Circulation Transmission Héritage

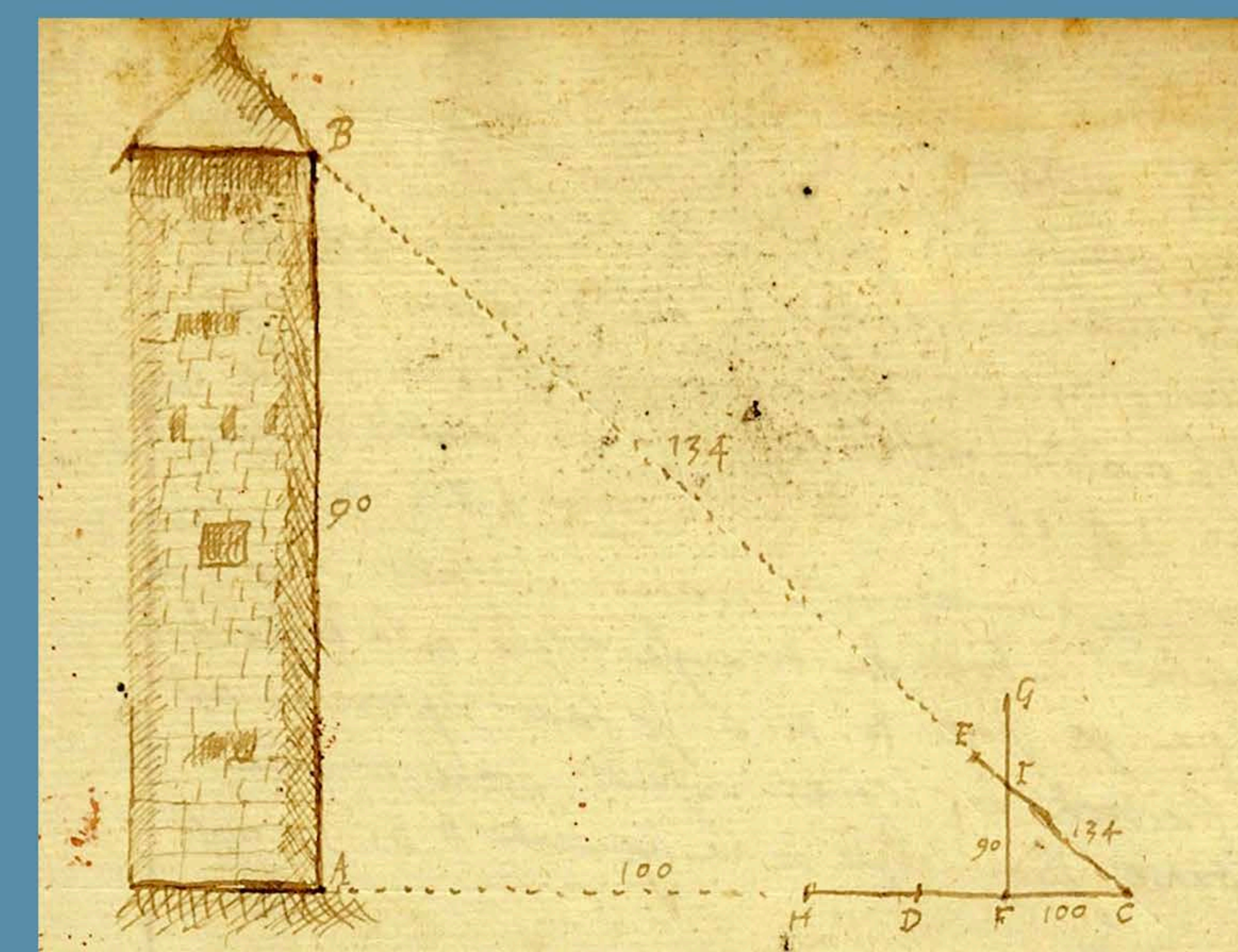
Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » sont différents. Cet ouvrage explore des moments historiques où des décalages, petits ou grands, nourrirent des héritages et furent le fruit des circulations et des transmissions. Il invite à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études qu'il rassemble mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

ISBN : 978-2-902498-06-2
Édition et diffusion : IREM de Basse-Normandie
juin 2011

IREM
de Basse-
Normandie

Circulation Transmission Héritage
histoire et épistémologie des mathématiques

Circulation Transmission Héritage



Actes du 18e colloque inter-IREM
histoire et épistémologie
des mathématiques
mai 2011

Université de Caen Basse-Normandie

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII^{e} colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

I-1-C.
Pages 51-70

Un essai de synthèse entre le théorème de Pythagore et la procédure *gou-gu*

Isabelle Martinez-Labrousse

Circulation
Transmission
Héritage

Histoire et épistémologie des mathématiques

Planche I. Page 6.

Commission inter-IREM
Épistémologie et histoire des mathématiques

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

ISBN : 978-2-902498-06-2

Directeur de publication : Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie
Diffusion : IREM de Basse-Normandie, Université de Caen Basse-Normandie,
campus 2, 14032 Caen Cedex
Tél. : 02 31 56 74 02 – Fax. : 02 31 56 74 90
Adresse électronique : irem@unicaen.fr
Site Internet : http ://www.math.unicaen.fr/irem/
Coordination : Évelyne Barbin et Pierre Ageron
Comité de lecture : Pierre Ageron, Didier Bessot, Richard Choulet, Gilles Damamme, Guy Juge, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff, Pierrick Meignen, Thierry Mercier, François Plantade, Danielle Salles, Didier Trotoux et Éric Trotoux
Relecture générale : Pierre Ageron, Jean-Pierre Le Goff
Conception, illustration et mise en page du volume : Jean-Pierre Le Goff, Pierre Ageron, Didier Bessot et Didier Trotoux
Conception de l'affiche du colloque et de la couverture des actes : Patrice Gourbin
Impression et façonnage : Corlet numérique, 14110 Condé-sur-Noireau

Crédits photographiques de la couverture :
Bibliothèque de Caen, deux images tirées du manuscrit *in-fol.* 27 : *Pratique de geometrie*, de la main de Samuel Bochart (1599-1667)
– 1ère de couverture : mesure au *gonomètre* de la hauteur d'une tour, *f* °8 *r* °
– 4ème de couverture : mesure de la *gibbosité* de la mer entre Dieppe et la Rie (Rye), *f* °42 *v* °
Illustrations hors-texte :
Les 16 planches hors-texte des pages de l'ouvrage, paginées ii, viii, xiv, 28, 50, 94, 122, 240, 338, 360, 386, 446, 480, 502, 544 et 582, sont tirées de la *Pratique de la Geometrie, sur le papier et sur le terrein ; où par une methode nouvelle & singuliere l'on peut avec facilité & en peu de tems se perfectionner en cette science*, Par Sebastien Leclerc, Graveur du Roi. A Paris, Chez Ch. A. Jombert, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame. M. DCC. XLIV. (1744). *Avec Privilege du Roi.* (coll. part., clichés : jplg)

Sommaire

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

Sommaire

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

I-4. – Les figures : accompagner les mots

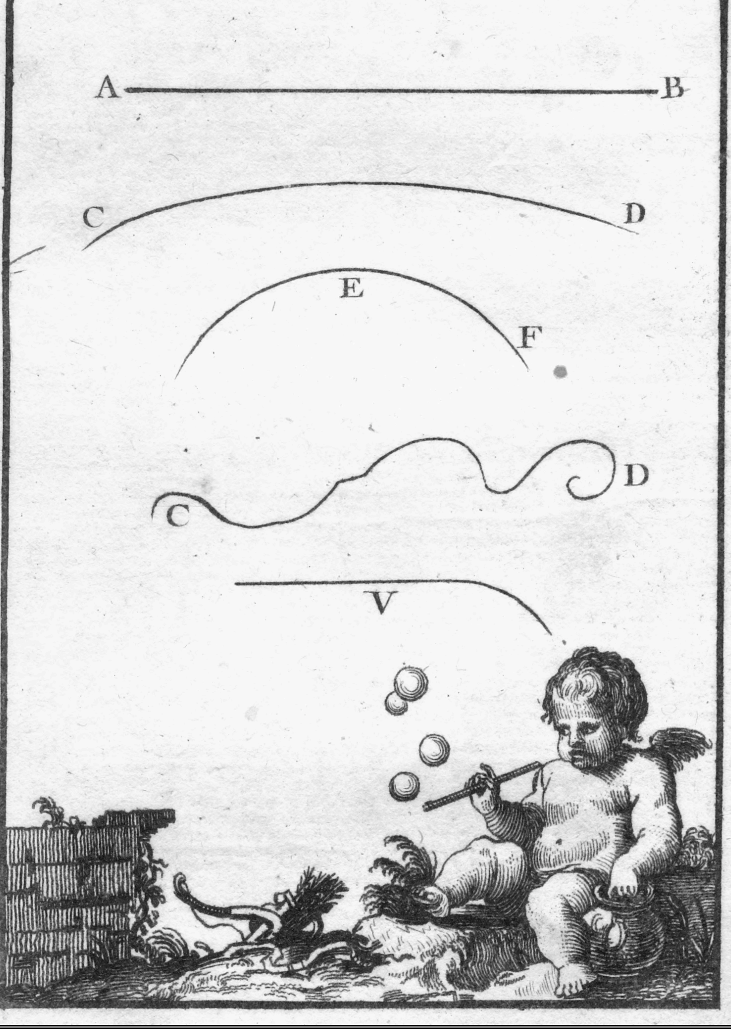
II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-1. – Hériter et inventer

II-2. – Transmettre et s'approprier

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

Planche 2. *Page 9.*



Avant-propos

L'IREM de Basse-Normandie, institué dans l'université de Caen le 23 octobre 1973, cultive par précellence l'histoire des mathématiques. Dès l'origine, plusieurs de ses animateurs, professeurs de lycée, étaient conduits par une intuition : introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques serait de nature à aider les élèves à y retrouver du sens, sens que le formalisme – des "maths modernes", notamment – tendait à dissimuler. Mais la discipline "histoire des sciences" n'était alors guère développée dans les universités. C'est ainsi que commença un colossal travail de recherche fondamentale et appliquée, d'édition de sources, de formation initiale et continue, d'actions interdisciplinaires. Nombreux sont ceux qui y ont contribué ; je veux citer au moins les noms de Jean-Pierre Le Goff, Didier Bessot et Denis Lanier et leur rendre ici un hommage plein d'amitié et d'admiration.

C'est à l'IREM de Basse-Normandie qu'il revint d'organiser le tout premier colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, au château de Tailleville, en mai 1977, puis le X^e^ colloque d'une série devenue bisannuelle, sur le thème *La mémoire des nombres* – c'était à Cherbourg en mai 1994. Entre les deux, l'IREM de Basse-Normandie avait organisé, à l'initiative de l'Association pour le développement des études et recherches en histoire et épistémologie des mathématiques (ADERHEM), un colloque exceptionnel baptisé *Destin de l'art, dessein de la science* (octobre 1986). Enfin le XVIII^e^ colloque inter-IREM, dont vous tenez en main les actes, s'est tenu en mai 2010 au cœur de l'université caennaise, dans l'amphithéâtre Henri Poincaré (qui enseigna deux années à Caen). Le thème retenu, *Circulation – Transmission – Héritage*, invitait à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études ici rassemblées mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Basse-Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

Je remercie les institutions qui ont compris l'intérêt de cette manifestation : le ministère de l'Éducation nationale (via l'assemblée des directeurs d'IREM), la région Basse-Normandie, la ville de Caen, l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (régionale de Basse-Normandie), l'ADERHEM, et notre *alma mater* l'université de Caen Basse-Normandie.

Ce colloque n'aurait pu être organisé sans l'énergie déployée par Geneviève Jean, secrétaire de l'IREM, et par de nombreux animateurs de l'IREM, notamment Guy Juge, Éric Trotoux et Didier Trotoux. Enfin Jean-Pierre Le Goff, Didier Trotoux et Didier Bessot m'ont apporté une aide précieuse dans l'édition de ces actes. Que tous soient très chaleureusement remerciés.

Pierre Ageron
directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Présentation

Auteurs, destinataires et lecteurs d'un texte : histoires de décalages.

Évelyne Barbin,
IREM des Pays de la Loire,
Centre François Viète, Université de Nantes

La plus grande partie d'une œuvre se déroule sous la tyrannie de sa réception.
Christophe Prochasson, « Ce que le lecteur fait de l'œuvre. Héritages et trahisons : la réception des œuvres », *Mill neuf cent*, 12, 1994.

Le Colloque inter-IREM « Histoire des mathématiques : circulation, transmission, héritage » s'inscrit bien dans la visée de « la réception des œuvres » de Hans Robert Jauss, dont Christophe Prochasson indique l'intérêt pour l'historien dans le texte cité en exergue. Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Le cas des manuels, y compris les plus récents, n'échappe pas à cette distinction, que connaît bien l'enseignant : le destinataire du manuel est l'élève de classe de quatrième, mais la lectrice est Vanessa. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » – en utilisant l'expression de Jauss – sont différents. Cet ouvrage propose quelques moments historiques de décalages, petits ou grands, qui nourrissent les héritages, qui sont le fruit des circulations et des transmissions.

Les aspects matériels de la circulation des textes, leurs véhicules, font l'objet de la première partie. L'histoire des mathématiques arabes est intéressante, puisqu'elles sont au carrefour de langues diverses, elles commencent avec des traductions et se perpétuent avec d'autres traductions, dans une sphère culturelle large, comme le montrent Ahmed Djebbar et Pierre Ageron. Avec la transmission des *Éléments* d'Euclide en Arménie, Frédéric Laurent délivre une partie peu connue de l'histoire. L'ouvrage d'Euclide, transmis par les Jésuites en Chine, y connut un sort étrange, puisque les lecteurs orientaux négligèrent les démonstrations qui faisaient le succès des *Éléments* ailleurs. L'exemple du décalage très abrupt de l'attente entre Occidentaux et Chinois est illustré dans cet ouvrage par Isabelle Martinez et Jean-Pierre Le Goff. L'écart plus ténu entre langue savante, le latin, et langue vernaculaire, ici un dialecte italien, est examiné avec précision par Gérard Hamon et Lucette Degryse à propos des *Quesiti* de Nicollo Tartaglia au XVI^e siècle.

Il existe deux types de véhicules adaptés à des destinataires particuliers, ce sont les manuels et les revues mathématiques. Les manuels sont écrits à partir de sources diverses et à destination de commençants, avec le souci d'un rendu intégral des « idées » ou à l'inverse dans celui d'une « adaptation » aux élèves. Du côté des sources, Martine Bühler et Anne Michel-Pajus analysent celles d'un ouvrage d'arithmétique niçois du XVI^e siècle. Du côté des réceptions, Pierre Ageron et Didier Bessot retracent les tribulations d'un manuel de géométrie au XVIII^e siècle. Comme le montrent Anne Boyé et Guillaume Moussard, l'enseignement des vecteurs présente un cas très complexe aux sources multiples – géométriques, algébriques et physiques –, qui a beaucoup changé selon les destinataires à différentes époques.

L'édition des revues scientifiques commence au XVII^e siècle. Les journaux savants sont écrits par des « savants » à destination de leurs confrères, membres d'Académies nationales ou de Sociétés provinciales. La spécialisation de revues aux seules mathématiques au XIX^e siècle est contemporaine de publications pour des publics eux aussi plus spécialisés, qu'ils soient enseignants, amateurs ou bien mathématiciens. La transmission par des revues multiplie le nombre de possibilités de mise en évidence de décalages, en augmentant le nombre des auteurs et en accordant la plume aux lecteurs. Les articles de Jeanne Peiffer, de Christian Gérini et de Norbert Verdier offrent un large panel de périodes et de publics pour diverses revues sur trois siècles.

Les figures mathématiques ne transcendent-t-elles pas les questions de transmission en offrant un langage qui serait universel ? De plus, ne s'agit-il pas d'un langage qui précède l'écriture ? Ces questions trouveront des éléments de réponse dans les articles d'Olivier Keller et de Jean-Pierre Cléro. Prise du point de vue de la réception historique des « textes », la première question recevrait une réponse plutôt relativiste. Un triangle est vu comme une aire par Euclide et comme ses trois côtés par Descartes, il est désigné par des lettres chez les mathématiciens grecs et par des couleurs chez les chinois.

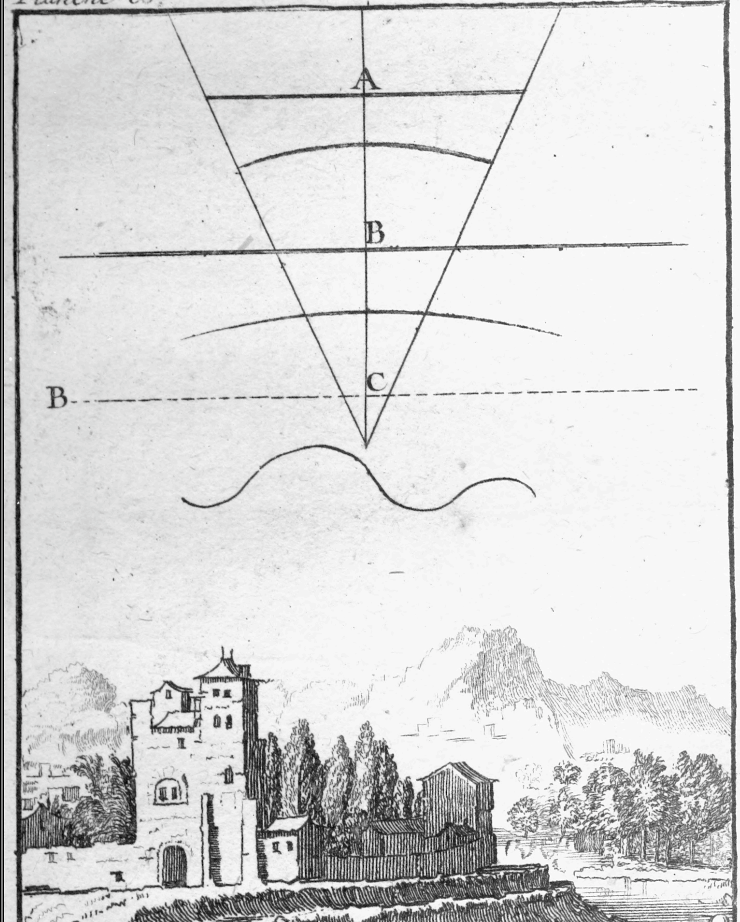
La seconde partie de cet ouvrage retourne à l'auteur d'un texte, mais sans abandonner la perspective du destinataire et du lecteur. En effet, l'auteur est lui-même un lecteur, et donc un texte peut être lu comme un maillon dans un échange dialogique. Car, comme l'explique Mikhaïl Bakhtine, un texte est écrit en réponse à d'autres auteurs de textes et il s'adresse à des lecteurs qui ont une « attitude responsive active ».

Lorsqu'un auteur doit écrire quelque chose qui lui paraît nouveau, c'est-à-dire susceptible d'aller au-delà des conceptions contemporaines, il doit aménager son texte. Autrement dit l'invention pose des problèmes accrus de transmission. C'est ce qu'analysent les articles de Jean-Paul Guichard, de Denis Lanier, Jean Lejeune et Didier Trotoux pour deux inventions mathématiques. L'histoire des mathématiques, qu'elle s'intéresse à des inventions ou des inventeurs, ne peut pas passer outre leurs intérêts sous-jacents, par exemple pour la nomographie présentée par Dominique Tournès. Le renouveau du genre biographique en histoire, indiqué par Gilles Damamme, va de pair avec une histoire des inventeurs dans le contexte intellectuel, social et culturel de leur époque. En suivant les propos de Pierre Ageron, cette perspective peut aussi être prise en compte dans l'écriture de l'histoire.

Le décalage entre un auteur et l'horizon d'attente de ses lecteurs contemporains est au cœur de la partie suivante. Évelyne Barbin explique que les contemporains de Descartes n'ont pas compris sa *Géométrie* de 1637 alors qu'elle semble aller de soi aujourd'hui. Lorsque que Jean Lejeune, Denis Lanier et Didier Trotoux utilisent le terme de précurseur, au dépit de l'histoire, n'est-ce pas pour écrire un grand décalage entre Gavarret et ses lecteurs ? Avec François Plantade et Jean-Pierre Le Goff, sont retracées les réceptions des œuvres de Grassmann et de Salomon de Caus. En vis-à-vis de ces articles, qui invitent à un relativisme constructif des « vérités mathématiques », Maryvonne Menez-Hallez pose la question du « mathématique ».

La dernière partie de l'ouvrage est plus orientée vers la lecture historique des textes. Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff et Didier Trotoux proposent une relecture d'une proposition d'Apollonius à partir de ses éditions et de ses traductions. Alain Bernard lit les *Arithmétiques* de Diophante comme un texte ancré dans différentes traditions antiques. Ainsi que le remarque Christophe Prochasson, « la tradition n'est pas un processus autonome de transmission », elle est au contraire un mécanisme de réappropriation du passé.

La thématique du colloque croise les questions d'enseignement et elle a vivement intéressé ceux qui dans les IREM associent l'histoire des mathématiques à son enseignement. Le riche sommaire de cet ouvrage en est le témoin.


A
B
B
C

Section I

Les véhicules de la circulation mathématique

1. – La langue : traduire et faire comprendre

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII^{e} colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

I-1-C.
Pages 51-70

Un essai de synthèse entre le théorème de Pythagore et la procédure *gou-gu*

Isabelle Martinez-Labrousse

Un essai de synthèse entre le théorème de Pythagore et la procédure *gou-gu*

Isabelle Martinez-Labrousse,
IREM de Lille & lycée de l'Escaut à Valenciennes,
imartinez59@neuf.fr

Aussi bien la tradition grecque euclidienne que la tradition mathématique chinoise ont traité des relations entre les carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle. Par l'analyse des textes originaux relatifs à cette question, nous allons tenter de dégager quelques principes fondamentaux propres à chacune de ces traditions mathématiques. Nous évoquerons ensuite le point de vue des premiers traducteurs des *Éléments* d'Euclide en chinois (Matteo Ricci et Xu Guangqi), puis la réaction du lettré Du Zhigeng qui a cherché à "simplifier" cette traduction.

1. – Les *Éléments* d'Euclide

On ne possède pas d'informations précises sur la vie d'Euclide. Il naquit vers 325 avant J.-C. et mourut vers 265 avant J.-C. Il pourrait avoir étudié à Athènes à l'école des successeurs de Platon, puis s'être établi à Alexandrie sur l'invitation de Ptolémée II.

Les *Éléments* d'Euclide, œuvre monumentale en treize livres, ont eu un retentissement considérable et ont marqué toutes les générations de mathématiciens jusqu'à nos jours : c'est une synthèse des mathématiques grecques connues à son époque auxquelles Euclide apporte compléments, démonstrations et rigueur. Les *Éléments* portent essentiellement sur la géométrie et sur l'arithmétique. La présence d'une certaine forme d'algèbre est controversée. Le titre de l'ouvrage, *Éléments,* indique bien la démarche de l'auteur : il s'agit de décomposer et d'organiser des résultats fondamentaux par une démarche hypothético-déductive. Le premier livre porte sur la géométrie plane et contient en particulier des constructions fondamentales et des propositions sur les égalités des triangles et des parallélogrammes. Il débute par des définitions (35), des demandes (6) et des notions communes (9), puis viennent les 48 propositions de ce premier livre. Euclide distingue deux sortes de propositions (les unes et les autres justifiées par des démonstrations) : des constructions et des théorèmes.

Le théorème de Pythagore (ainsi que nous le nommons de nos jours, mais qui fut nommé “théorème de l’hypoténuse” par les premiers commentateurs d’Euclide), apparaît à la fin du premier livre : c’est exactement la proposition I. 47. Sa réciproque fait l’objet de la proposition I. 48, qui clôt le premier livre.

La lecture de la proposition I. 47 (voir annexe 1) suggère quelques remarques :

• Nous n’y trouvons pas l’expression aujourd’hui habituelle du théorème de Pythagore : « dans un triangle rectangle, le carré de l’hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés ». Un tel énoncé où les « carrés » sont des nombres n’est pas du tout dans l’esprit des mathématiques grecques. Dans la proposition I. 47, c’est bien de géométrie qu’il s’agit : l’énoncé porte sur des grandeurs et non pas sur des nombres.

• Dans la démonstration, l’auteur part des hypothèses pour atteindre les conclusions ; tout le travail de recherche antérieur n’est pas explicité. Son objectif est de produire un discours logique et rigoureux qui vise à convaincre.

• Dans la proposition, plusieurs parties articulent deux niveaux de discours : l’un, universel, est celui de l’énoncé et de la conclusion générale, l’autre renvoie au diagramme et au lettrage.

• Le texte de la proposition I. 47 fait explicitement référence à neuf items : une définition, deux demandes, une notion commune et cinq propositions. Mais si, en remontant la chaîne déductive, nous devions citer tous les éléments qui constituent ces résultats ou principes utiles à la démonstration de cette proposition I. 47, il y aurait alors : les définitions 10, 15, 22, 23, les cinq demandes, les notions communes 1 à 9, et les propositions 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 26, 27, 29, 30, 31, 34, 35, 37, 41, 46, soit plus de la moitié du premier livre !

2. – Le “théorème de Pythagore” dans la Chine ancienne

Nous allons ici nous intéresser à deux livres de la Chine ancienne :

Le Gnomon des Zhou ou *Zhoubi* (Ier siècle avant ou après notre ère) et tout particulièrement le commentaire qu’en a donné Zhao Shuang (IIIe siècle de notre ère) ;

Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques ou *Jiuzhang suanshu* (Ier siècle avant ou après notre ère) avec le commentaire de Liu Hui (263).

Ces deux manuels (qui datent de la dynastie des Han) font partie des *Dix classiques de calcul*, une collection compilée sous les Tang (vers 650) en vue des examens impériaux de mathématiques.

Dans *le Gnomon des Zhou (Zhoubi).*

Le *Gnomon des Zhou* est un classique d'astronomie calendérique et de cosmographie. Il est important pour l'histoire de l'astronomie chinoise, car c'est dans ce traité que, pour la première fois en Chine, on rencontre des spéculations cosmologiques sur la dimension de l'univers basés sur des observations et des calculs et non plus sur des mythes. Pour ce qui est des mathématiques, les auteurs chinois citent ce livre pour deux raisons principales :
– il contient la « figure de l'hypoténuse » (figure qui fournit une preuve visuelle et sans paroles du théorème de Pythagore) ;
– l'un des commentaires ajoutés par Zhao Shuang au III^e^ siècle (reproduit dans l'annexe 2) contient une liste de quinze "formules" destinées à résoudre des problèmes liés aux triangles rectangles.
Proposons quelques remarques sur ce commentaire de Zhao Shuang :

• D'abord il n'y a aucun recours à l'algèbre symbolique. En particulier des formulations qui peuvent sembler redondantes du point de vue de l'algèbre parce qu'elles reviennent à dire $a^2 + b^2 = c^2$, puis $\sqrt{a^2+b^2} = c$ ou encore $\sqrt{c^2-a^2} = b$ ne le sont pas. La variété des expressions cherche ici à fournir le maximum d'outils pour traiter des problèmes : obtenir c^2 ou c connaissant a^2 et b^2, obtenir b connaissant c^2 et a^2, etc.

• Ces expressions sont souvent obtenues après l'observation de figures géométriques, qui peuvent contenir des éléments colorés – tout particulièrement la première figure fondamentale dite "de l'hypoténuse" et la deuxième figure fondamentale qui fait intervenir un gnomon[1]. La simple observation des figures semble suffire pour justifier les expressions.

• S'il fait mention d'opérations algébriques (somme, soustraction, multiplication, division, extraction de racine carrée) opérant sur des nombres, ce texte, finalement assez abstrait, n'indique nulle part de valeurs numériques.

Dans *Les neuf chapitres sur l'art du calcul* (*Jiuzhang suanshu*).

Les neuf chapitres sur l'art mathématique sont l'un des dix classiques chinois. Il est le fruit d'une compilation et on n'en connaît pas les auteurs. Il date de la dynastie des Han (206 av. J.-C. - 220 ap. J.-C.), époque de l'établissement d'un système bureaucratique impérial. Ce livre, dont le niveau était bien plus élevé que celui de nombreux ouvrages postérieurs, fut toujours considéré comme un ouvrage de référence et son influence fut grande : il est à l'origine non seulement de la tradition mathématique chinoise, mais aussi de celles de la

---

1 Un *gnomon* est une figure obtenue en supprimant d'un carré un carré plus petit placé dans un coin (on obtient alors une certaine forme d'équerre).

Corée, du Japon et du Vietnam. Notons que Zhao Shuang, le commentateur du *Gnomon de Zhou*, connaissait *Les neuf chapitres*. Ceux-ci contiennent 246 problèmes répartis en neuf chapitres. Nous nous intéresserons plus particulièrement au chapitre 9, intitulé « base-hauteur » (*gou-gu*) : il traite entre autres de « la procédure de la base et de la hauteur », c'est-à-dire de notre « théorème de Pythagore ». Le début de ce chapitre 9, avec le commentaire du célèbre commentateur Liu Hui rédigé en 263, est donné dans l'annexe 3.

Quelques observations :

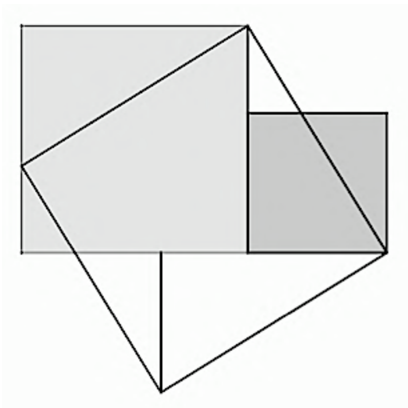
• Comme dans le texte précédent, il n'y a pas de calcul algébrique, ni d'expressions littérales.

• Il est fait mention d'une figure, mais elle n'est pas donnée dans le texte. On pense que les Chinois de l'époque travaillaient avec une "surface à calculer" ; peut-être aussi avaient-ils des pièces (colorées) de puzzle pour expliquer le texte.

• Les problèmes ont une présentation bien particulière : chacun d'eux est énoncé, puis la solution est donnée, et enfin le texte détaille, pour un problème spécifique ou pour toute une classe de problèmes, la procédure permettant d'obtenir le résultat.

• Les énoncés portent ici sur des valeurs numériques (nombres génériques) et les problèmes semblent plus concrets que dans les textes précédents. Il est fait mention en particulier d'unités de longueur.

• On reconnaît dans l'énoncé de la procédure de la base et de la hauteur exactement le texte issu du *Gnomon des Zhou* : « Base et hauteur étant chacune multipliée par elle-même, on somme (les résultats) » – ce qui fait le carré de l'hypoténuse –, puis « on divise ceci par extraction de la racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse ». Et pourtant Liu Hui propose une justification à partir d'une figure tout autre que la première figure fondamentale. On peut la reconstituer ainsi (celle de Liu Hui ne nous est pas parvenue puisqu'il n'y a aucune figure dans le texte) :



Ici il ne s'agit plus seulement de contempler une figure géométrique : il faut découper des pièces (le carré vermillon de côté la base et le carré bleu-vert de côté la hauteur) et les réassembler pour former un nouveau carré, de côté l'hypoténuse. On peut considérer qu'il n'y a que trois triangles à déplacer ; d'ailleurs Liu Hui indique bien : « sur la base du fait que l'on garde ceux (les parties, les morceaux) qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de côté l'hypoténuse. »

Après des énoncés relativement abstraits, le chapitre 9 se poursuit avec des problèmes dont les énoncés sont plus concrets. C'est le cas du problème 9. 6 que nous reproduisons en annexe 4. Nous pouvons faire à son sujet les remarques suivantes :

• Nous y retrouvons les caractéristiques déjà évoquées des textes de la Chine ancienne : pas de symbolisme, pas d'équations, et plus généralement pas d'expressions algébriques, le recours à une figure géométrique et plus particulièrement, comme dans les premiers problèmes du chapitre 9, l'emploi de valeurs numériques (mesures de longueur).

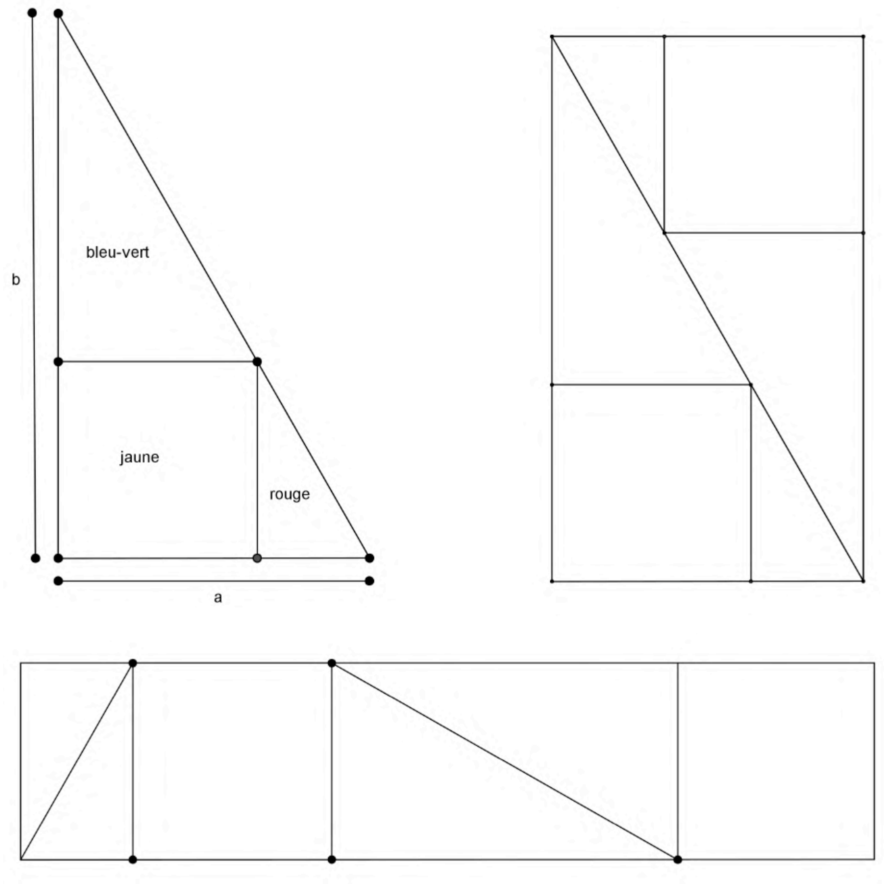
• Dans ce texte, l'aspect concret apparaît bien plus présent que dans le précédent, mais s'agit-il vraiment de rechercher la profondeur d'un lac ou d'un problème que l'on pourrait qualifier d'anecdotique ou de faussement concret ?

• Tout au long du chapitre 9 sont proposés divers problèmes, diverses situations concrètes (porte à un battant, à deux battants, ville carrée...), mais aussi des recherches de longueurs (côté du carré inscrit ou rayon d'un cercle inscrit dans un triangle rectangle par exemple) dont les solutions sont déterminées par des méthodes astucieuses et élégantes. Il y est fait mention de la procédure de la base et de la hauteur (décrite et justifiée au début du chapitre 9) ou d'autres méthodes qui s'apparentent au texte du *Gnomon des Zhou*.

• En lisant le texte et les commentaires de Liu Hui, on perçoit mieux ici que le texte donne une méthode (procédure) de type algorithmique qui permet d'aboutir à la solution. Les commentaires sont là pour expliciter, mais surtout pour justifier le résultat obtenu par l'emploi d'une figure sous-jacente et par des manipulations de pièces (manipulations qui peuvent aussi s'effectuer par la pensée…)

En annexe 5 est reproduit le problème 9. 14, où il s'agit de déterminer le côté x du carré inscrit dans un triangle rectangle dont on connait la base a et la hauteur b. La première partie du commentaire de Liu Hui sur ce problème suggère une figure (formée de pièces en couleur) et des manipulations sur des éléments que l'on peut imaginer comme sur les figures de la page suivante. On double d'abord le triangle représenté à gauche, obtenant le rectangle de droite, que l'on transforme ensuite en un rectangle de largeur le côté du carré cherché. On a bien $x \times (a + b) = a \times b$, d'où la valeur de x en divisant ab par $a + b$.

La seconde partie du commentaire de Liu Hui correspond à une autre démonstration qui met en œuvre des triangles semblables et finalement l'emploi d'une règle de trois.



3. – Les *Éléments* d'Euclide en Chine

Ce coup d'œil sur les manuels fondateurs des deux traditions, la grecque et la chinoise, a révélé de grandes différences de rédaction et de méthodes : le discours hypothético-déductif d'Euclide, lourd et rigoureux, est bien éloigné des énoncés courts de la tradition chinoise et du peu d'explications qui les accompagne (au moins si l'on ignore les commentaires postérieurs, comme ceux de Zhao Shuang ou de Liu Hui). Le rôle des figures géométriques est aussi bien différent : indispensables comme support visuel statique pour la compréhension des démonstrations euclidiennes, elles ressemblent dans la tradition chinoise à des pièces de puzzles colorées auxquelles il est fait référence sans qu'elles soient toujours reproduites dans le texte et que le lecteur est invité à déplacer ; parfois la contemplation seule de telle ou telle figure (comme celle de l'hypoténuse) suffit en elle-même pour justifier un résultat. Une autre différence fondamentale est relative à l'emploi de nombres : on ne trouve pas de nombres dans la géométrie d'Euclide, mais un travail sur les grandeurs, alors qu'en mathématiques chinoises, on cherche à calculer des quantités sans s'intéresser aux problèmes d'existence. On comprend alors à quel point les traducteurs des premiers livres des *Éléments* d'Euclide durent innover pour résoudre ces difficultés d'adaptation.

À la fin du XVIe siècle, les premiers missionnaires jésuites arrivèrent en Chine ; leur objectif était d'évangéliser l'Empire du milieu. Pour cela, après de nombreuses difficultés, ils décidèrent de s'adresser en priorité aux lettrés, dans l'espoir d'atteindre ainsi l'empereur et de le convertir. Ils développèrent ces contacts en mettant l'accent sur les connaissances scientifiques de l'Occident et les nouveautés qu'ils pouvaient offrir aux Chinois, notamment des instruments scientifiques : horloges, cadrans solaires, globes terrestres… Parmi les ouvrages religieux et scientifiques qui furent alors traduits en chinois, on trouve le *Jihe yuanben* : il s'agit de la traduction des six premiers livres des *Éléments* d'Euclide, réalisée par Matteo Ricci[2] et Xu Guangqi[3] à partir de la version latine de Clavius[4]. Elle fut publiée en 1607 après trois années de travail intensif. Les mêmes traduisirent aussi, en l'adaptant, une partie de la *Geometria practica* de Clavius, publiée sous le titre *Celiang fayi* en 1608.

Le projet de Xu Guangqi, traducteur et éditeur d'une large collection de traductions, était d'intégrer les nouvelles connaissances dans la tradition chinoise ; c'est ce qu'il nomme *huitong* : comprendre et intégrer. Son intérêt pour l'arpentage, les problèmes d'irrigation ou de transports était antérieur à sa rencontre avec Ricci, mais la découverte des méthodes occidentales le poussa à comparer les méthodes exposées dans le *Celiang fayi* avec les méthodes issues de la tradition chinoise. Cela apparaît en particulier dans ses *Celiang yitong* (ou *Ressemblances et différences [entre l'Est et l'Ouest] en arpentage*, 1608) et dans un second travail, *Gougu yi* ou *Le principe du gougu*. C'est un traité sur le triangle rectangle, rédigé en 1610 et imprimé en 1617, qui comprend 15 problèmes. Xu essaie dans ce manuel d'expliciter quelques-uns des algorithmes de la tradition mathématique chinoise à l'aide de propositions tirées du *Jihe yuanben*. L'annexe 6 reproduit le problème 4 du *Gougu yi :* il s'agit de déterminer le côté

---

2 Matteo Ricci (Macerata, 1552 – Pékin, 1610), jésuite, fut un des premiers missionnaires en Chine. Très cultivé, il s'est fait apprécier des Chinois, en particulier par son *Traité de l'amitié* imprimé à Nankin en 1595. Il établit aussi le premier dictionnaire de chinois dans une langue occidentale (le portugais).

3 Xu Guangqi (Shangai, 1562 – Pékin, 1633) était un fonctionnaire lettré converti au catholicisme par Matteo Ricci.

4 Christophe Clavius (Bamberg, 1538 – Rome, 1612), jésuite et mathématicien, fut le professeur de Ricci à Rome.

du carré inscrit dans un triangle rectangle dont les deux côtés adjacents à l'angle droit sont donnés.

Ce problème est tout à fait similaire au problème 9.14 du livre *Les neuf chapitres sur l'art mathématique* (cf. annexe 5). Dans l'algorithme de résolution qui est proposé, il n'est pas question de construction géométrique, mais Xu fait comme si c'était le cas : il exprime la suite des opérations arithmétiques en termes de constructions géométriques et fait référence (comme dans un texte d'Euclide) à des propositions (citées dans le *Jihe yuanben*). Il semble que Xu ait eu connaissance du problème 9. 14, mais pas des commentaires de Liu Hui. C'est pourquoi, conscient de la richesse des mathématiques traditionnelles chinoises, il cherche à les justifier grâce à de nouveaux arguments pour rendre ainsi les algorithmes aussi clairs que possible. Xu Guangqi fut un fervent défenseur des méthodes occidentales tout en leur reconnaissant la difficulté de se les approprier. Dans sa préface au *Jihe yuanben,* il écrivit :

> Ce livre contient quatre interdits : interdit de douter, interdit de se livrer à des supputations, interdit d'abréger, interdit de modifier ; il contient aussi quatre impossibilités : impossible d'y ôter quoi que ce soit, impossible de le réfuter, impossible d'y retrancher quoi que ce soit, impossible de mettre avant ce qui vient après et réciproquement. [traduction de J.-C. Martzloff].

Ce dogmatisme ne fut pas toujours bien perçu… Certains auteurs chinois cherchèrent à minimiser l'impact des premières traductions des mathématiques occidentales : un argument typique que les traditionalistes mettaient en avant pour minimiser et rendre impopulaire les contributions des jésuites était l'affirmation que toutes les idées et technologies occidentales apportées en Chine par les jésuites avaient leurs origines en Chine même. D'autres critiques portèrent sur la lourdeur du discours euclidien. Ainsi Du Zhigeng qui écrivait vers 1700 :

> le chemin est tortueux, le texte archaïque, obscur et difficile… Que rares sont les personnes qui utilisent ce livre.

Ce même Du Zhigeng composa une édition simplifiée des *Éléments* sous le titre *Jihe lunyue* (*Abrégé des Démonstrations géométriques*), dont nous reproduisons la préface dans l'annexe 8. Son idée était d'abréger le texte des *Éléments* en le débarrassant de sa "rhétorique" hypothético-déductive de façon à offrir aux apprentis mathématiciens un ensemble de procédés géométriques simples et efficaces, conformément aux idéaux du mouvement de promotion des "sciences concrètes", dites *shixue*, si importantes dans la Chine des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. Il respecta la structure d'ensemble du *Jihe yuanben* en ce sens qu'il en conserva l'ordre et l'enchaînement originel des définitions, problèmes et théorèmes, corollaires et scholies. Il conserva aussi les nombreux néologismes forgés par Ricci et Xu Guangqi, procédant seulement à une abréviation sensible du texte initial, par le moyen de lourdes coupures plutôt qu'en réécrivant l'ensemble de manière abrégée. Ces coupures présentent fréquemment un caractère radical puisqu'elles affectent irrémédiablement la totalité du "discours" démonstratif qui accompagne une proposition donnée.[5]

Lors de l'arrivée des premiers jésuites en Chine, à la fin du XVI[e] siècle, la rencontre entre deux traditions mathématiques eut donc bien lieu, mais les difficultés furent grandes pour que cet échange puisse aboutir à une réelle intégration des méthodes occidentales dans la pratique mathématique chinoise. Les réserves ou les oppositions de certains lettrés chinois ne permirent qu'une transmission imparfaite : ils cherchèrent à adapter les nouvelles méthodes en allégeant le texte, et donc en perdant ce qui fait la spécificité du discours hypothético-déductif euclidien.

Annexes

Annexe 1
Le "théorème de l'hypoténuse" dans le livre I des *Éléments* d'Euclide[6]

Proposition I. 47 : *Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.*

Soit le triangle rectangle ABC ayant l'angle sous BAC droit. Je dis que le carré sur BC est égal aux carrés sur BA, AC.

En effet d'une part que le carré BDEC soit décrit sur BC, d'autre part les carrés GB, HC sur BA, AC (Prop. 46) et que par le point A, soit menée AL, parallèle à l'une quelconque des BD, CE (Prop. 31). Et que AD, FC soient jointes (Dem. 1). Puisque chacun des angles sous BAC, BAG est droit, alors relativement à une certaine droite : BA, et en un point qui est sur elle : A, les deux droites AC, AG, non placées du même côté, font des angles adjacents égaux à deux droits. Donc CA est en alignement avec AG (Prop. 14). Alors pour la même raison BA est aussi en alignement avec AH.

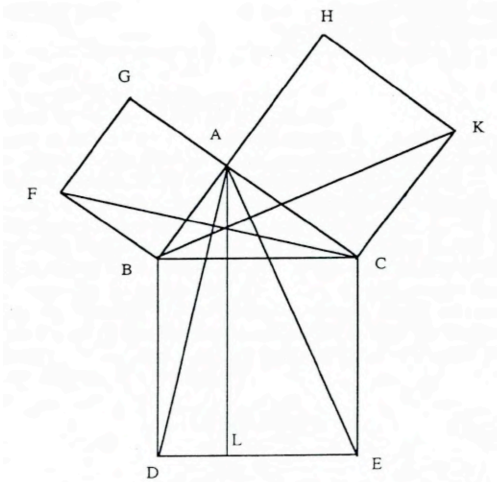
Et puisque l'angle sous DBC est égal à celui sous FBA car chacun est droit (Dem. 4), que celui sous ABC soit ajouté de part et d'autre : celui sous DBA tout entier est donc égal à celui sous FBC entier (N.C. 2).

Et puisque, d'une part DB est égale à BC, d'autre part FB à BA, alors les deux DB, BA sont égales aux deux FB, BC, chacune à chacune et l'angle sous DBA est égal à celui sous FBC. La base AD est donc égale à la base FC, et le triangle ABD égal au triangle FBC (Prop. 4). Et le parallélogramme BL est double du triangle ABD, car ils ont la même base BD, et sont dans les mêmes parallèles : BD, AL (Prop. 41).

---

5 Sur Du Zhigeng, voir [M, 1993].

6 Traduction de Bernard Vitrac dans : Euclide, *Les Éléments*, vol. 1, Paris : PUF, 1990, p. 282-284.



D'autre part le carré GB est double du triangle FBC, car, de nouveau, ils ont la même base FB, et sont dans les mêmes parallèles : FB, GC. Or les doubles de choses égales sont égaux entre eux. Donc le parallélogramme BL est égal au carré GB (N.C. 1). Alors semblablement, AE et BK étant jointes, il sera démontré aussi que le parallélogramme CL est égal au carré HC. Donc le carré BDEC tout entier est égal aux deux carrés GB, HC, et d'une part BDEC est le carré qui a été décrit sur BC, d'autre part GB et HC sont les carrés sur BA, AC. Donc le carré sur le côté BC est égal aux carrés sur les côtés BA, AC.

Donc, dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit. Ce qu'il fallait démontrer.

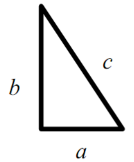
Annexe 2
Figures de la base et de la hauteur, du carré et du cercle
Commentaire de Zhao Shuang sur le *Gnomon des Zhou*[7]

> Base et hauteur étant chacune multipliée par elle-même, sommer ceux-ci (les résultats) fait le carré de l'hypoténuse. On divise ceci par extraction de la racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse.

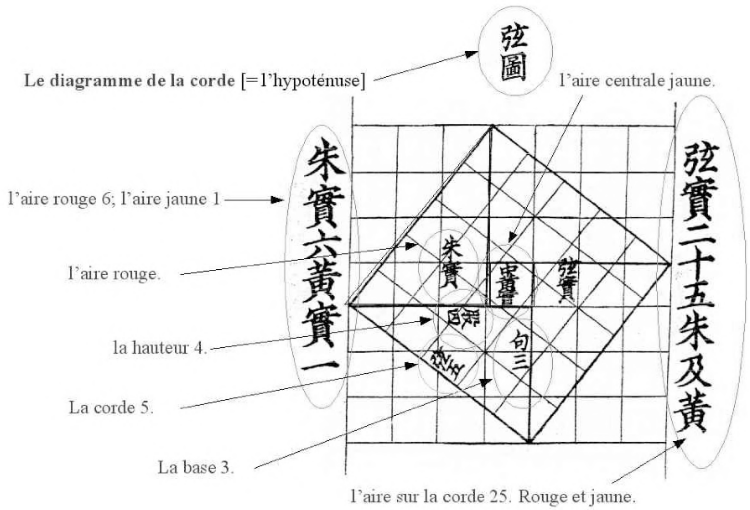
Dans un triangle rectangle, notons a le petit côté ou base (*gou*), b la hauteur (*gu*) et c l'hypoténuse (*xian*). On peut reconnaître dans ce qui précède un algorithme qui ressemble beaucoup à “notre” théorème de Pythagore : calcul de $a^2 + b^2 = c^2$, puis de $\sqrt{a^2 + b^2} = c$.

---

[7] Traduction de Karine Chemla dans *les Neuf chapitres,* p. 698-700. J'insère dans le texte mes propres commentaires. En particulier, même s'il n'est jamais question de calcul littéral dans le texte chinois, je traduirai par commodité les expressions décrites dans le texte par des égalités algébriques.



Sur la base de la figure de l'hypoténuse, on peut en outre considérer la multiplication l'une par l'autre de la base et de la hauteur comme 2 exemplaires d'aire vermillon. En doublant ceci, cela fait 4 exemplaires d'aire vermillon. On prend la multiplication par elle-même de la différence entre base et hauteur comme l'aire jaune centrale. En ajoutant (au résultat précédent) un exemplaire du carré de la différence, on engendre également le carré de l'hypoténuse.



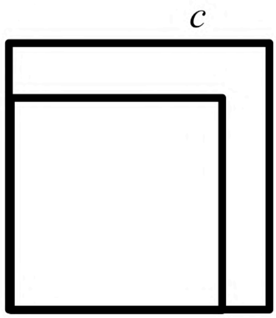
La relation ainsi obtenue est cette fois : $2ab + (b - a)^2 = c^2$. La figure reproduite ci-dessus accompagne le texte ; c'est la figure dite de l'hypoténuse.

Si l'on soustrait le carré de la différence du carré de l'hypoténuse et qu'on prend la moitié de son reste, qu'on prend la différence comme « diviseur rejoint » et qu'on divise par extraction de la racine carrée, on obtient à nouveau la base. En ajoutant la différence à la base, cela donne la hauteur.

On peut interpréter ce qui précède comme la résolution de l'équation du second degré $\frac{1}{2}(c^2 - (b - a)^2) = X^2 + (b - a)X$ qui a pour solution la base a. En ajoutant $(b - a)$ à la solution a, on trouve la hauteur b.

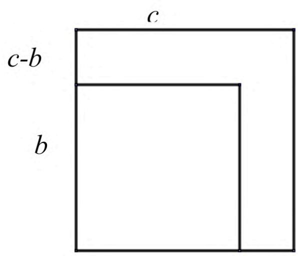
Chaque fois que l'on somme les carrés/aires de la base et de la hauteur, alors ils engendrent le carré de l'hypoténuse. Soit elles (les aires a^2 et b^2) forment un carré à l'intérieur, soit elles forment un gnomon à l'extérieur : les formes en sont différentes, mais les mesures sont égales, les corps sont distincts, mais les valeurs identiques.

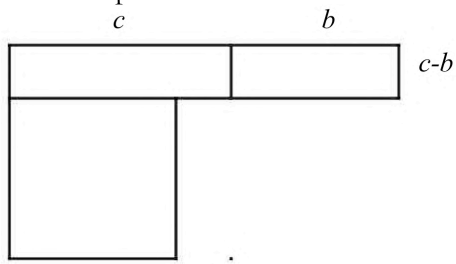
Ici il s'agit de la deuxième figure fondamentale, qui fait intervenir un gnomon, un carré étant dessiné à l'intérieur du carré de côté c : si l'aire du carré intérieur est a^2, l'aire du gnomon est b^2 et inversement.



> Le gnomon du carré de la base a pour largeur la différence entre l'hypoténuse et la hauteur et pour longueur la somme entre l'hypoténuse et la hauteur, et le carré de la hauteur forme un carré en son intérieur. Si l'on soustrait le carré[8] de la base qui correspond également à une aire, comme gnomon, du carré de l'hypoténuse, en extrayant la racine de son reste, cela donne la hauteur.

On peut imaginer les figures suivantes pour illustrer ce texte :





On trouve ainsi les expressions $a^2 = (c - b)(c + b)$ et $\sqrt{c^2 - a^2} = b$.

> On double la hauteur, qui se trouve des deux côtés, ce qui fait le « diviseur rejoint ». En extrayant la racine du « coin de la base comme gnomon », cela donne la différence entre hypoténuse et hauteur. En ajoutant la hauteur, cela donne l'hypoténuse.

On résout ici l'équation du second degré $X^2 + 2bX = c^2 - b^2$. Elle a pour solution $c - b$. Ensuite, on fait la somme $(c - b) + b$.

En divisant le carré de la base par la différence, on obtient la somme de la hauteur et de l'hypoténuse. En divisant le carré de la base par la somme, on obtient également la différence de la hauteur et de l'hypoténuse.

---

8 Je modifie ici très légèrement la traduction de Karine Chemla pour simplifier le texte.

On fait donc le calcul suivant : $\dfrac{a^2}{c-b} = c + b$ ou $\dfrac{a^2}{c+b} = c - b$.

En effectuant la multiplication de la somme (de la hauteur et de l'hypoténuse) par elle-même, avec le carré de la base, cela fait un dividende, et si l'on prend le double de la somme comme diviseur, ce qu'on obtient est également l'hypoténuse. En soustrayant le carré de la base de la multiplication de la somme (de la hauteur et de l'hypoténuse) par elle-même, et en divisant par le diviseur, cela fait la hauteur. [...]

On double la base, qui se trouve des deux côtés, ce qui fait le « diviseur rejoint ». En extrayant la racine du « coin de la hauteur comme gnomon », cela donne la différence entre hypoténuse et base. En ajoutant la base, cela donne l'hypoténuse.

En divisant le carré de la hauteur par la différence, on obtient la somme de la base et de l'hypoténuse. En divisant le carré de la hauteur par la somme, on obtient également la différence de la base et de l'hypoténuse.
En effectuant la multiplication de la somme (de la base et de l'hypoténuse) par elle-même, avec le carré de la hauteur, cela fait un dividende, et si l'on prend le double de la somme comme diviseur, ce qu'on obtient est également l'hypoténuse. En soustrayant le carré de la hauteur de la multiplication de la somme (de la base et de l'hypoténuse) par elle-même, et en divisant par le diviseur, cela fait la base.

En multipliant l'une par l'autre les deux différences, en doublant et en extrayant la racine de ceci, ce qu'on obtient, en l'augmentant de la différence entre l'hypoténuse et la hauteur, cela fait la base ; en l'augmentant de la différence entre l'hypoténuse et la base, cela fait la hauteur, et en l'augmentant des deux différences, cela fait l'hypoténuse.

Si, en doublant le carré de l'hypoténuse et en en soustrayant le carré de la différence entre la hauteur et la base, il apparaît le carré de la somme, c'est que, en examinant ceci à l'aide de la figure, le double du carré de l'hypoténuse remplit le grand carré extérieur et il y a en trop l'aire jaune. Cette aire jaune qui est en trop, c'est le carré de la différence entre base et hauteur. Si donc on soustrait de ceci le carré de la différence et qu'on extrait la racine de son reste, on obtient le côté du grand carré extérieur. Le côté du grand carré, c'est la somme de la base et de la hauteur.

Si on effectue la multiplication de la somme par elle-même et qu'on la soustrait alors du double du carré de l'hypoténuse, qu'on extrait la racine de son reste, on obtient le côté du carré jaune central. Le côté du carré jaune, c'est la différence entre la base et de la hauteur. En soustrayant la différence de la somme et en prenant la moitié de ceci, cela fait la base. En ajoutant la différence à la somme et en prenant la moitié de ceci, cela fait la hauteur.

Si le double de l'hypoténuse est pris comme réunion de la largeur et de la longueur et si l'on fait en sorte que celle de la base ou de la hauteur qui apparaît soit multipliée par elle-même pour faire l'aire correspondante (au rectangle que font longueur et largeur), si quatre exemplaires de l'aire sont soustraits de ceci (i.e. : l'aire du carré de côté le double de l'hypoténuse), en extrayant la racine de son reste, ce qu'on obtient fait la différence (de la largeur et de la longueur). En soustrayant la différence de la somme et en prenant la moitié de son reste, cela fait la largeur. En soustrayant la largeur de l'hypoténuse, cela donne ce qu'on cherchait.

Annexe 3
début du chapitre 9 du livre *Les neuf chapitres*
base (*gou*) et hauteur (*gu*) pour traiter le haut et le profond, le large et le lointain [9]

(9.1)
SUPPOSONS QUE LA BASE SOIT DE 3 *CHI*[10] ET LA HAUTEUR DE 4 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT L'HYPOTÉNUSE.
RÉPONSE : 5 *CHI*.
(9.2)
SUPPOSONS QUE L'HYPOTÉNUSE SOIT DE 5 *CHI* ET LA BASE DE 3 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LA HAUTEUR .
RÉPONSE : 4 *CHI*.
(9.3)
SUPPOSONS QUE LA HAUTEUR SOIT DE 4 *CHI* ET L'HYPOTÉNUSE DE 5 *CHI*. ON DEMANDE COMBIEN FAIT LA BASE .
RÉPONSE : 3 *CHI*.

PROCÉDURE DE LA BASE ET DE LA HAUTEUR :

Le côté le plus court est appelé « base » ; le côté plus long est appelé « hauteur » ; ce qui lie les coins l'un à l'autre est appelé « hypoténuse ». La base est plus courte que la hauteur qui lui correspond, la hauteur est plus courte que l'hypoténuse qui lui correspond. On s'apprête à les utiliser pour les appliquer à toutes les procédures, c'est pourquoi on expose d'entrée de jeu cette procédure pour en faire apparaître l'origine.

BASE ET HAUTEUR ÉTANT CHACUNE MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME, ON SOMME (LES RÉSULTATS) ET ON DIVISE CECI PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, CE QUI DONNE L'HYPOTÉNUSE.

La base multipliée par elle-même fait un carré vermillon, la hauteur multipliée par elle-même un carré bleu-vert, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui entre se compensent l'un l'autre, que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, sur la base du fait que l'on garde ceux (les parties, les

---

[9] Dans ce texte et les deux suivants, la traduction est celle de Karine Chemla et Guo Shuchun (voir bibliographie). Nous en avons supprimé les transcriptions en *pinyin,* sauf dans le titre. Le texte d'origine est donné en petites majuscules, le commentaire de Liu Hui est en minuscules.

[10] *chi* : unité de longueur équivalent à environ 23 ou 24 cm.

morceaux) qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de côté l'hypoténuse. « En divisant ceci par extraction de la racine carrée, cela donne l'hypoténuse. »

AUTREMENT, LA HAUTEUR ÉTANT MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME, ON SOUSTRAIT CECI DE L'HYPOTÉNUSE MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME. ON DIVISE CE QUI RESTE PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, CE QUI DONNE LA BASE.

AUTREMENT, LA BASE ÉTANT MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME, ON SOUSTRAIT CECI DE L'HYPOTÉNUSE MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME. ON DIVISE CE QUI RESTE PAR EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE, CE QUI DONNE LA HAUTEUR.

Puisqu'en réunissant les aires de la base et de la hauteur, on engendre l'aire de l'hypoténuse, à supposer qu'on en élimine l'une d'entre elles, alors on peut savoir, dans tous les cas, ce en quoi consiste le reste.

Annexe 4
Le problème 9. 6. des *Neuf chapitres*

SUPPOSONS QUE L'ON AIT UN ÉTANG CARRÉ DE 1 *ZHANG*[11] DE CÔTÉ, AU CENTRE DUQUEL POUSSE UN ROSEAU QUI DÉPASSE DE 1 *CHI* [LE NIVEAU] DE L'EAU. QUAND ON TIRE LE ROSEAU VERS LA RIVE, IL ARRIVE JUSTE AU BORD. ON DEMANDE COMBIEN VALENT RESPECTIVEMENT LA PROFONDEUR DE L'EAU ET LA LONGUEUR DU ROSEAU.

RÉPONSE : LA PROFONDEUR DE L'EAU VAUT 1 *ZHANG* 2 *CHI ;*
LA LONGUEUR DU ROSEAU 1 *ZHANG* 3 *CHI*.

PROCÉDURE : LA MOITIÉ DU CÔTÉ DE L'ÉTANG CARRÉ ÉTANT MULTIPLIÉE PAR ELLE-MÊME,

Ici, si on prend le côté de l'étang carré et qu'on le divise par 2, on obtient 5 *chi*, ce qui fait la base ; la profondeur de l'eau fait la hauteur, et la longueur du roseau l'hypoténuse. À l'aide de la base et de l'hypoténuse, on fait apparaître la hauteur, par conséquent, en effectuant la multiplication de la base par elle-même, on fait d'abord apparaître l'aire du gnomon.

ON EN SOUSTRAIT CE QUI DÉPASSE DE L'EAU, 1 *CHI*, MULTIPLIÉ PAR LUI-MÊME.

Ce qui dépasse de l'eau, c'est la différence entre la hauteur et l'hypoténuse. L'on soustrait le carré de cette différence de l'aire du gnomon et, seulement alors, on divise.

ON DIVISE LE RESTE PAR LE DOUBLE DE CE QUI DÉPASSE DE L'EAU, CE QUI DONNE COMME RÉSULTAT LA PROFONDEUR DE L'EAU.

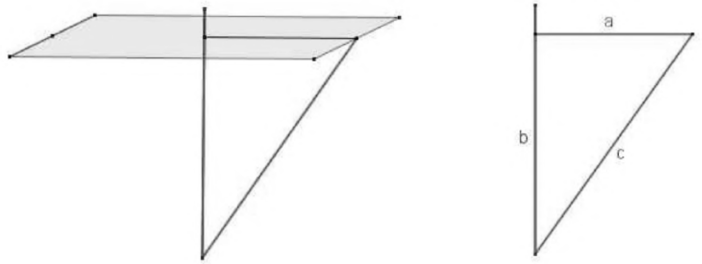
La différence fait la largeur de l'aire du gnomon ; la profondeur de l'eau, c'est la hauteur. On fait en sorte qu'à cette aire soit ajouté ce qui dépasse de l'eau, 1 *chi*, pour faire la longueur ; par conséquent en la transformant en gnomon, on obtient la longueur du roseau.

---

[11] 1 *zhang* = 10 *chi* et 1 *chi* = 10 *cun*.

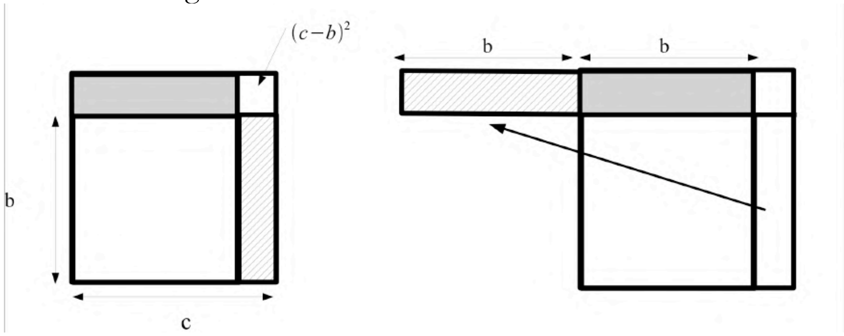
EN AJOUTANT LA QUANTITÉ QUI DÉPASSE DE L'EAU, ON OBTIENT LA LONGUEUR DU ROSEAU.

Ajoutons notre propre commentaire à celui de Liu Hui. Voici d'abord une représentation possible de l'étang…



Dans ce problème, nous noterons a la distance du bord au centre de l'étang, b la profondeur de l'étang et c la longueur du roseau. Le texte nous donne les valeurs de $2a$ et de $c - b$ (c'est-à-dire de ce dont le roseau dépasse de la surface de l'étang) : en effet $2a = 10$, soit $a = 5$, et $c - b = 1$.

Les figures ci-dessous illustrent le commentaire de Liu Hui. Le gnomon (partie hachurée et grisée) vaut $a^2 - (c - b)^2$, c'est-à-dire $2b(c - b)$. On connaît a et $c - b$, on calcule $a^2 - (c - b)^2$, on divise le résultat par $2(c - b)$ et on trouve la profondeur b : la longueur du roseau est $b + 1$.



Annexe 5.
Le problème 9. 14. des *Neuf chapitres*

SUPPOSONS QUE LA BASE VAILLE 5 *BU*[12] ET LA HAUTEUR 12 *BU*. ON DEMANDE COMBIEN VAUT LE CÔTÉ DU CARRÉ INSCRIT A L'INTÉRIEUR DE LA BASE.
RÉPONSE : LE CÔTÉ DU CARRÉ VAUT 3 *BU* ET 9/17 DE *BU*.
PROCÉDURE : ON SOMME LA BASE ET LA HAUTEUR CE QUI FAIT LE DIVISEUR. BASE ET HAUTEUR SONT MULTIPLIÉES L'UN PAR L'AUTRE CE QUI FAIT LE DIVIDENDE. ET EN EFFECTUANT LA DIVISION DU DIVIDENDE PAR LE DIVISEUR, ON OBTIENT LE CÔTÉ DU CARRÉ EN *BU*.

Quand « base et hauteur sont multipliées l'une par l'autre », cela fait des surfaces vermillon, bleu-vert et jaunes, chacune en deux exemplaires. Si l'on fait en sorte que les longueurs des surfaces jaunes forment la longueur aux extrémités, que celles (les surfaces) qui sont vermillon et bleu-vert, chacune selon les catégories qui leur correspondent, se conforment aux deux transverses qui leur correspondent, en tout, cela engendre la surface d'un rectangle. Le côté du carré inscrit, jaune, en fait la largeur ; la somme de la base et de la hauteur en fait la longueur. C'est pourquoi « sommer base et hauteur fait le diviseur ».
Dans la figure de l'aire si le carré est situé à l'intérieur de la base, alors de chacun des deux côtés du carré, sont respectivement engendrées une petite base et une petite hauteur, et la situation de leur relation l'une avec l'autre n'a pas perdu les *lü* d'origine. Les petite base et hauteur du côté de la base, les petite base et hauteur du côté de la hauteur ont respectivement pour somme le *lü* du côté du carré inscrit. Si l'on fait en sorte que la hauteur fasse le *lü* du côté du carré inscrit, que la somme de la base et de la hauteur fasse le *lü*, et si, étant donné que la base réelle vaut 5 *bu*, on [applique] à ceux-ci [l'opération] du « supposons », on obtient le côté du carré inscrit. Si, à nouveau, l'on fait en sorte que la base fasse le *lü* du côté du carré inscrit, si l'on prend la somme de la base et de la hauteur comme *lü*, et si, étant donné que la hauteur réelle vaut 12 *bu*, on [applique] à ceux-ci [l'opération] du « supposons », on peut encore une fois connaître le côté du carré inscrit.

Par suite, quoiqu'ici on n'imite pas cette méthode (la précédente), dividende et diviseur proviennent de là. [...]

Annexe 6.
Le théorème 4 du *Gougu yi* de Xu Guangqi (vers 1610)

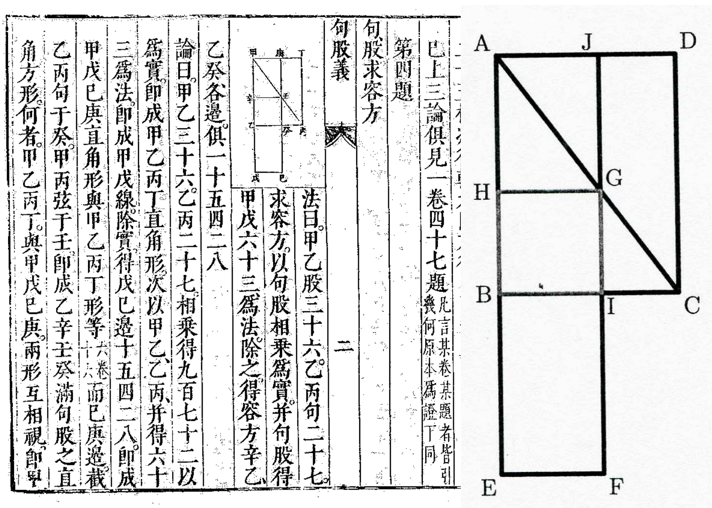
Avec *gou* et *gu* chercher un carré inscrit. La méthode dit : Pour trouver un carré inscrit avec un *gu* AB de 36, et un *gou* BC de 27, on multiplie *gu* et *gou*. On obtient le dividende. On additionne *gou* et *gu* ce qui fait AE. On

12 Sous les Han, 1 *bu* = 6 *chi*.

prend 63 comme diviseur. En divisant on obtient le côté du carré inscrit HB et BI, chaque côté étant 15,428.

La démonstration dit : AB 36, multiplié avec BC 27 donne 972. On prend ceci comme dividende. C'est le rectangle ABCD. Ensuite, on additionne AB et BC. On obtient 63 comme diviseur ce qui produit la ligne AE. En divisant on obtient la ligne EF de 15,428. Ainsi on produit le rectangle AEFJ, qui est égal à la figure ABCD (Livre VI, Proposition 16). Par ailleurs, le côté FJ coupe BC en I, et l'hypoténuse AC en G. Ainsi on produit le carré BIGH qui est inscrit au triangle. Comment ça se fait ? Les deux figures ABCD et AEFJ sont proportionnelles puisque AB à AE est comme BI à BC (Livre VI, Proposition 15). En séparant, on a AB à BE comme BI à IC, et donc AB à BC est comme BI à IC (par hypothèse BC est égal à BE). Aussi, AH est à HG comme GI à IC (Livre VI, Proposition 4). En alternant, AH est à GI comme HG est à IC. Mais comme HB et GI sont égaux, et BI et GH sont égaux, alors AH est à HB comme BI est à IC. Alors comme AB est à BC comme BI à IC et comme AH est à HB comme BI est à IC, donc AB est à BC comme AH est à HB. Et donc BIGH est un carré inscrit dans un triangle rectangle (Livre VI, Proposition 15, Lemme).

Une autre procédure plus simple dit : On a la figure comme avant. On prend ABE comme diviseur, et on divise le dividende AC. On obtient AJ, IB chacun étant égal aux côtés du rectangle. Maintenant on prend CBE qui est égal à ABE [dans la figure d'avant] comme dividende et on divise le dividende AC. On obtient JC et EF chacun étant égal au côté du rectangle. Donc, HBIG est un carré.[13]



Le théorème 4 du *Gougu yi* avec sa figure

13 Traduction d'Andrea Bréard

Annexe 7
Préface du *Jihe lunyue* de Du Zhigeng (1700)[14]

Le Jihe yuanben est un livre de Oujilisi (= Euclide) d'Occident. Depuis que Maire Li (= Matteo Ricci) venu d'Occident a commencé à transmettre sa science, Maître Xu (= Xu Guangqi) de Yuanhu l'a traduit en langue chinoise. Cette traduction est parvenue à terme au bout de cinq ans après que le manuscrit eut été modifié à trois reprises. (Dans ce livre) les "problèmes" (ti) se succèdent les uns aux autres, des plus simples aux plus compliqués. (Ce livre) paraît obscur, mais en réalité il est clair ; il semble difficile, mais en fait il est facile.

C'est un livre qu'on ne peut pas ne pas étudier et que tout le monde devrait étudier. C'est pourquoi Maître Xu a écrit qu'un siècle après (sa publication) tout le monde sera obligé de l'étudier. On estimera alors avoir bien tardé à s'y mettre. L'ouvrage a été achevé l'année (cyclique) ding-wei de l'empereur Wanli (1607), il y a 90 ans de cela et ceux qui étudient [les Éléments d'Euclide] sont fort rares. Pourquoi donc ?
Sans doute parce que chaque "problème" (ti) a besoin (en premier lieu) d'un exposé qui en précise les grandes lignes, (en second lieu) d'une "explication" (jie), et (enfin) d'un "discours" (lun). Les (problèmes) les plus longs ne se composent pas de moins de mille mots et les plus courts de pas moins de quelques centaines. Pour chaque problème, il est nécessaire de dessiner plusieurs figures et chaque figure doit comprendre plusieurs lignes. Le lecteur doit concentrer son attention de façon à rester attentif à sa lecture tout en gravant dans son esprit ce que ses doigts lui montrent. Dès qu'il a compris, il suffit que son attention se relâche un tant soit peu pour qu'avant même d'en avoir fini avec le "problème" (en cours) il ne sache déjà plus ce dont il est question. Ce n'est pas là la seule raison pour laquelle ce livre a été peu étudié, mais cette raison-là doit avoir son importance. Si l'on réduisait au maximum le flot verbal qui accompagne chaque "problème" (ti) sans rien perdre ni en clarté ni en complétude, alors il deviendrait aisé de saisir l'esprit de ces (problèmes) par le fait même de la concision du texte. Tout deviendrait immédiatement clair "comme si on le montrait dans la paume de la main".

Ce n'est pas à moi qu'il faut rappeler qu'on doit redouter le retard pris dans l'étude de ce livre. Quelqu'un m'a posé la question suivante : « Maître, pourquoi ne simplifiez vous pas ce livre ? » J'ai répondu: « Cela n'est pas facile. Condenser en un mot ce qui s'exprime en plusieurs, c'est là quelque chose que les gens intelligents redoutent. Alors, vous pensez, un sot comme moi ! » (Mais) par la suite j'ai (quand même) essayé de le faire. Alors, suivant le texte original en en respectant l'ordre, j'ai simplifié les "discours" chaque fois que j'ai pu. (En outre) lorsqu'il y avait des choses qu'il était possible de développer, je les ai ajoutées en suivant ma propre

14 Traduction de J.-Cl. Martzloff : voir article cité en bibliographie.

idée. Après en avoir fini avec les “explications”, j’ai condensé les “discours”.

Lorsque les “problèmes” se comprenaient d’eux-mêmes, j’ai aussi élagué leurs “explications”. M’efforçant (ainsi) de simplifier les textes, je me suis arrêté lorsque j’ai eu l’impression que ce que j’avais fait était en accord avec le sens des “problèmes” correspondants.

J’ai en outre ajouté en appendice en fin d’ouvrage plusieurs items que j’ai trouvés en raisonnant par analogie afin de développer d’autres idées (associées aux problèmes). Mon œuvre achevée, je l’ai portée au graveur sur bois afin qu’il la révise. Mon plus vif désir, c’est que mes lecteurs relèvent les erreurs que j’ai commises, suppriment ce qui est confus et suppléent à mes omissions.

Bibliographie

[B] Andrea BRÉARD, « Euclide en Chine ou : comment faire communiquer différentes cultures mathématiques ? », *in : Actes des journées* Mathématiques et interculturalité (Lille, 15-17 avril 2009), à paraître.

[C & S] Karine CHEMLA & Guo SHUCHUN, édition critique bilingue de : *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris : Dunod, 2004.

[Co] COLLECTIF, *Ce que les Grecs ont vraiment inventé, les Cahiers de science et vie* 55, 2000.

[Cr] Vincent CRONIN, *Matteo Ricci le sage venu de l’Occident*, Paris : Albin Michel, 1957, rééd. 2010.

[Cu] Christopher CULLEN, *Astronomy and mathematics in Ancient China : The Zhou Bi Suan Jing*, Cambridge University Press, 1996.

[En] Peter ENGELFRIET & Man-Keung SIU, « Xu Guangqi’s Attempts to Integrate Western and Chinese mathematics », *in :* C. Jami, P. Engelfriet, G. Blue (eds.), *Statecraft and Intellectual Renewal in Late Ming China. The Cross-Cultural Synthesis of Xu Guangqi (1562-1633)*, Leiden : Brill, 2001.

[Eu] EUCLIDE, *Les Éléments*, traduction et commentaire par Bernard Vitrac, 4 vol., Paris : PUF, 1990-2001.

[J, 1988] Catherine JAMI, « Sur l’organisation du champ des mathématiques chinoises », *Extrême-Orient, Extrême-Occident 10*, 1988, p. 45-59.

[J, 1998] Catherine JAMI, « Traductions et synthèses : les mathématiques occidentales en Chine, 1607-1782 », *in* : Dominique Tournès (éd.), *L’Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, Saint-Denis de la Réunion : IUFM de la Réunion, 1998, p. 117-126.

[M, 1988] Jean-Claude MARTZLOFF, *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris : Masson, 1988.

[M, 1993] Jean-Claude MARTZLOFF, « Éléments de réflexion sur les réactions chinoises à la géométrie euclidienne à la fin du XVII^e^ siècle – Le *Jihe lunyue* de Du Zhigeng vu principalement à partir de la préface de l’auteur et deux notices bibliographiques rédigées par des lettrés illustres », *Historia mathematica* 20, 1993, p. 160-179 et 460-463.

[V] Bernard VITRAC, « Les géomètres de la Grèce antique », *Les génies de la science* 21, 2004.

[Y] Kiyosi YABUUTI, *Une histoire des mathématiques chinoises*, Paris : Belin, 2000.

Sites Internet :

a) le site Culture*MATH* : www.math.ens.fr/culturemath, avec notamment :
le dossier *Les géomètres de la Grèce antique* de Bernard Vitrac ;
une *Brève chronologie de l’histoire des sciences en Chine* par Karine Chemla.

b) un site sur Matteo Ricci : www.matteo-ricci.org