

# LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DE LA FORCE D'HELMHOLTZ ET LES AVATARS DE L'ÉQUATION DE LA CONSERVATION DE LA FORCE VIVE

Jacqueline LUBET, IREM de Lille

## Résumé

Helmholtz est considéré comme l'un des fondateurs de la science de l'énergie. Dans un mémoire présenté en 1847, il a démontré mathématiquement que la nature renferme une réserve de « force » inaltérable et que cette force se présente sous deux formes : « force vive » et « force de tension », ces termes correspondant à ce que nous appelons maintenant énergie cinétique et énergie potentielle. Helmholtz s'appuie sur l'équation mathématique de la conservation de la force vive, déjà présente chez les physiciens mathématiciens et les ingénieurs français. On examine quelques textes où cette équation est introduite et utilisée de différentes manières, puis on étudie la démonstration mathématique d'Helmholtz et son apport essentiel et original, l'extension du principe à tous les phénomènes naturels par la création du concept de « force de tension ». La mathématisation est, chez lui, fortement tributaire d'un cadre conceptuel typique des traditions germaniques. L'examen de la controverse entre Helmholtz et Clausius, à propos du mémoire d'Helmholtz, met en évidence les utilisations différentes qu'ils font de l'équation de la conservation de la force vive, correspondant de fait à des manières différentes de relier physique et mathématiques.

## Introduction

En 1847 est édité à Berlin, après sa présentation en août à la Société de physique de la ville, un mémoire intitulé *Über die Erhaltung der Kraft* (Sur la conservation de la force). L'auteur, Hermann Helmholtz, est alors un jeune médecin physiologiste allemand de 26 ans. Ce mémoire est reçu avec enthousiasme par les jeunes scientifiques regroupés dans la Société de physique de Berlin, mais il suscite la méfiance, voire le rejet, des physiciens plus anciens. Par la suite il sera considéré comme un pas important dans l'élaboration du principe de la conservation de l'énergie et fera classer Helmholtz parmi les fondateurs de ce principe<sup>1</sup> ; en effet, on y trouve une démonstration mathématique de celui-ci, conçu comme devant s'appliquer à la totalité des phénomènes naturels. Pour cette démonstration, Helmholtz s'appuie sur le principe déjà ancien de la conservation de la force vive (la force vive désigne à cette époque la quantité  $\sum mv^2$ , somme, pour un système de corps, des produits des masses par les carrés des vitesses ; elle sera appelée plus tard énergie cinétique, au facteur  $\frac{1}{2}$  près) ; il introduit le concept nouveau de *force de tension* (qui correspond à ce qui sera appelé plus tard énergie potentielle). Le principe de la conservation de la force vive avait eu plusieurs expressions précédemment, dont on donnera un aperçu. Ces expressions sont encore vers 1850 un élément important de la distinction entre une *mécanique des mathématiciens* (c'est la mécanique rationnelle, ou mécanique analytique) et une *mécanique des ingénieurs* (mécanique pratique). Dans la première, les situations ou les phénomènes considérés sont très généraux, choisis pour leur intérêt mathématique, et les résultats mathématiques obtenus n'ont pas d'application pratique immédiate ; la seconde, au contraire, a un but utilitaire. Helmholtz, comme on le verra, utilise les diverses expressions de la conservation de la force vive, et rapproche ainsi ces deux voies de la mécanique. En puisant à la fois dans plusieurs traditions, il jette les bases d'une dynamique nouvelle.

---

<sup>1</sup> Voir, sur ce point : T. S. Kuhn, *La tension essentielle. Tradition et changement dans les sciences*, 1977, tr. fr., Paris, Gallimard, 1990, Ch. IV, "Un exemple de découverte simultanée : la conservation de l'énergie", pp. 111-156.

La réception du mémoire d'Helmholtz a soulevé des critiques. On examinera la controverse avec Rudolf Clausius, qui met justement en évidence des différences dans les manières d'appréhender la relation entre mathématiques et physique.

Le mémoire d'Helmholtz *Sur la conservation de la force* a été édité en 1847 chez Reimer, un éditeur de Berlin (Poggendorff, qui dirigeait les *Annalen der Physik und Chemie*, dites Annales de Poggendorff, avait refusé de le publier). Par ailleurs, on le trouve dans les oeuvres complètes d'Helmholtz. Ce dernier a rajouté pour cette édition quelques notes et des appendices, clairement signalés. Actuellement il existe aussi une traduction en anglais, et une traduction en français, faite en 1869 par Louis Pérard, et revue par Helmholtz. Elle comporte des modifications par rapport au texte initial, témoignant, d'une part des conceptions ayant cours en France en 1869, d'autre part de l'évolution des conceptions d'Helmholtz ; par ailleurs, elle est parfois assez loin du texte allemand. Le texte que l'on va regarder ici est une traduction faite directement à partir du texte allemand.

Il est important, lorsqu'on étudie le travail d'un scientifique, ou même seulement l'un des aspects de sa pratique (la conceptualisation, la mathématisation, l'expérimentation), de considérer les relations de cette pratique avec les conceptions du monde et de la science du scientifique<sup>2</sup>. Si quelqu'un, ayant une formation actuelle en physique, lit le titre du mémoire d'Helmholtz : *Über die Erhaltung der Kraft*, il commencera à traduire *Au sujet de la conservation de*, puis, pour la traduction de *Kraft*, il trouvera plusieurs sens possibles, parmi lesquels *Énergie*. Bien sûr, pensera-t-il, il s'agit de la conservation de l'énergie, c'est cela qui se conserve, et le titre est donc *Au sujet de la conservation de l'énergie*. La lecture du mémoire lui-même risque alors de le plonger dans la plus grande perplexité. On ne peut en effet comprendre ce texte qu'en relation avec le contexte culturel scientifique germanique contemporain et, plus généralement, les conceptions du monde et de la science d'Helmholtz. Le concept d'énergie n'avait pas encore émergé, le mémoire d'Helmholtz fut d'ailleurs un des facteurs qui contribuèrent à son émergence. Le terme de *Kraft*, que nous traduisons ici par force, recouvre pour Helmholtz plusieurs sens différents, dont aucun n'est véritablement encore tout à fait l'énergie. On donnera quelques indications sur le contexte culturel et scientifique dans lequel Helmholtz a travaillé.

Le mémoire *Sur la conservation de la force* est composé d'une introduction, en partie philosophique, de deux chapitres dans lesquels Helmholtz établit le principe de la conservation de la force, puis de quatre chapitres dans lesquels il examine l'application de ce principe à l'ensemble des domaines de la physique. Il conclut avec le cas des organismes vivants, motif présumé de la rédaction du mémoire.

## *Le contexte scientifique germanique ; la formation d'Helmholtz*

Helmholtz a écrit ce mémoire dans le contexte de la science allemande des années 1840, où l'on trouve, à côté de la *nouvelle physique* inaugurée par Ohm à la fin des années 1820, des conceptions et des pratiques se rattachant plus ou moins à la *physique des essences* des années 1800-1830, liée à la *Naturphilosophie* de Schelling et Goethe, ou à sa variante empiriste<sup>3</sup>. L'influence du philosophe Immanuel Kant (1724-1804) est importante chez les scientifiques du

<sup>2</sup> On va ici s'intéresser principalement à la mathématisation dans le mémoire d'Helmholtz. Pour une étude plus complète de celui-ci, on pourra se reporter à l'ouvrage suivant : B. Pourprix et J. Lubet, *À l'aube de la physique de l'énergie. Helmholtz rénovateur de la dynamique*, coll. Inflexions, Vuibert/Adapt, octobre 2004. Les traductions du mémoire d'Helmholtz données ici ont pour la plupart été faites par les auteurs à l'occasion de l'écriture de ce livre.

<sup>3</sup> Chez les *Naturphilosophen*, l'hostilité au mécanisme, issue de Kant, s'accompagne, contrairement aux idées de Kant, du rejet du langage mathématique. Jugeant que le mécanisme comme le langage mathématique sont incapables de capter l'essence « *dynamique* » des phénomènes et de permettre une vraie représentation de la réalité physique, les physiciens romantiques prétendent, eux, par leur approche intuitive, capter l'essence des phénomènes et donner une vraie représentation de la réalité physique. On peut cependant, dans la « *physique des essences* » de cette période, distinguer deux courants complémentaires, l'un très lié à la *Naturphilosophie*, l'autre empiriste. Le courant empiriste accorde un statut privilégié à l'expérience. Le travail expérimental a pour ces physiciens un caractère essentiellement qualitatif.

monde germanique et le restera, sous une forme ou une autre, pendant plusieurs décennies. On retrouvera chez Helmholtz l'influence de Kant, notamment dans l'introduction du mémoire que nous étudions, et Helmholtz en parle lui-même plus tard dans plusieurs écrits. Kant s'est fait le défenseur de la « vraie » voie de la connaissance, la voie *dynamiste*, qui explique tous les phénomènes physiques par la combinaison de forces primitives attractives et répulsives. La matière est l'apparence sous laquelle se manifestent ces forces primitives et le jeu de ces forces engendre la diversité des substances pondérables et impondérables<sup>4</sup>. Suivant Kant, notre concept de matière n'est rien d'autre que notre concept de force et la matière remplit l'espace (de façon continue) par une force répulsive dont le degré peut être différent dans des substances différentes. Les corps possèdent aussi une force attractive, conforme à la quantité de matière, et la combinaison des deux forces donne la matière telle que nous la concevons. Ces conceptions sont tout à fait différentes de celles des scientifiques laplaciens de Paris. Ces derniers sont mécanistes et atomistes. Ils considèrent la matière comme constituée de corpuscules séparés par du vide, et la lumière, la chaleur, l'électricité comme des fluides formés de corpuscules impondérables ; ils se représentent tous les phénomènes à l'image des phénomènes astronomiques, comme produits par des forces à distance et obéissant aux lois de la mécanique ; enfin, ils ont des conceptions statiques, donnant au repos une place privilégiée. Au début du 19<sup>ème</sup> siècle, ils obtiennent de grands succès (Laplace, Fourier, Poisson).

Vers la fin des années 1820 en Allemagne, les travaux de Georg Simon Ohm sur les phénomènes galvaniques (c'est-à-dire l'électrocinétique) qu'il cherche à mathématiser, marquent le début d'une nouvelle attitude en physique, que des historiens ont qualifiée de *physique théorique* par opposition à la *physique des essences*. Associant étroitement l'explication physique et la description mathématique, elle adopte explicitement une méthode hypothético-déductive et se préoccupe de l'exactitude des mesures, en prenant souvent pour référence la physique mathématique française. Par ailleurs, au XIX<sup>ème</sup> siècle, il existe dans plusieurs universités allemandes des séminaires en sciences de la nature, fondés à la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle en vue de la formation des professeurs du secondaire ; ces séminaires, en même temps, se sont orientés vers un approfondissement des connaissances scientifiques. Certains cherchent à combiner les enseignements de mathématiques et de physique, cette dernière sur le modèle de la « nouvelle physique » mathématique et théorique<sup>5</sup>. On trouve donc, vers 1845, un paysage assez contrasté parmi les physiciens. La nouvelle physique, inaugurée par Ohm à la fin des années 1820, a bien pris son essor, mais les visions du monde et de la science de nombreux physiciens, surtout les plus âgés, en diffèrent encore. Ils rejettent officiellement fortement la *Naturphilosophie* et tout ce qui paraît y ressembler, mais acceptent mal l'intervention des mathématiques dans les sciences de la nature. Pour tous, jeunes et anciens, l'arrière-plan culturel est le dynamisme, accompagné de l'idée d'une unité de la nature. Cet arrière-plan sera beaucoup plus favorable que le mécanisme des laplaciens à l'émergence du concept d'énergie.

En 1845 les jeunes scientifiques autour d'Helmholtz sont dans le courant de la nouvelle physique, cherchent à mathématiser les lois, ont le souci d'expériences précises, tout en restant culturellement influencés par cette idée de l'unité de la nature. Helmholtz lui-même a une formation de médecin (le passage par l'école de médecins militaires permettant de faire des études scientifiques en étant pris en charge financièrement). Il fait des recherches en physiologie, au début sous la direction de Johannes Müller<sup>6</sup>. Pendant ses études, Helmholtz, grâce à un poste d'assistant-

<sup>4</sup> Dans les *Premiers Principes métaphysiques de la science de la nature* (1786), Kant applique le cadre épistémologique qu'il a développé dans la *Critique de la raison pure* (notamment les catégories) au concept de matière. Il veut démontrer ainsi la possibilité de la science du mouvement.

<sup>5</sup> Sur ce thème, voir K. M. Olesko, *Physics as a calling. Discipline and practice in the Königsberg seminar for physics*, New York, Cornell University Press, 1989.

<sup>6</sup> La nomination à Berlin en 1833, de Johannes Müller, professeur d'anatomie et de physiologie, a été un signe de l'évolution de la médecine, d'une conception « romantique », inspirée plus ou moins par la *Naturphilosophie*, vers une science déductive, orientée par la théorie.

bibliothécaire, s'est autoformé en mathématiques et en physique. Il commence son service militaire actif comme médecin militaire à Potsdam le 1er octobre 1843. Comme il a beaucoup de temps libre, il installe un petit laboratoire, où il continue des recherches en physiologie, notamment sur le métabolisme dans le muscle en lien avec la chaleur dégagée et le travail effectué. À l'occasion d'un congé de six mois, qu'il passe à Berlin, pour préparer son examen d'État, il est invité par le physicien Heinrich Gustav Magnus à travailler dans son laboratoire. Il devient alors un membre actif de la communauté scientifique allemande. En janvier 1845 un groupe d'étudiants-chercheurs autour de Magnus fonde la Société de physique de Berlin. Helmholtz rencontre en décembre 1845 Emil du Bois-Reymond, physiologiste, ancien élève de Müller comme lui, et celui-ci l'introduit dans la nouvelle Société<sup>7</sup>. C'est cette Société qui publiera chaque année, à partir de 1846, les *Fortschritte der Physik (Progrès de la physique)*, revue composée de recensions d'articles parus dans un grand nombre de revues européennes et américaines, classées par thèmes, et accompagnées de commentaires. Helmholtz y participera pendant de nombreuses années. Helmholtz est alors très proche des autres anciens élèves de Müller. Ils forment tous ensemble un groupe d'amis. Une de leurs principales préoccupations est de relier la physiologie à la physique et de montrer ainsi l'inutilité du concept de *force vitale*. Ce souci d'union entre la physiologie et la physique, déjà sensible dans les recherches d'Helmholtz en physiologie, est un élément important dans la genèse du mémoire que nous étudions. Dans le discours autobiographique qu'il prononce en 1891 à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire, Helmholtz déclare :

Les jeunes gens sont prêts à s'attaquer tout de suite aux problèmes les plus importants, et je m'attaquais ainsi à la question compliquée de la nature de la force vitale. La plupart des physiologistes à ce moment-là, pour sortir de la difficulté, avaient suivi la voie de Stahl selon laquelle, tandis que ce sont les forces physiques et chimiques des organes et des substances du corps vivant qui agissent sur lui, il existe une âme vitale y résidant, ou une force vitale, qui pourrait relier ou délier l'activité de ces forces ; et que, après la mort, l'action libre de ces forces produit la décomposition, tandis que, pendant la vie, leur action est continuellement sous le contrôle de l'âme de la vie. J'avais le sentiment qu'il y avait quelque chose contre nature dans cette explication, mais j'avais beaucoup de difficulté à mettre ma crainte sous la forme d'une question déterminée. Je trouvais finalement, dans les dernières années de mes études, que la théorie de Stahl assignait à chaque corps vivant la nature d'un mobile perpétuel (...) Dans mon essai *Sur la conservation de la force*, mon but était principalement de donner un examen critique et un arrangement des faits au bénéfice des physiologistes<sup>8</sup>.

Pour Helmholtz, si un corps possédait une force vitale, il serait animé d'un mouvement perpétuel, c'est-à-dire qu'il pourrait produire indéfiniment du travail sans rien consommer. Montrer la généralité complète de l'impossibilité du mouvement perpétuel (soit établir la conservation de la force) est donc un moyen d'établir l'inexistence de la force vitale.

### *La structure de la démonstration mathématique du principe*

Dans l'introduction, Helmholtz nous donne sa conception de la physique ou plus généralement des sciences de la nature :

La mission de ces sciences, c'est d'abord de chercher les lois par lesquelles les processus particuliers de la nature peuvent être ramenés à des règles générales, et ensuite retrouvés à partir de ces dernières. Ces règles, par exemple la loi de la réfraction ou de la réflexion de la

<sup>7</sup> Emil du Bois-Reymond est le frère aîné du mathématicien Paul du Bois-Reymond.

<sup>8</sup> H. Helmholtz, "An autobiographical sketch, An address delivered on the occasion of his Jubilee, 1891", in *Selected Writings of Hermann von Helmholtz*, edited, with Introduction, by Russell Kahl, Wesleyan University Press, Middletown, Connecticut, 1971, pp. 381-392, p. 385 (traduction personnelle à partir du texte anglais).



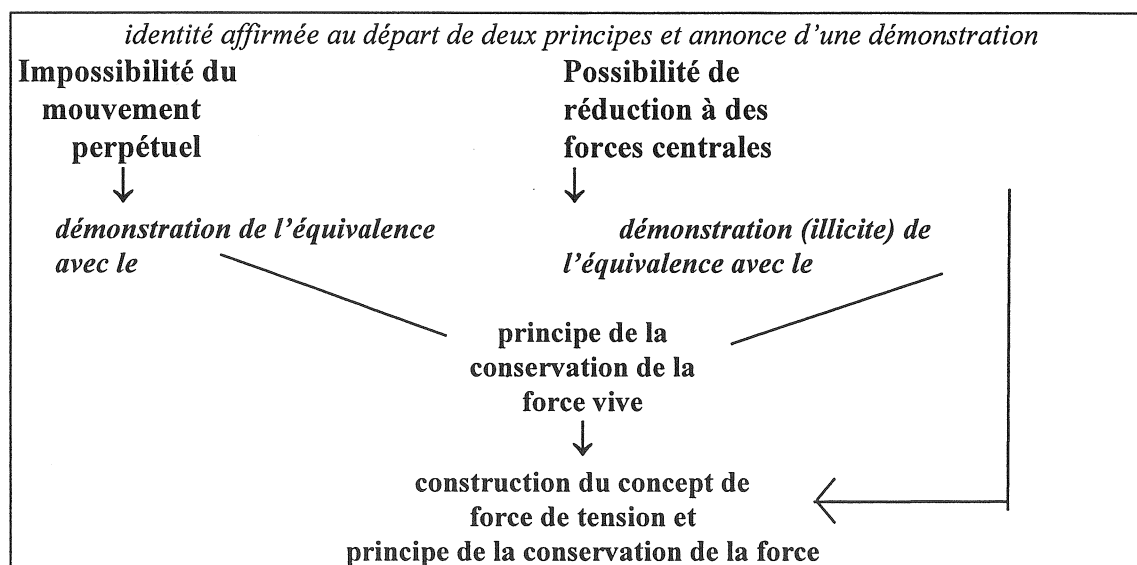
lumière, la loi de Mariotte et de Gay-Lussac pour le volume des gaz, ne sont évidemment rien que des concepts collectifs généraux, qui embrassent un ensemble de phénomènes. La recherche de ces lois est la tâche de la partie expérimentale de nos sciences. Leur partie théorique, en revanche, cherche à trouver les causes inconnues des processus à partir de leurs effets sensibles ; elle cherche à les saisir selon la loi de la causalité. Nous sommes contraints et autorisés à entreprendre ces études par le principe que chaque changement dans la nature doit avoir une cause suffisante<sup>9</sup> (...)

Il distingue la science expérimentale, qui découvre « des règles générales », telles les lois relatives au volume des gaz, qui ne sont en quelque sorte que des descriptions utiles des phénomènes, que des « conceptions générales qui embrassent un ensemble de phénomènes ». Elles sont relatives à un domaine particulier et ne donnent pas la cause profonde des phénomènes. Mais « le but final des sciences théoriques est de trouver les causes constantes des phénomènes », et, dans le mémoire, Helmholtz fait oeuvre de physicien théoricien. Pour lui, qui s'inspire ici des *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* de Kant, les objets du monde extérieur sont constitués de matière et de force :

La science considère les objets du monde extérieur selon deux abstractions différentes : d'abord, selon leur simple existence, sans tenir compte de leurs effets sur d'autres objets ou sur nos organes des sens ; ces objets en tant que tels, elle les qualifie de matière. L'existence de la matière en soi est donc pour nous une existence inerte et sans effet (...) Mais les objets de la nature ne sont pas sans effets, et même, nous n'en prenons connaissance, généralement, que par les effets qu'ils produisent sur nos organes des sens, en inférant de ces effets un agent. Si donc nous voulons appliquer le concept de matière à la réalité, nous ne pouvons le faire qu'en lui adjoignant une deuxième abstraction dont nous avons voulu auparavant l'abstraire : la capacité d'exercer des effets, c'est-à-dire en lui attribuant des forces (p. 14).

Pour Helmholtz, donc, les causes profondes des phénomènes sont les forces, avec un sens donné au mot force qui n'est pas celui que nous lui donnons maintenant, un sens qui s'apparenterait plus à l'énergie, l'énergie étant la face quantifiée et mesurable de la force, concept plus métaphysique. « Le problème des sciences physiques consiste à ramener tous les phénomènes naturels à des forces invariables, attractives et répulsives, dont l'intensité dépend de la distance des centres d'action ».

On peut représenter ainsi la structure de la démonstration du principe :



<sup>9</sup> H. von Helmholtz, "Über die Erhaltung der Kraft. Eine physikalische Abhandlung", in *Hermann von Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen*, Leipzig, 1882, vol.1, pp. 12 -75, p. 13.

Les passages suivants permettent de repérer cette structure. Les deux points de départ possibles et leur identité sont présentés dès le début de l'introduction :

On peut entreprendre la déduction des propositions établies ci-dessous à partir de deux points de départ : soit à partir de la proposition qu'il ne peut pas être possible de gagner indéfiniment de la force de travail au moyen des actions mutuelles de n'importe quelle combinaison de corps de la nature ; soit à partir de l'hypothèse que toutes les actions de la nature doivent être ramenées à des forces attractives et répulsives dont l'intensité ne dépend que de la distance des points agissant l'un sur l'autre. L'identité de ces deux propositions sera montrée au commencement du mémoire lui-même. (p. 12)

Au commencement du chapitre I, Helmholtz énonce de nouveau le principe de l'impossibilité du mouvement perpétuel et annonce le but ambitieux qu'il poursuit :

Nous partons de l'hypothèse qu'il est impossible, au moyen de n'importe quelle combinaison de corps de la nature, de créer de la force motrice permanente à partir de rien (...) Le but du présent mémoire est globalement de conduire de la même manière le principe cité dans tous les domaines de la physique, en partie pour mettre en évidence son applicabilité dans tous les cas où les lois des phénomènes sont déjà suffisamment étudiées, et en partie pour continuer avec son aide, appuyée sur les analogies variées des faits connus, à tirer des conclusions sur les lois de ceux non encore examinés complètement jusqu'ici, et, de cette manière, donner à l'expérience un guide salutaire. (p. 17)

L'impossibilité du mouvement perpétuel est traduite en utilisant le concept de travail, puis son équivalence avec la conservation de la force vive est affirmée, et démontrée, dans un paragraphe ultérieur, introduit par la phrase :

Si nous recherchons l'expression mathématique de ce principe, nous la trouvons dans la loi connue de la conservation de la force vive. (p. 18)

La possibilité de réduction de tous les phénomènes à l'action de forces centrales est fondée métaphysiquement dans l'introduction, où Helmholtz écrit :

Mais la force, que deux masses entières exercent l'une sur l'autre, doit être décomposée en forces de toutes leurs parties les unes sur les autres. C'est pourquoi la mécanique va jusqu'aux forces des points matériels, c'est-à-dire des points de l'espace rempli de matière. Mais des points n'ont que leur distance comme relation spatiale l'un avec l'autre, car la direction de la ligne qui les joint ne peut être déterminée qu'en relation avec au moins deux autres points. Une force motrice qu'ils exercent l'un sur l'autre peut de ce fait être cause uniquement d'une modification de leur distance, c'est-à-dire que ce peut être seulement une force attractive ou répulsive (...) Les forces que deux masses exercent l'une sur l'autre doivent nécessairement être déterminées en grandeur et en direction, dès que la situation des masses est complètement donnée. Mais, au moyen de deux points, une seule direction est complètement donnée, à savoir celle de la ligne qui les joint ; par conséquent, les forces qu'ils exercent l'un sur l'autre doivent être dirigées selon cette ligne, et leur intensité ne peut dépendre que de la distance. (p. 15)

Dans le chapitre I, son équivalence avec le principe de la conservation de la force vive est affirmée, puis démontrée :

Nous voulons ici démontrer d'abord que le principe de la conservation de la force vive est valable seulement là où les forces agissantes se laissent décomposer en forces des points matériels qui agissent dans la direction de la ligne qui les joint, et dont l'intensité ne dépend que de leur distance ; dans la mécanique de telles forces sont habituellement nommées forces centrales. Il suit de plus et réciproquement que dans toutes les actions de corps les uns sur les autres, où le principe cité ci-dessus peut être appliqué d'une manière tout à fait générale aux

plus petites parties de ces corps, on doit supposer de telles forces centrales comme les forces fondamentales les plus élémentaires (...) (p. 19)

Après la démonstration<sup>10</sup>, la conclusion du chapitre I est la suivante :

Par conséquent dans les systèmes qui suivent de manière tout à fait générale la loi de la conservation de la force vive, les forces élémentaires des points matériels sont nécessairement des forces centrales. (p. 21)

Dans le chapitre II, Helmholtz, à partir de l'équation de la conservation de la force vive, construit le concept de force de tension, puis établit le principe de la conservation de la force, qu'il énonce ainsi :

Dans tous les cas de mouvement de points matériels libres sous l'influence de leurs forces attractives et répulsives, dont les intensités ne dépendent que de la distance, la perte en quantité de force de tension est constamment égale au gain de force vive, et le gain de la première est égal à la perte de la dernière. *La somme des forces vives et des forces de tension présentes est donc toujours constante.* Sous cette forme la plus générale, nous pouvons désigner notre loi sous le nom de *principe de la conservation de la force* (...) (p. 25)

### ***Des expressions précédentes de la loi de la conservation de la force vive***

Nous approfondirons plus loin différents aspects de cette construction mathématique, mais nous allons d'abord revenir au principe de la conservation de la force vive. On peut faire remonter à Galilée les deux voies de la mécanique dont on a parlé dans l'introduction. Dans son étude de la chute libre, il a successivement considéré la relation entre la vitesse atteinte par le corps qui tombe et la hauteur de chute<sup>11</sup>, puis la relation entre cette vitesse et la durée de la chute. Ces deux voies ont par la suite été fécondes. La première prend pour point de départ la relation de proportionnalité entre le carré de la vitesse et la hauteur de chute, puis entre le produit  $ph$  (appelé plus tard travail du poids du corps) et la force vive  $mv^2$ . Galilée, en travaillant sur le pendule, avait constaté que, du fait de la vitesse acquise, un corps peut remonter à la hauteur d'où il est tombé. En 1692, Leibniz nomme force vive le produit  $mv^2$ , que Huygens avait introduit en 1673 dans son étude des chocs élastiques. En utilisant les travaux de Galilée, il introduit le concept d'une force liée au mouvement. Chez lui, comme chez Huygens, cette force vive a bien une signification physique. Les ingénieurs utiliseront par la suite ce concept. Cette voie, de Galilée-Huygens-Leibniz, est celle de la mécanique pratique, ou mécanique des ingénieurs. La deuxième voie (relation entre  $v$  et  $t$ ) conduit à la relation entre la quantité de mouvement  $mv$  et l'impulsion  $pt$  du poids du corps ; elle considère la quantité de mouvement comme déterminée par la force<sup>12</sup>. Au dix-huitième siècle, l'expression  $mv^2$  réapparaît chez les mathématiciens, comme une fonction mathématique de la position du point matériel et, chez eux, le théorème de conservation de la force vive, établi par intégration de la relation de la dynamique, n'a pas de signification physique immédiate. Cette voie, de Galilée-Descartes-Newton, est celle de la mécanique rationnelle, dite aussi mécanique philosophique. Les deux voies sont plus ou moins en conflit jusqu'au milieu du dix-neuvième siècle. La *querelle des forces vives* ou *controverse sur la mesure de la force des corps en mouvement*, a opposé Leibniz aux cartésiens, puis les leibniziens aux newtoniens. Quelle est la *force* conservée dans un processus, par exemple au cours d'un choc ? est-ce la quantité de mouvement, ou bien la force vive ? Les savants des pays germaniques donnent plutôt la préférence à la dynamique leibnizienne, ceux de France et de Grande-Bretagne, à la newtonienne, qui, d'ailleurs, au dix-huitième siècle, prend une importance

<sup>10</sup> Cette démonstration comporte une erreur, on le verra ci-dessous.

<sup>11</sup> d'abord de manière erronée, puis, plus tard, correcte.

<sup>12</sup> Il s'agit ici de la force au sens actuel, la force d'attraction newtonienne dans le cas de la chute des corps.

majeure, du fait de sa plus grande simplicité apparente. Au début du dix-neuvième siècle, l'influence de Newton est dominante, notamment en France, au travers des scientifiques autour de Laplace, qui obtiennent de grands succès dans la mathématisation de la physique.

Les textes suivants montrent quelques expressions antérieures à Helmholtz du principe de la conservation de la force vive, chez Daniel Bernoulli, Joseph-Louis Lagrange, et Gaspard Gustave Coriolis. Pourquoi choisir ces trois-là ? Helmholtz a lu Daniel Bernoulli pendant ses études. Dans le discours autobiographique, prononcé à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire, il dit : « Lorsque j'étais encore élève de l'Institut Friedrich Wilhelms, j'avais aidé à la bibliothèque, et, dans mes moments libres, j'avais parcouru les travaux de Daniel Bernoulli, d'Alembert, et des autres mathématiciens du siècle dernier »<sup>13</sup>. Joseph-Louis Lagrange a certainement été lu également. D'autre part, certains historiens disent que Lagrange a établi le principe de conservation de l'énergie ; nous essayerons de comparer les démarches de Lagrange et d'Helmholtz. Coriolis est un ingénieur théoricien. Dans un ouvrage important, l'expression qu'il donne de la loi, en y introduisant le concept de travail, est différente des précédentes.

Daniel Bernoulli, fils de Johann (Jean) I Bernoulli, est né à Groningen (Pays-Bas) le 8 février 1700 ; il est mort à Bâle (Suisse) le 17 mars 1782. Ses travaux portent sur la médecine, les mathématiques, et la mécanique. En médecine, il s'est tout de suite intéressé aux aspects mécaniques de la physiologie. En 1737 il donne un cours sur le travail mécanique fait par le coeur. Des contributions à la physiologie du travail, en particulier à la détermination du travail maximum qu'un homme peut accomplir se trouvent dans *Hydrodynamica* (chapitre 9) (1738). Traditionnellement, la réputation de Bernoulli repose sur son *Hydrodynamica*. Il y base ses déductions sur le principe de conservation de la force vive, ou, comme il dit, l'égalité de la *descensus actualis* et de l'*ascensus potentialis*. On peut penser que Helmholtz, médecin comme Bernoulli, et s'intéressant comme lui à la physique, s'est retrouvé dans les préoccupations de Daniel Bernoulli qui ont inspiré et nourri sa réflexion.

Dans un mémoire écrit en 1738, Bernoulli s'intéresse essentiellement à l'interprétation des mouvements des astres, notamment du mouvement de la Lune<sup>14</sup>. Il veut généraliser aux planètes la loi connue de la chute des corps au voisinage de la Terre, c'est-à-dire la relation entre l'altitude de chute et la vitesse acquise :

§.1. Dans les corps simples [composés d'un seul élément] tombant soit verticalement, soit sous une direction variée quelconque, le fait que les vitesses acquises sont déterminées par la seule altitude verticale de chute est une chose très connue, et cette propriété peut être étendue à un système de corps suspendus l'un à l'autre par un lien quelconque, d'une manière qui depuis quelque temps est également connue de tous. Sans doute ces lois dynamiques, désignées par le nom de conservation des forces vives, ont été considérées seulement chez les corps tombant près de la surface de la Terre, où les trajets décrits peuvent être considérés comme infiniment petits par rapport à la distance au centre de la Terre en tant que centre de forces, vers qui les corps terrestres sont sollicités par la gravité, mais pourtant elles ont été mises en examen par le progrès et la croissance incroyables de la mécanique ; il n'est pas extrêmement difficile d'étendre les lois ci-dessus et de les ramener à plusieurs centres de forces, de sorte qu'elles puissent être appliquées utilement à la détermination du mouvement des corps célestes, non sans économie de calculs astronomiques.

<sup>13</sup> H. Helmholtz, "An autobiographical sketch, An address delivered on the occasion of his Jubilee, 1891", p. 385.

<sup>14</sup> "Commentationes de immutatione et extensione principii conservationis virium vivarum, quae pro motu corporum coelestium requiritur" (Traité au sujet du changement et de l'extension du principe de conservation des forces vives requis pour le mouvement des corps célestes), *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Vol. X. p. 116-124. 1738 (1747) ; Daniel Bernoulli, *Die Werke von Daniel Bernoulli*, David Speiser ed., Band 3, pp. 160-169 (traduction personnelle).

Ce mémoire est important à cause de l'introduction de la fonction qui sera plus tard le potentiel (et d'autre part la force de tension d'Helmholtz)<sup>15</sup> :

Si un système de corps quelconques liés mutuellement, a acquis un mouvement à partir du repos du fait de la seule gravitation, il se produit que dans n'importe quelle situation, la somme de tous les corps, chacun étant multiplié par le carré de sa vitesse, est égale à la somme de toutes les quantités  $M \times \left( \frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a} \right)$ , en entendant par  $M$  le corps, soit la masse d'un corps quelconque appartenant au système, par  $x$  sa distance au centre des forces pour la position donnée et par  $a$  la même distance pour la position initiale.

Mais si on pose d'une manière générale  $\xi$  pour la gravité à la distance  $x$ , au lieu de la quantité  $M \times \left( \frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a} \right)$ , on devra partout et toujours prendre la quantité  $M \times \int -2\xi dx$  (...).

Enfin, quand les corps ne commencent pas leur mouvement à partir du repos, alors le carré de la vitesse initiale doit pour chaque corps être retranché du carré de la vitesse désignée à l'instant.

Le deuxième mémoire, annoncé à la fin du premier, mais écrit seulement en 1748, généralise le principe de la conservation de la force vive, au-delà des situations astronomiques, à des systèmes de corps exerçant les uns sur les autres des forces dont l'intensité ne dépend que de la distance<sup>16</sup>. Il le fait en considérant des systèmes de plus en plus généraux depuis un seul corps soumis à une force constante (gravitation au voisinage de la Terre) jusqu'à des systèmes complets de plusieurs corps qui s'attirent (ou se repoussent) tous mutuellement. Daniel Bernoulli commence par affirmer que la somme des forces vives des corps d'un système prend la même valeur à une position donnée, que ces corps soient liés dans le système, ou isolés les uns des autres, du moment qu'ils sont partis de la même position initiale.

S'il y a plusieurs corps assujettis à la loi d'un certain système, de sorte qu'aucun ne puisse se mouvoir indépendamment des autres.

Si chaque corps est animé par une gravitation variable quelconque, je dis que la conservation des forces vives se fera de la manière qui suit.

Indiquons les masses des corps, qui

composent le système, par

$m, m', m'', m''', \&c.$

leurs vitesses par

$v, v', v'', v''', \&c.$

qu'on considère ensuite chaque corps comme détaché du système, & qu'animé par la gravitation il parte du même point & parvienne au même point, décrivant un chemin quelconque ; il sera facile de déterminer la vitesse, que ce corps détaché du système doit prendre ;

nous exprimerons ces autres vitesses par  $u, u', u'', u''', \&c.$

Là dessus le principe de la conservation des forces vives sera généralement exprimé par cette équation

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. \\ = muu + m'u'u' + m''u''u'' + m'''u'''u''' + \&c.$$

Cela lui permettra, après avoir traité le cas d'un point isolé, de généraliser les résultats obtenus à un système de points, liés ou non. Bernoulli donne ensuite l'expression de la somme des forces vives du système de corps pour une configuration donnée en fonction des forces accélératrices :

Voici maintenant comment il faudra envisager la chose, si la gravitation est outre cela [sa direction tend vers un centre fixe] variable, suivant une loi quelconque, par rapport aux distances

<sup>15</sup> Dans le texte ci-dessous,  $m$  est une constante.

<sup>16</sup> D. Bernoulli, "Remarques sur le principe de la conservation des forces vives pris dans un sens général", *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin.*, Vol IV. p. 356-364, 1748 (1750) ; Daniel Bernoulli, *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Band 3, David Speiser ed., pp.197-206.

depuis le centre de gravitation. Un corps simple aura toujours la même force vive, toutes les fois que partant du même point il parvient à une même distance depuis le centre de gravitation, quelque chemin qu'il fasse pour parvenir d'un point à un autre (...)

Soit le corps dans une distance  $x$  depuis le point E, & que la force accélératrice soit exprimée par  $\xi$ , on aura  $uu = -2 \int \xi dx$ .

Considérons à présent dans cette même hypothèse un système de tant de corps qu'on voudra, dont les distances au point E soient exprimées par  $x, x', x'', x''', \&c.$  & les forces accélératrices correspondantes par  $\xi, \xi', \xi'', \xi''', \&c.$

Je dis que le principe général de la conservation des forces vives pour cette hypothèse sera exprimé par cette équation

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. \\ = -2m \int \xi dx - 2m' \int \xi' dx - 2m'' \int \xi'' dx - 2m''' \int \xi''' dx - \&c.$$

Dans l'intégration des termes on satisfera par l'addition des constantes aux positions initiales des corps & à la force vive que le système est supposé y avoir, si son mouvement ne commence pas depuis le repos.

Cette équation est très voisine de celle qu'Helmholtz utilisera. Mais ce dernier, comme on le verra ci-dessous, ira plus loin.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) donne des équations voisines de celles de Daniel Bernoulli. Ainsi, dès 1760, puis dans la *Mécanique analytique*, en 1788, il écrit :

$$S \left( \frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz + Pdp + Qdq + Rdr + etc. \right) m = 0$$

$P, Q, R$ , sont « les forces accélératrices tendantes à des centres donnés [...]  $p, q, r$ , etc., les distances de chaque corps  $m$  à chacun des centres ».  $S$  représente la somme étendue à tous les corps du système. Il poursuit :

Lorsque la quantité  $Pdp + Qdq + Rdr + etc.$ , est intégrable, et elle l'est toujours quand les forces accélératrices tendent à des centres fixes, ou au corps mêmes du système, et sont proportionnelles à des fonctions quelconques des distances, ce qui est proprement le cas de la nature ; alors donc si on nomme  $\Pi$  l'intégrale de cette quantité, en sorte que l'on ait  $d\Pi = Pdp + Qdq + Rdr + etc.$ , l'équation précédente devient  $S \left( \frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2} + d\Pi \right) m = 0$

dont l'intégrale est  $S \left( \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + \Pi \right) m = F$  en désignant par  $F$  une constante arbitraire

et égale à la valeur du premier membre de l'équation dans un instant donné.

Cette dernière équation renferme le principe connu sous le nom de *Conservation des forces vives* [...] On voit par l'équation dont il s'agit, que cette force vive [la force vive de tout le système] est égale à la quantité  $2F - 2S\Pi m$ , laquelle dépend simplement des forces accélératrices qui agissent sur les corps<sup>17</sup>.

Notons que la quantité  $2F - 2S\Pi m$ , résultat du raisonnement mathématique, reste, chez Lagrange, seulement une fonction mathématique dont la propriété intéressante est qu'elle ne dépend que des forces agissant sur les corps ; cette propriété s'appliquera à la force vive, égale à la valeur de cette fonction. Chez Lagrange, comme chez Daniel Bernoulli, la force vive devient une fonction de la position des corps. Helmholtz utilisera cette propriété, mais donnera une signification physique à ces quantités.

<sup>17</sup> J. L. Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788. Réimpression J. Gabay, Paris, 1989, p. 207-8.



Chez les praticiens de la mécanique, puis chez les ingénieurs théoriciens, tel Gaspard Gustave Coriolis (1792 - 1843), le point de vue est différent :

Les traités spéciaux qu'on a publiés jusqu'à présent sur les machines n'ont pas complètement développé la théorie de l'emploi des moteurs, qui paraît en effet devoir rentrer plus naturellement dans l'enseignement de la Mécanique rationnelle. D'un autre côté, les ouvrages qui traitent de cette science ne contiennent presque rien sur cette théorie. J'ai tâché de remplir cette lacune, et de donner ainsi un utile complément aux cours de Mécanique de l'École Polytechnique, en même temps qu'une introduction à ceux des écoles d'application<sup>18</sup>.

Sa volonté de jeter un pont entre la mécanique rationnelle des mathématiciens et la mécanique pratique des techniciens et des ingénieurs le conduit à introduire le coefficient  $\frac{1}{2}$  dans l'expression de la force vive, et à mettre en avant le concept de travail, dont il propose le nom :

J'ai employé dans cet ouvrage quelques dénominations nouvelles : je désigne par le nom de *travail* la quantité qu'on appelle assez communément *puissance mécanique*, *quantité d'action* ou *effet dynamique*<sup>19</sup>, et je propose le nom de *dynamode* pour l'unité de cette quantité (...) Je me suis permis encore une légère innovation en appelant *force vive* le produit du poids par la hauteur due à la vitesse. Cette force vive n'est que la moitié de ce qu'on a désigné jusqu'à présent par ce nom, c'est-à-dire de la masse par le carré de la vitesse. Si l'on avait éprouvé comme moi combien les élèves sont embarrassés par les dénominations mal choisies, je crois qu'on ne blâmerait pas ce léger changement. Il est très gênant d'avoir un nom pour le double d'une quantité qu'on retrouve à chaque instant. Si l'on a donné anciennement le nom de *force vive* au produit de la masse par le carré de la vitesse, c'est qu'on ne portait pas son attention sur le *travail* et que ce n'était pas le produit du poids par la hauteur due à la vitesse qu'on avait eu à désigner le plus souvent. Tous les praticiens entendent aujourd'hui par *force vive* le travail que peut produire la vitesse acquise par un corps ; et certainement, quoi qu'on fasse, il y aurait toujours deux acceptions en usage, dont l'une s'appliquerait à une quantité double de l'autre, si les géomètres n'appliquaient pas la dernière, qui est réellement la plus commode pour l'étude du mouvement des machines<sup>20</sup>.

Coriolis met le doigt dans ce texte sur les points de vue différents des « géomètres » et des « praticiens ». Nous pouvons aussi être sensibles à son argument d'enseignant, confronté à la double désignation subie par ses étudiants, et à son souhait que les géomètres se conforment à sa proposition. Il se propose de donner un fondement théorique à la mécanique pratique, en utilisant la mécanique rationnelle. Dans le chapitre premier de son livre, il déduit l'« équation des forces vives » du principe des vitesses virtuelles, d'une manière analytique rigoureuse. Mais, pour Coriolis, c'est le concept de travail qui est primordial. Son interprétation de l'équation met en valeur ce concept :

Si nous employons le signe  $\Sigma$  pour indiquer toute espèce d'addition de termes analogues dans une même équation,  $\Sigma Pds - \Sigma P'ds'$  représentera la somme des travaux élémentaires des forces données, qui sont appliquées à différents points du système, et  $\Sigma \frac{p}{g} \frac{d^2e}{dt^2} de$  représentera la somme analogue pour les forces totales appliquées à tous les points matériels du système. Comme ces deux espèces de forces sont équivalentes, on aura, en vertu du principe des vitesses

<sup>18</sup> G. G. Coriolis, *Du calcul de l'effet des machines ou Considérations sur l'emploi des moteurs et sur leur évaluation. Pour servir d'introduction à l'étude spéciale des machines*, Paris, 1829, p. I.

<sup>19</sup> Ce mot de *travail* vient si naturellement dans le sens où je l'emploie, que, sans qu'il ait été, ni proposé, ni reconnu comme expression technique, cependant il a été employé accidentellement par M. Navier dans ses *Notes sur Bélidor*, et par M. de Prony dans son *Mémoire sur les expériences de la Machine du Gros-Caillou*.

<sup>20</sup> *Du calcul de l'effet des machines.*, p. III.

virtuelles,  $\sum Pds - \sum P'ds' = \sum \frac{p}{g} \frac{d^2e}{dt^2} de$ , les sommes  $\sum Pds$  et  $\sum P'ds'$  s'étendant à toutes les forces qui produisent le mouvement avec le secours des liaisons<sup>21</sup>.

Ici  $P$  représente les forces « mouvantes », c'est-à-dire motrices, et  $P'$  les forces « résistantes » ;  $p/g$  est la masse du point matériel, et  $d^2e/dt^2$  est son accélération. Après intégration entre deux instants, Coriolis écrit :  $\sum \int Pds - \sum \int P'ds' = \sum \frac{pv^2}{2g} - \sum p \frac{v_0^2}{2g}$

les intégrales du premier membre s'étendant à toutes les portions des arcs  $s$ , décrits par les points pendant le temps que l'on considère. Telle est la formule connue sous le nom d'*équation des forces vives* (...) En se servant des dénominations que nous venons d'établir, on peut l'énoncer de la manière suivante : *Dans tout système de corps en mouvement, la différence entre la somme des quantités de travail dues aux forces mouvantes, et la somme des quantités de travail dues aux forces résistantes, pendant un certain temps, est égale à la variation de la somme des forces vives de toutes les masses du système pendant le même temps*<sup>22</sup>.

Chez Bernoulli, Lagrange et Coriolis, la même équation au départ conduit, par l'utilisation de concepts différents, provenant d'une conception de la science et de pratiques différentes, à des interprétations et des utilisations variées. Helmholtz puise à ces toutes ces traditions.

### *Retour au mémoire d'Helmholtz*

Dans l'introduction, Helmholtz démontre, à partir d'arguments métaphysiques, que « les phénomènes de la nature se réduisent à des mouvements de matières causés par des forces motrices invariables, qui ne dépendent que des rapports spatiaux ». On a vu ci-dessus la manière dont il passe, dans l'introduction, des concepts métaphysiques de matière et de force, aux concepts scientifiques opératoires de forces centrales entre points matériels. Est particulièrement importante la phrase : « des points n'ont d'autre rapport de position que celui de la distance (...) Or la seule direction que deux points puissent nous faire connaître, c'est la ligne droite qui les joint : donc la force réciproque de deux points est toujours dirigée suivant cette droite, et son intensité ne dépend que de la distance ». Nous retrouverons cet argument dans sa polémique avec Rudolf Clausius. Cette possibilité de réduction est quelque chose de fondamental pour Helmholtz, car c'est cela qui va lui permettre de généraliser le principe de la conservation des forces vives à tous les phénomènes de la nature. Si tous les phénomènes peuvent être ramenés à l'action de forces centrales entre points matériels, la conservation de la force vive est universellement valide, il n'y a plus de forces non conservatives.

Dans le chapitre I, Helmholtz interprète l'impossibilité du mouvement perpétuel en utilisant des concepts et des méthodes empruntés à la mécanique pratique (travail, force vive, système de corps parcourant un chemin fermé).

Le principe mentionné peut être présenté de la manière suivante : si nous nous représentons un système de corps qui sont dans certaines relations spatiales les uns avec les autres, et se mettent en mouvement sous l'influence de leurs forces mutuelles, jusqu'à ce qu'ils arrivent dans une autre position déterminée, alors nous pouvons considérer leurs vitesses acquises comme un certain travail mécanique, et les transformer en un tel travail. Si nous voulons maintenant faire agir les mêmes forces pour la deuxième fois, pour gagner encore une fois le même travail, alors nous devons ramener les corps de n'importe quelle manière dans les conditions initiales en utilisant d'autres forces à notre disposition ; nous consommerons donc pour cela à nouveau une certaine quantité de travail de ces dernières. Maintenant notre principe exige dans ce cas que la

<sup>21</sup> *Ibid.*, p. 14.

<sup>22</sup> *Ibid.*, p. 15 ; p. 18.

quantité de travail qui est gagnée quand les corps du système passent de la position initiale à la deuxième position, et la quantité de travail qui est perdue quand ils passent de la deuxième à la première, soient toujours les mêmes, quels que puissent être le mode de passage, la trajectoire ou la vitesse. Car s'il était possible que la quantité de travail soit plus grande sur un chemin que sur l'autre, alors nous pourrions utiliser le premier chemin pour gagner du travail, et le deuxième chemin pour le retour à l'état initial, en utilisant pour ce retour une partie du travail gagné précédemment ; nous pourrions gagner ainsi une quantité indéfinie de force mécanique et nous aurions construit un mobile perpétuel, qui, non seulement se maintiendrait tout seul en mouvement, mais serait aussi en état de céder de la force à l'extérieur (p. 17).

Un système de corps passe, sous l'action des forces réciproques des corps, d'une position 1 à une position 2 et, ce faisant, les corps acquièrent certaines vitesses, qui peuvent être utilisées pour produire du travail. En revenant à l'état initial, le travail dépensé a nécessairement la même valeur, sinon on aurait un mobile perpétuel. Puis Helmholtz utilise la manière classique de représenter le travail par l'expression  $mgh$  pour établir l'équivalence entre le travail et la force vive (s'il avait sans doute lu quelques ouvrages d'ingénieurs, il n'avait probablement pas lu celui de Coriolis).

La quantité de travail qui est gagnée et consommée, peut, comme on sait, être exprimée comme une masse  $m$  élevée à une hauteur donnée  $h$  ; la quantité de travail vaut alors  $mgh$ , où  $g$  est l'intensité de la pesanteur. Pour s'élever verticalement à la hauteur  $h$ , le corps doit avoir la vitesse  $v = \sqrt{2gh}$  ; et il acquiert de nouveau cette vitesse lorsqu'il tombe. On a donc  $\frac{1}{2} m v^2 = m g h$  ; par conséquent la moitié du produit  $m v^2$ , qui est nommé en mécanique, comme on sait, « la quantité de force vive du corps  $m$  », peut aussi être mise à la place de la mesure de la quantité de travail. Pour mieux nous conformer à la manière en usage maintenant de mesurer l'intensité des forces, je propose de qualifier de quantité de force vive, la grandeur  $\frac{1}{2} m v^2$ , alors elle sera identique à la mesure de la grandeur du travail (...). Le principe de la conservation de la force vive, comme on sait, énonce : si un nombre quelconque de points matériels mobiles se déplacent seulement sous l'action des forces qu'ils exercent les uns sur les autres, ou de forces dirigées vers des centres fixes, alors la somme de toutes leurs forces vives est la même à tous les instants où tous ces points occupent les mêmes positions les uns par rapport aux autres et par rapport aux centres fixes existant éventuellement, quelles qu'aient pu être leurs trajectoires et leurs vitesses dans l'intervalle.

Si nous imaginons les forces vives utilisées pour élever des parties du système ou bien des masses équivalentes à ces parties, à une certaine hauteur, alors il suit de ce que nous avons montré à l'instant, que les quantités de travail, qui sont représentées d'une manière semblable, doivent aussi être égales dans les conditions données.

Par sa manière d'exprimer l'impossibilité du mouvement perpétuel, Helmholtz réussit, en égalant le travail à la force vive, à unifier deux traditions différentes en mécanique : la mécanique analytique, ou rationnelle, où  $mv^2$  est une fonction mathématique de la position du point matériel, et la tradition des ingénieurs, où le concept important est celui du travail et de sa transmission. Dans l'expression du principe de l'impossibilité du mouvement perpétuel par l'égalité du travail accompli quel que soit le chemin suivi, Helmholtz ouvre le cycle de son premier énoncé du principe de conservation de la force vive : le système de corps va d'une position à une autre, l'état final est différent de l'état initial. Helmholtz prépare ainsi l'unification de la force vive physique, mesurée par le travail, avec la force vive fonction de position des mathématiciens. Il explicitera cette ouverture du cycle par la suite et cela conduira au principe de la conservation de la force. Le travail intervient lorsque le système considéré est ouvert, lorsqu'il échange avec l'extérieur. Il apparaît alors comme une mesure d'un échange de force. C'est un concept du niveau pratique, et non interprétatif, au contraire de la force vive. On va donc le retrouver au moment de la confrontation du principe avec les phénomènes. Pour raisonner ici, sur l'état initial et l'état final, que ces états soient ou non les mêmes, Helmholtz n'a pas besoin de pénétrer plus avant dans la mécanique du point matériel.

Par contre, dans la deuxième étape, équivalence entre la conservation des forces vives et la possibilité de réduction à des forces centrales entre points matériels, il n'en est plus de même. Helmholtz emploie alors le langage et les méthodes de la mécanique analytique. Ce qui l'intéresse, c'est la réciproque du théorème habituel, il veut montrer que « dans tout système soumis d'une manière entièrement générale à la loi de conservation de la force vive, les forces élémentaires des points matériels sont des forces centrales ». Quand Helmholtz, comme ici, utilise un modèle de type newtonien - laplacien, c'est une supposition mathématique, qui rend possible le calcul différentiel et intégral.

Si nous considérons en premier lieu un point matériel de masse  $m$ , qui se déplace sous l'influence des forces de plusieurs corps assemblés en un système solide  $A$ , alors la mécanique nous indique le moyen de connaître à chaque instant particulier la situation et la vitesse de ce point déterminé. Nous considérerons donc le temps  $t$  comme la variable fondamentale, et ferons dépendre de lui les coordonnées  $x, y, z$  de  $m$  par rapport à un système de coordonnées lié au système  $A$ , sa vitesse tangentielle  $q$ , les composantes de cette vitesse parallèles aux axes  $u = dx/dt, v = dy/dt, w = dz/dt$ , et finalement les composantes de la force agissante :

$$X = m (du/dt), Y = m (dv/dt), Z = m (dw/dt)]$$

Notre principe exige que  $\frac{1}{2} m q^2$ , donc aussi  $q^2$ , soit toujours le même quand  $m$  a la même position par rapport à  $A$ , donc puisse être posée non seulement comme une fonction de la variable fondamentale  $t$ , mais aussi comme une simple fonction des coordonnées  $x, y, z$ , c'est-à-dire que :

$$d(q^2) = \frac{d(q^2)}{dx} dx + \frac{d(q^2)}{dy} dy + \frac{d(q^2)}{dz} dz. \quad (1)$$

Comme  $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ , nous avons  $d(q^2) = 2u du + 2v dv + 2w dw$ . Si, selon ce qui a été posé ci-dessus, on remplace  $u$  par  $dx/dt$ , et  $du$  par  $X dt/m$ , en utilisant les valeurs

$$\text{correspondantes pour } v \text{ et } w, \text{ on obtient : } d(q^2) = \frac{2X}{m} dx + \frac{2Y}{m} dy + \frac{2Z}{m} dz. \quad (2)$$

Comme les équations (1) et (2) doivent être valables simultanément pour n'importe quelles valeurs de  $dx, dy, dz$ , il s'ensuit que l'on a séparément :<sup>23</sup>

$$\frac{d(q^2)}{dx} = \frac{2X}{m}, \quad \frac{d(q^2)}{dy} = \frac{2Y}{m}, \quad \frac{d(q^2)}{dz} = \frac{2Z}{m}.$$

Mais si  $q$  n'est fonction que de  $x, y, z$ , il s'ensuit qu'il en est de même pour  $X, Y, Z$ , c'est-à-dire que la direction et la grandeur de la force agissante ne sont fonctions que de la position de  $m$  par rapport à  $A$ .

Si nous imaginons maintenant, à la place du système  $A$ , un point matériel isolé  $a$ , il suit de ce qui a été ci-dessus démontré que la direction et la grandeur de la force exercée par  $a$  sur  $m$ , est déterminée seulement par la position de  $m$  par rapport à  $a$ . Maintenant comme la position de  $m$  relativement à un point isolé  $a$  n'est déterminée que par la distance  $ma$ , la loi dans ce cas doit être modifiée en ce que la direction et la grandeur de la force doivent être fonction de la distance  $r$ . Si nous imaginons les coordonnées par rapport à un système d'axes arbitraire d'origine  $a$ , nous devons avoir alors

$$m d(q^2) = 2X dx + 2Y dy + 2Z dz = 0, \quad (3)$$

toutes les fois que :  $d(r^2) = 2x dx + 2y dy + 2z dz = 0$ , c'est-à-dire toutes les fois que

$$dz = - \frac{xdx + ydy}{z}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (3), nous obtenons :  $(X - \frac{x}{z} Z) dx + (Y - \frac{y}{z} Z) dy = 0$

pour n'importe quelle valeur de  $dx$  et  $dy$ , donc aussi séparément :  $X = \frac{x}{z} Z$  et  $Y = \frac{y}{z} Z$ ,

c'est-à-dire que la résultante doit être dirigée vers l'origine des coordonnées, vers le point agissant  $a$ .

<sup>23</sup> C'est ici que se trouve l'erreur.  $X, Y, Z$  peuvent être fonction de la vitesse ;  $X, Y, Z$  dépendent alors de  $dx, dy$  et  $dz$  ; on aura toujours les relations (1) et (2), sans pour autant pouvoir écrire les égalités suivantes.

Par conséquent dans les systèmes qui suivent de manière tout à fait générale la loi de la conservation de la force vive, les forces élémentaires des points matériels sont nécessairement des forces centrales (p. 20).

Dans un article publié en 2001, Olivier Darrigol insiste sur l'importance, dans la formation du concept d'énergie, de cette réduction à la mécanique, et de la croyance à une mécanique conservative (l'idée que toutes les forces, au niveau élémentaire, sont conservatives) même si par la suite, le concept d'énergie devenant dominant et suffisant, son origine dans la physique des forces centrales et la mécanique a été passée sous silence<sup>24</sup>.

On peut se demander pourquoi Helmholtz fait ici cette démonstration, alors que dans l'introduction il a déjà postulé la réduction de tous les phénomènes à l'action de forces entre points matériels (cette question se retrouvera d'ailleurs dans la controverse avec Rudolf Clausius). Mais il s'agit aussi de montrer l'équivalence de la possibilité de cette réduction avec l'impossibilité du mouvement perpétuel, point fondamental pour Helmholtz. D'autre part il y a manifestement deux niveaux différents. Helmholtz est convaincu de la possibilité de cette réduction, avec les arguments métaphysiques de l'introduction. Mais le mémoire, indépendamment de l'introduction, doit être un édifice complètement construit et doit donc comporter une preuve mathématique. Il faut noter qu'Helmholtz a présenté d'abord son mémoire à la Société de physique de Berlin et a cherché à le faire publier dans les *Annalen* sans cette introduction. C'est ensuite, devant la nécessité de le publier séparément qu'il a joint l'introduction, à laquelle il avait déjà travaillé.

On l'a déjà dit, l'affirmation démontrée ici est essentielle dans son projet, car elle lui permet d'appliquer le principe de la conservation de la force à tous les phénomènes de la nature, y compris d'ailleurs, selon ses propres préoccupations, aux phénomènes biologiques. Malheureusement, cette démonstration est erronée. Finalement le principe de la conservation de la force se justifiera, outre le discours de l'introduction, par la justesse des lois qui s'en déduisent, par leur conformité avec l'expérience, et non par cette démonstration. Une partie de la polémique avec Clausius est consacrée à ce passage, que Clausius, physicien mathématicien qui raisonne par déductions progressives à partir des principes de l'analyse établis rigoureusement, mais d'une manière tout à fait générale, n'admet pas.

Poursuivons avec le chapitre II, où se trouve l'innovation principale d'Helmholtz, la création du concept de force de tension.

Soit  $\varphi$  l'intensité de la force qui agit dans la direction de  $r$ , comptée positivement si elle est attractive, négativement si elle est répulsive, donc :

$$X = -\frac{x}{r} \varphi; \quad Y = -\frac{y}{r} \varphi; \quad Z = -\frac{z}{r} \varphi \quad (1)$$

et, suivant l'équation 2 du chapitre précédent, nous avons :

$$m d(q^2) = -2 \frac{\varphi}{r} (x dx + y dy + z dz); \quad \text{donc :} \\ \frac{1}{2} m d(q^2) = -\varphi dr.$$

Ou bien, si  $Q$  et  $R$ ,  $q$  et  $r$  représentent des vitesses tangentielles et les distances correspondantes :

$$\frac{1}{2} m Q^2 - \frac{1}{2} m q^2 = - \int_r^R \varphi dr. \quad (2)$$

Si nous considérons attentivement cette équation, nous trouvons du côté gauche la différence des forces vives que  $m$  possède à deux distances différentes. Pour trouver la signification de la grandeur  $\int_r^R \varphi dr$ , imaginons que les intensités de  $\varphi$ , aux différents points de la droite  $ma$ , soient représentées par des ordonnées perpendiculaires à cette droite ; alors ladite grandeur désignerait

<sup>24</sup> O. Darrigol, "God, waterwheels, and molecules : Saint-Venant's anticipation of the energy principle", *HSPS*, 31, 2001, pp. 285-353.

l'aire qu'enferme la courbe entre les ordonnées correspondant à  $R$  et  $r$  et l'axe des abscisses. Ainsi que l'on peut se représenter cette extension de la surface comme la somme de toutes les abscisses infiniment nombreuses existant en elle, de même cette grandeur est la totalité des intensités de force qui agissent dans les distances se trouvant entre  $R$  et  $r$ .

Appelons forces de tension, les forces qui tendent à mouvoir le point  $m$ , tant qu'elles n'ont pas encore produit le mouvement, par opposition à ce que la mécanique appelle force vive.

Alors nous pourrions désigner la grandeur  $\int_r^R \phi dr$ , par l'expression *somme des forces de tension entre les éloignements  $R$  et  $r$* , et la loi ci-dessus s'énoncera ainsi : l'accroissement de la force vive d'un point matériel dans son mouvement sous l'influence d'une force centrale est égal à la somme des forces de tension qui correspondent à la variation relative de son éloignement (p. 21-2).

Helmholtz cherche à donner une signification physique à l'expression mathématique. C'est une nouvelle préoccupation, une préoccupation de théoricien. Ce texte définit bien la tension comme cause du mouvement. En introduisant ce concept de *Spannkraft* - force de tension - Helmholtz confère une nouvelle signification à l'équation déjà écrite en mécanique analytique. La force de tension,  $\phi dr$ , est tout à fait différente de la force de Newton,  $\phi$ . Elle n'a pas la dimension d'une force newtonienne ; elle ressemble à la *force morte* de Leibniz. Ainsi ce dernier écrit :

La force également est double : la force élémentaire, que j'appelle *morte*, parce qu'en elle le mouvement n'existe pas encore, mais seulement une sollicitation au mouvement, (...). L'autre est la force ordinaire, unie avec le mouvement actuel, et je l'appelle *vive*. Des exemples de force morte sont donnés par la force centrifuge, par la gravité ou force centripète, par la force avec laquelle un ressort tendu commence à se débâter. Mais dans la percussion, qui est produite par un grave tombant déjà depuis quelque temps, ou par un arc se débâtant pendant quelque temps ou par toute autre cause, *la force est vive et elle naît d'une infinité d'impressions continuées de la force morte*<sup>25</sup>.

Pour Leibniz, au tout début du mouvement, la force morte produit le *conatus*<sup>26</sup>. Le *conatus* est l'effet de la force morte et il lui est équivalent. Dès qu'un espace fini est parcouru, l'*impetus*, vitesse du mouvement instantané et variation élémentaire de l'espace parcouru, naît de la sommation des *conatus* sur tous les instants antérieurs. Il y a alors de la force vive ; elle est, ainsi que le chemin parcouru, comme l'intégrale des *impetus*, donc proportionnelle à  $v^2$ . Chez Helmholtz, l'opération d'intégration produit bien la force vive (dans le premier membre de l'équation), mais fait apparaître quelque chose de nouveau dans le second membre, quelque chose qui n'est pas la force vive, mais la « somme des forces de tension ». Chez Helmholtz, au moment où il introduit la *Spannkraft* et la somme des *Spannkraft*e, il considère, comme les mathématiciens (Lagrange, etc.), des ensembles de points matériels qui constituent un système isolé. Toutes les forces centrales envisagées sont exercées entre les points constituant le système. Ce sont des forces intérieures au système et l'intégrale du second membre de l'équation a une signification physique pour le système lui-même, s'ajoutant à la signification de l'intégration des *conatus* dont le résultat est la force vive. Mais comme Leibniz, Helmholtz donne une signification physique aux êtres mathématiques intervenant dans les équations.

Ce concept de *Spannkraft* qu'Helmholtz introduit est bien un concept nouveau, un concept de même niveau (niveau interprétatif de physique théorique) que celui de force vive. En l'introduisant, Helmholtz en quelque sorte unifie les héritages de Newton et de Leibniz, il assure la jonction entre les deux voies traditionnelles de la dynamique. Chez Newton, la cause du mouvement est la force  $\phi$ . Chez Leibniz, à chaque instant, la cause est égale à l'effet, c'est-à-dire la force morte au *conatus*,

<sup>25</sup> G. Leibniz, *Specimen Dynamicum*, 1695, cité par René Dugas, in R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, Paris, 1950, p. 211.

<sup>26</sup> Dans cette interprétation, le *conatus* est l'accélération.



puis la force vive au travail qu'elle peut produire. Dans le mémoire d'Helmholtz, les forces centrales de Newton structurent les phénomènes et, outre la ressemblance entre la *Spannkraft* d'Helmholtz et la force morte de Leibniz, le principe de conservation de la force exprime une équivalence quantitative causale, dans la tradition de Leibniz : dans un intervalle de temps infinitésimal, la variation de force vive est égale à la variation en sens contraire des *Spannkräfte*, et l'une ou l'autre de ces variations peut être cause ou effet.

Helmholtz généralise ensuite son résultat à un nombre quelconque de points matériels et énonce le principe de conservation de la force sous la forme :

Dans tous les cas du mouvement de points matériels libres sous l'influence de leurs forces attractives et répulsives dont les intensités ne dépendent que des distances, la diminution de la force de tension [aujourd'hui énergie potentielle] est toujours égale à l'accroissement de la force vive [aujourd'hui énergie cinétique] et l'accroissement dans la première est toujours égal à la diminution de la dernière. Donc la somme des forces de tension et des forces vives est toujours constante (...) La quantité maximale de travail qui peut être obtenue de ces corps est par conséquent fixée et finie. (p. 25-27).

Comparons maintenant ce développement d'Helmholtz avec le raisonnement de Lagrange

Nous avons vu que Lagrange écrit :  $S\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} + \Pi\right)m = F$

en désignant par  $F$  une constante arbitraire et égale à la valeur du premier membre de l'équation dans un instant donné.

Cette dernière équation renferme le principe connu sous le nom de *Conservation des forces vives* [...] On voit par l'équation dont il s'agit, que cette force vive [la force vive de tout le système] est égale à la quantité  $2F-2STIm$ , laquelle dépend simplement des forces accélératrices qui agissent sur les corps.

$\Pi$ , intégrale de la quantité  $P dp + Q dq + R dr + etc.$ , est une fonction mathématique, sans signification physique. Chez Helmholtz, c'est la somme des forces de tension. Chez Lagrange,  $F$  est une constante arbitraire. Chez Helmholtz, la somme des forces vives et des forces de tension du système devient une grandeur physique propre au système, qui a une signification dans la relation du système avec l'extérieur. Son importance apparaît encore plus dans la suite du mémoire et sera développée dans les conférences que donnera plus tard Helmholtz sur le même sujet. Le langage mathématique de Lagrange et de Daniel Bernoulli est proche de celui qu'emploie Helmholtz, visiblement inspiré par les lectures des mathématiciens faites dans sa jeunesse. Cependant chez Lagrange, le principe de conservation des forces vives est un principe dérivé, et nulle part il n'exprime que la force vive et les quantités  $F$  et  $STIm$  sont des grandeurs de même nature pouvant se transformer l'une dans l'autre ou ayant entre elles une relation de cause à effet. Contrairement à ce qu'ont pu écrire certains commentateurs, ni Daniel Bernoulli, ni Lagrange, n'ont écrit le principe de conservation de l'énergie. D'ailleurs, comme toute sa mécanique, le principe de la conservation des forces vives s'applique chez Lagrange aux forces macroscopiquement conservatives, c'est-à-dire qu'il ne s'applique pas, par exemple, aux phénomènes de frottement et aux chocs mous. Le texte ci-dessous, écrit par Lagrange en 1797, montre que, comme d'autres scientifiques, il a eu l'intuition de la généralité du principe, mais il n'a pas développé ses recherches dans cette direction.

On peut réduire à la gravité et aux ressorts presque toutes les forces dont nous pouvons disposer [...] Ainsi, lorsqu'on a à sa disposition une chute verticale  $h$  d'un poids  $P$ , on peut dépenser une force vive égale à  $2 P h$ , laquelle peut être employée dans une machine comme puissance ou comme résistance. Un ressort bandé produit, en se débandant librement, une force vive qui dépend de la force du ressort et de l'espace par lequel le ressort peut se débander [...]. Donc, si l'on a à sa disposition un ressort bandé jusqu'à un certain point, et qui puisse se débander par un espace donné, on est le maître de dépenser une force vive donnée et de l'employer dans une machine quelconque. Ainsi l'on peut dire qu'une chute d'eau dont la quantité et la hauteur sont

données ; qu'une quantité donnée de charbon, en tant qu'elle peut être employée à vaporiser une quantité donnée d'eau ; qu'une quantité donnée de poudre à canon, qu'une journée de travail d'un animal donné, etc., renferment une quantité donnée de force vive, dont on peut disposer, mais que l'on ne saurait augmenter par aucun moyen mécanique.

On peut donc toujours regarder une machine comme destinée à détruire une quantité de force vive en consommant une autre force vive donnée<sup>27</sup>.

Helmholtz, quant à lui, donne une signification physique aux équations qu'il écrit et aux concepts qu'il introduit. Il fait une construction mathématique et donne ensuite un contenu physique. Le grand apport d'Helmholtz est donc bien ce concept de force de tension, et l'interprétation physique de l'équation, destinée explicitement à s'appliquer à tous les phénomènes. Le principe de la conservation de la force est chez lui un principe de physique.

L'expression mathématique du principe de la conservation de la force d'Helmholtz apparaît également formellement identique à l'équation des forces vives de Coriolis, mais le concept de force de tension est complètement différent du concept de travail, il concerne les mécanismes cachés du système physique, et non la relation du système avec l'extérieur. C'est un concept de physique théorique, alors que le travail est un concept de mécanique pratique.

Helmholtz montre ensuite qu'il peut déduire le principe des vitesses virtuelles de son principe de la conservation de la force. Le principe des vitesses virtuelles était la loi la plus générale de la statique ; Lagrange, d'ailleurs avait déduit de ce dernier le principe de la conservation de la force vive (c'est-à-dire fait la démarche inverse de celle d'Helmholtz). Helmholtz démontre ainsi que la statique peut être considérée comme une partie de la dynamique, confirmant de ce fait sa vision dynamique du monde. Notons que c'est un renversement par rapport aux usages de cette époque, par exemple chez Lagrange, puis chez les physiciens mathématiciens laplaciens où la dynamique est ramenée à la statique. La persistance de cette soumission de la dynamique à la statique dans la mécanique rationnelle est considérée comme l'une des causes de la perte de vitesse de la science française dans la deuxième moitié du 19<sup>e</sup> siècle.

Revenons par ailleurs sur le « réductionnisme » d'Helmholtz. Ce n'est pas le réductionnisme mécaniste des physiciens laplaciens. Helmholtz reste dynamiste. Il réduit les phénomènes à l'action de forces entre points matériels mais, pour lui, ce sont les forces qui sont importantes. Son point matériel ne représente pas un atome ou un corpuscule dans un espace vide, c'est un élément d'un *continuum*, élément constitutif de l'espace rempli, de manière continue, de matière. Il n'y a pas chez Helmholtz de passage du discret au continu dans la formalisation mathématique, contrairement aux laplaciens, chez qui il y a un hiatus entre la représentation de la matière (atomes et vide) et la représentation mathématique (points matériels, éléments d'un espace géométrique continu). La mathématisation dans un cadre mécanique permet à Helmholtz de construire le concept de force de tension, et finalement de montrer que l'action des forces élémentaires se manifeste sous la forme de force vive et force de tension. La théorie d'Helmholtz est l'embryon de l'interprétation dynamique des phénomènes en termes d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Rappelons que son hypothèse de départ est, qu'au niveau le plus élémentaire, toutes les forces, y compris celles qui interviennent dans les échanges de chaleur, dans les phénomènes chimiques, électriques, etc. sont des forces centrales, et sont donc « conservatives ».

### *La controverse avec Rudolf Clausius*

Celui-ci conteste certains aspects du travail d'Helmholtz, et l'examen de cette controverse va nous permettre de mettre en contraste deux manières différentes de concevoir et de pratiquer la relation entre mathématiques et physique.

---

<sup>27</sup> J. L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, 1797, 1813, 1847, Paris, p. 387 (éd. de 1847) ; *Oeuvres* IX, pp. 11-421.

Clausius (1822-1888) est né en Poméranie. En 1840 il est entré à l'université de Berlin où il s'est formé en histoire, mathématiques et physique, puis il a passé son doctorat à Halle en 1847. De 1850 à 1855, il est professeur à l'école d'artillerie de Berlin. Il a donc eu une formation assez différente de celle d'Helmholtz (lui-même physiologiste et médecin, partiellement autodidacte en mathématiques et physique). Clausius n'a pas de formation en biologie. Cela le rend-il moins sensible à l'aspect philosophique du principe de conservation ? En tout cas, il a dès ses premiers travaux une approche physico-mathématique des problèmes. En 1850, il écrit son premier grand article sur la théorie de la chaleur, "*Über die bewegende Kraft der Wärme*" (Sur la force motrice de la chaleur et les lois qui s'en déduisent pour la théorie même de la chaleur), qui peut être considéré comme un des articles fondateurs de la thermodynamique. Clausius est entré à la Société de Physique de Berlin en 1850 ou 1851<sup>28</sup>. Il va contester le raisonnement d'Helmholtz du mémoire de 1847. La contestation de Clausius porte principalement sur deux points : la possibilité de réduction des phénomènes à des forces centrales et le chapitre sur l'électricité, dans lequel Helmholtz introduit et utilise le concept de potentiel. Intéressons-nous maintenant au premier point.

Dans le mémoire, Helmholtz affirme que le principe de la conservation de la force vive n'est valable que si les forces élémentaires sont des forces centrales (c'est à dire des forces dont la direction est celle de la ligne qui joint les points, et dont l'intensité ne dépend que de la distance). Clausius conteste cette affirmation. Pour lui, même si le principe des forces centrales est possible physiquement, il n'est pas nécessaire mathématiquement. Ce qui lui importe est la « nécessité mathématique » plus que la « vraisemblance physique ». Il apporte deux arguments. D'abord, il conteste l'affirmation d'Helmholtz dans l'introduction selon laquelle deux points n'ont pas entre eux d'autre relation que leur distance et qu'ainsi les forces existant entre eux ne peuvent dépendre que de la distance. En s'appuyant sur l'existence de phénomènes anisotropiques, il affirme qu'un point peut exercer des forces différentes dans des directions différentes.

Quant à l'autre base, indépendante du principe de la force vive, à partir de laquelle Helmholtz conclut à la nécessité des forces centrales, c'est-à-dire la considération générale citée ci-dessus [des points n'ont pas d'autre relation spatiale l'un envers l'autre que leur éloignement, car la direction de la ligne qui les joint ne peut être déterminée qu'à l'aide d'au moins deux autres points, donc les forces existant entre eux ne peuvent dépendre que de la distance], il me semble que celle-ci, si nous faisons ici totalement abstraction de sa vraisemblance physique, que je ne conteste absolument pas, et que nous arrêtons nos regards seulement sur sa nécessité mathématique, n'est de même pas libre d'objection ; car il n'est pourtant pas *inconcevable*, que même un point agisse dans des directions différentes avec des forces différentes<sup>29</sup>.

Le deuxième angle d'attaque de Clausius est analytique. Il ne pointe pas précisément l'erreur de raisonnement mathématique d'Helmholtz (que lui-même reconnaîtra beaucoup plus tard). Il fait un autre raisonnement, plus classique, en suivant la démarche des ouvrages de mécanique : pour satisfaire le théorème des forces vives, c'est-à-dire la relation  $\frac{1}{2} m q^2 = \int (Xdx + Ydy + Zdz)$ , il n'est pas nécessaire que les forces soient des forces centrales, il suffit que l'on ait  $X = df/dx$ ,  $Y = df/dy$ ,  $Z = df/dz$ ,  $f$  étant une fonction quelconque des coordonnées d'espace. Clausius affirme alors que dans le cas où le théorème des forces vives est satisfait, si les forces ont la direction de la droite qui joint les points, alors leur intensité ne dépend que de la distance. Mais il est possible mathématiquement qu'elles ne satisfassent aucune de ces deux conditions :

Le théorème de mécanique suivant est valable d'une façon générale : si  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sont les composantes selon les directions de trois axes rectangulaires de la force exercée sur  $m$ , alors

<sup>28</sup> Il est signalé parmi les personnes devenues membres de la société au cours des années 1850 et 1851 dans le numéro double (VI-VII) correspondant à ces années des *Fortschritte der Physik* (1850 et 1851 ne sont pas distinguées).

<sup>29</sup> R. Clausius, "Über einige Stellen der Schrift von Helmholtz 'Über die Erhaltung der Kraft'", *Pogg. Ann.* LXXXIX, 1853, pp. 568-579, p. 577 (traduction personnelle).

$$\frac{1}{2} m q^2 = \int (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Si le côté gauche de cette expression doit être une fonction [seulement des coordonnées d'espace], alors il faut que le côté droit en représente également une, c'est-à-dire que l'expression figurant sous le signe somme soit intégrable, et cela est l'unique condition qui est imposée à la force par ce principe.

Cette condition est remplie d'une infinité de manières, car si on part d'une fonction tout à fait quelconque des coordonnées d'espace  $f(x, y, z)$ , et qu'on pose :

$$X = \frac{df}{dx}, \quad Y = \frac{df}{dy}, \quad Z = \frac{df}{dz}$$

on obtient chaque fois une force déterminée en grandeur et en direction par des fonctions des coordonnées spatiales, qui évidemment satisfait à la condition.

Si l'on se demande maintenant quelle relation il y a entre cette condition générale et les deux propriétés mentionnées ci-dessus, qui font de la force une force centrale, alors, comme on l'a dit, aucune des deux propriétés ne se laisse seule déduire, en revanche on prouve facilement, *que, si l'une de ces deux propriétés a lieu, alors nécessairement l'autre doit avoir lieu aussi* ; et c'est seulement cette proposition qui, selon moi, pourrait être exprimée, au passage cité d'Helmholtz, comme conséquence du principe de la force vive<sup>30</sup>.

Helmholtz répond au premier argument de Clausius en exposant son point de vue de théoricien. D'une part il distingue point matériel et élément corporel, le premier contrairement au second ne pouvant à lui tout seul permettre de définir des axes de coordonnées et donc de repérer des directions, d'autre part il met l'accent sur la réalité physique, au nom de laquelle il s'est refusé à faire appel à des référentiels arbitraires, extérieurs aux corps étudiés. Il oppose les « recherches mathématiques sur le papier » à la fidélité à la « réalité physique ». Il a donc toujours considéré la situation relative des masses élémentaires l'une par rapport à l'autre et lorsqu'on n'utilise pas d'axes de référence extérieurs, deux points n'ont pas entre eux d'autre relation de position que leur distance. Cela n'exclut pas qu'un élément corporel, même infiniment petit, comme un cristal élémentaire, puisse exercer des forces différentes dans des directions différentes, l'élément, s'étendant dans les trois dimensions, permet de se donner des axes de référence permettant de repérer les directions physiquement :

Clausius oppose à mes propositions la possibilité que, pour les mouvements d'un point mobile b autour d'un point fixe a, la force vive soit une fonction quelconque des coordonnées [et non pas une fonction seulement de la distance ab]. Une telle hypothèse, d'abord, ne serait pas conforme à la formulation donnée ci-dessus du principe de conservation de la force (...) Il faut aussi se rappeler que si cette hypothèse peut être parfois une simplification, permise et utile, de la représentation pour des recherches mathématiques sur le papier, où on peut se dessiner des axes de coordonnées, elle ne se laisse pas transférer à la réalité physique, aussi longtemps que nous voulons lui rester fidèles et chercher le fondement complet des actions réelles seulement dans le rapport des choses réelles les unes avec les autres (...) Nous devons ici distinguer nettement entre un point et un élément corporel. Un élément corporel a trois dimensions, et c'est pourquoi, par sa position, sont déterminées aussi des directions. Par exemple, dès lors qu'est complètement donnée la position d'un élément corporel d'un cristal, sont aussi données les directions des axes cristallins. Il n'y a donc pas de contradiction à ce qu'un tel élément exerce des forces différentes dans des directions différentes, comme le font par exemple les éléments d'un corps magnétisé. Mais au-dedans d'un tel élément, nous pouvons aussi imaginer une diversité infinie de points agissants. Les éléments corporels ne sont pas encore les derniers éléments semblables auxquels doit s'arrêter notre analyse des forces<sup>31</sup>.

<sup>30</sup> Ibid.

<sup>31</sup> H. Helmholtz, "Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius", *Annalen*, 91, 1854, pp. 241-260, p. 249-250 (traduction personnelle).

Et Helmholtz complète en prouvant ce qu'il avance, comme il l'affirme dans son compte rendu de la controverse :

Le rapporteur a développé une méthode de calcul au moyen de laquelle il devient possible de trouver une répartition des points matériels attractifs et répulsifs, sur une surface sphérique entourant l'élément de corps solide, qui crée la fonction de force donnée dans l'entourage de l'élément<sup>32</sup>.

Il peut alors répondre au deuxième argument de Clausius dans la ligne de la réflexion ci-dessus. En ne considérant que la position relative des points matériels, les forces sont nécessairement dirigées selon la droite qui les joint, et leur intensité en conséquence ne dépend que de la distance de ces points.

On voit que les deux scientifiques ont une approche différente du lien entre physique et mathématique. Ils ne parlent pas le même langage. Ce sont avant tout deux conceptions de la physique qui s'affrontent : la physique mathématique de Clausius et la physique théorique d'Helmholtz. Ce dernier cherche une représentation aussi proche que possible de la réalité, même si elle nécessite une formulation moins simple. Il ne veut pas utiliser un repère extérieur aux points étudiés, et il critique la forme complètement générale de l'étude mathématique de Clausius, car « elle ne se laisse pas transférer à la réalité physique ». Il juge qu'en affirmant qu'un point peut agir « vers des directions différentes avec des forces différentes », Clausius a confondu élément corporel et point. Pour Helmholtz, lorsqu'on étudie mathématiquement les phénomènes naturels, on ne doit jamais perdre de vue la réalité physique, on doit toujours chercher à exprimer « le rapport des choses réelles les unes avec les autres ». Il a procédé ainsi, pense-t-il, dans sa démonstration de la loi de la conservation de la force. Mais son approche ne l'a pas préservé pas des risques d'erreur. On l'a vu, il s'est trompé dans le traitement du formalisme des équations différentielles. En 1854 Helmholtz maintient son point de vue, ce qui montre à quel point sa réflexion scientifique est liée à sa conception du monde. La critique de Clausius a cependant obligé Helmholtz à préciser son point de vue, en particulier sur le passage de l'élément de volume d'un corps solide au point matériel, et plus profondément, sur les relations entre modèle mathématique et réalité physique.

### *Le potentiel dans le mémoire d'Helmholtz et le point de vue de Clausius*

Les pratiques différentes qu'ont les deux scientifiques de la relation mathématiques-physique sont apparentes également dans un autre point de la contestation de Clausius. Il porte sur l'application du principe de la conservation de la force à l'électricité dans le chapitre V du mémoire d'Helmholtz, et en particulier sur l'usage que fait ce dernier du concept de potentiel. Jetons d'abord un regard sur ce chapitre du mémoire d'Helmholtz. Celui-ci veut appliquer le principe de la conservation de la force aux processus électriques :

L'électricité des machines peut devenir cause de production de force de deux manières différentes : d'abord, quand elle se déplace avec son support, par sa force attractive et répulsive, ensuite, quand elle se déplace dans son support, par le dégagement de chaleur (p. 41).

Quand il dit « électricité des machines », il s'agit des machines électrostatiques. Le premier cas est déjà réglé, car interprété au moyen des forces de Coulomb, forces attractives et répulsives entre les fluides électriques. Ce sont des forces centrales, il n'y a donc pas de difficulté. Helmholtz va étudier le deuxième cas qui est précisément celui de la chaleur produite lors de la décharge électrique, c'est-à-dire la décharge d'un condensateur chargé, d'une bouteille de Leyde, par exemple. Cette mise en relation de l'« électricité de friction » avec la chaleur produite est nouvelle, et serait difficile à

<sup>32</sup> H. Helmholtz, *Die Fortschritte der Physik im Jahre 1854*, X, Berlin, Reimer, 1857, pp. 367-9, p. 369 (traduction personnelle).

mettre en pratique dans le paradigme statique des physiciens laplaciens, qui ont par ailleurs eu beaucoup de succès dans la mathématisation de l'électricité statique (Laplace, Poisson).

Helmholtz applique l'expression de la force de tension aux forces entre particules chargées, et introduit alors, en l'empruntant à Gauss<sup>33</sup>, le concept de potentiel :

Soient  $e_i$  et  $e_{ii}$  deux éléments de masses électriques, dont l'unité est la masse électrique qui repousse une masse identique à une distance = 1 avec une force = 1, les électricités opposées sont repérées par les signes opposés des masses, et soit  $r$  la distance entre  $e_i$  et  $e_{ii}$ , alors

l'intensité de la force centrale est  $\varphi = -\frac{e_i e_{ii}}{r^2}$ .

Le gain en force vive, tandis qu'elles passent de la distance  $R$  à  $r$ , est :  $-\int_R^r \varphi dr = \frac{e_i e_{ii}}{R} - \frac{e_i e_{ii}}{r}$ .

Si elles passent de la distance  $\infty$  à la distance  $r$ , ce gain est  $-\frac{e_i e_{ii}}{r}$ .

En conformité avec Gauss dans ses recherches sur le magnétisme, appelons cette quantité le potentiel des deux éléments électriques pour la distance  $r$ . Elle est la somme des forces de tension consommées, et la force vive produite lors du mouvement de l'infini à  $r$ . L'accroissement de force vive pour un mouvement quelconque est égal à l'excès du potentiel à la fin du mouvement sur sa valeur au début (p. 41-2).

Nous avons vu que Daniel Bernoulli a déjà introduit une fonction de ce type. Laplace, notamment dans son étude de *l'Attraction des sphéroïdes* a établi l'équation décrite maintenant par l'expression : laplacien = 0. Poisson a utilisé cette équation et l'a complétée dans ses études de la distribution de l'électricité statique et du magnétisme. Ces scientifiques n'ont pas donné de nom à cette fonction, dont les dérivées par rapport aux coordonnées sont les composantes de la force. George Green, dans un mémoire de 1828, l'a appelée *fonction potentielle* et l'a utilisée pour démontrer des théorèmes importants (mathématiques, électricité, magnétisme), mais son mémoire est resté presque inconnu jusqu'à sa réimpression en 1846. Helmholtz n'en avait pas connaissance. Gauss a employé le mot de *potentiel*, indépendamment de Green, dans son travail de 1840. Helmholtz relie la variation de force vive et la variation des forces de tension à la variation du potentiel. Comme son but est de calculer la chaleur produite par la décharge, donc lors de la circulation de l'électricité dans des conducteurs, il calcule de façon détaillée la variation totale des potentiels lorsque les charges, de signes contraires, de deux corps, s'équilibrent. C'est là qu'il trouve comme résultat l'expression :  $-[V + \frac{1}{2}(W_a + W_b)]$ <sup>34</sup>, qui sera contestée par Clausius. Helmholtz définit ensuite, comme Gauss, les surfaces d'équilibre (surfaces équipotentielles) ; il montre que la surface d'un conducteur électrisé est une surface d'équilibre. Après avoir exprimé la variation de force vive gagnée par la mise en équilibre de deux conducteurs en fonction de la charge électrique totale qu'ils portent et de leur tension libre, il arrive finalement à l'expression de la quantité de chaleur dégagée lors de la décharge d'une bouteille de Leyde. Elle est proportionnelle au carré de la charge initiale de la batterie. Il cite des expériences en accord avec cette relation et termine en faisant (c'est la première fois) l'hypothèse de la décharge oscillante du condensateur.

Clausius a lu le mémoire d'Helmholtz lorsqu'il écrit en 1852 un mémoire portant sur le même sujet et d'ailleurs il le cite, en partie pour le critiquer<sup>35</sup>. Le mémoire de Clausius est très approfondi (40 pages dans la traduction française) et examine les différentes situations pouvant se présenter. Clausius place dès le début son étude dans un cadre mécanique :

<sup>33</sup> C. F. Gauss, "Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-kräfte", Leipzig, 1840.

<sup>34</sup>  $V$  est le potentiel mutuel des deux corps,  $W_a$  et  $W_b$  le potentiel de chaque corps par rapport à lui-même, dans l'état initial, selon le calcul d'Helmholtz.

<sup>35</sup> R. Clausius, "Über das mechanische Aequivalent einer elektrischen Entladung und die dabei stattfindende Erwärmung des Leitungsdrahtes", *Annalen der Physik und Chemie*, 86, 1852, Berlin, pp. 337-375 ; R. Clausius, *Théorie mécanique de la chaleur*, trF. Folie, Paris, Eugène Lacroix, 1868, Jacques Gabay, 1991, pp. 45-85.



« J'ai cherché dans ce qui suit à rapporter les effets produits par une décharge électrique à une mesure déterminée fournie par les principes de la mécanique ; et j'ai comparé le résultat ainsi trouvé avec l'expérience, pour un certain nombre de cas simples. L'accord a été, comme on le verra, tellement satisfaisant, que le théorème que j'ai établi m'a paru non seulement indubitable pour la théorie de l'électricité, mais encore propre à fournir une nouvelle confirmation de la théorie mécanique de la chaleur » (p. 46).

On voit que l'intérêt du cadre mécanique est de fournir des résultats quantitatifs, que l'on peut ensuite tester expérimentalement. Le commencement de sa démarche est semblable à ce que l'on trouve dans les ouvrages de mécanique.

Soit donné un système quelconque de points matériels, avec les masses  $m, m', m''$  etc., qui, à un instant donné  $t$ , dans un système de coordonnées rectangulaires, ont les coordonnées  $x, y, z ; x', y', z' ; x'', y'', z''$  etc. Sur ces masses agit un système de forces donné, et soient désignées par  $X, Y, Z$  les composantes de la force totale agissant sur  $m$ , de même par  $X', Y', Z'$  pour  $m'$ , etc. (...) Si l'on désigne alors les vitesses des masses  $m, m', m''$  etc. à l'instant  $t$ , par  $v, v', v''$  etc., alors la

loi générale suivante est valable :  $(1) \frac{1}{2} \sum m d(v^2) = \sum (Xdx + Ydy + Zdz)$

où les signes somme  $\Sigma$  s'appliquent à toutes les masses contenues dans le système, avec les coordonnées, les forces et les vitesses correspondantes (p. 46).

Il en déduit ensuite par intégration l'équation  $\frac{1}{2} \sum m v^2 - \frac{1}{2} \sum m v_0^2 = \int_{x_0}^x \sum (Xdx + Ydy + Zdz)$

Clausius introduit alors les « noms particuliers » donnés en mécanique aux quantités qui entrent dans cette équation. A gauche, c'est une variation de force vive ; il met la quantité  $Xdx + \text{etc.}$  sous la forme  $S ds$ ,  $ds$  étant l'élément de chemin que  $m$  décrit pendant l'intervalle de temps  $dt$ , et  $S$  la composante de la force sur la direction du mouvement. Cette quantité « se nomme en mécanique *le travail produit pendant le temps dt par la force qui agit sur m* ». Il retrouve alors la loi de l'équivalence du travail et des forces vives. Clausius applique ensuite cette loi aux cas où les forces exercées sur les points du système sont des forces centrales dont l'intensité ne dépend que de la distance, auquel cas la valeur de l'intégrale ne dépend que des positions initiales et finales des points du système. Puis il restreint encore son étude au cas où les intensités des forces sont inversement proportionnelles au carré de la distance, et il exprime la primitive de la fonction de force. Il obtient alors ce qui est connu comme *potentiel*, et le travail des forces correspondantes est égal à l'accroissement des potentiels.

Clausius a repris là une démarche connue en mécanique, présentée de manière déductive en restreignant progressivement la généralité. Il rajoute un principe concernant le modèle de la chaleur :

A ces principes, qui sont certes connues en mécanique, mais qui devaient être encore rappelés ici dans le contexte de la théorie, nous ajouterons encore le suivant : que *la chaleur consiste en un mouvement des plus petites particules des corps, et qu'elle est la mesure de la force vive de ce mouvement* ; de sorte que, si de la chaleur est produite n'importe où dans le système donné, nous la ferons entrer dans le calcul comme une augmentation de la force vive ; et, avec cela, nous passerons maintenant à la considération de l'électricité (p. 50).

Clausius introduit ici la théorie mécanique de la chaleur. Pour lui, les particules élémentaires (molécules ou atomes) fonctionnent comme des machines, et, à leur niveau aussi, la variation de force vive est équivalente au travail, donc la chaleur est équivalente au travail. L'intervention du concept de travail est un appui à la théorie mécanique de la chaleur.

La conception d'Helmholtz est très différente. Pour ce dernier, le statut de la chaleur est double : la chaleur dégagée ou absorbée (phénomène macroscopique) est la manifestation d'une perte ou d'un gain de force et peut alors en permettre la mesure, elle se situe alors au même niveau

conceptuel que le travail ; mais la chaleur est aussi une forme de force présente dans la matière, et, à ce titre, le concept est au même niveau interprétatif que la force vive et la force de tension. Il prend parti pour une théorie dynamique de la chaleur, mais l'interprète au niveau élémentaire en termes de forces vives et forces de tension, en cohérence avec l'ensemble de sa théorie :

Ce que l'on a appelé jusqu'ici quantité de chaleur, n'est qu'une façon d'exprimer d'une part la quantité de force vive du mouvement calorifique, d'autre part la quantité des forces de tension des atomes qui, en changeant leurs arrangements, peuvent être causes d'un pareil mouvement (p.35).

Il identifie la « chaleur libre » à la force vive du mouvement thermique, et la « chaleur latente » aux forces de tension des molécules ou atomes qui par un changement de leurs arrangements peuvent produire un tel mouvement. Nous voyons donc, là encore, les approches différentes d'une même question par un physicien mathématicien (Clausius) et un physicien théoricien (Helmholtz).

Dans l'application qu'il fait à l'électricité, Clausius commence par se débarrasser de toute question et de tout modèle inutiles. Il vaut mieux ne pas parler de force vive de l'électricité, car on ne sait pas si celle-ci a de l'inertie ; il est inutile de se préoccuper de ce qui se passe pendant la décharge ; enfin il est inutile de décider s'il y a une ou deux électricités. De toute façon, le travail effectué par l'électricité lors d'un changement de sa distribution ne dépend que de l'état initial et de l'état final, et il est mesuré par l'accroissement du potentiel de l'électricité totale sur elle-même.

Il obtient alors son « théorème fondamental » : *La somme de tous les effets produits par une décharge électrique est égale à l'accroissement qui est survenu dans le potentiel total de la quantité d'électricité sur elle-même* (p. 53). Il applique ce théorème fondamental au cas de condensateurs pour lesquels on peut calculer le potentiel (bouteille de Leyde sphérique, puis carreau de Franklin), puis examine le détail des effets produits par la décharge. Il confronte les résultats de la théorie avec les expériences faites et cette confrontation avec l'expérience occupe une partie importante du mémoire. Finalement :

En jetant un coup d'œil d'ensemble sur le résultat de toutes les expériences faites jusqu'à présent, nous verrons que la plupart des cas sont, en général, trop compliqués pour se prêter à une comparaison rigoureuse avec la théorie ; mais pour autant que cette comparaison fût possible, elle a toujours été à l'avantage du théorème fondamental, et je ne connais aucun fait expérimental bien établi qui le contredise. Je pense donc que l'on peut regarder ce théorème comme confirmé par l'expérience, si tant est que cette confirmation soit encore nécessaire à côté de son fondement théorique (p.85).

Contrairement à Helmholtz qui, dans le mémoire de 1847, fait oeuvre de théoricien, et examine le problème particulier de la décharge électrique dans le cadre de l'interprétation générale en termes de forces vives et forces de tension, Clausius fait ici oeuvre de physicien mathématicien. Il reprend simplement le problème particulier des effets de la décharge électrique et s'efforce de le mathématiser complètement en faisant appel aux concepts déjà existants dans la mécanique. Les reproches que Clausius fait à Helmholtz portent sur la complexité de son approche, dont, ne s'intéressant qu'à un problème particulier, il ne voit pas l'intérêt, et notamment celui de l'expression du potentiel propre. Helmholtz, en appliquant sa formule générale du potentiel d'un corps par rapport à un autre au potentiel propre, compte deux fois chaque couple de points. De ce fait, lorsqu'il calcule la force vive apparue lors de la mise en équilibre de deux conducteurs, il doit introduire un facteur  $\frac{1}{2}$ . Cela choque Clausius, qui tient à l'identification de la variation du potentiel avec le travail. Helmholtz proteste qu'il s'agit simplement d'une question de dénomination (ce sur quoi Clausius n'est pas d'accord), mais, en fait, il se rend assez vite aux raisons de Clausius. Il est certain, comme le dit Clausius, que cela ne change pas l'esprit du travail d'Helmholtz de calculer le potentiel d'un corps sur lui-même en ne comptant qu'une fois les couples de points. Dans la traduction de 1869, le facteur  $\frac{1}{2}$  est d'ailleurs intégré :

On trouve l'énergie potentielle de l'électricité d'un corps, en formant et en additionnant tous les produits  $+\frac{e' \cdot e''}{r}$  appartenant à chaque couple de masses électriques infiniment petites contenues dans ce corps ; de sorte que chaque masse élémentaire en particulier est combinée avec chacune des autres, mais chaque couple n'est compté qu'une fois. C'est la somme  $W_a$  ainsi obtenue que nous nommons le potentiel du corps A par rapport à lui-même<sup>36</sup>.

Par la suite, comme le montre Thomas Archibald, Clausius et Helmholtz, bien que leurs approches, on l'a vu, ne soient pas identiques, se sont retrouvés opposés ensemble à l'approche de Weber, qui ne partageait pas leurs vues sur l'énergie et sa conservation<sup>37</sup>. Il utilisait des forces dépendant de la vitesse, et voyait les potentiels uniquement comme des constructions mathématiques. C'est une autre controverse, que nous n'examinerons pas ici.

## Conclusion

Au cours de cet atelier, nous avons rencontré plusieurs types d'attitudes liant mathématiques et sciences physiques. Daniel Bernoulli part d'un problème particulier (le mouvement de la lune) qui le conduit à une recherche mathématique, puis à une étude très générale qui n'a plus d'objet particulier. Lagrange se place d'emblée sur un terrain mathématique très général et laisse à d'autres le soin de mettre en relation ses résultats avec des situations concrètes. Coriolis, lui, ingénieur théoricien, s'intéresse d'abord à l'utilisation pratique, et c'est elle qui motive sa recherche théorique, au cours de laquelle les concepts introduits sont dotés d'une signification dans le cadre de cette utilisation.

Dans un petit ouvrage publié en 1956, Théodore Vogel écrit :

La physique mathématique se propose d'établir une correspondance entre les êtres observables de la physique expérimentale et certains êtres mathématiques, choisis de manière que les conséquences logiques de leurs propriétés correspondent à leur tour à des phénomènes effectivement observés. Elle ne se préoccupe pas de justifier, autrement que par le succès, le choix de ces correspondances, mais s'attache par contre à axiomatiser ses démarches de la façon la plus serrée possible (...) <sup>38</sup>

Il oppose la pratique du physicien mathématicien à celle du théoricien, qui « choisit un modèle qui fait image, et relie le concept abstrait au réel par l'intermédiaire d'un ensemble de concepts », et qui cherche à élargir le plus possible le domaine d'application de sa théorie, à unifier la physique. La mécanique rationnelle, édifice tout à fait rigoureux, est l'outil de choix de la physique mathématique. Le texte ci-dessus de Vogel s'applique bien à la démarche de Clausius, physicien mathématicien, dans le mémoire d'électricité que l'on vient d'examiner. Helmholtz, quant à lui, maintient à chaque étape de son raisonnement, le lien entre les équations écrites et la réalité physique, et, dans les chapitres III à VI de son mémoire, il les applique à l'ensemble des phénomènes naturels, en montrant que son principe lui permet de retrouver des lois expérimentales déjà connues, et de suggérer de nouvelles recherches. Dans la suite de sa carrière, il a fait certains travaux de physique mathématique ; cependant il s'est toujours attaché à cette perspective d'unification théorique, donnée ici par le principe de la conservation de la force, puis de l'énergie, et plus tard, cherchée dans le principe de moindre action.

<sup>36</sup> H. Helmholtz, *Mémoire sur la Conservation de la Force*, traduit par Louis Pérard, Paris, Masson, 1869, p. 102. On voit que l'expression « somme des forces de tension » a été remplacée par « énergie potentielle », terme introduit par le physicien écossais W. J. M. Rankine en 1853.

<sup>37</sup> T. Archibald, "Energy and the mathematization of electrodynamics in Germany, 1845-1875", *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 39, n° 123, 1989, pp. 276-308.

<sup>38</sup> T. Vogel, *Physique mathématique classique*, Armand Colin, Paris, 1956.

