (Amsterdam, 1701), trad. de J. Sirven, Paris : Vrin, 1932, citée d'après la rééd. Paris : Vrin, 1970.

[Dj] Ahmed DJEBBAR, *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*, Paris : Vuibert, 2005.

[Eu] EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Bernard Vitrac, 4 vol., Paris : PUF, 1990-2001.

[La] Bernard LAMY, *Les éléments de géométrie ou de la mesure du corps*, Paris : Pralard, 1685, cité d'après 2e éd., Paris : Pralard, 1695.

[Pa] PAPPUS, *La collection mathématique*, trad. Paul Ver Eecke, Paris : Blanchard, 1932, réimpr. 1982.

[Ra] Claude RABUEL, *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*, Lyon : Marcellain Duplain, 1730.

[Sc] Frans VAN SCHOOTEN, « Commentarii », *in* : R. Descartes, *Geometria*, Frans van Schooten (éd.), édition latine de *La géométrie*, 1649.

[Ve] Paul VEYNE, *Comment on écrit l'histoire. Essai d'épistémologie*, Paris : Le Seuil, Paris, 1971.