SENS DE LA DISTINCTION ANTIQUE ENTRE MODE PHYSIQUE ET MODE MATHÉMATIQUE DE DÉMONSTRATION

Joëlle DELATTRE (Lille)

Les auteurs grecs anciens ont distingué explicitement une manière de connaître *phusikôs* et une autre *mathematikôs*. Quelle différence faisaient-ils entre les deux modes, et pourquoi avaient-ils besoin de faire la distinction¹ ?

Conscients des enjeux scientifiques et philosophiques d'une telle distinction, nous nous sommes demandé s'il ne s'agissait simplement que de deux conceptions différentes de la recherche scientifique, ou de deux démarches de construction du savoir, mises en concurrence voire en contradiction. Les arguties plus ou moins sophistiquées en usage dans les écoles philosophiques de l'antiquité, et dont en particulier Sextus Empiricus s'est fait l'écho redoutable et zélé, fournissent en effet nombre d'exemples éloquentes.

Néanmoins, l'étude d'un exemple très simple de démonstration d'école, emprunté à Aristote et tel que l'a transmis Théon de Smyrne quelques siècles plus tard, gagne beaucoup à être confrontée à la version archimédienne de la même démonstration que la surface de l'eau au repos est sphérique. Cela donne alors, selon nous, des arguments plus précis et solides afin de décider si l'on peut vraiment distinguer deux modes de démonstration.

Deux manières de connaître le monde et d'en rendre compte

A la fin du premier livre du *Traité du Ciel*, Aristote oppose deux manières d'étudier le monde :

« en abandonnant le point de vue de l'universel (*katholou*) », écrit-il, « pour se placer à celui de la philosophie naturelle (*phusikôs*) », autrement dit, « d'un point de vue physique et non pas général (ou logique ?), il est impossible », continue-t-il, « qu'un étant d'abord éternel soit corrompu par la suite, ou que ce qui d'abord est non étant soit ensuite éternel »².

Il se trouve que ce passage joue, dans le traité aristotélicien, un rôle de transition entre les questions métaphysiques et logiques générales du premier livre (le monde a-t-il été créé ?, Est-il inengendré ? etc.), et les questions physiques du livre II concernant la forme, le mouvement et la position des astres et de la Terre. La caractéristique principale de l'explication physique, selon Aristote, est très précisément qu'elle recherche la manière la plus vraisemblable ou rationnelle (*eulogôtaton*) de rendre compte de ce qu'on peut observer, sans accepter aucune opinion ou interprétation irrationnelle ou déraisonnable (*alogon*). Nous avons proposé ailleurs une étude plus approfondie du sens des termes *alogon* et *eulogon*, en lien avec la notion de proportionnalité et la recherche de la moyenne géométrique et de la bonne mesure³. Contentons-nous de renvoyer ici à un autre passage du *Traité du ciel*, essentiel, selon nous, du point de vue épistémologique :

« Essayer d'éclaircir toutes choses sans rien omettre, de la même manière qu'on le fait pour certaines choses, pourrait peut-être sembler un signe de grande naïveté ou de grande audace. Néanmoins cette critique n'est pas juste quand elle est appliquée à tous de la même manière, mais il faut voir quelle est la raison (*aitían*) de leur étude et de quelle

¹ L'historien de la philosophie antique Jean-Paul Dumont a depuis longtemps attiré l'attention de la communauté scientifique, en montrant combien la pensée des sophistes, puis celle des stoïciens recouraient de manière privilégiée au « mode physique » plutôt qu'au « mode géométrique » ; voir Dumont J.-P., « *Mos geometricus, mos physicus* », dans Brunschwig J. (dir), *La logique des Stoïciens*, Paris 1978.

² Aristote, *Traité du Ciel*, I 12, dans la nouvelle traduction de Catherine Dalimier et Pierre Pellegrin, GF Flammarion bilingue 2004, p. 183.

³ Voir J. Delattre, « *Alogon, Eulogon, Analogôs* chez deux philosophes médio-platoniciens : Plutarque et Théon de Smyrne », dans *En deçà et au-delà de la ratio*, Valérie Naas (dir.), éd. du CeGES de Lille 3, 2004, p. 115-126.

façon se produit leur conviction, si elle est simplement humaine ou si elle est plus forte. Si l'on rencontre *des nécessités plus exactes*, alors il faut remercier ceux qui les découvrent, mais pour l'instant nous n'avons à parler que de ce qui nous paraît être le cas⁴ ».

La compréhension éclairée et l'explication vraisemblable du philosophe physicien auront ainsi toute chance de tenir une position moyenne et mesurée entre grande naïveté et grande audace, faute de « garanties nécessaires plus exactes », particulièrement difficiles à atteindre sur les sujets cosmologiques surtout.

Sur les sujets cosmologiques et astrologiques, en effet, il semble avoir existé dès l'Antiquité une distinction très claire entre deux types d'étude que, par exemple, Vitruve a fait l'effort de nommer et de définir⁵ :

« La *généthliologie* (ou science des horoscopes) enseigne pourquoi l'on peut savoir, par la connaissance des vertus des astres, le passé et l'avenir. Les inventions qu'ils nous ont laissées dans leurs écrits font voir quels ont été le savoir et l'esprit des grands personnages qui sont sortis de la nation des Chaldéens⁶. Béroze, le premier d'entre eux, étant venu dans l'île de Cos, y a enseigné cette science ; et Antipater l'ayant ensuite étudiée, ainsi qu'Achinapoulos, ils ont montré tous deux que la *généthliologie* doit être fondée plutôt sur la (date de) conception que sur (celle de) la naissance.

Quant à la *connaissance des choses naturelles*, des puissances qui gouvernent la nature, et des causes qui produisent tous les effets qui se voient dans le monde, Thalès de Milet, Anaxagore de Clazomène, Pythagore de Samos, Xénophane de Colophon et Démocrite d'Abdère ont laissé par écrit tout ce qu'ils en ont pensé ; et suivant leurs opinions, Eudoxe, Euctémon, Callippe, Méton, Philippe, Hipparque, Aratos et les autres astrologues, ont fait à l'aide de la *parapegmaticque* (ou construction de tables astronomiques), des observations plus exactes qu'ils ont laissées à la postérité, sur le lever et le coucher des étoiles et sur les saisons ».

Si les anciens appelaient indifféremment « astrologues », ceux qu'aujourd'hui nous nommons astronomes pour ne pas les confondre avec les adeptes de l'horoscope et autres prédictions astrologiques, ils faisaient néanmoins bien le départ entre les deux types de savoir et de recherches. Par ailleurs, Vitruve propose aussi une deuxième distinction entre ceux que traditionnellement on a appelés « physiciens » ou « philosophes de la nature », les grands penseurs présocratiques, et ceux qui se sont plus particulièrement préoccupé d'astronomie mathématique, et qui se sont servis de modèles géométriques ou de modèles arithmétiques pour faire comprendre la périodicité des mouvements célestes, l'irrégularité des saisons et l'inégalité des calendriers lunaires et solaires. On notera enfin comment, selon l'architecte latin, le mode d'explication physique fonde en quelque sorte le mode mathématique de recherche, lequel permet ensuite d'aboutir à plus d'exactitude dans l'observation et la prédiction.

Toutefois, le témoignage de Plutarque concernant le « courroux » de Platon⁷ qui aurait reproché à Archytas de Tarente et à Ménechme de « mêler » aux pures considérations géométriques des éléments mécaniques faisant intervenir des manipulations et des mouvements, invite à reconsidérer la manière dont les astronomes grecs ont articulé la mécanique et la géométrie dans leurs travaux. Sans doute ont-ils tous été à la fois des géomètres et des mécaniciens, utilisant la puissance de chacune des deux disciplines pour combler les insuffisances de l'autre, comme Archimède réussit à l'expliquer magnifiquement, dans sa lettre à Eratosthène *Sur la méthode*⁸.

⁴ Aristote, *Traité du Ciel*, II 5, dans la nouvelle traduction de Catherine Dalimier et Pierre Pellegrin, GF Flammarion bilingue 2004, p. 219.

⁵ Cf. Vitruve, *De l'architecture* IX 6, nous suivons ici la traduction de l'édition Nizan du XIXe s.

⁶ Ce sont les méthodes et les prétentions scientifiques de ces mêmes astrologues Chaldéens contre lesquelles Sextus Empiricus exerce sa critique sceptique dans la partie V du *Contre les professeurs*.

⁷ Cf. Plutarque, *Vie de Marcellus*, trad. Amyot, Paris 1587, p. 301-302.

⁸ Cf. *La Méthode d'Archimède relative aux propositions mécaniques*, Lettre à Eratosthène, *Oeuvres complètes d'Archimède*, trad. C. Mugler, Paris 1972.

A partir de là, il y a bien deux manières différentes de recourir à l'« expédient mécanique » pour l'astronome grec. Ou bien, procédant comme Eudoxe, et après lui Callippe, on s'efforcera de concevoir une combinaison de mouvements géométriques, susceptible de produire une trajectoire la plus semblable possible⁹ à celle que l'observation permet d'attribuer aux astres dits errants. Ou bien, comme Archimède et peut-être Archytas, on mettra en oeuvre matériellement une certaine combinaison de mouvements dans une machine perfectionnée plus ou moins automate, laquelle permettra surtout de « montrer » et de faire comprendre ce que la recherche géométrique étudie et démontre théoriquement¹⁰. Il est tentant, en fonction de ces deux manières d'user de la mécanique, de distinguer encore deux types d'astronomie :

- une astronomie savante pour initiés et dont l'objet serait surtout de rendre compte des déplacements des astres et d'en calculer la « raison » (*lógon*), c'est-à-dire en particulier, de s'intéresser aux rapports proportionnels de distance et de vitesse, à la composition des mouvements, aux retours cycliques et aux régularités, pour pouvoir déduire et prévoir les passages et événements remarquables (conjonctions et éclipses par exemple) ;

- une astronomie de « démonstration » pour grand public qui n'aurait d'autre prétention que de représenter mécaniquement les déplacements des astres à l'aide de dispositifs simples du type de ceux que Platon lui-même évoque dans le *Timée*¹¹, et dont la caractéristique principale aurait été surtout de chercher à reproduire ou transposer les apparences observables¹².

Un argument pour soutenir la dernière distinction que nous suggérons se trouve dans le fait que Ptolémée, au II^e siècle, ait jugé bon d'écrire, à côté de la *Syntaxe Mathématique*, un autre traité d'astronomie s'adressant à « ceux qui préfèrent utiliser des sphères automates ou actionnées à la main »¹³. Loin de nous toutefois l'idée que ce serait là deux astronomies concurrentes ou antagonistes, même si quelques possibilités existent de repérer des écoles d'astronomie différentes, en Asie mineure, à Athènes, à Rhodes, à Alexandrie, avec des méthodologies différentes¹⁴, comme il y a sans doute eu aussi des écoles de géométrie différentes par souci de compatibilité avec les principes fondamentaux de doctrines philosophiques originales comme notamment l'épicurisme ou le stoïcisme¹⁵. En effet, la double tendance ainsi définie pourrait bien n'avoir été qu'une caractéristique fondamentale de la démarche complexe de l'astronomie grecque¹⁶.

⁹ Il s'agit de la fameuse courbe « hippopède » encore nommée lemniscate.

¹⁰ Cf. La lettre d'Archimède à Eratosthène *Sur la méthode*, in *Oeuvres complètes d'Archimède*, trad. C. Mugler, Les Belles Lettres, Paris 1972. Voir aussi les témoignages sur les constructions mécaniques d'Archytas de Tarente, *Les Ecoles présocratiques*, p. 280, en particulier ce que dit Favorinus de la colombe volante, selon le témoignage d'Aulu-Gelle.

¹¹ Cf. Platon, *Timée* 40 c-d, trad. Luc Brisson, éd. GF Flammarion, 1991, p. 132. Voir aussi Delattre J., « Le point de vue de l'histoire des sciences : y a-t-il un modèle mécanique dans le *Timée* de Platon ? », dans *Lecture du Timée de Platon*, M. Tainmont (dir), Groupe philosophie de la MAFPEN et IREM de Lille, 1994.

¹² L'observation en astronomie est rarement simple et immédiate, à cause des grandes distances qui nécessitent des instruments de visée et de calcul pour la mesure, et des longs espaces de temps qui rythment les mouvements et les retours de configurations astrales identiques.

¹³ Cf. G. Aujac, *La sphéropée ou la mécanique au service de la découverte du monde*, in *Revue d'Histoire des Sciences* XXIII, 1970, p. 93-107. C'est aussi à ce traité de Ptolémée, intitulé *Hypothèses et positions des planètes* que G. Aujac renvoie pour démontrer l'importance des mécanismes de sphères construites dans la pratique antique de l'astronomie. Le texte grec de ce traité ptoléméen est en partie perdu, nous ne disposons plus que d'une version arabe, en cours d'édition et traduction par Régis Morelon.

¹⁴ Ainsi Proclus, dans son *Hypotypose des hypothèses astronomiques* signale qu'il va présenter les doctrines et théories qui procèdent "différemment de Ptolémée"; cf. ch. I 34-35, p. 18 éd. Manitius, Leipzig 1909.

¹⁵ Voir dans les *Actes de l'Université d'été d'épistémologie et d'histoire des mathématiques de Lille*, notre contribution : « Géométrie ou géométries antiques ? », IREM de Lille 1994.

¹⁶ Voir Delattre J., « Théon de Smyrne : modèles mécaniques en astronomie », dans *Sciences exactes et sciences appliquées à Alexandrie*, G. Argoud et J.-Y. Guillaumin ed, PU Saint-Etienne, Centre Jean-Palmerie, 1998, p. 371-395.

Manipulation évidente, preuve physique et exigence de rigueur mathématique

Plutarque, dans la *Vie de Marcellus*¹⁷, raconte comment Archimède avait été prié par le roi Hiéron de :

« révoquer un petit la géométrie de la spéculation des choses intellectives à l'action des corporelles et sensibles et faire que la raison démonstrative fût un peu plus évidente et plus facile à comprendre au commun peuple, en la mêlant par expérience matérielle à l'utilité de l'usage »,

et comment le savant d'Agrigente avait alors ébloui le roi en parvenant à tirer seul et sans effort des charges extrêmement lourdes,

« assis à son aise, en tirant tout bellement avec la main le bout d'un engin à plusieurs roues et poulies »¹⁸.

Le philosophe médio-platonicien interrompt alors son récit pour faire remarquer :

« Cet art de dresser instruments et engins qui s'appelle la Mécanique ou Organique, tant aimée et prisée de toutes sortes de gens, fut premièrement mise en avant par Archytas et Eudoxe, en partie pour réjouir et embellir un peu la science de la géométrie par cette gentillesse, et en partie aussi pour étayer et fortifier, par exemple d'instruments matériels et sensibles (qui s'appellent mésolabes ou mésographes), aucunes propositions géométriques dont on ne peut trouver les démonstrations intellectives par raisons indubitables et nécessaires, comme est la proposition qui enseigne à trouver deux lignes moyennes proportionnelles... ».

Ainsi le fameux « courroux » de Platon a peut-être contribué à faire que certains philosophes ont ensuite cru devoir mépriser la mécanique en la laissant aux ingénieurs et aux militaires, au prétexte qu'elle « gâtait la dignité et ce qu'il y avait d'excellent en la géométrie ». Néanmoins, la lecture du commentateur d'Archimède¹⁹, Eutocius (Ve s.), permet d'apprécier à sa juste mesure l'importance du rôle d'étai et de renfort joué par la preuve instrumentale et physique, dans le cas difficile des moyennes proportionnelles justement²⁰.

Sans doute, dans ce contexte, n'a-t-on pas assez pris en considération la manière, provocatrice parfois, dont les sophistes conduisaient les opérations géométriques, par manipulation et bricolage plutôt que par raisonnement, autrement dit « de manière physique et non mathématique ». Nous emprunterons à l'étude de Jean-Paul Dumont précédemment citée deux exemples : celui d'Antiphon et celui de Protagoras.

Concernant Antiphon, la déclaration d'Aristote, au livre premier de sa *Physique*²¹ :

« si la réfutation de la quadrature du cercle obtenue par la méthode des segments doit revenir au géomètre, tel n'est pas le cas de celle proposée par Antiphon »,

a donné lieu, concernant la méthode du sophiste, à deux témoignages dissemblables et semblables à la fois, chez les commentateurs de ce texte : Thémistius au IV^e siècle et Simplicius au Ve siècle. Voici celui de Thémistius :

« La géométrie n'aura rien à objecter à Antiphon qui, en inscrivant dans le cercle un triangle équilatéral, et en construisant sur chacun de ses côtés un triangle isocèle ayant son sommet sur la circonférence du cercle, et en répétant sans cesse l'opération, pensait que

¹⁷ Cf. Plutarque, *Vie de Marcellus*, Traduction Amyot, Paris 1587, p. 301-302, ou bien Collection de la Pléiade, tome I, p.679.

¹⁸ Le traducteur du XVI^e siècle, voyant dans cet exploit « la preuve de l'excellence de la géométrie », a ajouté en marge du texte : « subtilité appuyée sur les proportions géométriques est plus forte que toute force humaine ! ».

¹⁹ Voir Eutocius, *Commentaire sur De la sphère et du cylindre d'Archimède*, traduit par C. Mugler au tome IV des *Œuvres complètes* d'Archimède, dans la collection bilingue Budé.

²⁰ Voir Delattre J., « De quelques lignes remarquables en géométrie et mécanique grecques, instruments privilégiés d'une approche scientifique du mouvement : l'exemple de Théon de Smyrne, dans *Oriens-Occidens. Sciences, mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'Age classique*, n°1 1997, p. 83-103.

²¹ Cf. Aristote, *Physique* I 2, 185 a 14, et Antiphon fragment B XIII de Diels-Kranz, traduit dans *Les Présocratiques*, éd. J.-P. Dumont, pour la Bibliothèque de la Pléiade, p. 1099 ; voir aussi les notes à ce témoignage, p. 1560.

viendrait un moment où le coté du dernier triangle, quoique étant une droite, s'appliquerait à la circonférence. Cette méthode suppose qu'on n'admette pas la possibilité de diviser à l'infini, hypothèse qui au contraire est adoptée par les géomètres »²².

Simplicius, quant à lui, précise qu'Antiphon inscrivait dans le cercle non pas un triangle mais un carré, lequel donnait, par divisions successives du cercle à l'aide de triangles isocèles ayant leur sommet sur la circonférence, un octogone, puis un polygone à 16 côtés,

« ... et en continuant toujours à ce faire, un polygone dont les côtés, grâce à leur petitesse, s'appliqueraient à la circonférence »²³.

Qu'il s'agisse d'un carré ou d'un triangle équilatéral d'abord inscrit dans le cercle, cela ne change rien à la démarche : Antiphon procède, au moyen des triangles isocèles construits sur les côtés de la première figure inscrite, à une division réelle du cercle qui ne peut matériellement se faire à l'infini : le polygone devient physiquement égal au cercle en coïncidant avec lui, résultat qui toutefois heurte l'exigence géométrique de la divisibilité à l'infini.

Pour ce qui est de Protagoras, c'est Aristote encore qui joue le rôle de témoin²⁴.

« Il n'est pas vrai que l'arpentage se rapporte à des grandeurs sensibles et corruptibles : car il se corromprait avec leur corruption. Et certes il ne se rapporte pas plus à des grandeurs sensibles que l'astronomie au ciel que nous voyons. Et les lignes sensibles ne sont pas celles dont parle le géomètre. Car aucune ligne sensible n'est droite ou courbe aux termes de sa définition : en effet, ce n'est pas par un point que la règle et le cercle sont tangents, mais de la manière définie par Protagoras lorsqu'il réfute les géomètres ».

En effet, pour Protagoras, la tangente sensible « n'est pas tangente en un point mais sur toute une longueur » ; par exemple, une boule peinte déposée sur un plan y laissera une trace colorée dont la dimension est sensible et matérielle. Preuve physique et manipulation redoutable ! Sextus Empiricus, dans la partie III du *Contre les professeurs* développe longuement les difficultés inextricables que les géomètres ont à affronter dès lors qu'ils acceptent qu'on les interroge sur le caractère sensible ou intelligible de leurs objets : point, ligne, surface et corps tridimensionnel²⁵.

Voici ce qu'il écrit à propos de la sphère tangente au plan :

« Quant à la sphère, on pose qu'elle touche le plan par un seul signe-point, et qu'elle produit une ligne en roulant : à l'évidence, ce sont les signes-points qui, au fur et à mesure qu'ils descendent et tombent, composent la ligne tout entière »²⁶,

évidence que l'on peut rapprocher de ce que Plutarque a lui-même écrit à ce propos :

« Si une sphère touche un plan par un point, *il est évident* que cette sphère est entraînée selon ce point par le plan ; et si elle est enduite de vermillon sur sa propre surface, elle laissera sur le plan un trait de vermillon ; si elle est échauffée, elle échauffera le plan. Or il est *contraire au sens commun* de dire qu'un incorporel a une couleur ou qu'un corps est échauffé du fait d'un incorporel »²⁷ ;

donc ou bien la tangence ne se fait pas en un point, ou bien le point n'est pas sans dimension.

La relecture attentive et la traduction du *Contre les professeurs* III (*Contre les géomètres*) de Sextus Empiricus permettent de confirmer que ce ne sont pas seulement les sophistes, puis les adeptes du Portique qui ont eu recours à de telles réfutations « évidentes et physiques » ; les philosophes du Jardin n'étaient pas en reste lorsqu'ils disaient justement que :

²² Antiphon B XIII, trad. J.-L. Poirier, *Les Présocratiques*, p. 1100.

²³ *Ibid.*, trad. J.-L. Poirier, *Les Présocratiques*, p. 1099.

²⁴ Cf. Aristote, *Métaphysique* B 997 b 32, fragment B VII Diels-Kranz de Protagoras, traduit dans *Les Présocratiques*, éd. J.-P. Dumont, p. 1001. Voir aussi *Premiers analytiques* I 41-19 b 35 et *Seconds analytiques* I 10, 76 b 39.

²⁵ Voir Delattre J., « La critique de l'enseignement dans le *Contre les géomètres* et le *Contre les astrologues* de Sextus Empiricus », dans *Sur le Contre les professeurs de Sextus Empiricus*, Delattre J. (éd), publication du CeGES de Lille 3, 2006, p. 119-133.

²⁶ Cf. Sextus, *Contre les professeurs* III 27, éd. Pierre Pellegrin (dir), GF Flammarion bilingue 2002, p. 312-313.

²⁷ Cf. Plutarque, *Notions communes* 40, 1081 A, cité et traduit par J.-P. Dumont dans « *Mos geometricus, Mos physicus* » comme une preuve que la tradition stoïcienne a repris les arguments de Protagoras pour des raisons doctrinales matérialistes.

« la droite <faite> du vide est droite mais ne tourne pas, parce que le vide lui-même n'accepte de mouvement ni dans sa totalité ni partiellement »²⁸,
le seul incorporel pour Epicure étant le vide, si la droite est formée de points-signes incorporels, elle est alors « droite du vide » sans mouvement possible, ce qui invalide *de facto* toute construction géométrique.

Mais quand Archimède construit la spirale puis énonce sa propriété fondamentale comme une évidence, il produit certes la ligne hélicoïdale par la combinaison de deux mouvements : le mouvement rectiligne d'un point A depuis le centre du cercle sur le rayon AO et le mouvement circulaire du point O de ce même rayon sur la circonférence du cercle, « chacun se portant soi-même à vitesse égale par rapport à soi-même²⁹ » ; toutefois, sa véritable intention est de comparer des distances parcourues, et d'établir des correspondances entre segments de droites et arcs de cercles. Il ne s'intéresse qu'aux conséquences du résultat de la combinaison de mouvements, lesquelles il cherche à fonder et justifier géométriquement. Il met en œuvre, pourrait-on dire, la manière (*trópos*) de procéder qu'il conseille aux chercheurs en géométrie et à son ami Eratosthène pour les problèmes nouveaux : accepter de recourir de manière heuristique³⁰ au mouvement en se servant d'instruments comme la balance, le levier ou la vis, pour ne procéder aux démonstrations géométriques qu'ensuite.

« ...une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Et je suis persuadé que cela peut servir même pour la démonstration de théorèmes ; certaines propriétés qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique ont été démontrées plus tard par la géométrie... »³¹.

La mise en mouvement d'un point, d'une droite, d'une courbe, permet de « voir » la solution qu'il reste à démontrer, et c'est l'état d'équilibre obtenu en stoppant la mise en mouvement qui va devenir alors l'objet d'étude géométrique rigoureuse. Le point de vue mécanique ou physique ne prétend alors ni réfuter ni non plus fonder l'exigence géométrique de démonstration, il la prépare et la facilite simplement :

« car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance »³².

La double monstration et démonstration que la surface de l'eau au repos est sphérique

Dans le *Traité du Ciel* encore³³, on trouve parmi les arguments développés pour prouver la sphéricité du ciel, une brève démonstration à partir d'une sorte d'un scénario fictif que l'on peut effectivement qualifier d'« expérience imaginaire³⁴ » :

« Que la surface de l'eau soit sphérique, est *manifeste* pour qui accepte l'hypothèse selon laquelle, *par nature, l'eau coule toujours dans ce qui est plus creux* ; or ce qui est plus creux est ce qui est plus proche du centre. Traçons donc à partir du centre AB et AG, et joignons les par BG. Le segment AD abaissé sur la base est plus petit que les rayons qui

²⁸ Cf. Sextus, *Contre les professeurs* III 98, trad. cit. p. 345.

²⁹ Cf. Archimède, *Sur les Spirales*, II 44-46, cité et traduit par I. Thomas, *Greek Mathematical Works* II 182 ; traduit en français dans Delattre J., « De quelques lignes remarquables... », art. cit., p. 86-87.

³⁰ Cf. W. R. Knorr, « Archimedes and the spirals : the heuristic Background », *Historia mathematica* 5, 1978, p. 43-75.

³¹ *La Méthode d'Archimède relative aux propositions mécaniques*, Lettre à Eratosthène, *Oeuvres complètes d'Archimède*, trad. C. Mugler, Paris 1972.

³² *Ibid.*

³³ *Aristote, Traité du Ciel*, II 4, 287 b 1-14, dans la nouvelle traduction de Catherine Dalimier et Pierre Pellegrin, GF Flammarion bilingue 2004, p. 215.

³⁴ Voir la note des traducteurs, C. Dalimier et P. Pellegrin, p. 434.

partent du centre. Donc le lieu (D)³⁵ sera plus creux de sorte que l'eau y coulera jusqu'à égalisation. Or AE est égal aux rayons tirés à partir du centre. De sorte qu'il est nécessaire que l'eau aille jusqu'au niveau défini par les rayons, car c'est là qu'elle sera en repos. Et la ligne qui est en contact avec les extrémités des rayons est circulaire. Donc la surface BEG de l'eau est sphérique ».

Le raisonnement aristotélicien se développe ainsi, à propos de toute surface aqueuse dans le monde céleste, à partir de l'évidence physique quotidienne de l'écoulement naturel de l'eau jusqu'à un niveau « égal ».

Environ cinq siècles plus tard, on peut lire, au début de l'astronomie de Théon de Smyrne³⁶, en quels termes l'argument s'est transmis ; Théon s'appuyant sur un texte d'Adraste le péripatéticien, commentateur du *Timée* de Platon, transmet la démonstration sans se référer directement à Aristote :

« Voici comment on montre, aussi bien du point de vue physique que mathématique, que la surface de tout plan d'eau, au repos du moins, est sphérique :

“par nature en effet, c'est toujours à partir d'endroits élevés que l'eau s'écoule vers les creux ; or ce qui est élevé, ce sont les points les plus éloignés du centre de la Terre, et ce qui est creux, ce sont les moins éloignés ; si bien que, si nous supposons que la surface de l'eau est droite et plane, par exemple la ligne ABG, si ensuite à partir du centre de la Terre, par exemple à partir du point K, nous menons verticalement vers le milieu la droite KB, et si nous joignons les extrémités de la surface par les droites KA, KG, il est évident que l'une et l'autre des droites KA, KG, sont plus grandes que la droite KB, et que l'un et l'autre des points A et G qui sont plus éloignés du point K que ne l'est le point B, seront aussi plus élevés que le point B. L'eau s'écoulera à partir des points A et G vers le point B plus creux, simplement jusqu'à ce que B se remplissant, il ait un éloignement du point K égal à celui de chacun des points A et G ; et de la même façon, tous les points qui sont à la surface de l'eau ont un éloignement égal du point K. Il est évident que celle-ci est sphérique”. De sorte que précisément, toute la masse en même temps de la Terre et de la mer est sphérique ».

La généralisation de la conclusion par Théon signifie que, pour lui, l'argument ne peut suffire à démontrer la sphéricité (puisqu'il la suppose, en réalité, avec le choix du point K). Il permet plutôt au philosophe de démontrer que les plans d'eau sont une apparence trompeuse (comme les plateaux et les plaines sur Terre) et que donc ils ne mettent pas plus en cause la sphéricité de l'ensemble de la Terre que ne peuvent le faire les plus hautes montagnes dont il va être question dans la suite du traité.

Toutefois, on ne peut passer sous silence la manière dont Archimède³⁷ procède dans son traité *Des corps flottants*, premier traité antique conservé d'hydrostatique, car il y recourt à la pression des masses d'eau sur le fond, laquelle serait différente si les distances étaient inégales, ce qui entraînerait des remous dans l'eau, dite au repos par hypothèse.

« La surface de tout liquide au repos est la surface d'une sphère qui a le même centre que la terre.

Supposons en effet un liquide au repos, et supposons sa surface coupée par un plan passant par le centre de la terre. Soient K le centre de la terre, et la courbe ABGD, la section de surface. Alors je dis que la courbe ABGD est un arc de cercle dont le centre est K. Car si elle ne l'est pas, les lignes droites tracées depuis le point K ne seront pas égales ».

³⁵ Nous ne pensons pas qu'il faille suppléer <situé en E> comme l'on fait les traducteurs, il s'agit bien du lieu D que l'on vient de construire en abaissant le segment AD.

³⁶ Théon de Smyrne, *Ce qui est utile du point de vue scientifique à la lecture de Platon*, III 123-124, éd. Hiller.

³⁷ Cf. Archimède, *Des corps flottants* I prop. 2, dans I. Thomas, *Greek Mathematical Works* II 245-247 qui traduit la version latine de Guillaume de Moerbeke (1269), là où le texte grec retrouvé en 1906 par Heiberg est perdu ou corrompu.

Suit alors la construction d'un arc de cercle $ZBEGH$ de centre K dont on suppose certains rayons plus grands (ZK, HK) et certains plus petits (EK) que les lignes droites tracées depuis le centre K jusqu'à la courbe $ABGD$. Puis, « dans le même plan, dans le liquide » (*sic* !), on construit un arc de cercle XOP (X sur ZK , O sur BK et P sur LEK) :

« Les parties de liquide le long de l'arc OX sont sous la pression du liquide qui se trouve entre OX et ZB , tandis que les parties le long de l'arc OP sont sous la pression du liquide compris entre OP et BE ; en conséquence, la part de liquide le long de l'arc OX et la part de liquide le long de OP sont sous des pressions inégales ; si bien que les parties soumises à une moindre pression sont comprimées par les parties soumises à une pressions plus grande ; donc le liquide ne restera pas au repos. Mais nous avons supposé que le liquide demeurait immobile. *Il est donc nécessaire* que la courbe $ABGD$ soit un arc de cercle de centre K ».

L'articulation d'un mode physique et d'un mode géométrique nous semblent ici contribuer avec une élégance remarquable à *l'efficacité de la démonstration*, dans la mesure précisément où l'un ne cherche plus ni à fonder ni à réfuter l'autre, l'enjeu étant uniquement de découvrir l'exacte nécessité qui parviendra à emporter la conviction.

Bibliographie

Textes anciens :

- *Archimède, *Sur les Spirales*, II 44-46, dans I. Thomas, *Greek Mathematical Works II 182 Des corps flottants I prop. 2*, dans I. Thomas, *Greek Mathematical Works II 245-247 La Méthode d'Archimède relative aux propositions mécaniques*, Lettre à Eratosthène, *Oeuvres complètes d'Archimède*, éd. et trad. C. Mugler, Paris 1972
- *Aristote, *Métaphysique* B 997 b 32 = fragment B VII Diels-Kranz de Protagoras, traduit dans *Les Présocratiques*, éd. J.-P. Dumont, p. 1001
- Physique* I 2, 185 a 14 = Antiphon fragment B XIII de Diels-Kranz, traduit dans *Les Présocratiques*, éd. J.-P. Dumont, Bibliothèque de la Pléiade, p. 1099-1100
- Aristote, Traité du Ciel*, nouvelle traduction de Catherine Dalimier et Pierre Pellegrin, GF Flammarion bilingue 2004, p. 183
- *Eutocius, *Commentaire sur De la sphère et du cylindre d'Archimède*, éd. et trad. par C. Mugler au tome IV des *Oeuvres complètes d'Archimède*, Paris 1972
- *Platon, *Timée*, trad. Luc Brisson, éd. GF Flammarion, 1991
- *Plutarque, *Vie de Marcellus*, Traduction Amyot, Paris 1587 ; ou Collection de la Pléiade. *Notions communes* 40, 1081 A
- *Proclus, *Hypotypose des hypothèses astronomiques*, éd. Manitius, Leipzig 1909.
- *Sextus Empiricus, *Contre les professeurs*, Pellegrin P. (dir), GF Flammarion bilingue 2002
- *Théon de Smyrne, *Ce qui est utile du point de vue scientifique à la lecture de Platon*, III, éd. et trad. lat. Martin Th. H., Paris 1849 ; éd. Hiller E., Leipzig 1878 ; éd. et trad. Dupuis J., Paris 1892, reprint Bruxelles 1966 ; trad. Delattre J., thèse de Doctorat 1997 non publiée.
- *Vitruve, *De l'architecture* IX 6, éd. Nizan du XIXe s.

Etudes :

- *Aujac G., « La sphéropée ou la mécanique au service de la découverte du monde », in *Revue d'Histoire des Sciences* XXIII, 1970, p. 93-107
- *Delattre J., « Géométrie ou géométries antiques ? », *Actes de l'Université d'été d'épistémologie et d'histoire des mathématiques de Lille*, éd. Bkouche R., IREM Lille, 1994
- « Le point de vue de l'histoire des sciences : y a-t-il un modèle mécanique dans le *Timée* de Platon ? », dans *Lecture du Timée de Platon*, M. Tainmont (dir), Groupe philosophie de la MAFPEN et IREM de Lille, 1994
- « De quelques lignes remarquables en géométrie et mécanique grecques, instruments privilégiés d'une approche scientifique du mouvement : l'exemple de Théon de Smyrne », dans *Oriens-Occidens. Sciences, mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'Age classique*, n°1 1997, p. 83-103
- « Théon de Smyrne : modèles mécaniques en astronomie », dans *Sciences exactes et sciences appliquées à Alexandrie*, G. Argoud et J.-Y. Guillaumin ed, PU Saint-Etienne, Centre Jean-Palermo, 1998, p. 371-395
- « *Alogon, Eulogon, Analogôs* chez deux philosophes médio-platoniciens : Plutarque et Théon de Smyrne », dans *En deçà et au-delà de la ratio*, Valérie Naas (dir.), éd. du CeGES de Lille 3, 2004, p. 115-126

« La critique de l'enseignement dans le *Contre les géomètres* et le *Contre les astrologues* de Sextus Empiricus », dans *Sur le Contre les professeurs de Sextus Empiricus*, Delattre J. (éd), publication du CeGES de Lille 3, 2006, p. 119-133.

*Dumont J.-P., « Mos geometricus, Mos physicus », dans Brunchwig J. (dir), *La logique des Stoïciens*, Paris 1978

*Ferrari F., « I commentari specialistici alle sezioni matematiche del *Timeo* », dans Brancacci A. (éd.), *La filosofia in età imperiale. Le scuole e le tradizioni filosofiche*, Atti del colloquio Roma 17-19 giugno 1999, Bibliopolis, coll. Elenchos, vol. XXXI, 2000

*Knorr W. R., « Archimedes and the spirals : the heuristic Background », *Historia mathematica* 5, 1978, p. 43-75

*Vitrac B., « Les mathématiques dans le *Timée* de Platon : le point de vue d'un historien des sciences », dans *Etudes platoniciennes* II, 2006, p. 11-78