

## DARCY ET LES FONTAINES DE LA VILLE DE DIJON

*Martin ZERNER, Equipe REHSEIS (UMR 7596 - CNRS et Université Paris 7)*

On comprendra qu'il m'ait paru impossible de tenir un colloque sur mathématique et physique à Dijon sans parler de Darcy. D'abord, la place Darcy est assez grande pour qu'on la remarque. Ensuite, et sur un plan plus scientifique, la loi de Darcy, qui régit l'écoulement de l'eau à travers le sable, et plus généralement celui d'un fluide à travers un milieu poreux, est typique de nombreuses situations physiques que j'appelle intermédiaires. Elles concernent des phénomènes trop complexes pour que la théorie physique parvienne à en donner une explication complète et elles se situent entre physique et technologie. Mentionnons à ce sujet que la loi de Darcy a de multiples applications techniques, en hydraulique bien sûr, mais aussi pour l'extraction du pétrole, l'enrichissement de l'uranium et j'en oublie, sans parler de celles que je ne connais pas.

Cela dit, je n'ai pas fait de recherche particulière sur la question qui a d'ailleurs été assez négligée par les historiens des sciences. La principale référence d'ensemble sur l'histoire de l'hydraulique reste Rouse et Ince (1957) qui est extrêmement sommaire. Darrigol (2002) aborde l'histoire de l'hydraulique dans la période qui nous intéresse à propos de la lente découverte des équations fondamentales de la mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes. Je tiens à remercier ici Konstantinos Chatzis qui m'a donné de précieuses indications. Au sein des maigres études sur l'histoire de l'hydraulique, le mouvement des fluides en milieu poreux reçoit la part du pauvre. Un colloque a été organisé par l'ASCE (American Society of Civil Engineers) à l'occasion du deuxième centenaire de la naissance de Darcy (2003) ; les actes en sont publiés (ss la dir. de Brown, Garbrecht et Hager, 2003). Des chercheurs de la Oklahoma State University ont mis en ligne un certain nombre d'articles et la note de Darcy où il établit la loi qui porte son nom :

<http://biosystems.okstate.edu/darcy/>

(Les gens qui étudient la pollution par les nitrates sont des consommateurs de la loi de Darcy, cela se comprend aisément).

### *Darcy, sa vie, son œuvre*

Henry Darcy est né en 1803 à Dijon où son père était receveur des impôts. Il est entré à Polytechnique en 1821, à l'école des Ponts et Chaussées en 1823. A sa sortie il fut affecté au département du Jura mais rapidement transféré à Dijon, à la demande du préfet de la Côte d'Or. On notera que c'était sous la Restauration. La tâche confiée à Darcy était une étude préliminaire d'un projet d'adduction d'eau pour la ville. Son travail aboutit en 1834 à un rapport à la municipalité où il proposait un plan détaillé basé sur l'adduction de l'eau de la source du Rosoir située à 12km de la ville. Le plan rapidement approuvé, les travaux commencèrent en 1839 (il fallait l'approbation du projet par le gouvernement, le temps de réaliser des expropriations et la passation des marchés). L'eau du Rosoir commença à arriver à Dijon l'année suivante et les travaux étaient achevés en 1844.

Darcy fut obligé de quitter Dijon après la révolution de 1848 et affecté à Bourges, peut-être pour des raisons politiques. Dès 1849 il est nommé à Paris comme directeur du service de l'eau et du pavage. En 1850 il est promu inspecteur des Ponts et Chaussées. Il retourne à Dijon en 1855, mais la même année, il demande à être déchargé de service pour raison de santé, tout en continuant son travail de recherche. Il publie en 1856 *Les Fontaines publiques de la Ville de Dijon*. Nous reparlerons de ce livre monumental, très souvent cité parce qu'on y trouve en quelques pages la loi qui porte maintenant le nom de Darcy, et certainement très peu lu. L'année suivante, Darcy publia

*Recherches expérimentales relatives au Mouvement de l'Eau dans les Tuyaux.* Il fut élu à l'Académie des Sciences la même année et n'y resta guère car il mourut le 2 janvier 1858. Une note "Relative à quelques modifications à introduire dans le tube de Pitot" parut après sa mort. Le tube de Pitot est un instrument qui permet de mesurer la vitesse d'un liquide loin de la surface et des parois. En 1865, un autre ingénieur des Ponts et Chaussées, Henri Bazin (1829-1917) qui avait commencé sa carrière sous la direction de Darcy, publia *Recherches hydrauliques entreprises par M. H. Darcy.* Il s'agit cette fois de l'écoulement de l'eau dans les canaux.

Darcy laisse donc une œuvre double d'ingénieur et de scientifique l'une et l'autre presque exclusivement dans le domaine de l'hydraulique. Le chef d'œuvre de l'ingénieur est évidemment l'adduction d'eau de Dijon. Elle a marqué la physionomie de la ville avec en particulier l'installation d'une borne-fontaine tous les cent mètres et les jets d'eau de la Porte Saint Pierre (aujourd'hui, Place Wilson). Le débit pouvait atteindre au besoin plus de 11.000 m<sup>3</sup> par jour. Cette adduction est au demeurant toujours en service aujourd'hui. Les principales contributions scientifiques de Darcy ont déjà été mentionnées. La loi de Darcy est la plus connue aujourd'hui. Elle semble être la plus originale et, comme il a été dit, elle est à la base des calculs des ingénieurs dans de multiples domaines. S'il est facile pour nous de séparer l'œuvre de l'ingénieur de celle du scientifique, il ne faut pas s'y tromper, elles sont fortement liées. Ce point se rattache à l'étude du milieu des ingénieurs des Ponts et Chaussées (Belhoste 1994, Chatzis 2004, Picon 1992). Certains d'entre eux ont apporté des contributions scientifiques dont l'importance est bien connue, on pense en particulier à Navier et Saint Venant. Mais ceux-ci, contrairement à Darcy, sont plus des enseignants et des chercheurs que des hommes de terrain (Saint Venant contre son gré d'ailleurs). Chez beaucoup d'autres ingénieurs des Ponts et Chaussées, l'empirisme, exprimé ou non, régnait en maître (Belhoste 1994, Darrigol 2002 p. 127-130). Saint Venant, dont il a été question au début de cet exposé, s'est plaint amèrement de l'empirisme de ses collègues ingénieurs. Il a expliqué cette opposition dans divers écrits publiés ou inédits<sup>1</sup>. Pour lui (comme pour l'auteur du présent exposé), l'emploi d'une formule empirique motivé sur ce qu'on peut la faire cadrer avec quelques faits isolés ne fera que tromper et empêcher d'y substituer une formule vraie. Nous verrons que ce point de vue est confirmé par l'étude de la naissance de la loi de Darcy. Il serait intéressant de connaître les rapports entre ce dernier et Saint Venant qui n'ont pas été étudiés à ma connaissance.

### *Un aperçu du livre sur les fontaines de Dijon*

Ce livre est un véritable monde, et une riche mine d'où on peut tirer des sujets de TPE dans les disciplines les plus diverses, citons la physique, l'histoire et l'économie..

Commençons sèchement: 647 pages auxquelles il faut ajouter 28 planches hors texte de 35,4 cm sur 57,7 cm qui ne se trouvent pas, comme il était habituel, à la fin de l'ouvrage mais dans un carton à part. La table des matières à elle seule occupe sept pages; il est vrai qu'elle est très détaillée. La page de titre porte les sous-titres suivants:

"Exposition et Application des Principes à suivre et des Formules à employer dans les Questions de Distribution d'Eau; Ouvrage terminé par un Appendice relatif aux Fournitures d'Eau de plusieurs Villes, au Filtrage des Eaux et à la Fabrication des Tuyaux de Fonte, de Plomb, de Tôle et de Bitume".

En effet, tout cela s'y trouve, et bien d'autres choses encore. Une première partie est consacrée à expliquer le choix de la source du Rosoir. Plus précisément, c'est l'objet du chapitre III qui occupe environ 120 pages. Il est précédé de deux chapitres historiques (une cinquantaine de pages à eux deux); à part une citation de Grégoire de Tours, la documentation remonte jusqu'au quinzième

---

<sup>1</sup> Ces écrits ont été analysés par Chatzis (2004). On retrouve aussi cette position dans plusieurs endroits de sa correspondance avec Boussinesq conservée à la bibliothèque de l'Institut de France (MS4226 et MS4227).

siècle. Le chapitre III contient une masse de considérations diverses. Une première partie fait l'état des lieux avant les travaux. La suivante s'intitule "Choix à faire entre les différents modes d'alimentation de Dijon". Ses dix pages sont en bonne partie consacrées à l'étude des formules d'où on peut déduire le volume d'eau nécessaire à l'alimentation d'une ville, avec de nombreux exemples. La troisième partie de ce chapitre est un peu bizarrement intitulée "D'après le résultat trouvé pour le volume d'eau nécessaire à l'alimentation d'une ville". C'est là que Darcy justifie en détail le choix de la source du Rosoir. Suivent encore cinq parties intitulées:

- De l'origine des fontaines
- Singularités que les fontaines offrent quelquefois à l'observateur
- Des moyens de découvrir et de créer des sources
- Des puits artésiens
- Application des principes développés dans les pages ci-dessus relatées [à un certain nombre de sources situées en différents endroits de France]

La table des matières de ce chapitre indique *in fine*:

"Voir (note D) les conclusions que permet de tirer la loi expérimentalement démontrée de l'écoulement de l'eau à travers les sables, en ce qui concerne:

- 1° Le décroissement du débit des sources à partir de leur étale;
- 2° L'augmentation de leur débit par l'abaissement artificiel de leur niveau."

La deuxième partie est consacrée à une description très détaillée du système d'adduction d'eau de Dijon, y compris les procédés d'exécution et les coûts. La troisième, appelée "Expériences" décrit en effet de nombreuses expériences faites sur ce système en y ajoutant des réflexions plus générales, en particulier sur les formules qui donnent le débit des tuyaux en fonction de la différence de pression que l'eau y subit et de leur diamètre. Enfin la quatrième partie traite des questions administratives (expropriations etc.).

### ***La loi de Darcy in statu nascendi***

La fin du livre sur les fontaines de la ville de Dijon est un appendice constitué de nombreuses notes. Une partie de la note D intitulée: "Détermination des lois d'écoulement de l'eau à travers du sable"

se trouve dans les pages 590 à 594. Darcy y vérifie expérimentalement que :  $q = k \frac{s}{e} (h + e)$  où  $q$

est le débit,  $s$  la surface de la section de la couche de sable,  $e$  son épaisseur et  $h$  la différence de pression entre le sommet et la base de la couche; enfin  $k$  est un coefficient qui dépend de la nature du sable utilisé.

L'appareil employé pour les expériences (voir la figure, qui est extraite de la planche 24) était un cylindre vertical de 0,35 m de diamètre intérieur et de 3,5 m de hauteur fermé par une plaque aux deux bouts. A 0,2 m au-dessus de la base on a placé un système de grilles qui supporte la couche de sable. Chacune des deux parties non occupées par le sable est munie d'un robinet à eau, d'un robinet à air qui permet de faire varier la pression (sur la figure, on ne voit que celui du haut) et d'un manomètre à mercure. Le robinet du bas débouchait sur un bassin permettant de jauger le volume d'eau écoulé.

La couche filtrante est formée d'un mélange de sables de la Saône de finesses diverses dont 58% passant au crible de 0,77 mm (c'est le plus fin). 38% du volume est laissé vide par le sable.

Avant chaque série d'expériences, on mettait dans la colonne remplie d'eau une certaine quantité de sable. Chaque expérience consistait à établir une différence de pression entre le haut et le bas de la colonne de sable, à attendre que le débit se stabilise et à mesurer le volume écoulé pendant un certain temps (10 à 20 minutes selon les expériences). La pression présentait quelques oscillations



pressions à la moyenne des débits divisée par la section de la colonne ( $0,096 \text{ m}^2$ ). Le facteur  $s$  de la formule n'est pas expérimental, Darcy sait d'avance que le débit est proportionnel à la surface de la section. En prenant directement la moyenne des rapports des débits aux pressions (colonne 5), on s'aperçoit que les différences atteignent environ 10% de part et d'autre (elles ne peuvent donc pas s'expliquer par les incertitudes sur la mesure de la pression). Ces différences n'inquiètent pas Darcy. Par contre, la pression sous la colonne de sable étant toujours la pression atmosphérique dans ces premières expériences, il prendra la précaution d'en faire une autre où elle varie. Cette nouvelle expérience n'appelle pas de commentaire particulier.

Il reste à étudier l'influence de l'épaisseur  $e$  de la couche de sable. Pour cela, Darcy appelle  $I$  la charge proportionnelle par mètre d'épaisseur du filtre, c'est-à-dire  $P/e$  et il trouve:

1 <sup>ère</sup> série	2 <sup>ème</sup> série	3 <sup>ème</sup> série	4 <sup>ème</sup> série
$Q = 0,286 I$	$Q = 0,165 I$	$Q = 0,216 I$	$Q = 0,332 I$

Ces résultats sont faciles à contrôler et on s'aperçoit par la même occasion que l'épaisseur de 1,70 m qu'on trouve sur le tableau pour la quatrième série d'expériences est une erreur, il s'agit de 2,70 m (on trouve d'ailleurs d'autres coquilles dans les données numériques du livre).

Ces rapports devraient être tous les mêmes et on voit qu'ils varient du simple au double. Darcy l'explique par des différences dans la nature et le traitement des sables employés et conclut : "Il paraît donc que, pour un sable de même nature, on peut admettre que le volume débité est proportionnel à la charge et en raison inverse de l'épaisseur de la couche traversée."

Cette loi ainsi établie, Darcy en déduit celles qui donnent en fonction du temps la hauteur d'une nappe d'eau qui s'écoule à travers une couche de sable. Il s'agit d'écrire et de résoudre une équation différentielle. Le lecteur est invité à en faire autant à titre d'exercice (le point clef est que la dérivée par rapport au temps de la hauteur d'eau est égale au signe près au débit divisé par la surface). Ce passage est à considérer comme banal compte tenu de la culture scientifique de l'époque. Enfin, en utilisant de nouveau l'appareil déjà décrit, il vérifie expérimentalement la relation ainsi trouvée, confirmant par-là la loi de Darcy elle-même. L'accord avec l'expérience est d'ailleurs plus satisfaisant (environ 5%).

### *Une démarche qui n'a rien d'empirique*

La loi de Darcy apparaît comme une loi expérimentale. Très vite on en a cherché une déduction théorique. Ces tentatives n'ont donné que des résultats fort peu convaincants jusque vers 1980. Mais ce n'est pas une loi empirique, si tant est que cette expression a un sens. On est très loin d'un simple ajustement d'une fonction des paramètres aux résultats expérimentaux. Quand il conçoit ses expériences, Darcy dispose d'outils indissociablement théoriques et expérimentaux pour contrôler les facteurs contrôlables, tout en s'efforçant de laisser fixes ceux qui ne le sont pas. Il sait par exemple que la différence de pression et l'épaisseur de la couche interviennent uniquement par l'intermédiaire de la charge hydraulique  $h+e$ . Sans cette connaissance, il n'aurait rien pu tirer de ses expériences. Même avec cette connaissance, nous avons constaté que l'ajustement est très mauvais. L'important est de pouvoir expliquer les écarts expérimentaux à la loi à vérifier. Tout laisse à penser que ses expériences sont conçues pour vérifier une loi qu'il connaît déjà.

On peut d'ailleurs se faire une idée des réflexions qui l'y ont amené. Il faut d'abord remarquer avec lui que l'écoulement de l'eau à travers le sable est lent. Nous pouvons être plus précis. Le plus grand débit obtenu dans ses expériences est de 30 l/mn environ. La section du cylindre est de  $960 \text{ cm}^2$  dont 38% en moyenne de vide. Cela nous donne une vitesse verticale moyenne qui ne dépasse pas

1,5 cm/s (ce calcul n'est pas dans le livre). Au début du siècle, Prony avait proposé pour le débit de l'eau à travers des tuyaux la formule :  $D(h+e) = aV + bV^2$ , où  $V$  est la vitesse moyenne,  $D$  le diamètre du tuyau, et les autres notations sont celles de Darcy que nous avons vues. Pour les faibles vitesses, on voit que le dernier terme est négligeable. Cette formule de Prony était très connue et plusieurs auteurs, dont Darcy lui-même<sup>2</sup>, l'avaient perfectionnée. On trouve des détails là-dessus dans l'article "conduites" du *Dictionnaire des Mathématiques appliquées* d'Hippolyte Sonnet (1867). Mais surtout, dans une autre partie de son livre, Darcy rapporte une étude qu'il a faite des puits artésiens, en particulier de ceux qui sont alimentés à travers une couche filtrante. A la fin de la note sur ce que nous appelons maintenant la loi de Darcy, il montre comment cette loi explique ce qu'il avait constaté à ce sujet. Il serait trop long de rapporter cette explication ici.

Darcy n'a pas publié de considérations épistémologiques à ma connaissance. Quoi qu'il en soit, nous venons de voir qu'en pratique son travail sur la filtration de l'eau à travers le sable ne relève en rien de l'empirisme.

### *En conclusion, parlons d'enseignement*

Partons du malheureux problème de mathématique du bac S de 2003 où il s'agit, justement, d'ajustement.

"Soit  $N_0$  le nombre de bactéries introduites dans un milieu de culture à l'instant  $t=0$  ( $N_0$  étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries:

- un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)
- un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période<sup>3</sup> (partie B)." (Premières lignes de l'énoncé)

Le problème comporte en fait une partie C basée sur la comparaison à des données manifestement fictives et finit par la question:

"4. Dans quelles conditions le premier modèle vous semble-t-il adapté aux observations faites?"

L'absurdité de cette question tient au fait qu'on n'a donné aucune indication sur les erreurs expérimentales<sup>4</sup>.

Cet exemple n'est pas isolé, surtout si on s'intéresse aux problèmes qui prétendent traiter d'applications aux sciences économiques et sociales (Zerner 1999). L'évolution actuelle de l'enseignement étant ce qu'elle est (Laval 2003), il est fort à craindre que la symbiose entre l'enseignement de la mathématique et celui de la physique ne provoque une floraison d'ajustements où tout le travail conceptuel qu'incorpore une expérience aura été effacé. D'autant plus qu'on demande maintenant à des enseignants dont beaucoup n'ont plus fait de physique depuis leur bac de faire intervenir la physique dans leur enseignement. Comme quoi les meilleures idées peuvent être perverties.

---

<sup>2</sup> Darcy 1857. Ce travail a été rédigé et soumis à l'académie des Sciences avant la parution du livre sur les fontaines de Dijon.

<sup>3</sup> Il s'agit de la loi logistique. Je dis, comme il est d'usage d'ailleurs, la loi pas le modèle (voir Zerner à paraître).

<sup>4</sup> On trouve des résultats expérimentaux dans Gause (1935), un livre passionnant. On y voit en particulier comment l'auteur part de la loi logistique supposée s'appliquer à la croissance d'une espèce dans un milieu où la nourriture est limitée pour en tirer les relations déterminant la croissance de deux espèces partageant la même nourriture, relations qu'il vérifie expérimentalement; Cette démarche fait de la loi logistique un véritable outil théorique. On peut comparer avec Darcy quand il établit et vérifie la conséquence de sa loi pour la décroissance d'une nappe d'eau sur une couche de sable.

## ***Bibliographie***

- Belhoste B. 1994 Un modèle à l'épreuve. L'Ecole Polytechnique de 1794 au second Empire in Belhoste, Dahan et Picon A. 1994 p. 9-30
- Belhoste B., Dahan A. et Picon 1994 *La formation polytechnicienne. 1794-1994* Dunod, Paris
- Brown G. O., Garbrecht G. D. et Hager W. H. (dir.) 2003 *Henry P. G. Darcy and other Pioneers in Hydraulics* ASCE, Reston
- Chatzis K. 2004 Les conceptions de Barré de Saint Venant (1797-1886) en matière de théorie de la connaissance *Bulletin de la Société archéologique du Vendômois* p. 70-78
- Darcy H. 1856 *Les Fontaines publiques de la Ville de Dijon* Victor Dalmont, Paris
- Darcy H. 1857 *Recherches expérimentales relatives au Mouvement de l'Eau dans les Tuyaux* Mallet-Bachelier, Paris
- Darrigol O. 2002 Between hydrodynamics and elasticity theory : the five first births of the Navier-Stokes equations *Archives for the History of Exact Sciences* 56 p. 95-150
- Gause G. F. 1935 *Vérifications expérimentales de la Théorie mathématique de la Lutte pour la Vie* Hermann, Paris
- Laval C. 2003 *L'Ecole n'est pas une Entreprise* La Découverte, Paris
- Picon A. 1992 *L'invention de l'Ingénieur moderne: l'Ecole des Ponts et Chaussées. 1747-1851* Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris
- Rouse H. et Ince S. 1957 *History of Hydraulics* Iowa Institute of hydraulic Research, Ann Arbor
- Sonnet H. 1867 *Dictionnaire des Mathématiques appliquées* Hachette, Paris
- Zerner M. 1999 Les sujets de mathématique du baccalauréat ES: le jour du BAC, tu fais le con *Repères* 36 1999 p.59-71
- Zerner M. à paraître Théorie scientifique et mathématisation abusive: les équations de Lotka et Volterra *Colloque sur les Systèmes dynamiques* Paris, novembre 1999

Planche 24, Figure 3: Appareil destiné à déterminer la loi de l'écoulement de l'eau à travers le sable.

