Circulation Transmission Héritage

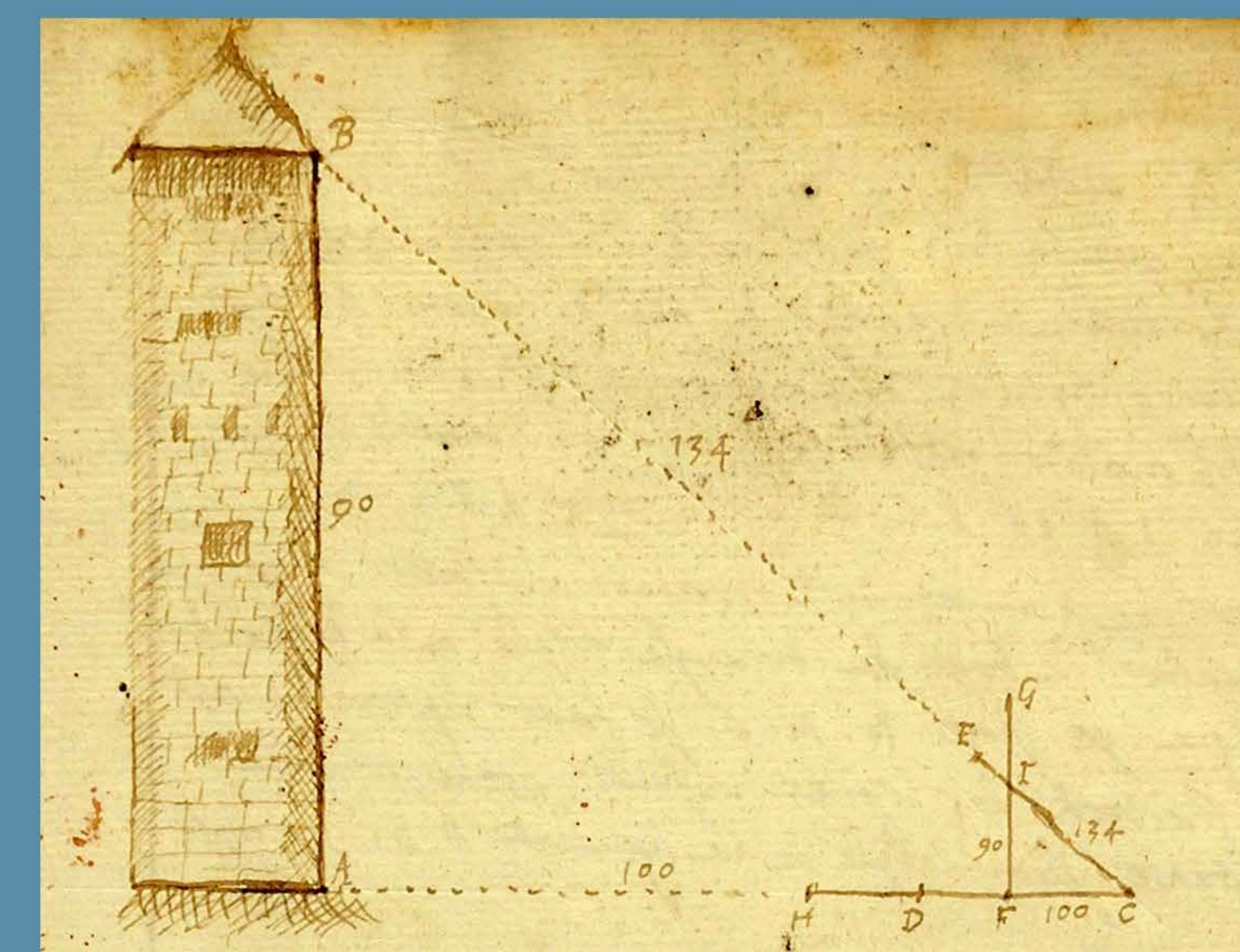
Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » sont différents. Cet ouvrage explore des moments historiques où des décalages, petits ou grands, nourrirent des héritages et furent le fruit des circulations et des transmissions. Il invite à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études qu'il rassemble mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

ISBN : 978-2-902498-06-2
Édition et diffusion : IREM de Basse-Normandie
juin 2011

IREM
de Basse-
Normandie

Circulation Transmission Héritage
histoire et épistémologie des mathématiques

Circulation Transmission Héritage



Actes du 18e colloque inter-IREM
histoire et épistémologie
des mathématiques
mai 2011

Université de Caen Basse-Normandie

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII^{e} colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-2-G.
Pages 155-180

Règle de trois et proportionnalité dans une arithmétique pratique niçoise du XVI^{e} siècle et dans ses sources

Martine Bühler & Anne Michel-Pajus

Circulation
Transmission
Héritage

Histoire et épistémologie des mathématiques


A.
C
C
B

Commission inter-IREM
Épistémologie et histoire des mathématiques

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

ISBN : 978-2-902498-06-2

Directeur de publication : Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie
Diffusion : IREM de Basse-Normandie, Université de Caen Basse-Normandie,
campus 2, 14032 Caen Cedex
Tél. : 02 31 56 74 02 – Fax. : 02 31 56 74 90
Adresse électronique : irem@unicaen.fr
Site Internet : http ://www.math.unicaen.fr/irem/
Coordination : Évelyne Barbin et Pierre Ageron
Comité de lecture : Pierre Ageron, Didier Bessot, Richard Choulet, Gilles Damamme, Guy Juge, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff, Pierrick Meignen, Thierry Mercier, François Plantade, Danielle Salles, Didier Trotoux et Éric Trotoux
Relecture générale : Pierre Ageron, Jean-Pierre Le Goff
Conception, illustration et mise en page du volume : Jean-Pierre Le Goff, Pierre Ageron, Didier Bessot et Didier Trotoux
Conception de l'affiche du colloque et de la couverture des actes : Patrice Gourbin
Impression et façonnage : Corlet numérique, 14110 Condé-sur-Noireau

Crédits photographiques de la couverture :
Bibliothèque de Caen, deux images tirées du manuscrit *in-fol.* 27 : *Pratique de geometrie*, de la main de Samuel Bochart (1599-1667)
– 1ère de couverture : mesure au *gonomètre* de la hauteur d'une tour, *f* °8 *r* °
– 4ème de couverture : mesure de la *gibbosité* de la mer entre Dieppe et la Rie (Rye), *f* °42 *v* °
Illustrations hors-texte :
Les 16 planches hors-texte des pages de l'ouvrage, paginées ii, viii, xiv, 28, 50, 94, 122, 240, 338, 360, 386, 446, 480, 502, 544 et 582, sont tirées de la *Pratique de la Geometrie, sur le papier et sur le terrein ; où par une methode nouvelle & singuliere l'on peut avec facilité & en peu de tems se perfectionner en cette science*, Par Sebastien Leclerc, Graveur du Roi. A Paris, Chez Ch. A. Jombert, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame. M. DCC. XLIV. (1744). *Avec Privilege du Roi.* (coll. part., clichés : jplg)

Sommaire

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

I-4. – Les figures : accompagner les mots

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

I-4. – Les figures : accompagner les mots

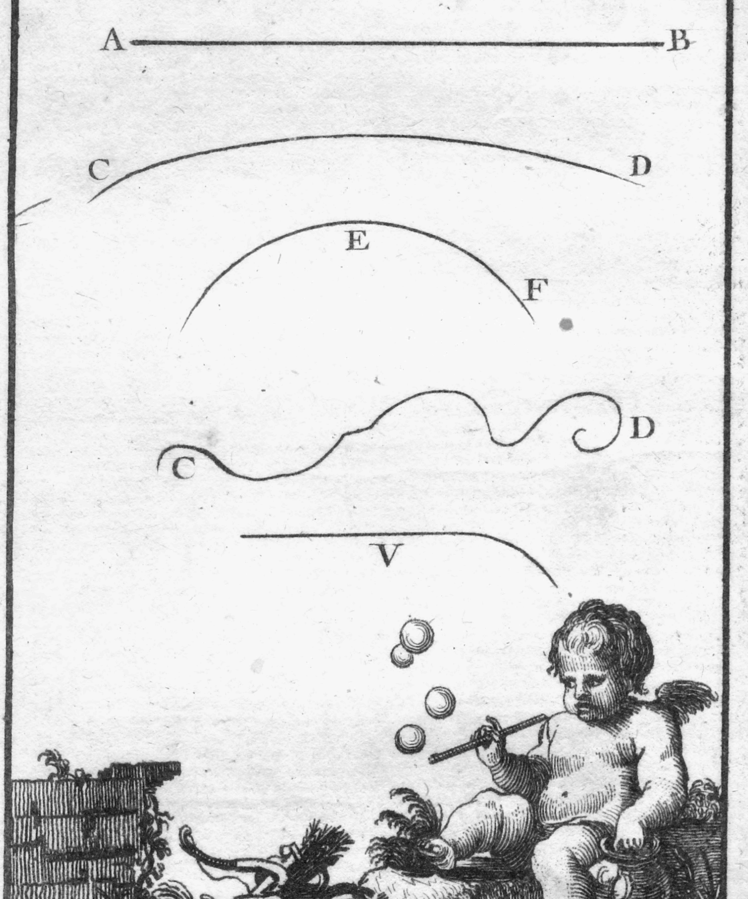
II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-1. – Hériter et inventer

II-2. – Transmettre et s'approprier

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

Planche 2. *Page 9.*



Avant-propos

L'IREM de Basse-Normandie, institué dans l'université de Caen le 23 octobre 1973, cultive par précellence l'histoire des mathématiques. Dès l'origine, plusieurs de ses animateurs, professeurs de lycée, étaient conduits par une intuition : introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques serait de nature à aider les élèves à y retrouver du sens, sens que le formalisme – des "maths modernes", notamment – tendait à dissimuler. Mais la discipline "histoire des sciences" n'était alors guère développée dans les universités. C'est ainsi que commença un colossal travail de recherche fondamentale et appliquée, d'édition de sources, de formation initiale et continue, d'actions interdisciplinaires. Nombreux sont ceux qui y ont contribué ; je veux citer au moins les noms de Jean-Pierre Le Goff, Didier Bessot et Denis Lanier et leur rendre ici un hommage plein d'amitié et d'admiration.

C'est à l'IREM de Basse-Normandie qu'il revint d'organiser le tout premier colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, au château de Tailleville, en mai 1977, puis le X^e^ colloque d'une série devenue bisannuelle, sur le thème *La mémoire des nombres* – c'était à Cherbourg en mai 1994. Entre les deux, l'IREM de Basse-Normandie avait organisé, à l'initiative de l'Association pour le développement des études et recherches en histoire et épistémologie des mathématiques (ADERHEM), un colloque exceptionnel baptisé *Destin de l'art, dessein de la science* (octobre 1986). Enfin le XVIII^e^ colloque inter-IREM, dont vous tenez en main les actes, s'est tenu en mai 2010 au cœur de l'université caennaise, dans l'amphithéâtre Henri Poincaré (qui enseigna deux années à Caen). Le thème retenu, *Circulation – Transmission – Héritage*, invitait à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études ici rassemblées mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Basse-Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

Je remercie les institutions qui ont compris l'intérêt de cette manifestation : le ministère de l'Éducation nationale (via l'assemblée des directeurs d'IREM), la région Basse-Normandie, la ville de Caen, l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (régionale de Basse-Normandie), l'ADERHEM, et notre *alma mater* l'université de Caen Basse-Normandie.

Ce colloque n'aurait pu être organisé sans l'énergie déployée par Geneviève Jean, secrétaire de l'IREM, et par de nombreux animateurs de l'IREM, notamment Guy Juge, Éric Trotoux et Didier Trotoux. Enfin Jean-Pierre Le Goff, Didier Trotoux et Didier Bessot m'ont apporté une aide précieuse dans l'édition de ces actes. Que tous soient très chaleureusement remerciés.

Pierre Ageron
directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Présentation

Auteurs, destinataires et lecteurs d'un texte : histoires de décalages.

Évelyne Barbin,
IREM des Pays de la Loire,
Centre François Viète, Université de Nantes

La plus grande partie d'une œuvre se déroule sous la tyrannie de sa réception.
Christophe Prochasson, « Ce que le lecteur fait de l'œuvre. Héritages et trahisons : la réception des œuvres », *Mill neuf cent*, 12, 1994.

Le Colloque inter-IREM « Histoire des mathématiques : circulation, transmission, héritage » s'inscrit bien dans la visée de « la réception des œuvres » de Hans Robert Jauss, dont Christophe Prochasson indique l'intérêt pour l'historien dans le texte cité en exergue. Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Le cas des manuels, y compris les plus récents, n'échappe pas à cette distinction, que connaît bien l'enseignant : le destinataire du manuel est l'élève de classe de quatrième, mais la lectrice est Vanessa. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » – en utilisant l'expression de Jauss – sont différents. Cet ouvrage propose quelques moments historiques de décalages, petits ou grands, qui nourrissent les héritages, qui sont le fruit des circulations et des transmissions.

Les aspects matériels de la circulation des textes, leurs véhicules, font l'objet de la première partie. L'histoire des mathématiques arabes est intéressante, puisqu'elles sont au carrefour de langues diverses, elles commencent avec des traductions et se perpétuent avec d'autres traductions, dans une sphère culturelle large, comme le montrent Ahmed Djebbar et Pierre Ageron. Avec la transmission des *Éléments* d'Euclide en Arménie, Frédéric Laurent délivre une partie peu connue de l'histoire. L'ouvrage d'Euclide, transmis par les Jésuites en Chine, y connut un sort étrange, puisque les lecteurs orientaux négligèrent les démonstrations qui faisaient le succès des *Éléments* ailleurs. L'exemple du décalage très abrupt de l'attente entre Occidentaux et Chinois est illustré dans cet ouvrage par Isabelle Martinez et Jean-Pierre Le Goff. L'écart plus ténu entre langue savante, le latin, et langue vernaculaire, ici un dialecte italien, est examiné avec précision par Gérard Hamon et Lucette Degryse à propos des *Quesiti* de Nicollo Tartaglia au XVI[e] siècle.

Il existe deux types de véhicules adaptés à des destinataires particuliers, ce sont les manuels et les revues mathématiques. Les manuels sont écrits à partir de sources diverses et à destination de commençants, avec le souci d'un rendu intégral des « idées » ou à l'inverse dans celui d'une « adaptation » aux élèves. Du côté des sources, Martine Bühler et Anne Michel-Pajus analysent celles d'un ouvrage d'arithmétique niçois du XVI[e] siècle. Du côté des réceptions, Pierre Ageron et Didier Bessot retracent les tribulations d'un manuel de géométrie au XVIII[e] siècle. Comme le montrent Anne Boyé et Guillaume Moussard, l'enseignement des vecteurs présente un cas très complexe aux sources multiples – géométriques, algébriques et physiques –, qui a beaucoup changé selon les destinataires à différentes époques.

L'édition des revues scientifiques commence au XVII[e] siècle. Les journaux savants sont écrits par des « savants » à destination de leurs confrères, membres d'Académies nationales ou de Sociétés provinciales. La spécialisation de revues aux seules mathématiques au XIX[e] siècle est contemporaine de publications pour des publics eux aussi plus spécialisés, qu'ils soient enseignants, amateurs ou bien mathématiciens. La transmission par des revues multiplie le nombre de possibilités de mise en évidence de décalages, en augmentant le nombre des auteurs et en accordant la plume aux lecteurs. Les articles de Jeanne Peiffer, de Christian Gérini et de Norbert Verdier offrent un large panel de périodes et de publics pour diverses revues sur trois siècles.

Les figures mathématiques ne transcendent-t-elles pas les questions de transmission en offrant un langage qui serait universel ? De plus, ne s'agit-il pas d'un langage qui précède l'écriture ? Ces questions trouveront des éléments de réponse dans les articles d'Olivier Keller et de Jean-Pierre Cléro. Prise du point de vue de la réception historique des « textes », la première question recevrait une réponse plutôt relativiste. Un triangle est vu comme une aire par Euclide et comme ses trois côtés par Descartes, il est désigné par des lettres chez les mathématiciens grecs et par des couleurs chez les chinois.

La seconde partie de cet ouvrage retourne à l'auteur d'un texte, mais sans abandonner la perspective du destinataire et du lecteur. En effet, l'auteur est lui-même un lecteur, et donc un texte peut être lu comme un maillon dans un échange dialogique. Car, comme l'explique Mikhaïl Bakhtine, un texte est écrit en réponse à d'autres auteurs de textes et il s'adresse à des lecteurs qui ont une « attitude responsive active ».

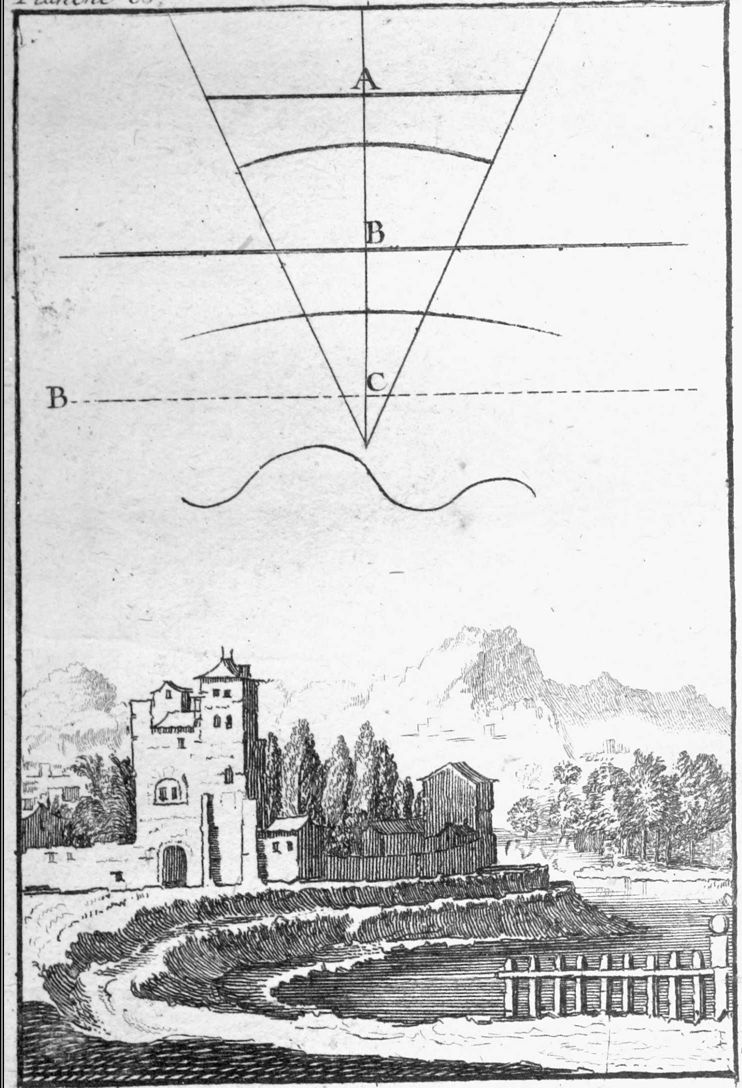
Lorsqu'un auteur doit écrire quelque chose qui lui paraît nouveau, c'est-à-dire susceptible d'aller au-delà des conceptions contemporaines, il doit aménager son texte. Autrement dit l'invention pose des problèmes accrus de transmission. C'est ce qu'analysent les articles de Jean-Paul Guichard, de Denis Lanier, Jean Lejeune et Didier Trotoux pour deux inventions mathématiques. L'histoire des mathématiques, qu'elle s'intéresse à des inventions ou des inventeurs, ne peut pas passer outre leurs intérêts sous-jacents, par exemple pour la nomographie présentée par Dominique Tournès. Le renouveau du genre biographique en histoire, indiqué par Gilles Damamme, va de pair avec une histoire des inventeurs dans le contexte intellectuel, social et culturel de leur époque. En suivant les propos de Pierre Ageron, cette perspective peut aussi être prise en compte dans l'écriture de l'histoire.

Le décalage entre un auteur et l'horizon d'attente de ses lecteurs contemporains est au cœur de la partie suivante. Évelyne Barbin explique que les contemporains de Descartes n'ont pas compris sa *Géométrie* de 1637 alors qu'elle semble aller de soi aujourd'hui. Lorsque que Jean Lejeune, Denis Lanier et Didier Trotoux utilisent le terme de précurseur, au dépit de l'histoire, n'est-ce pas pour écrire un grand décalage entre Gavarret et ses lecteurs ? Avec François Plantade et Jean-Pierre Le Goff, sont retracées les réceptions des œuvres de Grassmann et de Salomon de Caus. En vis-à-vis de ces articles, qui invitent à un relativisme constructif des « vérités mathématiques », Maryvonne Menez-Hallez pose la question du « mathématique ».

La dernière partie de l'ouvrage est plus orientée vers la lecture historique des textes. Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff et Didier Trotoux proposent une relecture d'une proposition d'Apollonius à partir de ses éditions et de ses traductions. Alain Bernard lit les *Arithmétiques* de Diophante comme un texte ancré dans différentes traditions antiques. Ainsi que le remarque Christophe Prochasson, « la tradition n'est pas un processus autonome de transmission », elle est au contraire un mécanisme de réappropriation du passé.

La thématique du colloque croise les questions d'enseignement et elle a vivement intéressé ceux qui dans les IREM associent l'histoire des mathématiques à son enseignement. Le riche sommaire de cet ouvrage en est le témoin.

Planche 3. Page 10.



Section I

Les véhicules de la circulation mathématique

2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII^{e} colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-2-G.
Pages 155-180

Règle de trois et proportionnalité dans une arithmétique pratique niçoise du XVI^{e} siècle et dans ses sources

Martine Bühler & Anne Michel-Pajus

Règle de trois et proportionnalité dans une arithmétique niçoise du XVI^{e} siècle et dans ses sources

Martine Bühler,
IREM de Paris 7 et lycée Flora Tristan (Noisy-le-Grand)
& Anne Michel-Pajus,
IREM de Paris 7 et lycée Claude Bernard (Paris)
martine.buhler@ac-creteil.fr, annie.pajus@club-internet.fr

Introduction

L'Europe des XV^{e} et XVI^{e} siècle vit paraître quantité d' "Arithmétiques pratiques" en langue vulgaire, destinées essentiellement aux commerçants. Parmi elles, on trouve un petit nombre de traités en occitan [Sp, 2002]. L'occitan, ou langue d'oc, est une langue dérivée du bas-latin, présentant des variations dialectales ; ses locuteurs se trouvent dans la région située entre les Pyrénées et les Alpes aujourd'hui dénommée Occitanie. Le niçois, ou parler de Nice, est une variété de l'occitan. Le premier ouvrage imprimé en niçois est un ouvrage d'arithmétique : le *Compendion de l'abaco* de Frances Pellos, publié à Turin en 1492 [1]. L'arithmétique niçoise que nous examinerons ici, la *Cisterna fulcronica* de Jouan-Francès Fulconis, est plus tardive : commencée en 1555, elle fut imprimée à Lyon en 1562. Sur le plan mathématique, Fulconis est plutôt en retrait sur Pellos, mais il est l'un des rares auteurs à exprimer aussi généreusement ses points de vue, références et conseils personnels. L'ouvrage est de petit format, très bien mis en page, muni d'un index de huit pages et très agréable à lire[2].

Nous allons commenter ici les chapitres consacrés à la règle de trois dans la *Cisterna fulcronica*. Nous examinerons aussi les traités d'arithmétique que Fulconis indique comme étant ses sources principales, ceux de Gemma Frisius et d'Étienne de la Roche, et la "transposition didactique" du savoir qu'il avait trouvé chez ces deux auteurs. Par ailleurs, nous comparerons les commentaires et ajouts théoriques de Fulconis avec ceux d'un autre lecteur de l'*Arithmétique* de Gemma Frisius, Pierre Forcadel, qui en publia en 1582 une traduction

1 De 1388 à 1860, Nice n'est pas rattachée à la France, mais au Duché de Savoie, qui régit aussi Turin.

2 Roger Rocca a publié le texte original de la *Cisterna fulcronica* accompagné d'une traduction française [Fu]. Notre traduction s'en inspire, mais peut en différer. Les références renvoient néanmoins à [Fu].

française commentée. Quatre points de vue principaux retiendront notre attention : l'exposition de la règle de trois par les différents auteurs et leurs commentaires d'ordre pédagogique, les éventuelles justifications théoriques de cette règle, les applications et les exemples proposés – souvent riches d'enseignements socio-historiques – et les prolongements théoriques amorcés. Nous relaterons enfin une expérience de lecture de ces textes anciens avec des élèves occitanistes d'aujourd'hui et des éléments de réflexion sur l'enseignement de la proportionnalité au XXI^{e} siècle.

Voici quelques informations bio-bibliographiques sur les quatre arithméticiens :

Jouan-Francès **Fulconis** est né à Isola (en occitan Lieusola), un petit village de montagne dans l'arrière-pays niçois, puis il est allé vivre "dans la Cité de Nice la magnifique". Il y était "montreur d'écriture et aussi d'arithmétique", c'est-à-dire un enseignant privé. Il explique de façon détaillée que son livre est destiné à l'auto-formation des marchands et artisans, et écrit en langue vulgaire pour ceux qui ne lisent pas le latin.

Estienne **de la Roche**, dit de Villefranche, fut aussi "Maitre d'argorisme" (*sic*) à Lyon de 1493 à 1530 environ. Il eut pour maître Nicolas Chuquet, auteur d'un traité intitulé *Triparty en la Science des nombres* écrit en 1484. Ce Traité resta manuscrit jusqu'en 1880, mais de la Roche en avait reproduit de nombreux passages dans son ouvrage *l'Arismetique nouvellement composee par maistre Estienne de la Roche, dict Ville Franche* (Lyon, 1520). Nous nous référerons à sa deuxième édition : *L'Arismetique & Geometrie de maistre Estienne de la Roche dict Ville Franche, Nouvellement Imprimee & des faultes corrigee,…* (Lyon, 1538).

Gemma **Frisius**, ou plus exactement Gemma Rainer ou Regnier, le Frison, est né à Dokkum (Dockum) en Frise orientale le 8 décembre 1508 et mort à Louvain le 25 mai 1555. Il obtint un diplôme de docteur en médecine en 1541. Il a publié en arithmétique et astronomie, toujours en latin. La première édition de son *Arithmeticae practicae methodus facilis* sortit en 1540, à Anvers. Jacques Peletier réédita l'ouvrage à Paris en 1549, en y ajoutant quelques compléments. Il resta l'ouvrage de référence pour les enseignants au XVI^{e} siècle, et même au-delà : on en connaît au moins soixante éditions. Nous nous référerons à l'édition de Peletier de 1549, qui fut sans doute celle utilisée par Fulconis (on en trouve un exemplaire à la bibliothèque de Nice).

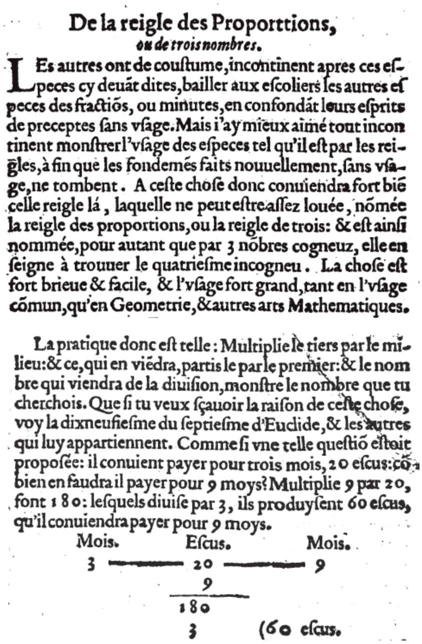
Pierre **Forcadel**, natif de Béziers, professeur de mathématiques au Collège de France de 1560 à 1574, mourut à Paris en 1576 ou 1577. Outre sa traduction commentée de Frisius – qu'il appelle le Phrison – publiée en 1582, on lui doit une *Arithmeticque* très détaillée (Paris, 1556) et la traduction, à partir du latin, d'œuvres d'Archimède, d'Euclide et de Proclus.

1. – Exposition de la règle de trois

Ce pilier de l'arithmétique repose sur la notion de proportion : trois nombres N_1, N_2, N_3 étant connus, on cherche le quatrième nombre N_4 de sorte que "N_1 soit à N_2 comme N_3 est à N_4". Cette expression, qui correspond chez Euclide à une définition précise, est souvent beaucoup plus vague chez les auteurs du XVI^e siècle. Pour un lecteur moderne, on peut exprimer que quatre nombres sont en proportion de plusieurs manières équivalentes :
$\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_3}{N_4}$ ou $\frac{N_1}{N_3} = \frac{N_2}{N_4}$ ou encore $N_1 \times N_4 = N_2 \times N_3$. La "règle de trois" est alors un algorithme permettant d'obtenir N_4, connaissant les trois autres nombres. Il y a évidemment plusieurs algorithmes convenables. Par convention, dans toute la suite, nous noterons les nombres fractionnaires (rompus, *routz*) avec un trait horizontal $\frac{A}{B}$ et le symbole "/" sera réservé à l'opération de division. Cette distinction est importante chez nos auteurs. Voyons maintenant les deux sources explicites de Fulconis, Frisius et Étienne de La Roche.

La règle de trois chez Gemma Frisius

Nous reproduisons ici la traduction par Forcadel du texte de Frisius [Fr, 1582], sans les commentaires du traducteur qui seront analysés plus loin.



De la reigle des Proporttions,
ou de trois nombres.

LEs autres ont de couſtume, incontinent apres ces eſpeces cy deuãt dites, bailler aux eſcoliers les autres eſpeces des fractiõs, ou minutes, en confondãt leurs eſprits de preceptes ſans vſage. Mais i'ay mieux aimé tout incontinent monſtrer l'vſage des eſpeces tel qu'il eſt par les reigles, à fin que les fondemẽs faits nouuellement, ſans vſage, ne tombent. A ceſte choſe donc conuiendra fort biẽ celle reigle lá, laquelle ne peut eſtre aſſez louée, nõmée la reigle des proportions, ou la reigle de trois : & eſt ainſi nommée, pour autant que par 3 nõbres cogneuz, elle enſeigne à trouuer le quatrieſme incogneu. La choſe eſt fort brieue & facile, & l'vſage fort grand, tant en l'vſage cõmun, qu'en Geometrie, & autres arts Mathematiques.

La pratique donc eſt telle : Multiplie le tiers par le milieu : & ce, qui en viẽdra, partis le par le premier : & le nombre qui viendra de la diuiſion, monſtre le nombre que tu cherchois. Que ſi tu veux ſçauoir la raiſon de ceſte choſe, voy la dixneufieſme du ſeptieſme d'Euclide, & les autres qui luy appartiennent. Comme ſi vne telle queſtiõ eſtoit propoſée : il conuient payer pour trois mois, 20 eſcus : cõbien en faudra il payer pour 9 moys ? Multiplie 9 par 20, font 180 : leſquels diuiſe par 3, ils produyſent 60 eſcus, qu'il conuiendra payer pour 9 moys.

Mois. Eſcus. Mois.
3 —— 20 —— 9
9
180
3 (60 eſcus.

Le mot « espèces », très souvent utilisé à l'époque, s'oppose au genre, et signifierait pour nous "sous-divisions".

Les « espèces » [de l'arithmétique] dont parle ici Frisius-Phrison sont la numération et les quatre opérations. Elles ont été présentées sur les nombres entiers. Certains auteurs (comme de la Roche que nous aborderons ensuite) attendent pour exposer la "règle de trois" d'avoir traité les opérations sur les nombres fractionnaires, et la présentent donc sur ces nombres.

Par souci pédagogique explicite, Frison préfère exposer d'abord la "règle de trois" sur les entiers, et sur des nombres mesurés.

La règle est donnée comme algorithme, que nous coderons désormais :

$$N_4 \leftarrow (N_3 \times N_2)/N_1$$

Sa justification renvoie aux *Éléments* d'Euclide (nous y reviendrons dans la section 2).

Mais l'artifice conſiſte plus à poſer les nombres par ordre, que nō pas à l'operatiō. Laquelle choſe eſt facile par ceſte voye: comme ils ſoient touſiours trois nombres cogneuz, l'vn tant ſeulement à la queſtion accouplée auec ſoy: & celuy doit eſtre touſiours le troiſieſme: & celuy, qui eſt de ſemblable choſe, doit eſtre le premier, & celuy, qui demeure le ſecond, ou le milieu. Exemple. Faiſant la queſtion, que 7 aulnes de drap couſtét 13 eſcus, combiē auray ie d'aulnes pour 39 eſcus? Le troiſieſme nombre en ceſt exemple icy ſera 39, pour autant que la queſtion luy eſt icy adiouſtée: & le premier & Diuiſeur ſera 13, pour autant qu'il ſignifie vne meſme choſe auec le tiers, c'eſt à ſçauoir, les eſcus: & le milieu 7, lequel multiplié par 39, il en vient 273: & ſi tu partis ce nombre par 13, tu as 21 aulnes pour 39 eſcus.

Aulnes. Eſcus. Eſcus.
7 —— 13 —— 39
Eſcus. Aulnes. Eſcus.
13 —— 7 —— 39
7
273
13 (21 aulnes.

Phrison insiste sur le fait que la difficulté de la "règle de trois" ne réside pas dans la règle elle-même, ni les calculs, mais dans le fait qu'il faut ordonner les nombres correctement : premier, second (ou milieu), troisième. Et il donne un moyen de bien placer ces nombres. Il y a en effet trois nombres connus, et, de ces trois nombres, l'un est dit « accouplé » à la question. Si 7 aulnes de drap coûtent 13 écus, combien d'aulnes aura-t-on pour 39 écus ? Le nombre 39 est celui des trois qui est « accouplé » à la question : il sera donc mis en troisième position. Le premier est celui qui concerne le même type d'objet que le troisième (« de semblable chose ») : c'est ici 13, car 13 se rapporte à des écus, comme 39. Le second sera le nombre restant. Les premiers exemples sont de type "concret", en nombres mesurés ; tous les nombres sont entiers et les divisions "tombent juste".

[…]

Ayant poſé les nombres par ordre en la maniere deuāt dite, ſi tu diuiſes le troiſieſme par le premier, & tu multiplies le quotiēt par le ſecond, il en viēdra la meſme choſe, comme ſi tu l'euſſes fait par la maniere deuant dite. Parquoy tu pourras auſſi experimēter par ceſte voye, ſi tu auras bien fait.

23 —— 48 —— 69
3 —— 23 (3
Le produict. 144

Maintenant, Phrison indique comment permuter et simplifier les opérations. Les exemples sont alors donnés en nombres non mesurés.

$$N_4 \leftarrow (N_2/N_1) \times N_3$$

Semblablement, ſi tu diuiſes le ſecond par le premier, & tu multiplies le quotient par le troiſieſme, il en viendra le meſme. Comme 22 donnent 66, combien 106? diuiſe 66 par 22, il en vient 3, que tu multiplieras par 106, ils produiſent 318.

22 —— 66 —— 106
22 (3 318

$$N_4 \leftarrow (N_3/N_1) \times N_2$$

De rechef, ſi tu vois que le premier & le ſecond ſe puiſſent diuiſer facilemēt par quelque autre troiſieſme, mets les quotiens d'iceux, au premier & ſecond lieux ; le tiers non changé. L'operation ſera facile par ce moyen.

12 —— 36 —— 367
poſe 2 —— 6 —— 367
poſe 1 —— 3 —— 367

Ou encores ſi le premier & le tiers ont vn diuiſeur cōmun entr'eux, remets les quotiens aux meſmes lieux d'iceux, le milieu non changé: & pourſuis en apres la reigle, ainſi qu'elle eſt enſeignée.

Simplification de N_2/N_1 lorsque N_2 et N_1 ont un diviseur commun ou de N_3/N_1 dans un cas analogue.

Celuy qui ſera mediocrement verſé aux demonſtrations Geometriques, pourra faire beaucoup de telles choſes facilement. Mais ie ne ſuis pas marry d'adiouſter les choſes, qui me ſemblét ſuffire pour ceux qui apprennent, par leſquelles on peut operer, & examiner l'operation faite. Car ſi par telles diuerſes manieres deuant dites, tu viens à vn meſme but, croy hardiment que tu as bien fait ton operation.

« Médiocrement » = moyennement.
Les « démonstrations géométriques » font référence à Euclide.
Le résultat est vérifié en calculant de diverses façons.

La règle de trois chez Étienne de la Roche

De la Roche choisit, comme d'ailleurs la plupart des auteurs d'arithmétiques occitanes, de présenter le chapitre sur les opérations sur les nombres *routz* (fractions) avant la règle de trois. Ce choix se comprend bien d'un point de vue théorique, les fractions intervenant de fait lorsqu'on écrit une proportion. Les différents algorithmes de la règle de trois découlent alors des règles de calcul sur les fractions, et l'exposé de la règle ne se fait qu'une fois. Cependant, cela oblige l'apprenant à comprendre d'abord un chapitre difficile sur des "nouveaux" nombres, alors que l'usager utilise principalement les nombres entiers. Le choix de Frisius-Forcadel et de Fulconis correspond au contraire à une volonté pédagogique de faciliter l'apprentissage de la règle : traiter des problèmes simples quotidiens avec des nombres entiers, bien connus des pratiquants et pour lesquels les opérations ont été longuement expliquées au début du livre (Forcadel ajoute à ces exemples des explications "concrètes" permettant de comprendre le "pourquoi" des règles, voir section 3.)

Nous avons retranscrit le texte suivant d'Étienne de la Roche en français moderne et l'avons divisé en paragraphes pour faciliter la lecture, rendue encore plus difficile par l'utilisation des caractères gothiques [LR, f. 14r] :

> Ce premier chapitre [de la quarte différence de la Première Partie] traite de la règle de trois et de ses espèces[3].
>
> La règle de trois est la première et la plus utile de toutes les règles d'arithmétique, car toutes les autres ont besoin d'elles, et de toutes elle se passe. Et pour cela elle est appelée règle dorée selon certains philosophes, et selon d'autres, règle des proportions des nombres. La règle de trois est ainsi appelée parce qu'elle requiert toujours trois nombres, desquels les deux premiers sont toujours constitués en certaine proportion, et en telle proportion qu'ils sont établis, cette règle sert pour trouver au troisième nombre son quatrième qui lui est proportionné comme le second l'est au premier. Non pas nécessairement que les quatre nombres ni les trois soient proportionnels[4] […], mais telle façon d'être[5] qui va du premier au second doit aller du troisième au quatrième. Et le premier et le troisième sont toujours semblants et d'une [même] condition, et le second et le quatrième sont semblants entre eux et d'une [même] nature et dissemblants et contraires aux deux autres.
>
> Et si on multiplie le premier par le quatrième et le second par le troisième, les deux multiplications sont égales. Aussi si on divise un semblant par l'autre et un dissemblant par l'autre, les deux quotients sont égaux.

3 Sortes, ou opérations arithmétiques impliquées.

4 C'est-à-dire que les quatre nombres ne forment pas une progression géométrique.

5 Dans le texte : « habitude ».

> Le style de cette règle est tel : multiplie le troisième nombre par le second et puis divise par le premier. Ou multiplie ce que tu veux savoir par son contraire puis divise par son semblant. Ou divise le premier par le second, et par le quotient soit divisé le troisième. Ou divise le second par le premier et multiplie le quotient par le troisième. Et ainsi on aura le quatrième nombre que l'on cherche.
>
> Exemple : Si 8 valent 12, que vaudront 14 ? Ou si 8 demandent 12, que demanderont pour son proportionnel 14 ? Les dits trois nombres se peuvent mettre convenablement en cet ordre : Si 8 I 12 I 14 I, multiplie 14 par 12, divise par 8, tu trouveras 21. Et c'est ce que valent 14 et c'est la voie la plus usitée. Ou autrement divise 8 par 12, et tu auras $\frac{2}{3}$ par lesquels divise 14. Tu auras 21 comme dessus. Ou divise 12 par 8, tu auras $1\frac{1}{2}$ par lesquels multiplie 14. Tu auras encore 21. Et ainsi peut-on faire de tous autres nombres.

Suivent vingt-six exemples, sur des nombres non mesurés, du type : « si N_1 vaut N_2 combien vaudra N_3 ? ». Les opérations sont de plus en plus compliquées par les fractions choisies et elles sont toujours posées.Voici le vingt-septième exemple : « si $12\frac{1}{2}$ valent $15\frac{3}{4}$, que vaudront $13\frac{3}{5}$? » Puis :

> La preuve : Et quand on voudrait faire la preuve de telles raisons (calculs), on pourrait multiplier le premier nombre par le quatrième et le second par le troisième pour voir si les deux multiplications sont égales, ou regarder si le troisième nombre et le quatrième sont dans la même proportion que le premier et le second, ou retourner les trois derniers nombres devant derrière en mettant le quatrième pour le premier et le troisième pour le second, et le second pour le troisième ; puis multiplier et diviser selon cette règle et l'on trouvera le premier.

De la Roche explicite la notion de proportion à la fois de façon intuitive avec le mot « habitude », du latin *habitus* qui signifie façon d'être d'un nombre à un autre, et par deux propriétés caractéristiques que nous écririons $N_1 \times N_4 = N_2 \times N_3$ et $\frac{N_1}{N_3} = \frac{N_2}{N_4}$. Ce qui lui permet de donner plusieurs formes équivalentes à son algorithme (pas forcément plus pratiques d'ailleurs ! il n'utilise que la première forme dans ses exemples) ainsi qu'à la preuve (dans le seul exemple proposé, la preuve se fait « en retournant devant-derrière »). Ces propriétés sont énoncées sans référence ni justification. Enfin les notions de « semblant » et « dissemblant » sont peu clarifiées, d'autant que tous les exemples utilisent exclusivement des nombres sans unités de mesure.

La règle de trois chez Jouan-Francès Fulconis

Fulconis reprend le plan de Frisius : la “règle de trois” suit le chapitre sur les nombres entiers, puis est reprise après le chapitre sur les nombres *routz* [Fu, p. 178] :

> De la Règle de trois
>
> Est appelée règle de trois celle qui contient trois nombres, par lesquels on cherche nécessairement un autre nombre, pour parvenir à la connaissance de la chose sur laquelle on s’interroge. On l’appelle de diverses manières : certains l’appellent de négoce, d’autres l’appellent Règle d’Or, car chacun doit l’estimer en fait de comptes plus que l’or, et que l’or est le plus précieux métal qui soit dans les minerais de métal. Ainsi cette règle doit être la plus estimée en matière de comptes. Cette règle est dite aussi règle de proportions, et c’est la meilleure façon selon mon modeste jugement, car il y a des premiers nombres constitués en certaine proportion, et la proportion dans laquelle sont mis ces nombres sert et conduit à trouver pour le troisième nombre son quatrième qui lui est proportionné de même façon que le deuxième nombre par rapport au premier ; non pas que les quatre nombres soient proportionnels, mais qu’ils fassent une proportion égale[6].
>
> Et pour énoncer plus clairement ladite règle de trois, il est bon d’être plus prolixe que l’on n’a jamais été : là où il y a le plus de danger, on doit faire de plus grands efforts pour bien énoncer.
>
> Il faut noter, en pratiquant cette règle de trois, qu’il y a trois nombres : premier, second et troisième, et ces nombres sont appelés semblants et contraires. Le premier nombre et le troisième s’appellent semblants – le premier semblant diviseur et le troisième semblant multiplicateur – et le second nombre contraire. Ces dits nombres semblants devront être semblants de matériau c’est-à-dire pas toujours en tant que nombres. Si le premier nombre parle de drap, ou autre matériau, le troisième nombre doit être de ce matériau, et pareil pour les mesures ou les poids[7], c’est de ces poids ou mesures que les premier et troisième nombres doivent être semblants. Et s’il arrive qu’entre ces nombres premier et troisième l’un soit exprimé avec un grand poids ou mesure, et l’autre avec un plus petit, il faut convertir le grand en petit pour être semblant ; et s’il y a plusieurs types de mesure il faut tout ajouter et mettre sous même nom, comme on dit. Ensuite, on réfléchira au second nombre, et, si d’aventure il est exprimé en diverses sortes de monnaie, on les convertira à la plus basse en les ajoutant toutes.
>
> Une fois tous ces dits nombres de trois préparés et mis sous une même unité, on continuera en multipliant le troisième nombre par le second dit

6 Passage visiblement repris de de la Roche

7 Il faut entendre à chaque fois “unité de mesure” pour « mesure », “unité de poids” pour « poids », etc.

> nombre contraire, et une fois multipliés, cette multiplication sera divisée par le premier nombre, et ce qui sera obtenu sera toujours de même nature que le nombre contraire …

Suivent des exemples assez compliqués à cause des conversions d'unités, permettant en particulier de gérer le reste de la division avec une unité de mesure plus petite, le cas échéant.

> Et pour savoir si ladite [règle] est bien faite, on fera la preuve, qui donne forcément un nombre égal au nombre contraire ; et s'il y avait plus ou moins, ledit calcul ne vaudrait rien. Donc pour savoir faire cette preuve, ou une autre, il suffit de poser ce calcul à l'envers, de sorte que ce qui était diviseur soit multiplicateur, comme par exemple…
>
> Fais ces calculs et preuve exactement comme le font comprendre les exemples ; et ainsi, chacun pourra faire sans hésitation tout autre calcul.

Nous voyons que Fulconis abandonne la référence à Euclide et les propriétés de la proportion exposées chez Frisius, mais essaie d'expliquer la notion de proportion, en s'inspirant de de la Roche. La règle est donnée par le même algorithme que chez Frisius, à savoir :

$$N_4 \leftarrow (N_3 \times N_2)/N_1.$$

Il travaille évidemment sur des « nombres mesurés », tout comme Frisius.

L'effort d'explication porte d'une part sur l'ordonnancement des nombres, comme chez Frisius, et donc la définition de « semblant » et « contraire », et d'autre part sur la gestion des différentes unités de mesures, en particulier parce que le reste de la division en entiers demande une conversion en unité plus petite. Dès le premier exemple, il explique longuement que, si le problème est posé avec diverses unités pour un même type d'objets, il faut « préparer » les nombres en convertissant tout dans la plus petite unité. Son premier exemple mêle d'ailleurs, comme à plaisir, livres et quintaux, florins, gros et patacs, qui plus est avec des divisions qui ne tombent pas juste, contrairement aux exemples de Frisius, qui choisit dans ses premiers exemples des cas où la division "tombe juste".

Il semble étonnant que le pédagogue Fulconis commence par un exemple si compliqué. Mais cela lui permet de traiter des cas courants, plus réalistes que ceux de Frisius, tout en restant dans le cadre des nombres entiers, par réduction à la plus petite unité. Lorsque le calcul ne tombe pas juste, il néglige la partie de la plus petite unité qui apparaît dans le reste, ce qui est certainement la pratique courante des marchands. En tous cas, on comprend, à la lecture des exemples de Fulconis, les revendications futures des cahiers de doléances pour l'unification des mesures (un setier d'Arles vaut, à l'époque de Fulconis, deux setiers de Nice) et l'intérêt d'un système décimal de mesures !

Le livre de Fulconis est celui qui se veut le plus "pratique" de tous, et certainement le plus accessible à un public ne sachant que lire et écrire : il n'y a bien sûr pas de définition de la proportion, mais pas non plus de la multiplication ou de la division. Cependant Fulconis note que dans le cas où l'un des nombres de la règle de trois est 1, la règle se ramène à une division ou à une multiplication.

2. – Justifications théoriques : les références à Euclide

Ces arithmétiques sont destinées en principe à des marchands et artisans devant résoudre des problèmes pratiques. Cependant, certaines montrent un plus grand souci théorique. Alors que tous les auteurs évoquent les proportions, Frisius et surtout Forcadel font référence à ce sujet aux *Éléments* d'Euclide. Est-ce pour leur propre satisfaction ? pour un lecteur éventuellement intéressé ? ou pour éviter des critiques de leurs pairs ? (Forcadel est professeur à l'université de Paris). Les propositions euclidiennes justifient des opérations algébriques (produit des extrêmes et des moyens, commutativité des opérations) qui peuvent simplifier les calculs ou aider à la compréhension. Au contraire, de la Roche les explicite, mais ne cherche pas à les justifier.

Frisius justifie la règle de trois par une référence au livre VII d'Euclide : « Que si tu veux savoir la raison de cette règle, vois la dix-neuvième du septième d'Euclide ». Dans son commentaire, Forcadel se réfère pour sa part à la fois aux livres V, VI et VII. Rappelons que le livre V d'Euclide traite des raisons entre grandeurs. La notion de grandeur n'y est pas définie, mais la définition 5 donne une condition sur les grandeurs pour pouvoir considérer des raisons[8] : « Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement ». En termes modernes, il s'agit de grandeurs « archimédiennes ». Puis Euclide donne la définition de l'égalité de raisons, c'est-à-dire d'une proportion entre quatre grandeurs. Le livre VI applique la théorie des proportions du livre V aux grandeurs de la géométrie plane : les segments et les grandeurs de figures rectilignes (triangles, parallélogrammes, rectangles). Il n'y a aucune numérisation dans ce livre, même si nous pouvons interpréter de manière actuelle les propositions en termes de longueurs et d'aires en tant que mesures : Euclide parle de grandeur qu'on peut « ajouter » (en mettant bout à bout des segments, ou en accolant des figures planes), retrancher et pour lesquelles il considère des égalités de raisons au sens du livre V[9]. Le livre VII traite des nombres entiers et, dans ce cadre, définit la notion de proportion pour des nombres entiers, et en démontre certaines propriétés.

---

8 Les citations des *Éléments* d'Euclide sont données d'après la traduction de Peyrard [E/P].

9 Nous ne traiterons pas ici de la théorie des proportions du livre V. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [D & I, p. 70-75] et aux commentaires de [E/V].

Voyons maintenant comment Frisius et Forcadel utilisent les résultats d'Euclide pour justifier leur pratique de la règle de trois. Frisius ne cite que la proposition 19 du livre VII :

> Si quatre nombres sont proportionnels, le nombre produit par le premier et le quatrième sera égal au nombre produit par le second et le troisième ; et si le nombre produit par le premier et le quatrième est égal au nombre produit par le second et le troisième, alors les quatre nombres seront proportionnels.

En termes modernes : $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$. Cela justifierait le premier algorithme de Frisius. On connaît trois nombres A, B, C et on cherche le nombre D tel que A, B, C, D forment une proportion. Alors $A \times D = B \times C$ (proposition 19) et comme la division est l'opération inverse de la multiplication, on a bien : $D = (B \times C) / A$.

Forcadel est à la fois plus précis dans ses références à Euclide et soucieux de donner un sens intuitif à la règle. Dans les commentaires qu'il insère dans sa traduction de Frisius, il donne trois variantes (« sortes ») de la règle. Voici les deux premières :

Pour la premiere ſorte.

Quand quelcun me dit, qu'il a achetté 7 marcs de billon, qui luy couſtent 42 liures, & il veut ſçauoir combien luy couſteront 17 marcs : ie poſe les trois nombres, ainſi qu'il les m'a propoſez, en ceſte ſorte.

Marcs.	Liures.	Marcs.
7	42	17
		6 liures.
		102 liures.

Puis en diuiſant le ſecond nombre par le premier, ie trouue 6 : par lequel combien il me dit que le marc luy couſte 6 liures. Et par ce donc qu'il en veut acheter 17 marcs, il luy couſteront 17 fois 6 liures, c'eſt à ſçauoir, 102 liures. Le combien doncques du ſecond nombre diuiſé par le premier, quand il eſt multiplié par le troiſieſme nombre, fait le quatrieſme nombre incogneu.

Pour la ſeconde ſorte.

Quand on me dit, qu'il a acheté 9 pieces d'argent, qui luy couſtent 79 liures, & il veut ſçauoir combien luy couſteront les 27 pieces dudit argent : ie poſe les trois nombres, ainſi qu'il les a propoſoz, en ceſte ſorte.

Pieces.	Liures.	Pieces.
9	79	27
	3 fois.	
	237 liures.	

Puis apres, en diuiſant le troiſieſme nombre par le premier, ie trouue 3, par lequel il me dit, qu'il veut acheter trois fois autant de pieces, qu'il en a acheté : & par-ce que l'vn autant luy couſte 79 liures, les trois luy couſteront 3 fois 79 liures, c'eſt à ſçauoir, 237 liures. Le combiẽ dõcques du troiſieſme diuiſé par le premier quand il eſt multiplié par le ſecond nõbre, fait le quatrieſme nombre cherché.

De lá ſ'enſuyt premierement, que ſi le premier nombre, ou la premiere quantité eſt l'vnité : le ſecond nombre multiplié par le troiſieſme, fait ce qu'on cherche.

Et ſecondement, ſi l'vnité eſt au ſecond ou au troiſieſme lieu : le troiſieſme, diuiſé par le premier, ou le ſecond, diuiſé par le premier, ſont ce qu'on demandoit.

Dans les deux exemples ci-dessus, Forcadel donne une explication "raisonnée" en s'appuyant sur le sens des opérations. La première sorte est connue sous le nom de "réduction à l'unité". Elle donne un sens intuitif à la règle de trois, mais pose des difficultés quand la division "ne tombe pas juste". Elle met en évidence le rapport "externe" des grandeurs (rapport prix/quantité). Le déroulement de la seconde sorte est le même, mais le sens est donné par le rapport "interne", celui des quantités, qui est le même que celui des prix.

Or avant même d'énoncer les trois sortes de règles, Forcadel fait précisément référence aux propositions d'Euclide :

> Des dites trois sortes, la première et la seconde prennent leurs sources de la quinzième proposition du cinquième, quatrième proposition du sixième, quinzième, dix-septième et dix-huitième proposition du septième livre d'Euclide. […]
> Mais la troisième sorte prend sa cause des sixième et dix-septième dudit sixième, quinzième du cinquième, et septième, dix-neuvième et vingtième propositions du septième.

Les propositions du livre VII concernent les nombres entiers, tandis que celles du livre V donnent des résultats analogues pour les grandeurs. Par exemple :

> Livre VII, proposition 17 : Si un nombre multipliant deux nombres en produit d'autres, les nombres produits auront la même raison que les nombres multipliés.

Ce qu'on peut écrire en termes modernes : $\frac{B}{A} = \frac{mB}{mA}$; ici m multiplie les deux nombres A et B, sachant que la multiplication est définie de manière non symétrique en ajoutant m fois le nombre A ou B. De même :

> Livre VII, proposition 18 : Si deux nombres multipliant un autre nombre en produisent d'autres, les nombres produits auront la même raison que les multiplicateurs.

En termes modernes : $\frac{mB}{mA} = \frac{B}{A}$; ici, A et B multiplient le nombre m.

Les propositions VII. 17 et VII. 18 sont équivalentes par la proposition VII. 16 (qui "démontre" la commutativité du produit) et Euclide "se ramène" effectivement de VII. 18 à VII. 17 grâce à VII. 16. Ceci explique que Forcadel se réfère "indifféremment" à la proposition 17 ou à la proposition 18 pour les première et seconde sortes.

À la fin de son commentaire « Pour la seconde sorte », Forcadel remarque que, si le premier nombre de la proportion est l'unité, alors la règle de trois consiste à faire un produit (la réduction à l'unité est inutile !) et que si le second ou le troisième est l'unité, cette même règle consiste en une division[10]. Ceci est lié à la proposition 15 d'Euclide. La référence à la proposition 16 sert pour la justification de la troisième sorte s'appuyant sur la signification concrète des

---

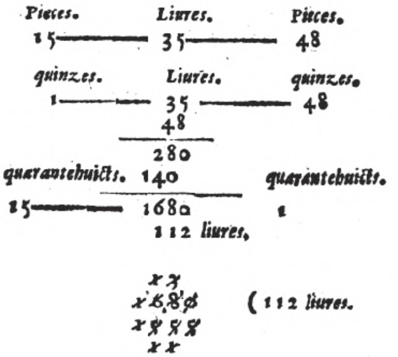
10 Notons que Fulconis fait aussi ce rapprochement, mais sur des exemples.

calculs. Sans doute la référence à la proposition 19, faite avant les calculs concrets, a-t-elle le statut de “justification théorique”.

Pour la troiſieſme ſorte.

Quand on me dit, qu'il a acheté 15 pieces d'or, qui luy couſtēt 35 liures, & il veut ſçauoir combien luy couſteront les 48 pieces dudit or : alors ie poſe en meſme ordre les nombres propoſez, ainſi qu'il ſe voit cy deſſus : puis ap̃s par le premier correlaire, ie luy di que, quand 1 quinze luy couſte 35 liures, 48 quinzes luy couſteront 48 fois 35 liures, c'eſt à ſçauoir, 1680 liures : & autant couſteront 15 quarantehuicts, par la ſeiſieſme propoſition du ſeptieſme liure d'Euclide. Doncques ſi 15 quarantehuicts couſtent 1680 liures, 1 quarantehuict couſtera (par le ſecond correlaire) le combiē de 1680 liures diuiſées par 15, c'eſt à ſçauoir, 112 liures. Le produict eſt venu du ſecond nombre propoſé multiplié par le troiſieſme, & le combiē dudit produict party par le premier. Si doncq̃s on multiplie le ſecond par le troiſieſme, ou bien le troiſieſme par le ſecond, & on diuiſe le produict par le premier : il en viēt ce qu'on cherche. Et icy ſe trouuēt auſſi leſdits deux correlaires.

Pour la troisième sorte (f. 24r), Forcadel utilise à nouveau le sens intuitif des opérations, en introduisant des “lots”, ce qui ramène d'une certaine façon à l'unité. Un marchand achète 15 pièces d'or pour 35 livres. Combien lui coûtent 48 pièces ? Il raisonne ainsi : 1 quinzaine de pièces coûte 35 livres. Donc 48 quinzaines coûtent 48 × 35 livres. Or 48 quinzaines sont la même chose que 15 “quarante-huitaines”. Donc une “quarante-huitaine” coûte (48 × 35)/15. Il s'appuie explicitement sur la proposition 16 du livre VII : « Si deux nombres se multipliant l'un l'autre produisent d'autres nombres, les nombres produits seront égaux entre eux ».



FORCADEL.

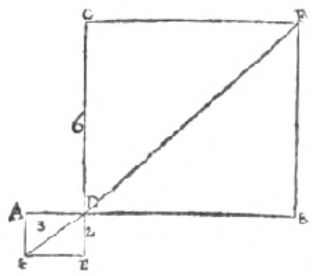
Ces deux derniers aduiſemens, ſont vn meſme : car il faut cōſiderer, que de trois nombres propoſez la raiſon par laquelle on cherche le nombre incogneu par l'autre, ſe refere du premier au ſecond, & par ainſi à leurs racines : mais alors le troiſieſme demeure tel qu'il eſt. Elle ſe refere auſſi, par la chãgée p̃portionalité du premier au troiſieſme : dōcq̃s à leurs racines : & alors le ſecōd demeure tel qu'il eſt. Dont auāt toutes choſes il cōuient reduire ces deux raiſons à leurs premiers termes, ou les y prēdre. Et cela ſe fait, en diuiſant le premier & ſecond par leur meſure, puis apres le premier & troiſieme, ou bien premieremēt le premier & le troiſieſme, & en apres le premier & le ſecōd, ſelō la volonté de celuy qui ſ'y exerce. Et tout cela ſe fait par la 15^e^ propoſition du cinquieſme, 17^e^ & 18^e^ propoſitiōs du ſeptieſme liure d'Euclide, dont i'en ay aſſez ſuffiſammēt eſcrit au ſecōd liure de mō Arithmeti-

Forcadel justifie ici les indications finales de Phrison en citant les mêmes propositions d'Euclide : 15, 17 et 18, sans expliciter comment elles interviennent. Forcadel affirme que la « raison » (rapport) du premier au second nombre est la même que celle de leurs « racines », c'est-à-dire les nombres obtenus par division par un même nombre, ou encore simplification de la fraction.

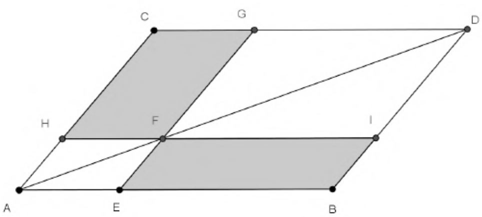
En toute reigle de trois, il y a touſiours deux rectãgles egaux propoſez, dont les deux coſtez de l'vn, & l'vn coſté de l'autre ſont cogneuz. On cherche doncques l'incogneu par les trois autres, ou bien deux triangles ſemblables y ſont propoſez, dont les deux coſtez de l'vn, faiſant l'angle egal à l'vn des angles de

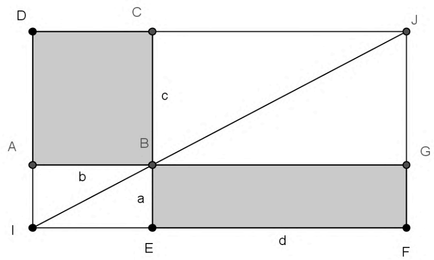
Forcadel conclut ce chapitre par une représentation géométrique de la notion de proportion, qu'il a largement développée dans son *Arithmétique* de 1556 (la figure est extraite de cette l'autre, sont donnez, & l'vn des costez de l'autre dudit angle, par lesquels on cherche & troune l'incogneu. Celuy donc, qui est biẽ verse aux demonstrations Geometriques, cognoistra que le tout estroitement est comprins en la quarante-troisiesme proposition du premier liure d'Euclide, & puis aux autres, qui en parlet plus au large. Doncques cela cognoissant, il se pourra appercevoir de beaucoup d'autres telles choses, & se les rendra faciles. Quant à

Arithmétique).



Le livre I d'Euclide comporte une partie couramment dénommée "méthode des aires", dans laquelle il donne des théorèmes permettant de comparer des aires de figures non superposables. Cette partie culmine avec la proposition 47 (notre théorème de Pythagore) et la proposition 48 (sa réciproque). Il démontre en particulier la proposition 43 : « Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux entre eux » où il faut entendre « égaux » comme "d'aire égale".





Sur cette figure, les compléments sont les parallélogrammes *CGFH* et *FIBE*. Dans le cas particulier d'un rectangle, on obtient des rectangles d'aire égale. Comme nous l'avons dit plus haut, il n'y a aucune numérisation chez Euclide, mais des comparaisons de grandeur. Cependant, Forcadel numérise les résultats d'Euclide et voit dans cette "égalité" de rectangles une égalité de produits. Sur la figure suivante, connaissant $a = BE$, $b = AB$, $c = BC$, il s'agit de construire un rectangle *BEFG* de côté *BE* ayant la même aire que le rectangle *ABCD*. Alors le côté $d = EF$ sera tel que a, b, c, d forment une proportion et on aura construit géométriquement le résultat du calcul de la "règle de trois".

On trace *I* tel que *DCEI* est un rectangle, puis *J* intersection de (*IB*) et (*DC*) ; on complète le rectangle *DJFI*, puis le rectangle *BEFG*. Alors, *BEFG* et *ABCD* sont les compléments autour de la diagonale du rectangle *IDJF* et ont donc même aire.

3. – Exemples et applications : une pédagogie adaptée

Pour tous nos auteurs, l'important est de présenter des exemples en nombres, ou en nombres mesurés, et des applications concrètes qui puissent aider les lecteurs à résoudre d'autres problèmes du même type : nous avons vu Frisius expliquer comment bien ordonner les trois nombres connus (ce qui est, pour lui, la plus grande difficulté de la règle) et Fulconis reprendre longuement ce point et insister sur le problème de la réduction à une unité commune. Ces exemples permettent à la fois de comprendre le fonctionnement de la règle et sa raison d'être. Chez de la Roche, les exemples concrets sont reportés dans une deuxième partie, classés par type d'utilisation (problèmes de change, d'alliages, etc.) Enfin, Forcadel donne des explications qui aident à comprendre intuitivement et à mémoriser les algorithmes.

Certains problèmes pratiques de proportionnalité ne relèvent pas immédiatement de la règle de trois : celle-ci peut-elle suffire à les résoudre ? Tous nos auteurs continuent leur exposé par des "applications" plus ou moins développées ou adaptées au public visé. Elles permettent de renforcer la connaissance et la compréhension de la règle, mais aussi de donner une formation commerciale au lecteur. Pour nous, elles offrent un aperçu historique intéressant sur la vie socio-économique de l'époque. Nous proposons ci-dessous un exemple pris chez Fulconis, le plus fertile en détails sur la vie locale, bien que des applications du même type se retrouvent chez tous les auteurs.

Les règles de compagnies chez Fulconis

Les « compagnies » sont des sociétés souvent temporaires, permettant l'association de commerçants et de financiers. La religion catholique interdisant la fructification de l'argent, appelée usure, cet interdit est contourné en créant une compagnie *ad hoc*, où les associés peuvent apporter du travail, des marchandises, ou de l'argent pendant une certaine durée[11]. Cet interdit religieux explique aussi l'absence d'intérêts composés.

> Des compagnies (Chapitre septième).
>
> Une compagnie, c'est autre chose qu'une union d'amour vrai ; c'est joindre l'intérêt commun à l'intérêt personnel, selon le contrat et la convention des membres de cette compagnie. Et en compagnie, il ne doit pas y avoir d'exception pour la personne, seulement l'apport que l'on y met. Car une telle mise en commun sert à chacun, conformément à ce que l'on y met. Car en telles compagnies, si l'un met une grande quantité d'argent, il doit en tirer plus pour lui que celui qui n'en met pas autant. Et

[11] Notons que les banques islamiques d'aujourd'hui fonctionnent sur ce principe (cf. *Le Monde* du 24/4/2010 sur la carte bleue islamique au Canada).

s'il y a une perte commune, celui qui met davantage doit avoir plus, soit de perte, soit de gain[12].

Et pour bien saisir et comprendre cette règle de compagnie, il n'y a qu'à rassembler, c'est-à-dire ajouter[13], tout l'argent ou autre chose que mettent les membres de la compagnie.

Ensuite multiplier le gain ou la perte par ce que chacun met.

Et diviser par toute la somme de l'argent de toutes les personnes de la compagnie.

Et ayant su combien il revient à l'un conformément à son argent [mis au départ], faire de même pour l'autre, respectivement à l'argent qu'il aura mis, toujours en divisant par le diviseur commun qui est la somme de tout l'argent mis dans la compagnie.

Et cette règle de compagnie est aussi dite règle de trois, comme chacun pourra le voir dans les compagnies et calculs qui suivent [Fu, p. 194].

Mais Fulconis indique ensuite une autre méthode :

Autre façon que font les marchands en l'art de l'arithmétique, pour les calculs de compagnie. Pour suivre ces façons et méthodes des marchands dans leurs comptes de compagnie.

Chaque marchand met ce qu'il veut dans la compagnie, et sachant ce qu'il revient par écu, ou par florin, ou par gros, il est facile de chercher combien il revient par personne de gain ou de perte : on procède comme ci-dessous pour la compagnie de parts.

Exemple. S'il y avait trois marchands qui le premier met 10 écus, le second 20 écus, le troisième 30 écus, et si cet argent gagnait 10 ff[14], je demande combien il revient par écu, et combien il reviendrait à chacun.
Il suffit de diviser le gain par tout l'argent de la société, et le résultat sera pour un écu, un florin, ou autre chose ; après on multipliera par le gain par écu ou autre chose. Comme dans l'exemple pratique ci-dessous

$$\left.\begin{array}{r}\textit{Le premier .10}\\ \textit{Le second .20}\\ \textit{Le troisième .30}\end{array}\right\} \textit{Gain ff .30}$$

.60

Il faut mettre 10 ff en gros, soit 120 gr ff .10

$\underline{12}$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \underline{10\ \ } \\ 120 \end{array}$$

---

12 Explication intuitive de la proportionnalité par le sens de l'équité. Le mot traduit par conformément est le terme *juxta*.

13 Noter le passage du sens commun de « rassembler » au terme mathématique « ajouter ». C'est la définition donnée pour l'addition.

14 ff : abréviation pour florins.

$\begin{array}{r|l} 120 & \underline{\text{gr } .2} \\ 60 & \end{array}$ il vient 2 gros par écu.

Premier 10	Second 20	Troisième 30
2	2	2
20 gros	40 gros	60 gros

En notant M_i la mise de chaque partenaire, G le gain ou perte, la première façon peut se symboliser par $(G \times M_i)/\sum_i M_i$; la deuxième par $(G/\sum_i M_i) \times M_i$.

Nous voyons sur cet exemple une variante de la "règle de trois" définie précédemment qui consiste à permuter la division et la multiplication, sans qu'aucune justification autre que de "bon sens" ne soit donnée. Il s'agit encore d'un exemple de "réduction à l'unité".

Ce chapitre se termine par un exemple très détaillé, explicitement indiqué par l'auteur comme générique, que nous donnons aussi pour son intérêt socio-historique, et dont nous laissons les calculs à la charge du lecteur (ou de ses élèves…)[15] :

> Autre [règle de] compagnie où intervient le temps, contenant des échanges, des ventes et des résolutions de comptes.
>
> Et avant de mettre fin à cette première partie de ce livre, pour mieux satisfaire toute personne qui veut comprendre dans quel ordre on procède, si l'on procède une résolution totale du commerce, ou selon qu'intervient, ou non, le temps, on présente le calcul qui suit, où l'ordre correct à suivre pour tenir un calcul exact est manifeste.
>
> Ainsi, nous dirons que ce sont trois marchands qui ont donné leur argent à un agent, et chacun a envoyé son argent. Le premier a mis 50 écus (de 45 gros) et 20 gros pendant un an, le second a mis 150 écus pendant 8 mois, le troisième a mis 200 écus et 7 patacs pendant 34 mois et 15 jours. En sommant cet argent, on a évidemment 400 écus 20 gros 7 patacs. L'agent fait commerce de cet argent comme suit. Et d'abord, il est allé acheter du blé en Arles, à raison de 50 gros le setier d'Arles, avec l'autorisation d'exporter ce blé. Pour cela il a payé la taxe d'exportation à 7%. Il a payé aussi le fret pour le faire porter à Nice ; de même il a payé les portefaix pour le faire mettre dans le bateau, et pour le décharger et autre,

15 Un autre exemple très informatif sur le plan historique est celui de la *règle des subsides* : « À l'occasion des guerres qui sont fréquentes dans ce pays, il est nécessaire pour les communes de trouver de l'argent pour les grandes charges qui surviennent de ce fait. Pour cette raison, on mettra un exemple de ces subsides ou tailles. On doit savoir que si l'on fait une grande dépense en commun, il faut que tout le pays des Terres neuves qui dépendent de Nice y participe, conformément au nombre de foyers fiscaux. Il y a quatre vigueries dans ce pays, à savoir la viguerie de Nice, la viguerie de Sospel, la viguerie de Barcelonnette et la viguerie du Puget. S'il faut que tout le pays donne 1000 écus, à la mesure des foyers : Nice et sa viguerie est comptée à 450 foyers, la viguerie de Sospel à 620, Barcelonnette à 590 et Le Puget et sa viguerie à 187 ». On peut comparer les chiffres donnés à ceux de la population actuelle !

ce qui fait 50 ff, non compris la taxe d'exportation. Et une fois ce blé, en grains, à Nice, l'agent en a fait échange contre du velours : faisant le prix du blé à 3 florins le setier de Nice – sachant que le setier d'Arles fait 2 setiers de la région de Nice – et le velours au prix de 20 gros la palme. Et cet échange fait, l'agent a vendu le velours à un marchand à 22 gros la palme. Au bout d'un certain temps, les marchands demandent à l'agent les comptes de cette négociation, et veulent savoir combien il y a de gain, capital et dépenses déduits, et aussi le quart denier pour les prestations et salaire de l'agent. Et aussi savoir le gain de chacun selon l'argent qu'il a mis et la durée de leur placement. [… calculs …]

Le premier met 50 écus 20 gros pendant 1 an, il gagne 34 écus 33 gros 6 patacs. Le second qui met 150 écus 0 gros pendant 6 mois, gagnera 68 écus 40 gros 0 patacs. Le troisième qui met 200 écus 0 gros 7 patacs pendant 3 mois et 15 jours aura 40 écus 8 gros 4 patacs. Et il reste à partager 1 patac entre tous comme la preuve l'indique à moi, Fulconis, ainsi qu'à tous.

Et une fois fait ce calcul commercial, vous en pourrez faire d'autres plus faciles et semblables. Et cela suffira pour cette première partie du présent livre.

4. – Prolongements : de la règle de trois à l'algèbre

De la "règle de trois" au partage proportionnel et à la fausse position chez de la Roche

Tous nos auteurs appliquent la "règle de trois" au type de calculs que nous appelons "partage proportionnel". Certains le donnent sous forme plus générale, par exemple Étienne de la Roche [LR, f. 16v-17r] (nous transposons en français moderne) :

Comment tout nombre peut être divisé en tant de parties inégales et en telles proportions que l'on veut

Le style de diviser et mettre un nombre en plusieurs portions égales est patent par ce qui a été dit en nombres entiers et aussi en routz. Mais pour mieux mettre en parties inégales on peut avoir cette règle : multiplie le nombre à diviser par chacun des nombres proportionnés et à chaque fois divise par l'addition de tous ensemble.

Ou autrement [dit], multiplie par chacune et divise par toutes ensemble : et tout cela n'est rien d'autre que la règle de trois comme il peut apparaître par plusieurs exemples ci-dessous, dont le premier est celui-ci.

Partage 10 en deux parties de telles proportions comme font $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ ou comme font 4 et 3 qui est une même proportion…

Réponse : ajoute 4 et 3 et font 7 pour dénominateur commun, puis après multiplie 10 par 4 et divise par 7 et auras 5 et $\frac{5}{7}$ pour la première partie puis multiplie 10 par 3 et divise par 7 et auras 4 et $\frac{2}{7}$ pour la seconde partie. Cette manière de faire n'est autre chose que dire par la règle de trois : si 7 valent 10, que vaudront 4 ? Et encore, si 7 valent 10, que vaudront 3 ? Ou autrement, de 10 prends les $\frac{4}{7}$ et les $\frac{3}{7}$. Ainsi tu auras les parties proportionnées que tu demandes.

Partagez 100 en trois parties dont la seconde soit le double de la première et la troisième le tiers de la seconde.

Réponse : cherche trois nombres constitués dans les proportions susdites dont 1 est le premier, ainsi le second sera 2 et le troisième sera $\frac{2}{3}$, et, pour éviter les routz, réduis ces nombres en tiers et tu auras 3, 6, 2. maintenant, répartissant en trois parties de telles proportions comme sont 3, 6, 2 et auras 27 et $\frac{3}{11}$ pour la première, 54 et $\frac{6}{11}$ pour la seconde et 18 et $\frac{2}{11}$ pour la tierce.

On peut voir ici l'ébauche d'une fausse position : on commence par chercher trois nombres entiers qui sont dans la bonne proportion sans se préoccuper de leur somme, puis la "règle de trois" permet de trouver trois nombres en bonne proportion dont la somme est la somme demandée (ici 100). De la Roche explicite plus loin cette règle [LR, f. 18r] :

Ce troisième chapitre traite de la règle d'une position.

Cette règle est ainsi appelée pour ce que les calculs et raisons qui se font par icelle sont trouvés et faits par position d'un nombre pris à plaisir. Et, cette règle a deux parties principales : dont la première cherche les nombres inconnus par le moyen d'un nombre connu pris à son plaisir, et mêmement contenant les parties proposées en la raison. La seconde partie semblablement investigue diverses proportions de nombres inconnus par le moyen d'un nombre connu ou de plusieurs, et encore par d'autres nombres artificiellement trouvés en dessous, et quelquefois, au-dessus de la position, ainsi qu'il peut apparaître par plusieurs exemples mis ici après de l'une et l'autre partie.

Trouvez un nombre tel que, quand on lui aura ajouté son égal et encore la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$, et le $\frac{1}{4}$, de soi tout ajouté ensemble font 17.

Réponse : pose à plaisir 12 puis lui ajoute 12 qui est son égal et encore 6, 4, 3 qui sont la $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$ et le $\frac{1}{4}$ de 12. Le tout fait 37 et l'on ne veut que 17. Par quoi faut dire par la règle de trois : si 37 viennent de 12, de combien viendront 17 ? Multiplie et divise et trouveras 5 et $\frac{19}{37}$ qui est le nombre que l'on demande, auquel si on lui ajoute 5 et $\frac{19}{37}$ qui est son égal avec 2 et $\frac{28}{37}$, 1 et $\frac{31}{37}$ et 1 + $\frac{14}{37}$ qui sont sa $\frac{1}{2}$, son $\frac{1}{3}$ et son $\frac{1}{4}$, on trouvera 17.

Pourquoi poser « à plaisir » 12 ? Fulconis nous l'explique : on prend un nombre « dans lequel il y a $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ ».

De la fausse position à la règle de la chose chez de la Roche

Le même type d'idées amène de la Roche à un début d'algèbre avec la règle de la chose [LR, f. 33R] :

> Pour l'usage de la règle de la chose, on suppose que la chose que l'on veut savoir soit 1ρ et puis cette chose on l'ajoute ou soustrait, multiplie ou divise par quelqu'une de ses parties ou par un autre nombre ainsi que le requiert le calcul (la raison) que l'on traite : et tout cela, d'une part, est égal ou semblable à quelque autre opération de nombres d'autre part. Quoique communément on pose 1ρ, toutefois on peut poser 2ρ ou 3ρ ou 4ρ etc. et tant qu'on veut, puis négocier ainsi qu'on a dit précédemment : mais si la position est faite de 2ρ, ce qui en viendra sera le double de ce que l'on veut savoir. Et si la position est de 3ρ, la réponse sera le triple.
> Comme qui voudrait trouver deux nombres en proportion triple qui, ajoutés ensemble, fassent 12. Pour ce faire, l'on peut poser que l'un d'eux soit 1ρ. Ainsi l'autre sera 3ρ qui, ajoutés ensemble font 4ρ, lesquels sont semblants à 12. C'est-à-dire en telle considération comme 12. Car ainsi, comme 12 est considéré comme l'assemblement du triple avec son sous-triple. Aussi 4ρ sont produites par l'addition du triple qui est 3ρ avec 1ρ qui est le sous-triple.

On voit ici le lien avec la méthode de fausse position : au lieu de prendre une « position » égale à une valeur numérique (de préférence commode), on prend la position égale à « une chose » notée 1ρ. Puis on effectue les opérations demandées avec ce 1ρ jusqu'à aboutir à 4ρ égale 12. Remarquons que De La Roche ne va pas au bout du calcul pour trouver que 12 est le quadruple de ce que l'on cherche, c'est-à-dire 3.

> Ce premier canon en la règle de la chose est de si grande perfection que toutes les raisons qui se font par nombres routz par la règle de trois, par une et deux positions,…, se peuvent faire facilement par ce canon, et en outre, une infinité de raisons qui par aucune des dites règles ne se pourraient faire [LR, f. 35R].

De la Roche souligne la généralité de la « règle de la chose » qui permet de résoudre des problèmes plus compliqués que la simple règle de trois ou la fausse position.

L'exemple suivant ne peut se résoudre avec une simple règle de trois, car il n'y a pas proportionnalité entre le nombre cherché et le résultat des opérations effectuées. La simple fausse position échouerait également, mais on pourrait faire une double fausse position [Ch, p. 95-128]. Encore faut-il être capable de distinguer d'un coup d'œil les problèmes relevant de la simple fausse position ou de la double, cette dernière étant beaucoup plus complexe à mettre en œuvre. Par ailleurs, certains problèmes ne peuvent se résoudre ni par une simple, ni par une double fausse position.

> Trouvez un nombre dont les $\frac{2}{7}$ ajoutés avec 8 fassent 28. Réponse : pose 1ρ dont les $\frac{2}{7}$ font $\frac{2}{7}$ρ, ajoute-lui 8 . Cela fait $\frac{2}{7}$ρ p 8 égales à 28[16]. Égalise tes parties. Ainsi tu auras $\frac{2}{7}$ρ pour diviseur et 20 pour nombre à partir[17]. Divise donc l'un par l'autre et tu auras 70 qui est le nombre que l'on cherche. Ou autrement par nombres routz : enlève 8 de 28, restent 20, lesquels divisés par $\frac{2}{7}$, il vient 70.

5. – Un exemple d'expérimentation en classe

Le lycée Flora Tristan de Noisy-le-grand (93) offrait jusqu'en 2010 l'option occitan aux élèves. Le professeur d'occitan se montrant très intéressé par la *Cisterna Fulcronica* de Fulconis, nous avons élaboré une séquence d'enseignement à deux voix utilisant un court extrait de ce livre. Elle s'est répétée pendant trois années, avec des élèves de Terminale suivant l'option occitan au lycée, durant 1h, puis 1h30, puis 2h. En mai 2010, elle a eu lieu dans une classe de Terminale où sont regroupés des élèves de Terminale STG, Terminale ES, Terminale L, Terminale S. Ces élèves présentaient l'occitan en option au baccalauréat ; le texte de Fulconis était un des textes qu'ils préparaient pour l'oral.

La séance débute par une présentation historico-géographique appuyée sur un diaporama[18]. Nous la commentons à deux voix, l'enseignant d'occitan en profitant pour faire réviser les nombres en occitan aux élèves (lecture de dates par exemple). Il lit ensuite en niçois *La demanda de tres pessas que fach ung boticari de ung grant pan de sira*, et un élève lit le même problème transposé en occitan moderne. On passe à une traduction collective du texte.

> <u>Problème des trois parts que fait un boutiquier d'un grand pain de cire</u>
> S'il y avait un boutiquier qui ait un grand pain de cire, dont il aurait fait trois parts. Il ne se souvient pas combien pesaient les deux premières, mais la troisième pesait 30 livres. Il est vrai que la première pesait $\frac{1}{3}$ de tout le

---

16 p signifie plus.

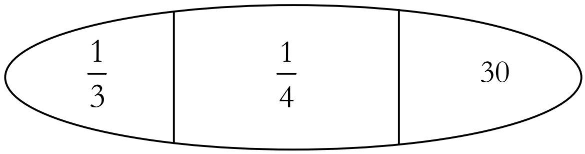
17 On cherche 1ρ tel que $\frac{2}{7}\rho$ fasse 20. Alors si $\frac{2}{7}\rho$ font 20, 2ρ font 7×20, c'est-à-dire 140, donc 1ρ fait 70. On n'a pas ainsi à utiliser les nombres *routz*, contrairement à la méthode exposée juste après.

18 Extrait de celui présenté au colloque de Caen et disponible sur le site de l'IREM de Paris 7.

pain et la seconde $\frac{1}{4}$ de tout le pain ; je demande, par supposition naturelle, combien pesait tout le pain.

Diverses remarques sont faites sur la langue et la grammaire (évolution de l'occitan depuis le XVI^e siècle, utilisation de l'imparfait du subjonctif,…) Les élèves doivent ensuite résoudre le problème, sans qu'aucune indication leur soit donnée. Voici quelques unes des méthodes qu'ils ont employées :

Méthode 1. Schéma et calcul purement numérique.



Les calculs : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$. La troisième part représente donc $\frac{5}{12}$ du pain.

$\frac{5}{12} \to 30$

$\frac{1}{12} \to 6$

$\frac{1}{3}=\frac{4}{12} \to 4\times 6 = 24$

$\frac{1}{4}=\frac{3}{12} \to 3\times 6 = 18$

Pain entier : $30+24+18=72$

Méthode 1bis. Commence comme la précédente, mais les calculs sont menés différemment.

$\frac{5}{12} \to 30$

$\frac{12}{12} \to ?$

Puis produit en croix avec des calculs plus ou moins laborieux.

Méthode 2. Mise en équation du problème, en général sous l'une des deux formes suivantes : $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 30 = x$ ou $x - 30 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$. Les calculs de résolution sont parfois laborieux. La mise en équation elle-même est parfois difficile : certains élèves écrivent $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 30 = x$, d'autres posent $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 30$, mais ne savent pas quoi en faire.

Nous lisons ensuite la traduction de la résolution proposée par Fulconis :

> Réponse : 72 livres. Et pour faire ce calcul, il suffit de chercher un nombre dans lequel il y ait $\frac{1}{3}$et $\frac{1}{4}$: vous trouvez 12 ; enlevez $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de 12, il reste 5. Par une règle de trois dites : si 5 restent de 12, de quoi resteront 30 ? Multipliez & divisez, et cela donne 72, ce que pèse tout le pain.

La méthode paraît relativement naturelle. Une bonne partie des élèves connaît l'expression "règle de trois" et l'associe à la notion de proportionnalité et au "produit en croix", mais ils ne savent plus s'ils ont vu cela en primaire ou au collège. Nous expliquons pourquoi la méthode est correcte. Puis nous lisons, en occitan, deux autres problèmes et les traduisons collectivement. Les élèves reconnaissent qu'il s'agit de la même situation mathématique. Voici les énoncés de ces deux problèmes (nous donnons le deuxième en occitan pour laisser au lecteur le plaisir de la traduction) :

> <u>Problème de la pique</u>
> C'est pareil pour le problème de la pique qui est dans l'eau, et sur l'eau, il y a 5 palmes de ladite pique. On demande quelle est la longueur de cette pique : si vous faites comme ci-dessus pour le problème du pain de cire, vous trouverez qu'elle est longue de 12 palmes.
>
> <u>La demanda del peyson</u>[19]
> Aussi en talla maniera fares la demanda del peyson quant es fach tres pars : la testa pesa $\frac{1}{2}$ de tot lo peyson & la coa $\frac{1}{4}$ de tot lo peyson, et tot lo cors pesa 25 lieuras : demandi quant pesera tot lo peuson. Resposta : deu pesar 4 rups.

Cette année, aucune discussion ne s'est engagée avec les élèves, peut-être épuisés après deux heures de travail. L'an dernier, un élève de Terminale ES s'était montré particulièrement intéressé et avait posé beaucoup de questions, dont les deux suivantes : comment Fulconis convainquait-il ses élèves que la méthode "marche" ? pourquoi n'apprend-on pas à l'école la méthode de Fulconis, plus simple que les équations et les x ?

Il aurait été souhaitable d'aller plus loin dans l'étude des problèmes et des méthodes, mais cela n'aurait été possible que dans le cadre du cours de mathématiques et non dans celui d'un travail bidisciplinaire ponctuel, rassemblant des élèves de différentes classes. Nous avons noté que la séance a été plus vivante la deuxième année, année où il n'y avait aucun élève de la filière S. Il est possible que le mélange scientifiques/non scientifiques "paralyse" les élèves non scientifiques, qui préfèrent alors laisser la parole à ceux qu'ils estiment plus aptes à répondre.

6. – Proportionnalité et "règle de trois" dans l'enseignement

Après cinq siècles d'efforts pédagogiques, la règle de trois pose toujours des difficultés d'enseignement. Voici ce que nous pouvons lire dans une thèse de didactique [Co, p. 5-7] :

---

[19] *peyson* = poisson, *coa* = queue, *lieura* = livre, 1 *rup* = 25 livres.

> Cette théorie des rapports et proportions est enseignée dans les écoles primaires et secondaires jusqu'en 1970 ; elle contribue à la formation mathématique des futurs instituteurs en donnant un cadre théorique à la « règle de trois » qu'ils ont à enseigner. En effet dans l'enseignement obligatoire l'étude des grandeurs et de la proportionnalité est à la base des différents apprentissages. Mais les élèves connaissent des difficultés avec la règle de trois dont l'aspect algorithmique est décrié par la noosphère…
>
> C'est dans ce contexte de doute qu'arrivent les mathématiques modernes. Outre l'enthousiasme qu'elles suscitent, elles font naître l'espoir que la « fonction linéaire » va faciliter l'apprentissage de la proportionnalité y compris à l'école primaire où elle est introduite à partir de la notion d'opérateur dès le CM1. Mais les structures numériques de la linéarité ignorent les fonctions sociales de la proportionnalité qui reste le prototype du traitement des grandeurs […]
>
> Or la culture maintient un rapport ancien au concept de proportionnalité, par conséquent les vocabulaires perdurent et sont récupérés pour décrire les structures numériques… Différentes enquêtes apportent des informations sur les connaissances des élèves et des professeurs. Elles révèlent en particulier des usages inappropriés de vocabulaires qui conduisent à une perte de sens allant jusqu'à des confusions dans les concepts de rapport, de proportion, de coefficient de proportionnalité, etc. Le nombre de questions concernées par ces difficultés et la fréquence des erreurs observées montrent qu'il ne s'agit pas d'accidents mais que ces dysfonctionnements sont autant d'indices d'un phénomène didactique plus général et plus profond en rapport avec la disparition de concepts anciens qui entraient dans l'organisation des connaissances mathématiques à enseigner aux niveaux primaire et secondaire.

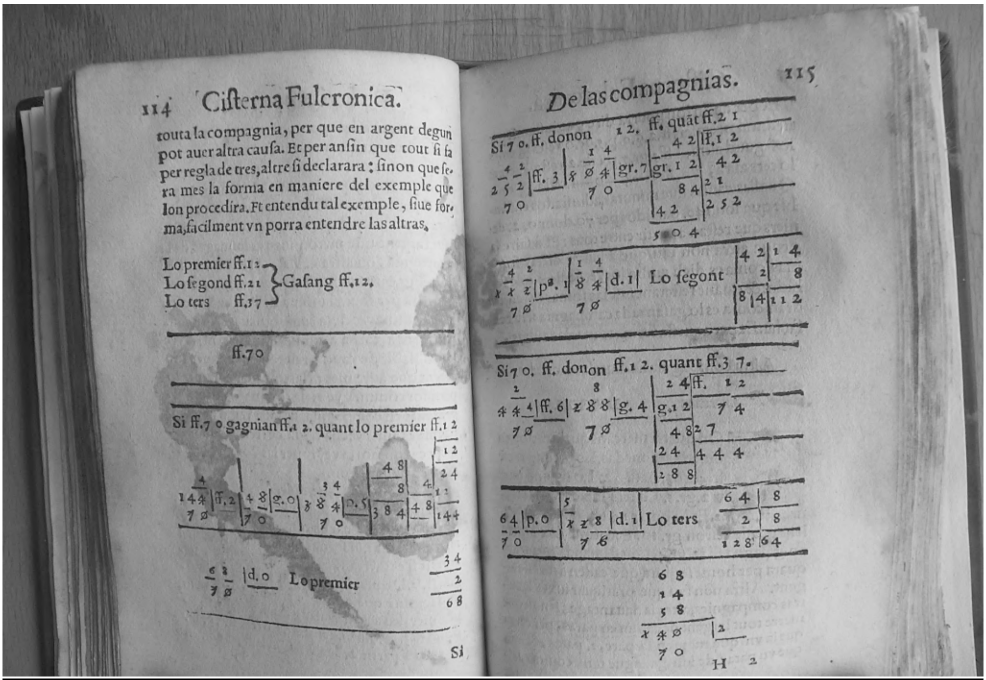
En 2006, suite aux réflexions du Conseil européen de Lisbonne en 2000, le Haut conseil de l'éducation proposa « de donner une importance accrue à la résolution de problèmes à partir de situations ouvertes et proches de la réalité et d'insister sur la nécessité de créer aussi tôt que possible des automatismes en calcul (calcul mental, apprentissage des quatre opérations […] proportionnalité, notamment la "règle de trois") ». On assista alors au "retour de la règle de trois" dans les programmes scolaires [D]. Ainsi dans l'enseignement primaire, en 2008 :

> Au CM1 : utiliser la "règle de trois" dans des situations très simples de proportionnalité.
>
> Au CM2 : résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes et aux conversions d'unité en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois").

Puis au collège, en 2009 :

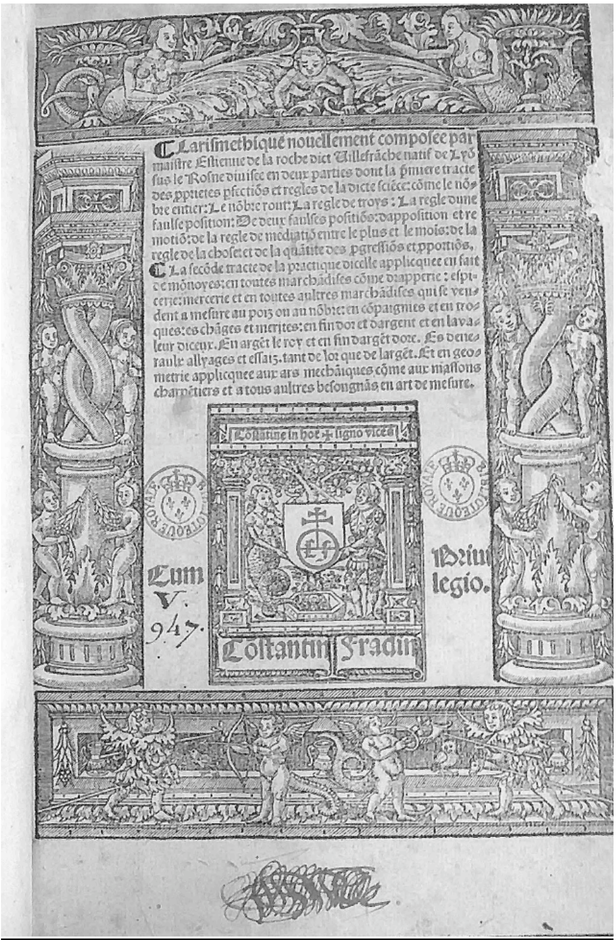
> En classe de sixième. Reconnaître les situations qui relèvent de la proportionnalité et les traiter en choisissant un moyen adapté : utilisation d'un rapport de linéarité, entier ou décimal. Utilisation du coefficient de proportionnalité entier ou décimal. Passage par l'image de l'unité (ou « règle de trois »). Utilisation d'un rapport de linéarité, d'un coefficient de proportionnalité exprimé sous forme d'un quotient.
>
> En classe de cinquième. L'usage du « produit en croix » est exclu en classe de cinquième.
>
> En classe de quatrième. Aux diverses procédures déjà utilisées s'ajoute le « produit en croix » qui doit être justifié.

La réflexion pédagogique sur ces problèmes est cependant loin d'avoir abouti, et un nombre non négligeable d'élèves arrivent au lycée en ayant mal compris la proportionnalité, même s'ils utilisent le fameux “produit en croix” avec une certaine efficacité pratique. La règle de trois reste pourtant d'une utilité évidente dans le monde actuel : « Tous les étudiants en soins infirmiers savent-ils compter ? Pas sûr ! La fameuse règle de trois gagnerait à être mieux connue… Afin d'éviter les erreurs de dosage, trop souvent fatales. » [G & B]



Ill. 1 – Deux pages de la *Cisterna Fulcronica*
(avec l'autorisation des Archives départementales des Alpes-Maritimes)

Il serait souhaitable que tout citoyen puisse comprendre et résoudre des problèmes simples liés à la proportionnalité, qui peuvent se poser dans la vie quotidienne, et lire sans difficulté les articles de journaux où apparaissent des pourcentages, voire y détecter les contradictions et les manques[20]. La lecture de textes historiques comme ceux de Frisius et Forcadel permettrait peut-être aux futurs professeurs des écoles – souvent issus de classes non scientifiques et ayant abandonné les mathématiques après le baccalauréat, voire dès la fin de la Seconde – de mieux s'approprier les problèmes et les méthodes liés à la proportionnalité, d'appréhender la difficulté de ces notions et de réfléchir à leur présentation, éventuellement en lien avec des représentations géométriques.


Larismethique nouuellement composee par maistre Estienne de la roche dict Villefrãche natif de Lyõ sus le Rosne diuisee en deux parties dont la p̃miere tracte des p̃prietes p̃fectiõs et regles de la dicte sciẽce: cõme le nõbre entier: Le nõbre rout: La regle de troys: La regle dune faulse position: De deux faulses positiõs: dapposition et remotiõ: de la regle de mediatiõ entre le plus et le moĩs: de la regle de la chose: et de la quãtite des p̃gressiõs et p̃portiõs.

La secõde tracte de la practique dicelle applicquee en fait de mõnoyes: en toutes marchãdises cõme drapperie: espicerie: mercerie et en toutes aultres marchãdises qui se vendent a mesure au poiz ou au nõbre: en cõpaignies et en troques: es chãges et merites: en fin dor et dargent et en la valeur diceux. En argẽt le roy et en fin dargẽt dore. Es deneraulx allyages et essaiz. tant de lor que de largẽt. Et en geometrie applicquee aux ars mechãiques cõme aux massons charpẽtiers et a tous aultres besongnãs en art de mesure.

Cõstãtine in hoc ✠ signo vices

Cum Priuilegio.

V. 947.

Costantin Fradin

Ill. 2 – BnF RES V 899 : L'*Arisméthique* d'Étienne de la Roche (frontispice)

20 On peut regarder une édifiante vidéo où un ministre de l'Éducation nationale, Xavier Darcos, sèche sur une "règle de trois" : http://www.youtube.com/watch?v=O0SLpAJ_8aw .

Bibliographie

Sources

[E/P] EUCLIDE, *Les Œuvres*, traduction Peyrard, Paris, 1819, rééd. Paris : Blanchard, 1993.

[E/V] EUCLIDE, *Les Eléments*, traduction et commentaires par B. Vitrac, 4 vol., Paris : PUF, 1990-2001.

[Fo] Pierre FORCADEL, *L'Arithmétique*, Paris, 1556.

[Fr, 1551] Gemma FRISIUS, *Arithmeticae praticae methodus facilis,… huc accesserunt Jacobus Peletarii Cenomani annotationes…*, Paris : G. Cavellat, 1551.

[Fr, 1582] Gemme PHRISON, *L'arithmétique, traduite en françois par Pierre Forcadel de Béziers,… et par luy illustrée de commenaire*s, Anvers : J. Bellere, 1582.

[Fu] Jouan-Francès FULCONIS, *La Cisterna Fulcronica*, réédition de l'ouvrage publié en 1562, transcription, traduction et commentaires de Roger Rocca, commentaires linguistiques de Remy Gasiglia, Nice : Lou Sourgentin, 1996.

[LR] Étienne DE LA ROCHE, *Larithmetique & Geometrie de maiftre Eftienne de la Roche dict Ville Franche, Nouuellement Imprimee et des faultes corrigee*, Lyon, 1538 (1e édition 1520).

[M] Aristide MARRE, « Le triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet, Parisien, d'après le manuscrit fonds français, n°1346 de la Bibliothèque Nationale », *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* 13, Rome, 1880.

Ouvrages et articles divers

[Ch] Jean-Luc CHABERT et *alii.*, *Histoire d'algorithmes*, Paris : Belin, 2010.

[Co] Eugène COMIN, *Proportionnalité et fonction linéaire. Cause et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*, thèse de l'université de Bordeaux, 2000.

[D & I] Pierre DEDRON & Jean ITARD, *Mathématiques et mathématiciens*, Paris : Magnard, 1959.

[D] François DROUIN, « Le retour de la règle de trois », *Bulletin de l'APMEP* 484, 2010.

[G & B] Hélène GIRAUD et Jean-Marc BONFILS, « La règle de trois n'aura pas mieux », *Objectif Soins* 25, 1994, p. 51-52.

[H] Albrecht HEEFFER, *Estienne de la Roche's appropriation of Chuquet (1484)*, disponible en ligne, à paraître *in* : actes de la Third international conference of the European Society for the History of Science (Vienne, 2008).

[I] Groupe d'histoire des mathématiques. *De l'arithmétique à l'algèbre. Fausses positions et premier degré*, Toulouse : IREM de Toulouse, 2008.

[Sp, 2002] Maryvonne SPIESSER, « À propos de quelques problèmes d'arithmétique dans la culture marchande, de la France méridionale du XVe siècle : un héritage lointain », *in* : 4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée (actes du XIIIe colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, Rennes, 2000), Rennes : IREM, 2002, p. 223-251.

[Sp, 2003] Maryvonne SPIESSER, « Les manuels d'arithmétique pour les marchands dans la France du XVe siècle », *Bulletin de l'APMEP* 444, 2003, p. 32-50.

[Sp, 2006] Maryvonne SPIESSER, « L'algèbre de Nicolas Chuquet dans le contexte français de l'arithmétique commerciale », *Revue d'histoire des mathématiques* 12, 2006, p. 1-27.

[Sw] Frank SWETZ, « Fifteenth and Sixteenth Century Arithmetic Texts : What can we learn from them ? », *Science & Education* 1(4), 1992, p. 365-378.