ATELIER : ELEMENS DE GEOMETRIE DU DUC DE BOURGOGNE

Henry PLANE,

Cet atelier avait pour but de travailler certaines pages de l'ouvrage présenté dans l'exposé préliminaire.
Après prise de connaissance du plan de l'édition de 1705, une série de reproductions de pages de celle-ci servit de support à la discussion avec les participants.
Nous résumerons quelques commentaires auxquels donnèrent lieu chacun de ces extraits.

AI - Dans le livre III.
Il s'agit de la construction "à la Euclide". La propriété du triangle rectangle inscrit dans un demi cercle (le théorème de Thalès, outre Rhin) n'était guère utilisée à l'époque dans les autres ouvrages.

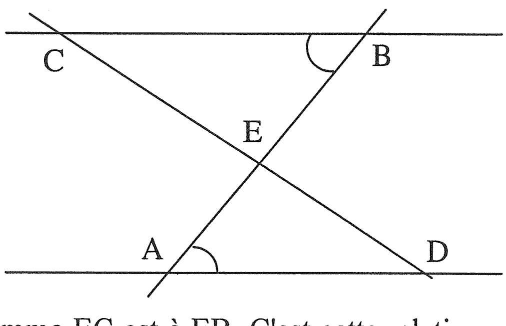
AII – Dans le livre VI.
C'est une démonstration "à la Arnauld". Les bandes de parallèles définies par leur distance (leur écartement) d'où, pour deux bandes, la naissance d'un rapport que l'on retrouve sur toute sécante, et entre deux sécantes également inclinées. Renvoi fut fait au livre de géométrie d'Arnauld dont l'IREM de Dijon a reproduit l'édition originale.

AIII – L'entrée de la trigonométrie au livre III.
Seuls sinus et tangente sont utilisés alors, même s'il est fait usage du sinus du complément qui deviendra co-sinus. On sait que sinus, en latin, c'est le plis, la corde pliée en deux.

Plus loin la relation $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ viendra directement de la figure du triangle ABC inscrit dans un cercle, chaque côté étant la corde tendue par l'angle au centre double de l'angle opposé à ce côté. La valeur 2R du rapport n'est pas mentionnée.

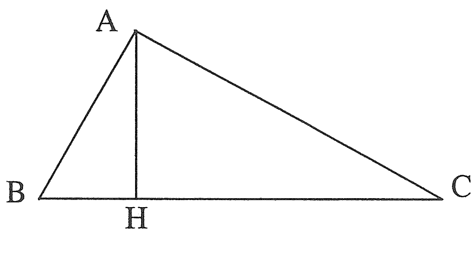
AIV – Au livre VII
Deux mots à expliquer qui cachent deux attitudes.

Associons une autre figure à celle du livre. Celle dans laquelle (AB) et (CD) couperaient deux parallèles (AD) et (CB). Ce serait les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$ dont on aurait l'égalité. La proportion $\frac{AE}{ED}=\frac{EB}{EC}$ s'énoncerait AE est à ED comme EB est à EC alors



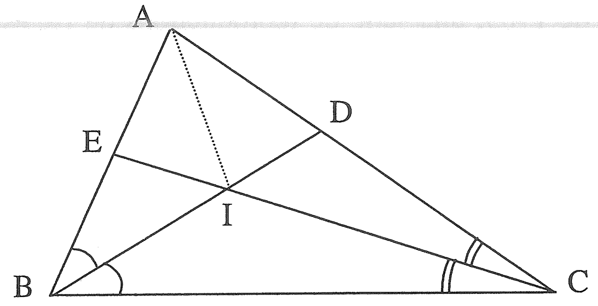
qu'avec (AB) et (CB) antiparallèles, on a AE est à ED comme EC est à EB. C'est cette relation qui est dite réciproque de la précédente.
Ce n'est pas un théorème réciproque...
La notion de droites antiparallèles se trouvait encore dans des livres scolaires du premier tiers du XX^{e} siècle.
Bien entendu il n'est pas question de EA.EB = EC.ED. Poncelet est encore loin...

La fin de l'article est intéressante car elle fournira au livre VIII une seconde voie vers la relation de Pythagore en usant de moyennes proportionnelles : celle de AB par rapport à BH et BC et celle de AC par rapport à HC et BC.



Donc par addition…

BI – Au livre VIII, comme justement on dispose de la relation de Pythagore, on peut calculer : $AD^2 = \frac{5AC^2}{4}$ $FC^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}AC^2$ et, ainsi que le fit Descartes pour ses neveux, il leur est laissé le "plaisir de les inventer".
Avant de quitter le livre VIII une autre démonstration a été étudiée : les bissectrices d'un triangle sont concourantes. Elle n'est guère usuelle et précède, toujours dans le livre, celle des hauteurs.



En résumé : les bissectrices BD et CE se coupent en I. Dans le triangle BEC, IB est bissectrice : $\frac{IE}{IC} = \frac{BE}{BC}$. Dans le triangle ABC, CE est bissectrice $\frac{EB}{BC} = \frac{EA}{CA}$. Donc $\frac{IE}{IC} = \frac{EA}{CA}$ et dans le triangle EAC AI est bissectrice de l'angle A.

On notera toutefois que la conclusion use de la réciproque, selon le sens que nous donnons au terme, du théorème sur la bissectrice or celle-ci n'est pas explicitée dans l'ouvrage…

Abordons les applications
BII – Certes, cela est très théorique mais avec AD = 4,8 km et DC = 12700 KM (le Mont Blanc et la Terre) on obtient AB = 247 km. Du Mont Blanc voir la mer à Toulon…

BIII et B IV – La trigonométrie entre en jeu –mais aussi la précision de la mesure des angles- Bâton de Jacob ? Gerbert mesurait une tour par le procédé de BIII…

C/D. 1431 lieues de 4,44 km valent 6354 km. Mais fin XVIIème siècle on savait que la distance terre-lune n'est pas constante. Ces trois exercices sont surtout descriptifs et du système et des moyens de calcul.
On notera que la distance terre-soleil est évoquée comme constante. Ce qui évite de prendre position écrite sur le système solaire. Il s'agit surtout de montrer des calculs avec la trigonométrie. A la fin de l'ouvrage la construction d'une table de sinus sera étudiée. Il peut paraître étonnant alors que Leibniz et L'Hôpital sont cités dans le livre, que Picard et Cassini ne le soient pas à cette occasion.

E. Comme pour l'article C, ce n'est pas sans raison que la figure est en double. Dans l'ouvrage il s'agit de deux pages opposées et comme l'explication fait appel à elle, celle-ci est répétée au moment opportun.
Il est difficile de dire si Roberval aurait partagé la démonstration. Qu'en était-il exactement de "forces parfaitement balancées", d'égalité de mouvement, de double de mouvement ? Il est regrettable de ne pas trouver, dans l'ouvrage, d'autres exemples sur un sujet semblable.

FI. A est à B comme C est à D.
A, B :: C, D. Nous avons ici un exemple type de l'expression du raisonnement relatif à la notion de proportion ainsi que de sa notation. Il ne s'agit pas d'un exemple. Avant que l'écriture de Viète ou de Descartes ne s'impose, c'est avec des nombres que l'on tenait le discours. Malezieu, justement ici, le traduit en lettres. On comprendra mieux la qualification d'extrêmes et de moyens qu'avec notre écriture $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. (Sans oublier que la réciproque est $\frac{A}{D} = \frac{C}{B}$, comme dit en AI.)

FII. Usage de l'arithmétique par lettres.
Il n'y a qu'à multiplier $z + u$ par $z + u$ pour avoir le quarré de $z + u$ et ensuite on simplifiera une expression qu'on égalera à l'autre- comme Descartes on écrit $x.x$ et non x^2.
Mais ce qui, pour nous, est devenu presque naturel et ne l'était pas alors, c'est de remplacer la mesure d'une ligne par une lettre CB … z, BD… u et de voir dans $z + u$ la ligne réunion CD pour conclure que dans $zz + 2zu + yy = xx$, on a : le quarré de AC est égal au quarré de AB et au quarré de CB plus deux rectangles de BC par BD. Il reste la terminologie "rectangle" pour produit, mais qui de nous n'a pas encore entendu "dans le carré de $(a + b)$ n'oubliez pas le terme rectangle".

G. On retrouve et le raisonnement sur des nombres et la preuve par un cas particulier : un exemple.
Certes il est question de Guldin mais qu'est-ce-que le centre de gravité ? A défaut d'une définition géométrique il est montré le bon usage qu'on peut en faire.
Entre le cercle et son diamètre on fait appel à Archimède pour qui, si le cercle est 22, le diamètre est 7.
"Tout cercle est à son diamètre comme 22 est à 7".
La troisième proportionnelle est devenue, pour nous, la moyenne proportionnelle. Le troisième nombre qui avec a et b donne une proportion, c'est c tel que a est à c comme c est à b, $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ ou $c^2 = ab$ ou $c = \sqrt{a.b}$.
$8 + \frac{10}{11}$: on notera la forme du signe de l'addition, l'absence de fraction décimale, ($\frac{22}{7}$ et non 3,14) et le double $16 + \frac{20}{11}$ et non $17 + \frac{9}{11}$.

H. On sait visiblement calculer les sommes de puissances numériques. Nous sommes un demi-siècle après Pascal.
$S = \sum_1^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, mais si on prend $S' = \frac{n^2(n+1)}{3}$, l'erreur absolue est : $S - S' = \frac{n^2 + n}{6}$, et l'erreur relative est de l'ordre de $\frac{1}{6n}$ qui décroît avec n.
Pourrait-on convaincre nos élèves avec ce texte, que la limite de $\sum x^2 \Delta x$ est la primitive $\frac{x^3}{3}$ *de* x^2 ? C'est ainsi que la chose fut approchée.

J. Un calcul par les "indivisibles" au livre X.
Un croquis en perspective a été ajouté à l'extrait car la figure n'est pas très aisée à suivre. Une coquille au milieu de la première colonne : cône au lieu de demi-sphère.
Résumons les calculs avec notre écriture

NL = LA ; FM = MA ; EA = DM.

Donc, dans chaque section orthogonale à l'axe (LA) on a :
(aire de la couronne) $= \pi(\mathrm{DM}^2 - \mathrm{EM}^2) = \pi\,(\mathrm{EA}^2 - \mathrm{EM}^2)$
$= \pi.\mathrm{MA}^2 = \pi.\mathrm{FM}^2$
= (aire du cercle).
La couronne est la section entre cylindre et demi-sphère.
Le cercle est la section du cône.
"Sommons" les "indivisibles" tout au long du segment [LA], il vient

(volume entre demi-sphère et cylindre) = (volume du cône de sommet A)

ou

$$(\text{volume cylindre})\text{-}(\text{volume demi-sphère}) = \frac{1}{3}\ (\text{volume du cylindre}).$$

On a démontré le rapport entre les volumes des cônes et cylindres dans des propositions précédentes de ce livre X. Alors

$$(\text{volume demi-sphère}) = \frac{2}{3}\ (\text{volume cylindre})$$

$$(\text{volume sphère}) = \frac{4}{3}\ (\text{volume cylindre})$$

$$= \frac{4}{3}\ \pi R^2.R$$

K. Des fruits de discussions dans les salons de Sceaux entre gens qui ne pouvaient avoir ignoré, entre autres choses, les papiers d'un certain Blaise Pascal. Ce que les lycéens que nous fûmes, trouvaient dans leurs "morceaux choisis" comme fragment classé "infini-rien" à moins que ce ne fut en préambule du chapitre que le XIXème siècle baptisa "le Pari".
Beaux sujets de travaux transdisciplinaires personnalisés.

Lestés de leur lot de documents, les participants de l'atelier avaient de quoi poursuivre leur rencontre en Bourgogne, avec les mathématiques du Duc de Bourgogne.

Sommaire de l'ouvrage :

- Définitions, demandes, axiomes.
- Abrégé de l'arithmétique par lettres.

10 livres

I - Perpendiculaires et obliques
II - Parallèles
III - Des lignes droites terminées à une circonférence
IV - Des angles
V - Angles dont le sommet n'est point au centre du cercle
VI - Des proportions
VII - Des "réciproques"
VIII - Des figures
IX - Comparaison de l'aire des figures
X - Des solides
avec
- Trigonométrie

ELEMENS
DE
GEOMETRIE
DE MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

TROISIÉME EDITION,

Revûe, corrigée & augmentée

D'UN

TRAITÉ DES LOGARITHMES,

Par M. DE MALEZIEU.

AVEC

L'INTRODUCTION A L'APPLICATION DE L'ALGEBRE A LA GEOMETRIE.

A PARIS, RUE S. JACQUES,

Chez la Veuve GANEAU, près la rue du Plâtre, aux Armes de Dombes.

M. DCC. XXXV.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE; A nos amés & feaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlemens, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé ESTIENNE GANEAU, Libraire à Paris, Nous aiant fait remontrer qu'il souhaiteroit faire imprimer & donner au Public un Livre, qui a pour titre: *Elémens de Geometrie de feu notre très honoré Seigneur & Pere* LOUIS DE FRANCE DUC DE BOURGOGNE, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce necessaires; offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des Presentes.

Epitre

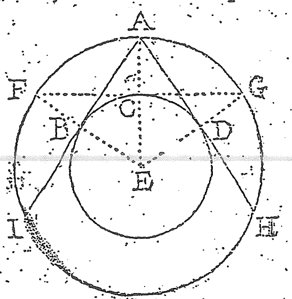
Si le détail de cette Science n'est pas toujours d'usage pour un Prince, il est au moins vrai de dire, MONSEIGNEUR, *que l'esprit d'ordre & de précision, qu'elle inspire, & auquel elle accoutume insensiblement, est utile en tout temps, & qu'il sert autant à diriger les vûes & les desseins du Prince pacifique, que les projets & les exploits du Prince guerrier.*

A

I

TREIZIÉME PROPOSITION.

D'un point donné comme *A*, hors du cercle *BCD*, tirer deux Tangentes à ce cercle, & démontrer qu'elles sont égales.



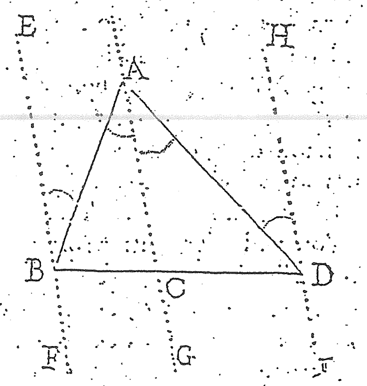
Du point *E* centre du cercle, soit tirée jusqu'au point donné *A*, la ligne *EA*.

Du centre *E*, intervale *EA*, soit décrit le cercle *IAH*. Au point *C*, où le raïon *EA*, coupe le petit cercle, soit menée la perpendiculaire *FCG*, terminée par la circonference aux points *FG*, cette perpendiculaire sera Tangente à l'égard du petit cercle, & corde à l'égard du grand. Soit prise avec le Compas, la longueur *FG*, qui soit portée du point donné *A*, jusques aux points de la grande circonference *IH*. Soient menées les lignes *AI*, *AH*; je dis qu'elles sont Tangentes à l'égard du petit cercle.

II

HUITIÉME PROPOSITION.

Si une ligne divisant un Angle quelconque en deux parties égales, tombe sur la base de cet Angle, elle la partage proportionellement aux côtez de l'Angle.

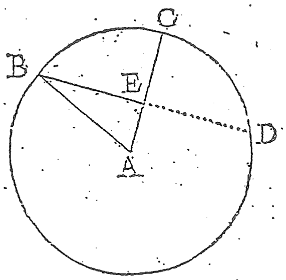


Soit l'Angle *BAD*, divisé en deux parties égales par la ligne *AC*, qui coupe la base *BD*, au point *C*; je dis que le côté *AB*, est à la portion *BC*, de la base, comme le côté *AD*, est à la portion *CD*.

Par les points *B*, & *D*, soient menées les lignes *EF*, *HI*, paralleles à la ligne *AC*, prolongée en *G*. Il se forme par là deux espaces paralleles, & il est évident que la ligne *BA*, est autant inclinée dans son espace que la ligne *DA*, l'est dans le sien, puisque par la construction, l'Angle *BAC*, est égal à l'Angle *CAD*; de même la ligne *BC*, est autant inclinée dans le premier espace, où est renfermée la ligne *BA*, que la ligne *CD*, l'est dans le second espace, où est renfermée la ligne *AD*, puisque c'est une même ligne coupée par des paralleles: donc par la deuxiéme Proposition de ce Livre, la ligne *AB*, est à la ligne *AD*, comme la ligne *BC*, est à la ligne *CD*, & *alternando*, la ligne *AB*, est à la ligne *BC*, comme la ligne *AD*, est à la ligne *CD*.

III

Si de l'extremité de l'un des raïons qui comprennent un arc, l'on mene une perpendiculaire sur l'autre raïon, elle s'appelle le Sinus de l'arc, & si cette perpendiculaire est prolongée jusqu'à la circonference, elle deviendra corde d'un arc double de l'arc donné.



Soit l'arc donné *BC*, compris par les raïons *AB*, *AC*. De l'extremité de l'un des raïons, comme *B*, soit menée sur un point de l'autre raïon, la perpendiculaire *BE*, elle sera par la définition le Sinus de l'arc *BC*. Soit à present prolongé ce Sinus *BE*, jusqu'au point *D*. Je dis que l'arc *BCD*, soutenu par la corde *BED*, est double de l'arc *BC*.

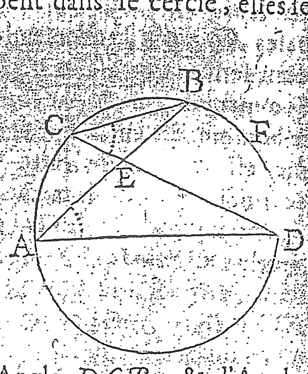
Car la ligne *CA*, passant par le centre, & étant par la construction, perpendiculaire sur la ligne *BD*, il s'ensuit par les precedentes Propositions, que non seulement elle coupe cette ligne ou corde *BD*, en deux parties égales au point *E*, mais qu'elle coupe aussi l'arc *BCD*, en deux parties égales au point *C*. D'où s'ensuit que l'arc *BCD*, est double de l'arc donné *BC*, & que la corde *BD*, est double du Sinus *BE*. Ainsi l'on peut encore donner cette autre definition du Sinus.

Le Sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soutient le double de l'arc dont il est Sinus. Ces Propositions & definitions sont d'une extrême consequence pour la suite.

IV

COROLLAIRE.

Si deux cordes se coupent dans le cercle, elles se coupent réciproquement.



Soient les deux cordes *AB*, *CD*, qui se coupent dans le cercle au point *E*; je dis que *AE*, est à *ED*, comme *EC*, est à *EB*.

Cela est évident; car tirant les bases *AD*, *CB*, elles sont antiparalleles, puisque l'Angle *DCB*, & l'Angle *DAB*, sont appuiez sur le même arc *BFD*, dont la moitié fait leur mesure, cela donne une nouvelle démonstration pour trouver la moienne proportionelle entre deux lignes données; car faisant des deux lignes données, mises bout à bout, le diametre d'un cercle, & élevant une perpendiculaire au point où elles se joignent, cette perpendiculaire terminée par la circonference, sera la moitié d'une corde coupée réciproquement avec les parties du diametre, & par consequent moienne proportionelle, puisqu'elle sera coupée en deux parties égales.

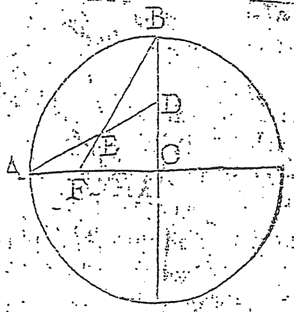
I

PROBLEME.

SEIZIÉME PROPOSITION.

Inscrire dans un cercle donné le côté du Pentagone.

Soient deux diametres se coupant à Angles droits au centre C; divisez le Raïon BC, en deux parties égales au point D; tirez la ligne AD; prenez sur elle DE, égale à DC, puis prenez FC, égale à AE, la ligne FB, sera le côté du Pentagone.



Il faut laisser à ceux qui commencent le plaisir d'en trouver la démonstration; c'est une suite de la Proposition précedente.

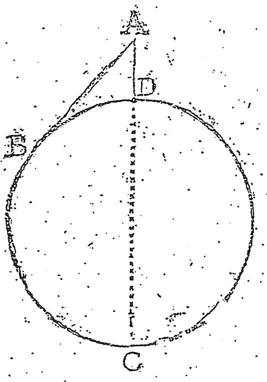
II

PROBLEME.

COROLLAIRE.

Connoître la longueur du diametre de la Terre sans observation Astronomique.

Je suppose que le point A, soit le sommet d'une montagne située sur le bord de la mer D, & que l'on connoisse la ligne AD, qui est l'élevation du sommet de la montagne, par-dessus le plan de la mer. Je regarde du point A, en pleine mer, tant que la vûe peut s'étendre, en sorte que mon raïon visuel AB, fasse une tangente au point B, ensuite de quoi mesurant mécaniquement la longueur de la tangente AB, je dis, suivant la Proposition precedente, comme la hauteur de la montagne est à la tangente, ainsi la tangente est à la ligne AC; d'où ôtant la hauteur de la montagne, reste la ligne DC, diametre de la Terre.



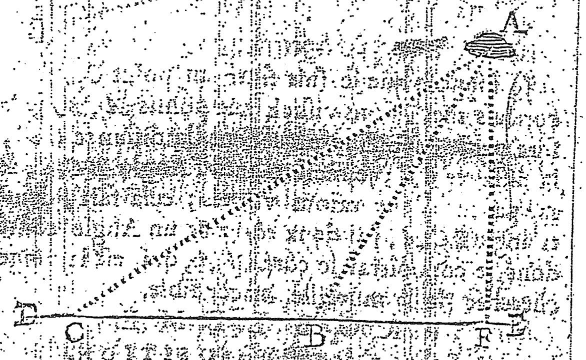
III

PROBLEME.

SEPTIÉME PROPOSITION.

Mesurer la hauteur d'un nuage en l'air.

Je suppose que l'air soit tranquille, que le nuage ait peu de mouvement, qu'il soit petit, bien terminé; & qu'il ait quelque endroit remarquable où deux Observateurs puissent en même temps conduire leurs raions visuels.



Soit le plan d'une prairie $DCBE$. Soient deux Observateurs situez aux points C, B, chacun aiant son quart de cercle, observera dans le même instant le même bord du nuage A; celui qui est en B, mesurera l'Angle EBA, d'où l'on connoîtra l'Angle CBA; l'Observateur en C, observera l'Angle BCA, dans le même instant. Ensuite l'on mesurera la distance CB, & l'on connoîtra dans le triangle CBA, le côté CB, & deux Angles, ainsi l'on connoîtra le côté BA. Puis dans le triangle rectangle BEA, l'on aura l'Angle droit connu, l'Angle mesuré EBA, & le côté connu BA, d'où l'on connoîtra le côté AE qui sera l'élevation perpendiculaire du nuage.

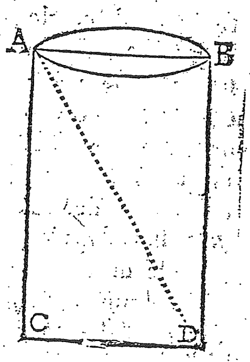
IV

PROBLEME.

SIXIÉME PROPOSITION.

Mesurer la profondeur du puits $ABCD$, que je suppose vuide d'eau.

Je mesure le diametre de sa largeur AB, je conduis un raion visuel du point A, au point D, & je connois dans le triangle DBA, l'Angle droit DBA, & le côté AB, que j'ai mesuré. Je mesure l'Angle BAD; ainsi je connoîtrai le côté DB, qui est la profondeur cherchée.



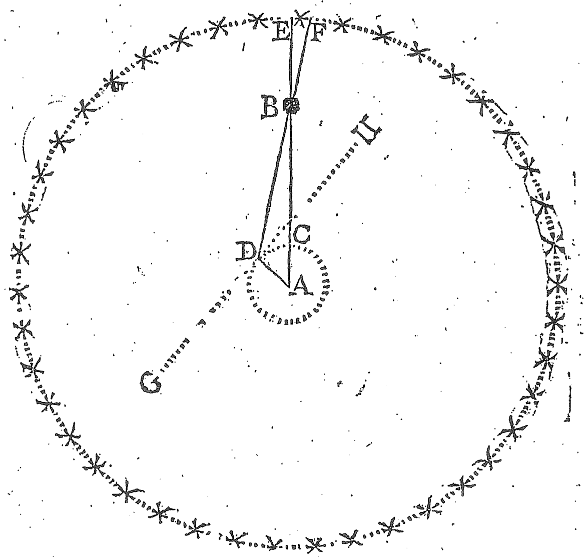
B

PROBLEME.

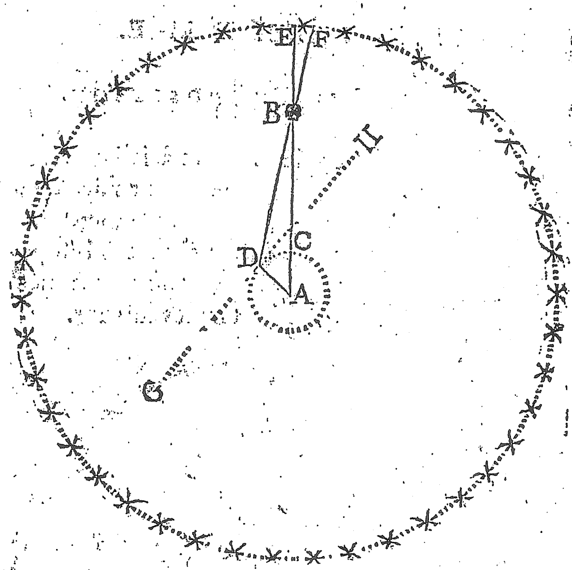
HUITIE'ME PROPOSITION.

Mesurer la distance de la Terre à la Lune.

Nous choisissons cet exemple, pour faire connoître tout d'un coup l'utilité de la Trigonometrie dans les Sciences les plus sublimes; il faut ici supposer qu'on sçache assez de ce qu'on appelle communément la Sphere pour entendre les termes suivans.



Que le grand cercle soit un méridien du Firmament; le petit cercle, le méridien terrestre correspondant au celeste, c'est-à-dire, en même plan. Que le point A, soit le centre de la Terre; que C, soit un point du méridien terrestre, directement posé sous l'Equateur, & que D, soit un point du même méri-



dien representant Paris, c'est-à-dire, éloigné du point C, de 49 degrez. Que la petite boule B, represente le corps de la Lune. Soient supposez deux Astronomes, situez, l'un au point C, l'autre au point D, qui soient convenus entre eux, d'observer regulierement tous les jours le corps de la Lune au moment qu'elle passera par leur méridien; & de se communiquer ensuite leurs observations.

Supposons que celui qui est situé au point C, sous l'Equateur, ait écrit à l'autre, que le 21 Mars la Lune B, se trouva précisément au-dessus de sa tête, c'est-à-dire, aiant le centre dans son Zenith, & que notre Astronome de Paris, ait observé dans le même instant l'Angle HDB, qui represente l'élevation de la Lune B, par-dessus l'horison de Paris, dont la ligne GH, est le diametre.

Il se forme le triangle BDA, composé du raïon visuel DB, qui est celui de l'Observateur de Paris, du raïon de la Terre DA, & de la ligne AB, qui est le raïon visuel de l'Observateur situé au point C, joint au raïon de la Terre AC. Or dans ce triangle l'on connoît l'Angle DAC, ou DAB; de 49 degrez, puisqu'il est mesuré par l'arc qui est entre l'Equateur & Paris. L'on connoît l'Angle BDA, qui est composé de l'Angle droit HDA, & de l'Angle observé HDB; donc l'Angle ABD, sera connu.

Il est fort aisé après cela de connoître tout le reste; car comme le sinus de l'Angle ABD, est au côté AD, que l'on sçait être de 1431 lieues; ainsi le sinus de l'Angle DAB, est au côté DB, qui est la distance de Paris à la Lune.

Il est bon de remarquer en passant, que l'Angle ABD, est ce que les Astronomes appellent la Parallaxe, qui n'est autre chose que la difference qui est entre le point où paroîtroit la Lune par rapport au Firmament à un Observateur qui la pourroit voir du centre de la Terre, & le point où elle paroîtroit dans le Firmament à un autre Observateur, qui la regarderoit d'un point de la surface terrestre. Par exemple, le raïon visuel partant du centre de la Terre, & passant par le centre de la Lune se termine au point E, dans le Firmament; au lieu que le raïon DB, partant de la surface se termine dans le Firmament au point F. Or il est visible que l'Angle EBF, est opposé au sommet à l'Angle ABD, & par consequent lui est égal; d'ailleurs il n'y a point de difference par rapport au raïon visuel, entre observer un Astre du centre de la Terre, ou l'observer quand il passe dans le Zenith. Il est encore très évident que plus un Astre est éloigné de la Terre, moins il a de Parallaxe; ainsi observant les Etoiles par la méthode que nous venons de donner, l'on trouvera que les raïons visuels se confondent & ne forment aucun Angle de Parallaxe. C'est pourquoi nous pouvons supposer leur distance si grande qu'il nous plaira, si d'autres raisons nous y obligent. Le Soleil lui-même ne fait point de Parallaxe sensible, tant il est éloigné de nous, & c'est ce qui oblige à recourir à la méthode suivante pour mesurer son éloignement.

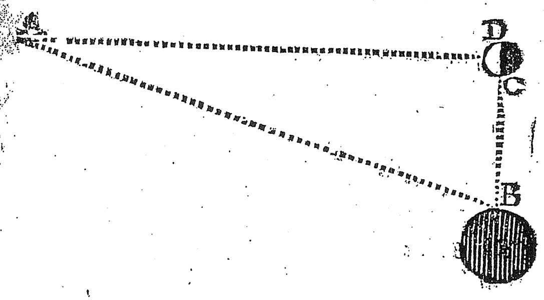
PROBLEME.

NEUVIÉME PROPOSITION.

Déterminer la distance de la Terre au Soleil.

Il faut supposer que la Lune ne luisant que par la lumiere qu'elle reçoit du Soleil, & devant par consequent nous paroître tantôt pleine, tantôt demi-pleine, tantôt en croissant, selon qu'elle en est plus ou moins éloignée; la ligne qui separe la partie illuminée, de celle qui ne l'est pas, doit nous paroître d'autant plus courbe, que cette separation se fait plus près de la circonference visible de la Lune; qu'ainsi dans le moment précis que nous la voïons parfaitement demi-pleine, la ligne qui separe l'ombre de la lumiere, est une ligne parfaitement droite; ce qui ne peut être, que le raïon du Soleil ne fasse un angle droit avec le raïon visuel, qui va de notre œil à la Lune.

Ici, par exemple, l'Observateur situé au point B, voïant la Lune C, précisément demi-pleine; le raïon AC, partant du Soleil A, pour illuminer la Lune, fait necessairement un angle droit, avec BC, raïon visuel de l'Observateur, autrement la Lune lui paroîtroit plus ou moins que demi-pleine; or dans le moment que la Lune paroît demi-pleine,



& qu'avec d'excellentes Lunettes, la ligne CD, qui separe l'ombre de la lumiere, paroît parfaitement droite; il est fort aisé de mesurer avec un bon instrument l'Angle CBA; c'est-à-dire, la distance en degrez de la Lune au Soleil, par rapport à l'Observateur; donc l'on connoîtra dans le triangle rectangle BCA, l'Angle BAC, auquel est opposé le côté BC, qui est supposé connu, & qui est la distance de la Terre à la Lune; ainsi comme le sinus de l'Angle BAC, est à BC; de même le sinus de l'Angle droit est à BA, distance de la Terre au Soleil.

Les observations qu'on a faites avec d'excellens instrumens depuis la découverte des Lunettes d'approche, nous ont appris que l'Angle BAC, est si petit, que la distance de la Terre au Soleil, est au moins de trente millions de lieues communes.

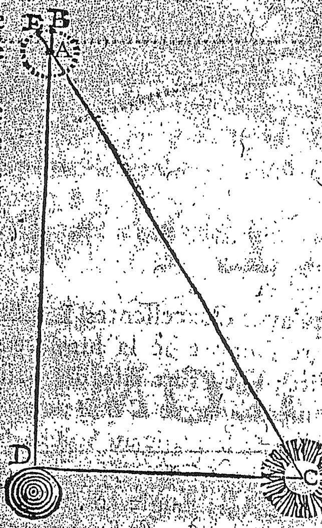
DIXIÉME PROPOSITION.

Mesurer la distance de la Terre à Jupiter.

Il faut supposer que l'on sçache le temps qu'un des Satellites de Jupiter emploïe à faire sa révolution autour de cette Planete.

Supposons, par exemple, en cette Figure que le

Satellite B, emploïe 42 heures à décrire le petit cercle ponctué autour de Jupiter A.



Je suppose que je sois situé sur la Terre au point D, & j'observe le moment que le Satellite B, est éclipsé à mon égard par le corps de Jupiter, c'est-à-dire, que les points D, A, B, sont en une même ligne droite.

J'observe ensuite le moment auquel ce même Satellite par son mouvement propre avançant vers E, perdra sa lumiere en entrant dans l'ombre que forme le corps de Jupiter au point E, où il intercepte les raïons du Soleil C; c'est-à-dire, que j'observe le moment où les points CAE, sont dans une même ligne droite.

Cela étant, puisque le Satellite emploïe 42 heures à faire son tour, sçachant le temps qu'il a emploïé depuis B, jusques en E, je sçaurai la grandeur de l'arc BE. Je suppose qu'il y ait emploïé six heures; l'arc BE, sera la septiéme partie de la circonference, comme six heures sont la septiéme partie de 42: ainsi dans le triangle ACD, je connoîtrai l'Angle CAD, opposé au sommet à l'Angle BAE, que je viens de mesurer par mon observation; je mesurerai l'Angle ADC, qui est la distance en degrez du centre du Soleil C, au centre de Jupiter A; donc le troisiéme Angle me sera connu. Et d'ailleurs je connois le côté DC, distance de la terre au Soleil, je connoîtrai donc tout le reste, c'est-à-dire DA, distance de la terre à Jupiter; & même AC, distance de Jupiter au Soleil.

Tout ce que nous avons dit dans cette Trigonometrie, suppose les Sinus calculez; ainsi il est necessaire de connoître la méthode par laquelle on a fait ce calcul.

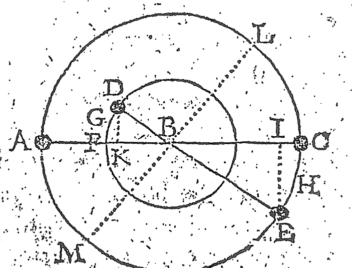
E

Corollaire.

Les circonferences sont entr'elles comme leurs Raïons; car on les peut considerer comme les Polygones réguliers d'une infinité de côtez, & par la precedente Proposition, le perimetre est au perimetre; c'est-à-dire, la circonference à la circonference, comme le Raïon est au Raïon.

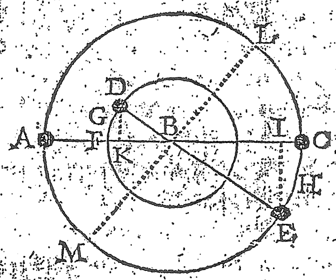
Ce Corollaire joint à la sixiéme Proposition du troisiéme Livre, est le principal fondement de la Statique. Je m'explique.

Je suppose une balance, comme ABC, dont le point fixe est B, & les deux branches BA, BC, égales : si l'on attache deux poids d'une livre chacun aux deux points A & C, on conçoit clairement qu'ils doivent demeurer



dans un parfait équilibre, car pour faire monter en une seconde de tems, si vous voulez, le poids

C, jusques en L, il faudroit que le poids A, descendît jusques en M; ainsi pendant le même temps que le corps C, pesant une livre, décriroit l'arc CL, le corps A, pesant une livre, décriroit l'arc AM. Or ces deux arcs sont égaux



à cause de l'égalité des Angles opposez aux sommets ABM, LBC, & de l'égalité des Raïons AB, BC; donc il y auroit égalité de mouvement de part & d'autre, puisque le même poids, dans le même tems, décriroit le même chemin; ainsi le poids A, aiant autant de force pour descendre que le poids C, de resistance pour monter, leurs forces sont parfaitement balancées, & ils doivent demeurer en équilibre, ce que l'experience justifie.

Mais si au-lieu d'attacher le poids A, d'une livre au point A, on l'attachoit au point F, que je suppose également éloigné des points A, B, pour lors l'équilibre seroit manifestement rompu, parce que le Raïon FB, n'étant que la moitié du Raïon BC, l'arc FGD, n'est que la moitié de l'arc CHE, quoiqu'ils aient l'un & l'autre pareil nombre de degrez; mais comme la grande circonference est double de la petite, à cause qu'un Raïon est double de l'autre, le corps C, pesant une livre descendant au point E, fera le double du chemin que fait le corps F, montant au point D. Or deux corps étant égaux en poids, si l'un fait le double du chemin que fait l'autre dans le même tems, il faut que celui qui fait le double

du chemin, ait le double de mouvement; donc il y aura du côté du poids C, un mouvement double du mouvement qu'aura le poids F; donc il aura pour descendre le double de la force, que le poids F, aura pour lui resister; donc il descendra en effet & rompra l'équilibre.

Mais si au lieu d'attacher au point C, un poids d'une livre, je m'avise d'y attacher un poids de demi-livre, je dis que le poids F d'une livre, & ce nouveau poids C, d'une demi-livre, doivent rester en équilibre, parce qu'il y aura de part & d'autre égalité de mouvement.

Car l'on conçoit clairement que si deux corps sont égaux en poids, & que l'un pendant une seconde, fasse le double du chemin que fait l'autre, il faut qu'il ait le double de mouvement, puisque la même masse se mouvant une fois plus vîte dans le même temps, doit avoir une fois plus de force. Par le même principe, si un corps pesant une demi-livre, fait pendant une seconde le double du chemin que fait un corps pesant une livre, il faut bien qu'il y ait de part & d'autre égalité de mouvement: car si le corps pesant demi-livre, avoit pesé une livre, & qu'il eût fait le double du chemin, l'on vient de voir qu'il auroit eu le double du mouvement; donc ne pesant que demi-livre, & faisant le double du chemin, il a autant de mouvement que le corps pesant une livre, qui n'en fait que la moitié. Or dans la Figure, l'arc CHE, est double de l'arc FGD, parce qu'un Raïon est double de l'autre; donc si le poids en E, n'est que la moitié du poids en D, il y aura égalité de mouvement, & par consequent équilibre.

D'où suit cette Proposition fondamentale des Méchaniques.

Deux poids sont en équilibre, lorsqu'ils sont en Raison réciproque de leurs distances au point fixe. C'est-à-dire, lorsque le poids F, est au poids en C, comme la distance BC, est à la distance BF.

I

il fut bien surpris de recevoir le lendemain matin un Billet de Madame la Duchesse du Maine, qui l'exhortoit à venir sur le champ, pour examiner avec elle, si les reflexions qu'elle avoit faites pendant la nuit sur cette merveilleuse proprieté, pouvoient être de quelque usage. Il partit aussi-tôt, & fut bien paié de son voiage, par le plaisir qu'il eut de voir que cette jeune Princesse avoit parfaitement démêlé tout le fond de la démonstration, & l'avoit mis dans une évidence plus parfaite que tout ce qu'il avoit jamais vû sur cette matiere. Voici precisément ce qu'elle dit à M. de Malezieu.

Je considere les quatre nombres 2, 4, 3, 6, qui sont en Proportion, parce que le premier est la moitié du second, comme le troisiéme est la moitié du quatriéme; & je veux trouver pourquoi le produit de 2 par 6, est égal au produit de 4 par 3.

Pour cela, je vois d'abord que si je multiplie 2 par 6, ce produit, qui est le produit des Extrêmes, doit être double du produit de 2 par 3, parce que 6 est double de 3.

Mais si au lieu de prendre ce produit de 2 par 3, ou 3 par 2, qui n'est que la moitié du produit des Extrêmes, je m'avise de prendre le produit de 3 par 4; il faudra bien que ce produit de 3 par 4, soit double du produit de 3 par 2, puisque 4 est le double de 2, de même que 6 est le double de 3; donc le produit de 3 par 4, étant double du produit de 3 par 2, qui n'est que la moitié du produit des Extrêmes; ce produit de 3 par 4, sera necessairement égal au produit des Extrêmes, c'est-à-dire que le produit des Extrêmes sera égal au produit des Moiens.

Pour faire voir que cette admirable démonstration trouvée par Madame la Duchesse du Maine, ne laisse rien à desirer, & qu'elle revient à la démonstration generale que nous avons donnée par lettres, il n'y a qu'à nommer les quatre nombres qu'elle avoit choisis, & suivre la démonstration.

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ 2, & 4 :: & 3; & 6. \end{matrix}$$

2 multiplié par 6, est à 2 multiplié par 3, comme 6 est à 3, ou $AD, AC :: D, C.$

3 multiplié par 4, est à 3 multiplié par 2, comme 4 est à 2, ou $CB, CA :: B, A.$

Or par la supposition, 4 est à 2, comme 6 est à 3, ou $B, A :: D, C.$

Donc 2 multiplié par 6, est à 2 multiplié par 3, comme 3 multiplié par 4, à 2 multiplié par 3, ou AD, AC, ou $CA :: CB, CA.$

Donc 2 multiplié par 6, égal à 3 multiplié par 4, ou $AD = CB.$

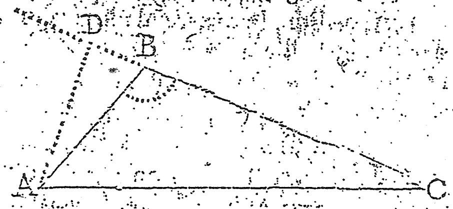
Il suit de cette Proposition, que si quatre termes quelconques sont tels, que le produit des Extrêmes soit égal au produit des Moiens, ces quatre termes seront proportionels; puisque ces deux produits, comme AD, BC, auront necessairement même rapport à une grandeur qui sera BD, & en remontant par degrez, la démonstration precedente, on trouvera que $A, B :: C, D.$

Cela étant, quand une proportion me sera donnée, je puis y faire tels changemens qu'il me plaira sans la détruire, toutes les fois que je conserverai l'égalité du produit des Moiens & des Extrêmes.

II

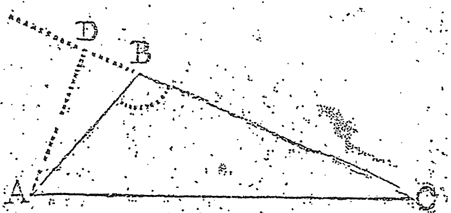
F

Le quarré de la base d'un Angle obtus, est égal aux quarrez des deux côtez, plus deux fois le Rectangle du côté sur lequel on a mené une perpendiculaire, & de la partie de ce côté prolongé comprise entre la perpendiculaire & le Sommet de l'Angle obtus.



Soit l'Angle obtus ABC, soit mené du point A, la perpendiculaire AD, sur le côté CB, prolongé en D; je dis que le quarré de la base AC, est égal au quarré du côté AB, & au quarré du côté BC; plus deux fois le Rectangle du côté BC, par la ligne BD.

Je nomme la base, . . . AC . . . . x.
Le côté, ... AB . . . . y.
Le côté, ... CB . . . . z.
La ligne, ... BD . . . . u.
La ligne CD, sera . . . . . $z + u$.



A cause du triangle rectangle ADB, le quarré de la ligne AB, est égal au quarré de la ligne AD, plus le quarré de la ligne DB; donc le quarré de la ligne AD, est égal au quarré de la ligne AB, moins le quarré de la ligne DB.

C'est-à-dire, que le quarré de la ligne AD, est égal à $yy - uu$.

Or à cause du triangle Rectangle ADC, si au quarré de la ligne AD, qui est $yy - uu$, j'ajoute le quarré de la ligne DC; c'est-à-dire, le quarré de $z + u$, qui est $zz + 2zu + uu$, comme on verra tout-à-l'heure.

J'aurai $zz + 2zu + uu + yy - uu$, c'est-à-dire, que j'aurai $zz + 2zu + yy = xx$.

C'est-à-dire, le quarré de la ligne AC, égal au quarré de la ligne AB, & au quarré de la ligne CB: plus deux Rectangles de z par u, c'est-à-dire, de la ligne BC, par la ligne BD.

Que le quarré de $z + u$, soit $zz + 2zu + uu$, cela est évident. Il n'y a qu'à multiplier $z + u$ par $z + u$, suivant qu'il a été enseigné dans le Traité de l'Arithmetique par Lettres.

Mais afin de donner ici les élemens des principales méthodes qui ont été inventées pour mesurer les grandeurs, & particulierement les Solides; il faut dire un mot de la fameuse découverte du Pere Guildin Jesuite, touchant l'admirable proprieté du centre de gravité.

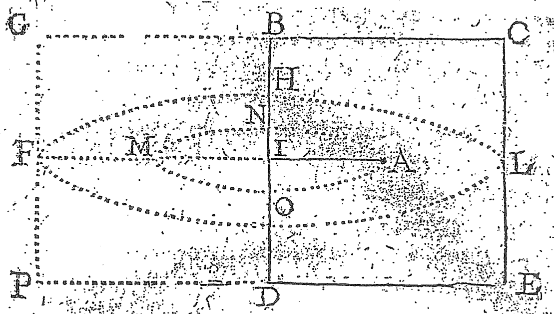
On appelle centre de gravité d'une quantité quelconque, soit Ligne, Surface, ou Solide, un point dans cette quantité, autour duquel toutes les parties de cette même quantité sont dans un parfait équilibre; par exemple, si une surface quarrée, est posée sur la pointe d'une aiguille, il n'y a qu'un seul point dans cette surface, où elle puisse rester sans incliner de côté ni d'autre, & ce point est appellé le Centre de gravité.

De même, le centre de gravité d'une ligne droite, est le point du milieu de cette ligne, par lequel, si on la supposoit suspendue, elle n'inclineroit ni d'un côté ni d'autre.

Ce n'est pas toujours une chose aisée, que de trouver geometriquement le centre de gravité de certaines grandeurs; mais il y en a une infinité, dont on le trouve très facilement: Et voici l'usage qu'en a fait ce sçavant Religieux.

Soit une surface rectangle *BCDE*, dont le centre de gravité soit le point *A*.

Soit mû ce Rectangle circulairement sur l'Axe im-



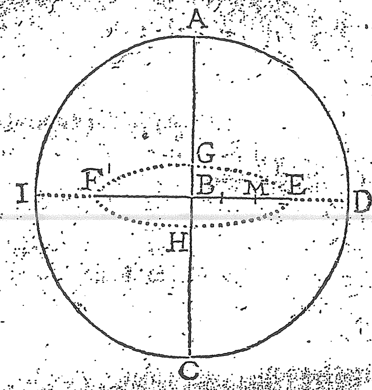
mobile *BD*, ce Rectangle décrira un Cylindre, & le centre de gravité décrira le cercle *MNAO*, dont le raion sera *AI*. Le Pere Guildin appelle la circonference de ce cercle, la Voie de la Circulation du centre de gravité; ou tout court, la Voie de Circulation.

Il démontre, que si l'on prend une ligne droite égale à la Voie de Circulation, pour hauteur d'un Parallelipipede dont le Rectangle *BCDE*, soit la base; ce Parallelipipede sera égal au Cylindre.

Il démontre de même que la ligne *GP*, décrivant la surface cylindrique, & le point *F*, centre de gravité de cette ligne, décrivant le cercle *FHLO*; si l'on prend une ligne droite égale à cette circonference, & qu'on en fasse un Rectangle avec la ligne *GP*, ce Rectangle sera égal à la superficie cylindrique.

Ceux qui voudront cultiver cette méthode, s'appercevront aisément de son immense fécondité, non seulement pour mesurer toutes les surfaces & tous les Solides ordinaires; mais pour en mesurer une infinité où les autres méthodes demeurent le plus souvent tout court: il nous suffit ici d'avoir indiqué ce beau principe, dont on peut voir, si l'on veut, une très ample explication dans le Cours de Mathematiques du Pere de Challes; & nous allons seulement en donner un exemple qui fera juger du reste.

Soit une demi-circonference *ADC*, son diametre *AC*, & le raion *BD*; divisant la demi-circonference en deux parties égales au point *D*. Si la demi-circonference tourne sur l'Axe immobile *AC*, elle décrira une superficie spherique, & je dis que cette superficie est quadruple de l'Aire du cercle, qui a *AC*, ou *ID*, pour diametre.



Ce qu'on appelle donc le centre de gravité de la demi-circonference, est un point, comme *E*, dans le raion *BD*; en telle sorte que supposant le raion *BD*, sans pesanteur, si ce point *E*, est posé sur une aiguille perpendiculaire à l'horison, la demi-circonference demeure parallele à l'horison, sans incliner de côté ni d'autre. Or l'on démontre dans la Statique, que pour avoir ce centre de gravité, ou autrement la ligne *BE*; il faut trouver une troisiéme proportionelle au quart de cercle *AD*, & au raion *BD*; c'est-à-dire, que comme le quart de cercle *AD*, est au raion *BD*, ainsi *BD*, est à *BE*. Cela supposé,

Je donne à la demi-circonference *ADC*, quarante-quatre parties.

Par la proportion d'Archimede, le diametre *ID*, en aura 28.

Le demi-diametre en aura 14.

Le quart de cercle *AD*, en aura 22.

Je fais donc comme 22 à 14, ainsi 14 à $8 + \frac{10}{11}$ qui est la ligne *BE*; cette ligne *BE*, suivant ce qui a été dit ci-dessus, est le raion de la Voie de Circulation *EHFG*. Pour avoir la valeur de cette Voie ou circonference, je fais comme 7, est à 22, suivant Archimede, ainsi $16 + \frac{20}{11}$ qui en est le diametre à 56, qui est la valeur de la Voie de Circulation.

Par le principe du Pere Guildin, je multiplie la Voie de Circulation 56 par la demi-circonference *ADC*, qui est 44, vient au produit 2464, qui doit être la valeur de la superficie spherique. Voions maintenant si elle est quadruple de l'Aire du grand cercle.

Pour avoir l'Aire de ce cercle, l'on multiplie sa demi-circonference 44 par le demi-diametre 14; vient pour l'Aire 616, dont le quadruple est précisément 2464. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION.

Si l'on a deux Figures, deux Solides, en un mot, deux grandeurs homogenes à comparer, & que ces deux Figures ou Solides, étant de même hauteur, les élemens de l'une ne décroissent point, pendant que les élemens de l'autre décroîtront toujours en Raison doublée de la Raison des hauteurs; la Figure ou Solide dont les élemens ne décroissent point, sera triple de celle dont les élemens décroissent.

La démonstration ordinaire est fort embrouillée; en voici une par Arithmetique, qui est plus à la portée de tout le monde.

Je suppose deux Figures de même hauteur, & que cette hauteur soit divisée en vingt parties égales; les nombres 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, qui décroissent arithmetiquement, representent les hauteurs décroissantes de la Figure.

Pour faire que l'une de ces deux Figures ait ses élemens décroissant en Raison doublée des hauteurs, il faut prendre les quarrez de ces nombres; sçavoir, 400, 361, 324, 289, 256, 225, 196, 169, 144, 121, 100, 81, 64, 49, 36, 25, 16, 9, 4, 1, 0, dont la somme est 2870.

A l'égard de la Figure dont les élemens ne décroissent pas, il faut prendre 400, quarré du plus grand nombre qui est l'élement de la base, autant de fois qu'on a pris d'élemens décroissans en Raison doublée, c'est-à-dire, 21 fois; la somme de ces élemens non décroissans sera 8400.

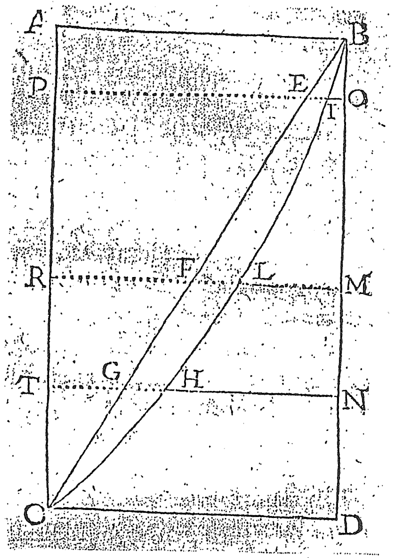
Le nombre 8400 represente donc la Figure dont les élemens ne décroissent point, & le nombre 2870 represente la Figure dont les élemens décroissent en Raison doublée des hauteurs.

Or le nombre 2870 est tant soit peu plus du tiers du nombre 8400; car son triple est 8610, qui excede 8400 de 210; c'est-à-dire, qu'en cet exemple, la Figure décroissante excede le tiers de la totale de la 120e partie de la totale, ce qui est déja fort peu de chose.

Mais si au lieu de diviser la hauteur en vingt parties égales, je l'avois divisée en 100, & que j'eusse operé, comme je viens de faire sur les vingt parties, j'aurois approché beaucoup plus près de la précision; car la somme des quarrez depuis 100 jusques à 1 inclusivement, est 338350; la somme du grand élement qui est 10000 pris cent & une fois; est 1010000; ainsi la Figure dont les élemens décroissent, n'excede le tiers de la Figure totale que de 1683, c'est-à-dire, de la six-centiéme partie de la Figure totale. Et si je veux prendre la peine de diviser la hauteur en un million de parties, je trouverai que la Figure décroissante n'excedera pas le tiers de la totale d'une six-mille-milliéme partie de la totale; en sorte que poussant toujours plus loin la division de la hauteur, je reduirai cette difference à une quantité plus petite qu'aucune quantité donnée, d'où s'ensuit la parfaite égalité entre la Figure décroissante & le tiers de la totale, en supposant le nombre des élemens indéfini, comme il l'est en effet.

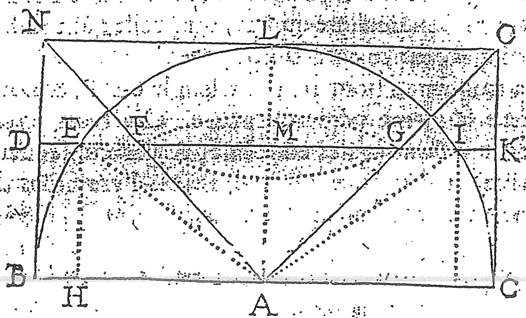
Il n'y a qu'à suivre la même methode pour démontrer, que si les élemens décroissent en Raison triplée des hauteurs, la Figure décroissante sera le quart de la Figure non décroissante.

Que si les élemens décroissent en Raison quadruplée des hauteurs, la Figure décroissante sera la cinquiéme partie de la Figure non décroissante, & ainsi à l'infini. Voila une belle carriere ouverte à la méditation.



Troisieme Proposition.

La solidité de la demi-Sphere, est égale aux deux tiers du Cylindre, qui a même base & même hauteur.



Soit supposé un Cylindre, aiant pour base un cercle dont le diametre soit *BAC*, & pour hauteur la ligne *BN*, moitié du diametre *BC*, terminée par la ligne *NLO*, égale au diametre *BC*, laquelle ligne *NLO*, est diametre du cercle opposé à la base du Cylindre. Sur le plan du Rectangle *BCON*, soit décrit le demi-cercle *BLC*, representant la demi-Sphere. Soit representé un Cone par le triangle *NAO*, lequel Cone auroit pour base un cercle aiant *NO*, pour diametre, & par consequent égal à la base du Cylindre, pour s'exprimer autrement & aider l'imagination.

Supposons que le Rectangle *BCON*, tourne sur l'axe *LA*, la ligne *NB*, décrira la surface cylindrique; le cercle *BLC*, décrira la demi-Sphere; les lignes *NA*, *AO*, décriront le Cone.

La ligne *LA*, est l'axe commun au Cylindre, au Cone & à la demi-boule. Soit encore tirée une ligne, comme *DK*, parallele à *BC*; cette ligne *DK*, tournant autour de l'axe *LA*, décrira un cercle égal à la base du Cylindre, & formera un plan qui coupera la demi-Sphere aux points *FG*: il est visible que la section *FG*, sera un cercle aiant *FG*, pour diametre.

Le Cone total *NAO*, n'est autre chose qu'une infinité de cercles posez parallelement l'un sur l'autre, dont le nombre quel qu'il puisse être est mesuré par la perpendiculaire *LA*, en sorte que si la perpendiculaire *LA*, est supposée contenir 100000 parties, le Cone *NAO*, aura 100000 cercles paralleles dans sa solidité.

Considerons maintenant que si l'on ôte du Cylindre, la solidité de la demi-Sphere, restera une espece d'écuelle, dont le profil, ou pour mieux dire, la section est representée par la Figure *NBELCO*. Cette écuelle dans sa solidité, est composée d'une infinité de plans posez parallelement l'un sur l'autre, & qui environnent la Sphere en forme de couronnes. Par exemple, quand la ligne *DK*, tourne sur l'axe *LA*, & que sa portion *FG*, décrit un des cercles du Cone, sa portion *DE*, ou *IK*, décrit autour de la Sphere, un plan qui l'entoure en forme de couronne, & qui a *DE*, pour largeur. Or l'écuelle contient necessairement dans sa solidité, autant de couronnes, qu'il y a de cercles paralleles dans la solidité du Cone, puisque le nombre en est mesuré par la même perpendiculaire *LA*, ou *NB*.

Si je puis donc faire voir que la couronne qui a *DE*, pour largeur, est égale en Aire au cercle qui a *FG*, pour diametre, la même chose s'ensuivra de toutes les autres couronnes, comparées avec leurs cercles correspondans dans le Cone, & par consequent la somme totale des couronnes qui forment l'écuelle, sera égale à la somme totale des cercles qui forment le Cone; donc la solidité de l'écuelle sera égale à la solidité du Cone; ce qui étant une fois démontré, comme le Cone *NAO*, est le tiers du Cylindre *BCON*; l'écuelle en sera pareillement le tiers, & par consequent la demi-boule en sera les deux tiers.

Je n'ai donc plus qu'à démontrer l'égalité de la couronne *DE*, & du cercle qui a *FG*, pour diametre; pour cela,

Du point *E*, soit menée la perpendiculaire *EH*, & soit tiré le Raion *EA*.

Il est visible que les lignes *DM*, *BA*, *EA*, sont égales; ainsi je puis prendre les unes pour les autres, toutes les fois qu'il me plaira.

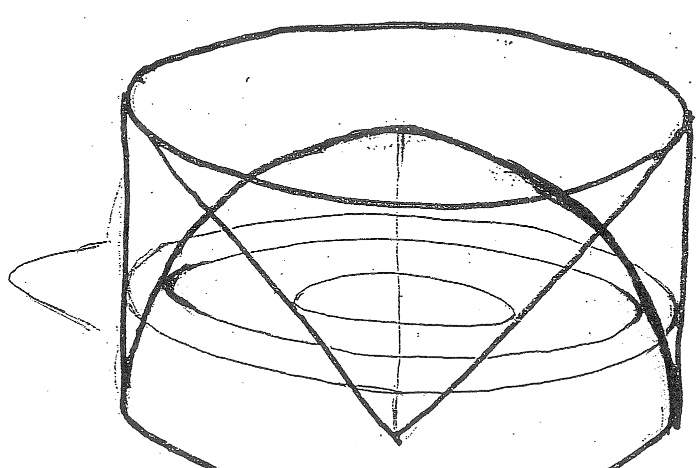
De même, les lignes *EH*, *MA*, *MF*, sont égales, parce que les lignes *AL*, *LN*, le sont aussi; je puis donc prendre pareillement les unes pour les autres.

Le triangle *EHA*, est rectangle; donc le cercle qui en aura l'Hypotenuse pour Raion, sera égal aux deux cercles, qui auront pour Raion les lignes *EH*, *HA*, par le septiéme Corollaire de la troisiéme Proposition du neuviéme Livre.

Si donc du cercle qui a *AE*, pour Raion, j'ôte le cercle qui a *AH*, pour Raion, restera la valeur de l'Aire du cercle qui a *EH*, pour Raion.

C'est-à-dire, en prenant les lignes égales, si du cercle qui a *DM*, pour Raion, j'ôte le cercle qui a *EM*, pour Raion, restera la valeur du cercle qui a *FM*, pour Raion.

Or quand j'ôte du cercle qui a *DM*, pour Raion, le cercle qui a *EM*, pour Raion, je forme la couronne qui a *DE*, pour largeur, donc cette couronne est égale à l'Aire du cercle qui a *FM*, pour Raion.



Reflexions sur la 12e proposition.

On démontre qu'une ligne droite, qui n'a aucune largeur, ne sçauroit passer entre la Tangente & le cercle. Donc l'espace qui est entre la Tangente & le cercle, est infiniment petit; & toutefois cet espace infiniment petit en lui-même, peut être divisé en une infinité d'autres plus petits, puisqu'on peut faire passer entre le cercle & la Tangente, une infinité de circonferences, qui ne se rencontrent qu'au seul point de contingence. Voila donc bien certainement un infiniment petit, divisé en une infinité d'autres. Cela est démontré; mais cela se conçoit-il bien clairement?

Tout ce qui se démontre dans les hautes speculations de Geometrie sur les asymptotes, les espaces asymptotiques, les Infiniment Petits de Messieurs de Leibniz & de l'Hospital, dont les principes sont si féconds; en un mot, tout ce qui se démontre sur l'infini, est de même nature. L'esprit humain est convaincu de certaines veritez; mais il est obligé d'avouer sa foiblesse, quand il veut comprendre, pour ainsi dire, le comment; c'est-à-dire, comment il est possible que ces veritez subsistent ensemble? Mais comme l'esprit humain est borné, & que le Createur de nos ames, ne leur a pas donné des lumieres infinies, c'est à nous à nous souvenir de notre condition. Rien ne seroit plus déraisonnable, que de vouloir nier des veritez dont nous sommes convaincus d'ailleurs, parce que nous n'en comprenons pas la liaison. Nous les comprenons ces veritez, parce que nous avons une certaine mesure de raison; nous n'en comprenons pas la liaison, parce que nous ne sommes pas Dieu; & que notre raison n'est pas infinie. On a donc grand tort de vouloir attaquer la Geometrie des Infiniment Petits, & celle des Indivisibles, parce qu'il y a de certaines choses qu'on ne comprend pas dans la nature de l'infini, qui en effet doit être incomprehensible; mais autre chose est de le comprendre, autre chose de se convaincre qu'il existe. J'avoue de bonne-foi, que je suis pleinement convaincu de la verité de la douziéme Proposition; mais j'avoue en même temps que je ne la comprends pas.

Que si je me vois obligé de reconnoître des veritez incompatibles en Geometrie, où l'esprit humain se pique de voir plus clair qu'ailleurs; à plus forte raison dois-je avoir de la soumission pour des veritez d'un ordre superieur à ma raison, & me souvenir toujours que celui qui l'a créée n'étoit pas obligé de la rendre capable de tout.

IX Livre

Reflexions sur les Incommensurables.

Rien n'est plus étonnant que ces veritez démontrées touchant les Incommensurables. La ligne *AC*, & la ligne *AD*, ont chacune une infinité d'Aliquotes pareilles, & dans ce nombre infini, je ne puis jamais en trouver une seule qui puisse être l'Aliquote des deux lignes.

Je puis prendre, par exemple, la cent-milliéme partie de la ligne *AC*, la deux-cent-milliéme, la quatre-cent-milliéme partie, & ainsi doublant toujours à l'infini, sans que jamais aucune de ces petites parties puisse être contenue précisément un certain nombre de fois dans la ligne *AD*.

Il n'est pas necessaire qu'il y ait au monde ni des quarrez, ni des triangles, ni des cercles, pour établir la verité des Démonstrations geometriques; il suffit de leur possibilité. Quand Dieu n'eût jamais créé la matiere, elle eût toujours été possible. Un être intelligent à qui il lui auroit plû reveler les veritez geometriques, les eût parfaitement entendues. Cet Etre Souverain, source de toute verité, auroit bien sçû du moins qu'un triangle possible, étoit moitié d'un parallelogramme possible. On ne peut pas même pousser assez loin l'extravagance, pour oser dire, que quand bien il n'y auroit à present dans l'Univers aucun Agent créé qui pût tracer un quarré parfait, il fût impossible à celui qui a créé la matiere, d'en enfermer une petite portion dans un espace parfaitement quarré; ainsi la verité des Incommensurabes subsiste invinciblement.

Voila donc les points démontrez impossibles. Mais voici bien autre chose.

Si le point est impossible, qu'est-ce donc que la rencontre des deux côtez qui forment l'Angle du quarré? Si le point est impossible, le cercle est impossible. Car si Dieu forme une boule parfaite, & qu'il la pose sur un plan parfait, le point de contingence aura-t-il quelque étendue? S'il a quelque étendue, il est surface ou pour le moins ligne; ainsi la tangente & le cercle auront une étendue commune, contre ce qui est démontré dans la 11e Proposition du troisiéme Livre. Direz-vous, que Dieu ne sçauroit faire un cercle parfait? Vous aurez plûtôt fait de dire que Dieu n'est pas, que de borner si ridiculement sa puissance.

D'ailleurs quand je considere attentivement l'existence des êtres, je comprens très clairement que l'existence appartient aux unitez, & non pas aux nombres. Je m'explique.

Vingt hommes n'existent que parce que chaque homme existe; le nombre n'est qu'une dénomination exterieure, ou pour mieux dire, une repetition d'unitez auxquelles seules appartient l'existence; il ne sçauroit jamais y avoir de nombres, s'il n'y a des unitez; il ne sçauroit jamais y avoir vingt hommes, s'il n'y a un homme: cela bien conçû, je vous demande, ce pied cubique de matiere, est-ce une seule substance, en sont-ce plusieurs? Vous ne pouvez pas dire que ce soit une seule substance; car vous ne pourriez pas seulement le diviser en deux: si vous dites que c'en sont plusieurs; puisqu'il y en a plusieurs, ce nombre quel qu'il soit, est composé d'unitez; s'il y a plusieurs substances existantes, il faut qu'il y en ait une, & cette une ne peut en être deux; donc la matiere est composée de substances indivisibles.

Voila notre raison réduite à d'étranges extremitez. La Geometrie nous démontre la divisibilité de la matiere à l'infini, & nous trouvons en même temps qu'elle est composée d'indivisibles. Humilions-nous encore une fois, & reconnoissons qu'il n'appartient pas à une créature, quelque excellente qu'elle puisse être, de vouloir concilier des veritez, dont le Créateur a voulu lui cacher la compatibilité. Ces dispositions nous rendront plus soumis aux Mysteres, & nous accoutumeront à respecter des veritez qui sont par leur nature impenetrables à notre esprit, que nous venons de trouver assez borné, pour ne pouvoir pas même concilier des Démonstrations mathematiques.