COMPTER ET MESURER SELON HERMANN HELMHOLTZ

Conférence d'Olivier DARRIGOL,

Résumé

Dans un mémoire de 1887, Helmholtz discutait les fondements de l'arithmétique et de son application à la mesure des quantités physiques. La première partie de ce mémoire fait procéder la notion de nombre ordinal d'une expérience psychologique primitive: la faculté que nous avons d'ordonner dans le temps la succession discrète de nos actes de conscience. Helmholtz en déduit des définitions naturelles des opérations arithmétiques et démontre par récurrence leurs propriétés fondamentales (souvent prises comme axiomes). Dans la seconde partie de son mémoire, Helmholtz définit la mesure comme la recherche dans la nature de structures isomorphes à celle de l'arithmétique. Cela suppose, d'une part, l'introduction de méthodes concrètes de comparaison et d'addition susceptibles d'être identifiées à l'égalité et à l'addition arithmétiques; d'autre part, la vérification de critères de mesurabilités reflétant les propriétés de base de ces opérations.

Helmholtz fut ainsi le premier à poser de manière très générale les conditions de mesurabilité d'une quantité. Son mémoire est aujourd'hui considéré comme un acte fondateur d'une conception "représentationnelle" de la mesure, qui fait dépendre le concept de mesure de celui de nombre (et non l'inverse). Néanmoins, sa partie arithmétique et souvent jugée naïve, comme le pensaient déjà les mathématiciens de la fin du XIXe qui exigeaient une définition rigoureuse et ensembliste des nombres (Dedekind, Cantor, Frege...).

Comment comprendre la genèse de cet étrange mémoire de Helmholtz? Le texte et les circonstances de sa publication donnent quelques clefs. Helmholtz inscrivait sa réflexion sur l'arithmétique dans le prolongement de celle sur la géométrie. Dans les deux cas, il s'agissait de réviser la conception kantienne et de jauger la dimension empirique de ces notions. Mais sa réflexion sur les nombres et sur la mesure emprunte aussi à des sources plus externes: les réflexions formalistes des frères Grassmann sur les fondements de l'arithmétique, la conception empirique des nombres et de l'analyse chez Paul Du Bois-Reymond, les débats antérieurs sur la mesurabilité des phénomènes psychologiques, et quelques considérations fragmentaires de physiciens comme Maxwell et Mach sur la mesurabilité de la température ou de la masse.

De cet examen des sources de Helmholtz, il ressort que l'idée de discuter les fondements et les critères de la mesure n'est pas venue de la physique, car celle-ci considérait la mesurabilité de ses quantités fondamentales comme une évidence. Les premiers critiques de la mesure et de son rapport aux nombres furent des mathématiciens et des psychologues. Par ailleurs, il apparaît que Helmholtz faisait de ses sources une lecture sélective, qui lui permettait d'éviter leurs contradictions mutuelles et de mûrir son propre point de vue dans un cadre empiriste mais encore teinté de kantianisme. Cet éclectisme filtrant a sans doute dérouté plus d'un de ses lecteurs. Il peut aussi expliquer la diversité de l'accueil qui fut fait au mémoire de Helmholtz.

Pour plus de détails, consulter l'article: "Number and measure: Hermann Helmholtz at the crossroads of mathematics, physics, and psychology," *Studies in history and philosophy of science*, 34 (2003), 515-573.

**SUR UN MEMOIRE DE HELMHOLTZ INTITULE: "SUR LES INTEGRALES DES EQUATIONS
HYDRODYNAMIQUES QUI CORRESPONDENT AU MOUVEMENT TOURBILLONNAIRE"
(1858).**

Atelier dirigé par Olivier DARRIGOL,

Les théoriciens de l'hydrodynamique d'avant Helmholtz n'avaient guère pu traiter que des écoulements potentiels, pour lesquels le vecteur vitesse est le gradient d'une fonction scalaire. Dans le cadre de ses recherches théoriques sur les tuyaux d'orgue, Helmholtz cherchait à comprendre les effets de la viscosité sur les oscillations de l'air. Comme il ne connaissait pas l'équation de Navier-Stokes, qui régit l'écoulement des fluides visqueux, il s'est d'abord interrogé sur la nature des écoulements induits par les forces visqueuses (une fois celles-ci supprimées par la pensée). Ces écoulements ne possèdent justement pas de potentiel des vitesses.

Après ces préliminaires, nous avons lu le mémoire de Helmholtz pour en dégager les grands moments.

Par une analyse cinématique du mouvement infinitésimal d'un élément du fluide, Helmholtz montre d'abord que l'absence de potentiel est équivalente à l'existence d'une rotation de ces éléments. Puis il établit quelques propriétés remarquables de cette rotation dans le cas des fluides incompressibles et non visqueux. Si l'on trace dans le fluide des lignes partout tangentes à l'axe de rotation, puis des tubes dont les parois sont formées de telles lignes, on constate que ces tubes suivent le mouvement du fluide et que leur intensité (la rotation moyenne dans leur section) se conserve dans le temps. Les tourbillons sont donc des structures permanentes du mouvement d'un fluide. Helmholtz montre ensuite comment ces structures déterminent le champ des vitesses (par des formules analogues à celle de l'électromagnétisme). Enfin il analyse le comportement de systèmes simples de tourbillons.

Enfin, nous avons abordé quelques premières applications remarquables des idées de Helmholtz: surfaces de discontinuités, jets fluides et leurs instabilités.

Pour plus de détails, consulter l'article : "From organ pipes to atmospheric motions: Helmholtz on fluid mechanics," *Historical Studies in the Physical Sciences*, 29 (1998), 1-51.