

COMMENT MONSIEUR FRESNEL ILLUMINA LES MERS ?

Didier BESSOT

Dans les années 1800-1810, la France connaît un grand retard par rapport à la Grande-Bretagne pour ce qui regarde le nombre et la qualité technique des phares maritimes, malgré un décret du 7 mars 1806, réorganisant le service des phares ; celui-ci est alors placé sous la tutelle du Ministère de l'Intérieur, à charge pour ce service de consulter le Ministère de la Marine pour la création de nouveaux établissements.

Au début de 1811, la Direction des Ponts et Chaussées est saisie d'un mémoire du capitaine de vaisseau Le Coat de Saint-Haouen, chef d'état-major de la marine impériale à Boulogne, sur l'éclairage des côtes maritimes et en particulier sur les moyens d'éviter la confusion entre les phares, par l'emploi de feux colorés. À la demande du comte Molé, Directeur général des Ponts et Chaussées, une décision ministérielle du 29 avril 1811 constitue pour l'examen de ce mémoire, une commission formée de trois officiers supérieurs ou généraux de la Marine, trois inspecteurs des Ponts et Chaussées et trois membres de la première classe¹ de l'Institut, à désigner par elle-même. La composition de cette commission en 1811 s'écarte quelque peu des règles énoncées puisqu'elle comprend :

| | |
|---|--|
| MM. Sané, inspecteur général des constructions navales, membre de l'Institut, | } désignés par le ministère de la marine. |
| De Moncabrié, capitaine de vaisseau, | |
| Jacob, <i>id.</i> | |
| Duperrey, <i>id.</i> | |
| Ferregeau, inspecteur général des ponts et chaussées, directeur des travaux maritimes, | } désignés par le ministère de l'intérieur. |
| Sganzin, inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées, Tarbé, <i>id.</i> | |
| Malus, officier du génie, membre de l'Institut, | |
| Charles, physicien, membre de l'Institut, | } désignés par l'Institut. |

Arago entre dans la commission en 1813, à la mort de Malus.

Si les propositions de M. de Saint-Haouen sont rejetées, en raison de la grande perte de luminosité due à la coloration des feux, elles ont cependant le mérite de provoquer la création d'une commission d'abord temporaire puis permanente sur la question de l'éclairage des côtes et des mers et de réactiver ainsi la réflexion sur ce sujet important pour la navigation.

Les travaux de cette commission n'avancent que trop lentement pour trois sortes de raisons :

1° les délais nécessaires à la collecte et à l'établissement des documents hydrographiques, topographiques et autres, préparatoires aux travaux,

2° les exigences du service de ses membres, qui ne permettent pas de les réunir au complet autant qu'il serait utile,

3° les circonstances politiques à la fin de l'Empire et la faiblesse des budgets sous les débuts de la Restauration.

¹ Cette classe est celle des Sciences Physiques et Mathématiques, dénommée à partir de 1816, Académie des Sciences.

En raison de ces lenteurs et des plaintes des navigateurs sur l'insuffisance et la mauvaise qualité de l'éclairage maritime, le nouveau directeur général des Ponts et Chaussées depuis 1817, M. Becquey, invite la commission des phares à examiner s'il ne conviendrait pas d'organiser un concours pour l'amélioration des appareils d'éclairage maritime et, dans ce cas, à en rédiger le cahier des charges. L'idée du concours n'est pas retenue, mais cette initiative en provoque une autre puisqu'à la séance du 21 mai 1819, Arago propose qu'un groupe de travail soit formé de lui-même et de MM. Mathieu, astronome et membre de l'Institut², et Fresnel, ingénieur des Ponts et Chaussées³, déjà reconnu pour ses travaux sur la théorie de la lumière ; ce groupe « se chargerait des expériences », c'est-à-dire du travail effectif, dont les résultats seraient ensuite soumis à la commission.

Les premières expériences portent essentiellement sur l'étude des dispositifs existants en matière de concentration et diffusion de la lumière, à savoir les réflecteurs pour la plupart paraboliques, afin de déterminer dans quelle mesure il est possible d'en améliorer les performances. Cette voie sera abandonnée en raison de la faible qualité des résultats comparée à celle obtenue par les dispositifs lenticulaires qui constituent l'apport majeur de Fresnel au perfectionnement de l'éclairage maritime. D'autres améliorations seront ajoutées, par Fresnel et Arago, à ce perfectionnement optique, qui concernent les sources de lumière et la mécanique d'horlogerie permettant la rotation du dispositif éclairant.

L'étude de l'existant en vue de son amélioration : les réflecteurs.

Le système d'éclairage maritime le plus perfectionné fonctionnant sur les côtes françaises au début du XIXe siècle est très certainement celui installé au phare de Cordouan, à l'entrée de la Gironde, lors de la rénovation effectuée entre 1788 et 1791. Les quatre-vingts réflecteurs sphériques de petite taille (217 mm de diamètre) furent remplacés par douze réflecteurs paraboliques de 812 mm d'ouverture, œuvre de l'opticien Lenoir, les sources lumineuses étant placées en leurs foyers ; ils furent montés par trois sur les quatre faces verticales d'une armature en forme de parallélépipède à base carrée. En outre, contrairement au précédent dispositif à feux fixes, l'armature portant les réflecteurs de Lenoir était animée d'un mouvement de rotation, autour de son axe vertical, par un mouvement d'horlogerie à raison d'une révolution toutes les huit minutes ; ainsi apparaissaient de deux minutes en deux minutes un éclat puissant suivi d'une éclipse totale.

Le projet d'expériences sur l'éclairage des phares, rédigé par Fresnel en août 1819, porte principalement sur les appareils de production de la lumière : lampes à huile, à mèches simples ou multiples, emploi, encore peu répandu, du gaz. Pour les systèmes optiques, l'expérience lui paraît moins nécessaire, puisque leurs effets peuvent être prévus par le calcul. Toutefois, l'observation directe lui semble utile pour examiner les effets des imperfections du poli sur la divergence de la lumière. Enfin, dès ce premier projet d'étude, Fresnel décrit succinctement son idée de

² Claude-Louis Mathieu, né à Mâcon en 1783, mort à Paris en 1875. Beau-frère de François Arago, professeur et examinateur à l'École polytechnique, il est élu membre de la section d'astronomie de l'Académie des Sciences en 1817, dont il devient vice-président en 1845, puis président en 1846.

³ Augustin Fresnel connaît en ce début de Restauration, un retour en grâce puisqu'il est réintégré dans le corps des ingénieurs des Ponts et Chaussées le 7 juillet 1815, après sa révocation pendant les Cent Jours en raison de ses positions défavorables à Napoléon. Après des postes alternés entre Rennes et Paris, il est muté au cadastre du pavé de Paris, poste de peu d'intérêt mais qui lui laisse cependant la faculté de poursuivre ses travaux sur la lumière, tout en conservant son emploi d'ingénieur.

Voici la lettre du directeur général des ponts et chaussées et des mines, mettant Fresnel à la disposition de la commission des phares :

« Paris, le 21 juin 1819

« Messieurs, j'ai l'honneur de vous informer que, d'après le désir que vous exprimez dans l'un de vos rapports, j'ai décidé que M. Fresnel serait temporairement mis à votre disposition. J'annonce à cet ingénieur qu'il devra vous seconder dans vos travaux pendant les intervalles dont son service au pavé de Paris lui permettra de disposer.

« J'ai l'honneur d'être, » etc.

Signé « BECQUEY. »

remplacement des réflecteurs par des lentilles faites de plusieurs morceaux et donne une évaluation approximative du gain obtenu par ce changement⁴.

Pour mener ses travaux, Fresnel dispose de réflecteurs de Lenoir ainsi que d'un réflecteur anglais dû à Robison qu'il va comparer à deux autres types de réflecteurs, dus tous deux à Bordier-Macét : réflecteur à double effet et réflecteur sidéral.

Le réflecteur à double effet.

Selon les termes de Fresnel même, « le réflecteur à double effet de M. Bordier-Macét est composé de deux portions de paraboloïde de révolution, disposées sur un axe commun, mais dont les foyers sont à une petite distance l'un de l'autre, et dont les paramètres sont calculés de manière que le plan du cercle d'intersection des deux surfaces passe par le foyer le plus voisin des bords des réflecteurs. »⁵ (cf. illustration 1a et b). Des réflecteurs de ce genre équipaient depuis 1811 un des deux phares du cap de la Hève, près du Havre, d'autres phares en étant munis au cours des années suivantes. Sganzin, rapporteur de la Commission, ayant demandé à Fresnel d'en faire l'examen, ce dernier rédige en date du 29 août 1819 une *Note sur la comparaison théorique du réflecteur parabolique ordinaire avec le réflecteur à double effet de M. Bordier-Macét* qui débute par la phrase citée supra.

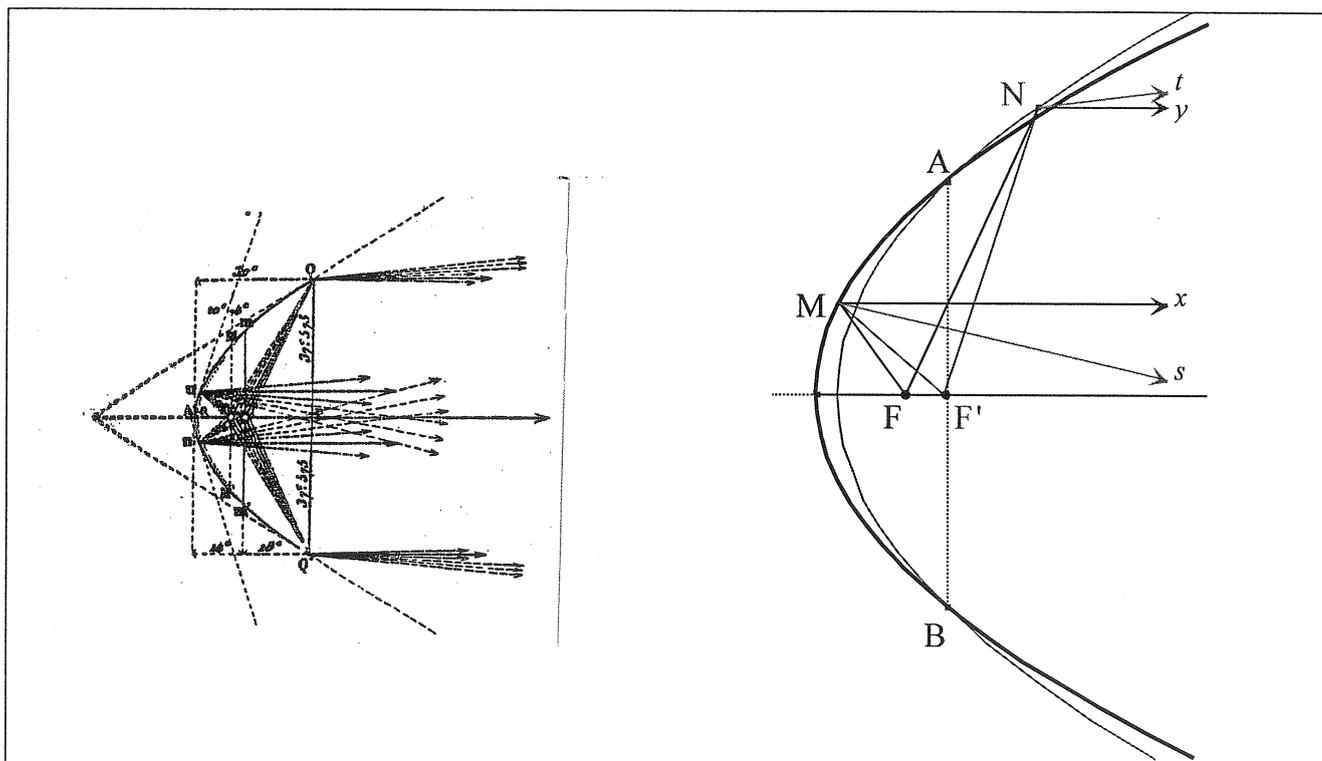


Illustration 1. Réflecteur double de Bordier-Macét

a. Figure originale d'après Léonor Fresnel, donnée dans l'Introduction (p. XXVII) des *Œuvres complètes* et dans la note (a), p. 17)

b. Schéma simplifié : F est le foyer de la parabole noire, F' celui de la parabole rouge, [AB] est le segment-paramètre de la parabole de foyer F'. Les rayons réfléchis Mx et Ny sont parallèles à l'axe, alors que les rayons Ms et Nt sont divergents.

Ce réflecteur est doté de deux sources lumineuses, à chacun des foyers des nappes de paraboloïde ; chacune de ces sources produit des rayons parallèles à l'axe par réflexion sur la portion de réflecteur dont elle occupe le foyer et des rayons divergents par réflexion sur l'autre portion du réflecteur (cf. figure 1b). Pourquoi chercher à produire des rayons divergents dans

⁴ [*Œuvres*, t. 3, N°I, p. 10-13].

⁵ [*Œuvres*, t. 3, N°II(B), p. 17, 18].

l'éclairage d'un phare ? Dans un réflecteur parabolique parfait, doté d'une source lumineuse ponctuelle placée au foyer du paraboloïde, tous les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe, formant ainsi un faisceau d'angle nul (cf. illustration 2 a) ; la vision fournie par ce faisceau à grande distance est celle d'un éclat de lumière puissant mais très bref, ne permettant pas toujours un repérage suffisant du phare.

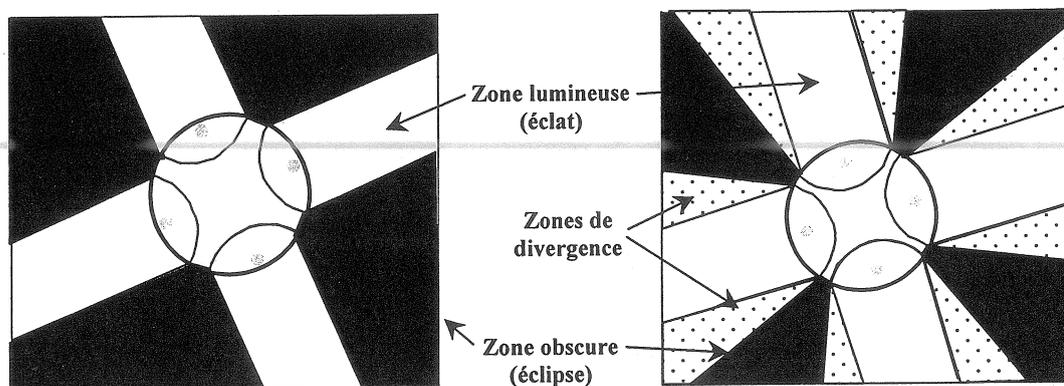
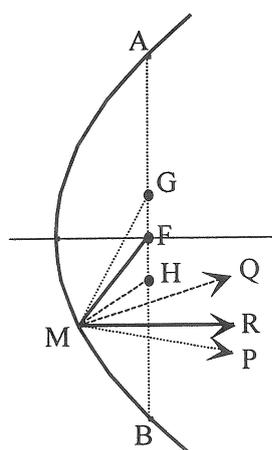


Illustration 2.

a. Phare à quatre réflecteurs sans divergence.

b. Phare à quatre réflecteurs avec divergence maximum de $22^{\circ}30'$. Chaque zone éclairée couvre 45° , comme chaque zone obscure.

Pour favoriser ce repérage, il paraît utile qu'une partie des rayons réfléchis soit divergente, les rayons précédant l'éclat permettant d'anticiper celui-ci, les rayons suivant l'éclat prolongeant la durée de l'observation du phare (cf. illustration 2 b). En outre, la divergence est recherchée principalement dans le sens horizontal, la divergence verticale ayant un moindre intérêt et uniquement vers le bas pour permettre le repérage du phare dans ses abords. Le réflecteur de Bordier-Macét réalise cet objectif de divergence, mais la produit également dans toutes les directions. Fresnel propose d'obtenir sensiblement le même effet de manière plus simple : il lui suffit de remplacer le paraboloïde double par un paraboloïde simple qu'il munit de deux sources lumineuses, l'une au foyer, l'autre voisine de la première. Si cette seconde source est placée dans l'axe du réflecteur, le dispositif proposé par Fresnel est presque identique quant à son effet à celui de Bordier-Macét⁶ et produit la même divergence omnidirectionnelle.



Fresnel s'interroge alors sur la place à donner à la source additionnelle pour qu'elle produise plus de divergence horizontale que verticale. La solution lui paraît si simple qu'il s'étonne que Bordier-Macét ne l'ait pas trouvée : la source additionnelle doit être placée sur le segment-paramètre horizontal du paraboloïde, à une distance du foyer d'autant plus grande que la divergence voulue est importante. Alors pour obtenir une zone de divergence de même intensité avant et après l'éclat, il est dans la logique du dispositif de placer une autre source additionnelle symétrique de la précédente par rapport au foyer (cf. illustration 3).

Illustration 3. Réflecteur à double effet proposé par Fresnel. Coupe horizontale contenant l'axe. AB est le segment-paramètre, F le foyer ; G et H sont les deux sources supplémentaires produisant respectivement les rayons GMP et HMQ.

Fresnel conclut donc que le réflecteur de Bordier-Macét est supérieur aux réflecteurs simples de Lenoir et de Robison, pour deux raisons : l'emploi de deux sources lumineuses, nécessairement

⁶ La seule différence tient aux conséquences de l'extinction d'une des deux sources : dans cette situation, le réflecteur de Fresnel renverra la totalité soit des rayons parallèles, soit des rayons divergents, alors que celui de Bordier-Macét continuera à envoyer des rayons des deux sortes, mais en partie seulement.

plus éclairantes qu'une seule, et l'effet de divergence contrôlée. Cependant son dispositif lui paraît encore meilleur à cause de sa plus grande simplicité (une seule surface réfléchissante) et de la performance accrue de la divergence. C'est donc ce dispositif qu'il préconise dans sa *Note* du 29 août 1819. Dans une lettre du 6 septembre 1819, Sganzin reconnaît l'ingéniosité du dispositif de Fresnel, mais en théorie seulement. Pour la pratique, il lui paraît souffrir de deux inconvénients, le moindre étant l'augmentation de la consommation d'huile, le second tenant à la nécessité de pratiquer dans la surface réfléchissante trois ouvertures destinées à faire passer les cheminées d'évacuation des gaz de combustion et de disposer sous chacune des lampes des godets de récupération des gouttes d'huile tombant de ces lampes. Ces indispensables précautions conduisent à une réduction de la surface de réflexion qui nuit à l'efficacité présumée du dispositif. En revanche, Sganzin approuve l'orientation des études de Fresnel vers l'emploi de lentilles et l'encourage à poursuivre dans cette voie. Fresnel examine aussi, plus succinctement cependant, le second procédé dû à Bordier-Macé, le réflecteur sidéral, qui résout de façon plus satisfaisante le problème de l'égalité distribution de la lumière dans tous les azimuts.

Le réflecteur sidéral.

La surface de ce réflecteur est engendrée par la révolution d'une parabole autour de son segment-paramètre, cette parabole étant privée de l'arc sous-tendu par le segment-paramètre et contenant le sommet ; la surface obtenue est composée de deux nappes symétriques par rapport au plan engendré par la révolution de l'axe de la parabole génératrice. La source lumineuse est placée au foyer commun des paraboles génératrices (cf. illustration 4). Ce type de réflecteur équipait alors des réverbères d'éclairage urbain et des feux fixes d'entrées de ports, comme les fanaux de marée, tous dispositifs d'éclairage de dimensions réduites. Il fut envisagé d'équiper un phare, à feux fixes de premier ordre⁷, d'un réflecteur sidéral. Le diamètre des nappes paraboliques fut porté à 1,95 m et Bordier-Macé groupa au foyer vingt-sept becs d'Argant, qu'il pensait remplacer ultérieurement par des becs à gaz. Toutefois, le résultat fut inférieur aux espérances et ne correspondit pas à la dépense d'huile des vingt-sept becs. Après plusieurs essais, le projet d'équipement de phares d'importance par des réflecteurs sidéraux fut abandonné.

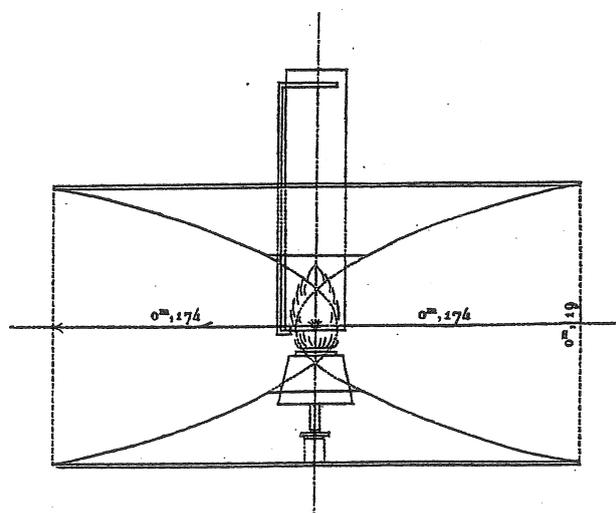


Illustration 4. Réflecteur sidéral employé dans l'éclairage urbain.
Œuvres complètes, Introduction, p. XVIII.

⁷ L'annexe II donne un tableau descriptif des divers ordres de phares.

Les études de Fresnel sur les réflecteurs le conduisent donc à utiliser des réflecteurs paraboliques simples, équipés de systèmes de sources lumineuses divers. Il entre donc dans la logique de ses travaux de chercher à optimiser l'effet produit par un réflecteur parabolique simple.

Optimisation de l'effet utile des réflecteurs paraboliques simples.

L'étude de cette question est l'objet, dans le troisième tome des *Œuvres complètes* de Fresnel d'un mémoire regroupant des extraits des carnets de notes manuscrites ainsi que des lettres et notes destinées à des collaborateurs⁸. Dans le premier extrait, Fresnel définit la notion d'effet utile d'un éclat lumineux, mesuré par le produit de sa durée par son intensité. Fresnel cherche alors à optimiser l'effet utile produit par un réflecteur parabolique dont l'aire est fixée, ce qui constitue le 1^{er} problème. *La surface du miroir parabolique étant donnée, déterminer le degré de profondeur ou de courbure qui produira le plus grand effet utile.*⁹

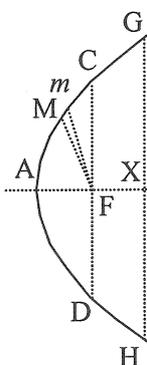


Illustration 5.

Dans l'illustration 5, représentant une coupe selon l'axe d'un parabolôïde et reprise de la figure faite par Fresnel¹⁰, F désigne le foyer, [CD] est le segment-paramètre, M un point quelconque de la parabole, m un point infiniment voisin de M ; s désigne l'angle \widehat{AFM} , ds l'angle différentiel \widehat{MFm} et r le rayon FM. La somme des rayons émanés de F tombant sur la portion de parabolôïde engendré par la rotation de l'arc \widehat{Mm} autour de l'axe AX est mesurée par $2\pi \sin s ds$ et l'effet utile produit par ces rayons est proportionnel à $2\pi r \sin s ds$.

L'intégration de cette expression, de variable s et sous condition d'aire fixée, donne l'effet utile total d'un parabolôïde réfléchissant d'angle d'ouverture s en fonction de s. Par annulation de la différentielle de cette fonction, le calcul fournit la valeur de s optimisant l'effet utile ; cette valeur est, sous contrainte d'aire fixée, de $107^{\circ}59'4''$. Sous contrainte d'ouverture, GH, fixée, la valeur de s optimum est de $126^{\circ}24'52''$. Fresnel compare les effets utiles et les aires des parabolôïdes associés à chacune des deux valeurs obtenues. Certes l'effet utile, mesuré par $-\cot \frac{s}{2} \cdot \ln \left(\cos \frac{s}{2} \right)$, est inférieur pour la première valeur mais la perte n'est que $\frac{1}{25}$ environ alors que le gain en aire est de $\frac{1}{5}$ ¹¹. C'est donc la première valeur, arrondie à 108° , que Fresnel va retenir pour angle d'ouverture du réflecteur parabolique le plus efficace.

⁸ Ce mémoire, intitulé *Mémoire, notes et calculs relatifs aux phares catoptriques*, partie IV du tome 3 des *Œuvres complètes*, est subdivisé en quatre documents : IV(A) *Sur l'éclairage des phares*, mémoire inachevé, daté par les éditeurs d'avril 1820, complété d'un appendice donnant le détail des calculs faits pour obtenir les résultats énoncés dans le texte précédent, IV(B) *Note sur la comparaison des petits et des grands réflecteurs*, IV(C), une lettre de Fresnel à Sganzin du 11 avril 1820 et enfin IV(D), une *Note adressée par A. Fresnel à M. Gambey, ingénieur-opticien, pour la construction d'un réflecteur parabolique*. [*Œuvres*, t. 3, p. 31-63].

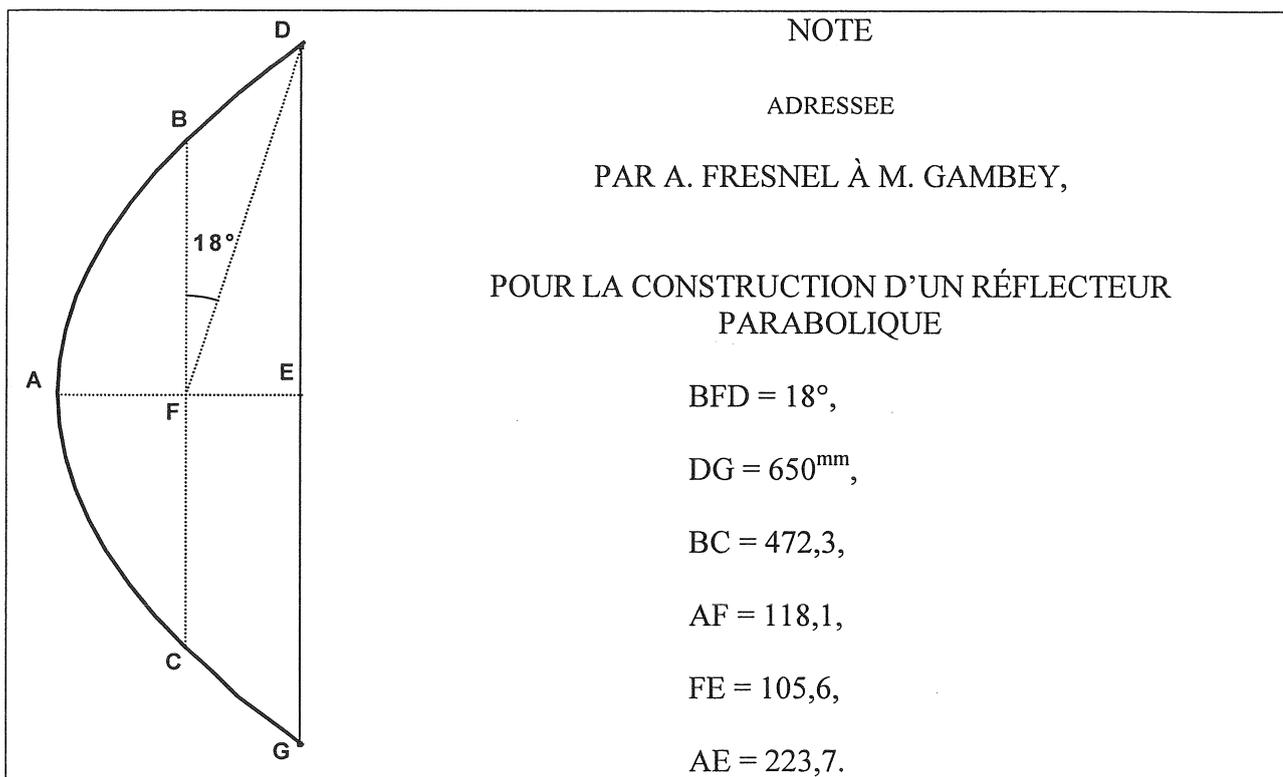
⁹ Le texte *Sur l'éclairage des phares* ne traite pas aussi formellement du deuxième problème puisque Fresnel ne lui consacre ici qu'un paragraphe (§ 11) de neuf lignes, sans sous-titre. Ce problème apparaît cependant en détail dans l'appendice de calculs sous le titre *Déterminer la profondeur la plus avantageuse d'un réflecteur dont l'ouverture est donnée*.

¹⁰ [*Œuvres*, t. 3, IV(A), p. 35].

¹¹ Le détail des calculs fournissant cet ensemble de résultats figure dans l'appendice *Calcul du degré de profondeur le plus avantageux à donner à un réflecteur parabolique*. L'étude de cet appendice constituait la matière de l'atelier *Optimisation des réflecteurs paraboliques par Augustin Fresnel*. Le lecteur intéressé trouvera un résumé de la substance de cette étude dans l'annexe III.

Dans sa lettre à Sganzin du 11 avril 1820¹², Fresnel recommande, tant sur le plan technique qu'économique, l'ingénieur-opticien Gambey pour la fabrication de vingt réflecteurs ; ce nombre est le minimum de commande réclamé par Gambey pour pouvoir amortir les investissements nécessaires à cette fabrication. À cette fin, Fresnel rédige une note à Gambey dans laquelle il spécifie les caractéristiques du réflecteur à construire (cf. encadré à suivre).

Toutefois les négociations entre Gambey et les pouvoirs publics se prolongent tant, et sans succès, que, dans ce délai, Fresnel avance dans ses travaux sur l'emploi de lentilles jusqu'à rendre caduc celui des réflecteurs.



L'innovation décisive de Fresnel : la lentille à échelons.

Dans son *Mémoire sur un nouveau système d'éclairage des phares*¹³, lu à l'Académie des Sciences le 29 juillet 1822, Fresnel rassemble ses réflexions sur l'équipement optique des phares par des lentilles ; ce mémoire a été précédé d'un *Projet d'un Phare à feux tournants, dans lequel les réflecteurs seraient remplacés par des lentilles*¹⁴, présenté à la Commission des phares le 31 octobre 1820. Il mentionne dans ces deux textes l'existence d'un phare anglais ainsi équipé¹⁵ mais ajoute qu'« il paraît qu'il a peu d'éclat, ce qui tient probablement à la grande épaisseur des lentilles employées, qui est de 20 centimètres, et peut-être aussi à la disposition générale de l'appareil, sur laquelle je n'ai pas de renseignement précis. »¹⁶ L'information préalable de Fresnel sur cette question paraît donc des plus succinctes.

Une des caractéristiques d'une lentille devant équiper un phare est d'avoir une distance focale courte pour que système optique et source lumineuse, placée au foyer de celui-ci, soient contenus dans un espace réduit. Il s'ensuit que les (ou la) faces d'une telle lentille convexe doivent avoir un petit rayon de courbure, ce qui confère à la lentille une forte épaisseur. Cette propriété entraîne trois

¹² [*Œuvres*, t. 3, IV(C), p. 60, 61].

¹³ [*Œuvres*, t. 3, VIII(A), p. 97-136].

¹⁴ [*Œuvres*, t. 3, VI, p. 73-89].

¹⁵ Il s'agit du phare de Portland.

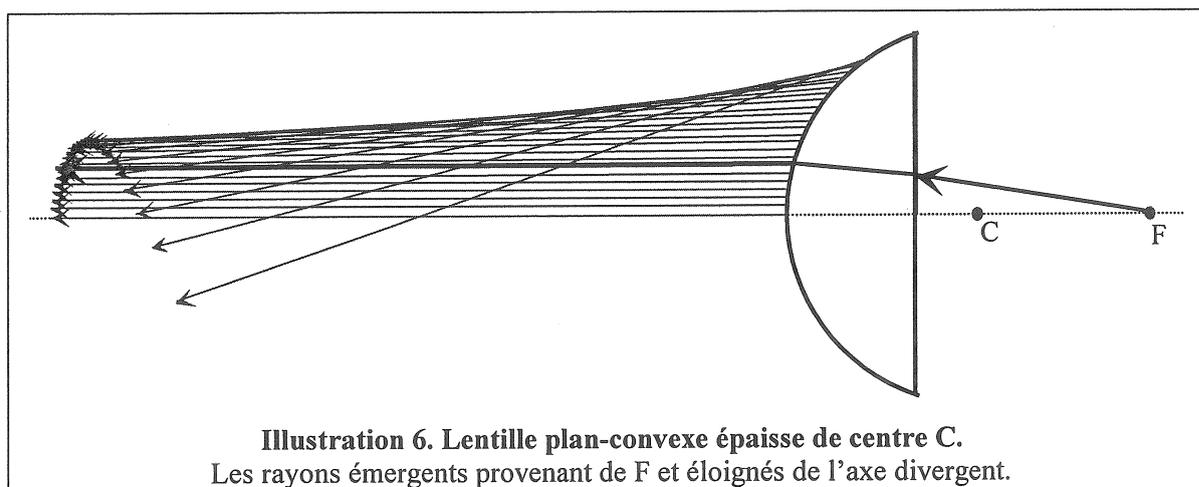
¹⁶ [*Œuvres*, t. 3, VIII(A), p. 99].

inconvenients notables : la difficulté d'obtenir sur une grande quantité de matière une bonne homogénéité, une perte de luminosité des rayons traversant une lentille épaisse et une masse importante de la lentille.

Fresnel envisage de surmonter la difficulté liée à la recherche d'homogénéité en remplaçant les matériaux solides, comme le verre, par des liquides, tels l'eau ou l'esprit-de-vin, contenus entre deux plaques de verre bombées et soudées par leur bord avec un mastic. Cette solution introduit cependant de nouveaux inconvenients, comme la dégradation de l'état des liquides après un séjour prolongé ou celle du mastic de soudure, provoquant alors des fuites. En outre, cette option ne résout pas le problème de la masse. Fresnel décide donc de s'en tenir à l'emploi de matières solides.

La lentille à échelons

L'idée de Fresnel est alors de partager la lentille en un ménisque central et des anneaux concentriques puis d'en ôter l'épaisseur inutile, en gardant de cette épaisseur juste la part nécessaire à la cohésion des morceaux, réduisant ainsi la masse de près de 70%. Cette idée, d'une lentille dite à échelons, qui réduit de beaucoup (plus de 70%) la masse, était déjà présente dans l'*Histoire des minéraux* de Buffon¹⁷ ; Fresnel le reconnaît d'ailleurs mais affirme cependant y avoir pensé avant d'être informé par M. Charles de la priorité de Buffon. Il ne manque pas de faire remarquer que Buffon ne parvint pas à faire fabriquer une lentille à échelons de grandes dimensions¹⁸, car les moyens techniques ne permettaient pas alors de réaliser une telle lentille d'une seule pièce, comme Buffon l'avait envisagé. Fresnel propose donc de construire cette lentille en plusieurs morceaux, en divisant les anneaux concentriques en plusieurs arcs. D'ailleurs, par souci de simplicité, il décide de travailler sur un projet de lentille plan-convexe, et non biconvexe comme Buffon, et de remplacer, dans un premier temps, les anneaux circulaires par des anneaux polygonaux ; en effet, il est plus facile de façonner des prismes ayant une seule face courbe que des arcs d'anneaux circulaires possédant une double courbure.



Enfin Fresnel profite du partage de la lentille en plusieurs anneaux pour corriger l'*aberration de sphéricité*, qui, dans une lentille plan-convexe épaisse, correspond au fait que, parmi les rayons émanant du foyer, seuls ceux proches de la zone centrale émergent quasi parallèles à l'axe, alors que ceux qui s'éloignent de cette zone centrale divergent vers l'axe (cf. illustration 6). En modifiant pour chaque anneau la position du centre et le rayon de courbure de l'arc de cercle qui en définit le profil, il obtient que, pour chacun des anneaux, les rayons émergents soient parallèles à l'axe du ménisque central (cf. illustration 7 b) ; la surface extérieure de ces anneaux, s'ils sont circulaires, est

¹⁷ Buffon, *Histoire naturelle des minéraux*, t. 6.

¹⁸ Dans son *Mémoire* de 1822, Fresnel précise dans une note qu'une lentille à échelons de 12 à 15 pouces de diamètre fut retrouvée dans le cabinet de Buffon.

alors, non plus sphérique, mais *annulaire*, dans le vocabulaire des géomètres de l'époque¹⁹. Les calculs nécessaires à la détermination du centre et du rayon de courbure associés à chaque élément, ménisque central et anneaux successifs, sont reproduits dans les *Œuvres* de Fresnel à partir de minutes de calcul du savant²⁰ et sont aussi exposés par Léonor Fresnel dans une *Note complémentaire* à l'*Introduction*²¹.

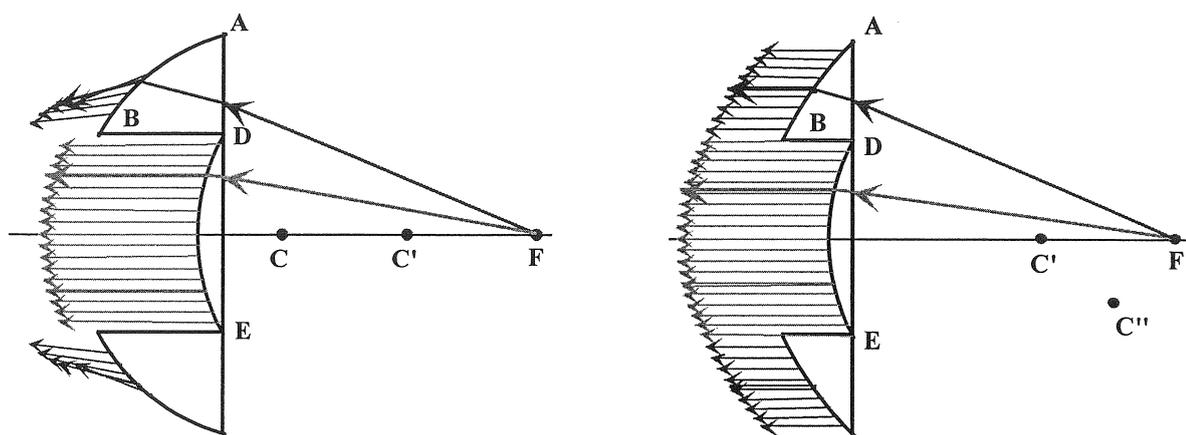


Illustration 7. Lentilles diminuées dans leur partie centrale.

Par souci de simplicité de la démonstration, ces lentilles n'ont qu'un seul échelon alors qu'en réalité elles peuvent en avoir jusqu'à dix. L'indice de réfraction choisi pour réaliser les figures est de 1,6.

a. Lentille réduite dans sa partie centrale.
C est le centre de l'arc AB, C' celui du ménisque DE
et F est le foyer.

b. Lentille réduite et corrigée de l'aberration de
sphéricité.
C' est le centre du ménisque DE et C'' celui de
l'arc AB.

Les premières réalisations

Une première lentille à échelons avec correction de l'aberration de sphéricité est fabriquée et présentée à la Commission le 31 octobre 1820 ; elle est à zones polygonales et est inscrite dans un carré de 55cm de côté : sa distance focale est de 70cm et le matériau utilisé est un verre dit *crown-glass* fabriqué par la manufacture de Saint-Gobain. Une épure d'une seconde lentille à zones polygonales est présentée à la même séance : composée de cent éléments, elle est inscrite dans un carré de 76cm de côté, et a une épaisseur de 2,5cm environ ; sa distance focale est de 92cm (cf. illustration 8). La réussite de cette première tentative de réalisation concrète et les progrès techniques dans le façonnage du verre permettent d'envisager rapidement la confection de lentilles à zones annulaires. La première grande lentille de ce genre (76 cm de côté et 92 cm de distance focale) est présentée le 19 juin 1822.

¹⁹ Ces surfaces sont aussi dites aujourd'hui, *toriques*. Il est d'ailleurs possible que l'emploi du mot *tore* en géométrie soit dû à Fresnel, qui, dans sa lettre à Sganzin du 29 août 1819, relève : « J'ai compris ce que M. Haudry [ingénieur en chef des travaux maritimes du Havre] entend par sa surface du genre des tores : c'est une expression géométrique empruntée à l'architecture, dans laquelle on appelle tores les moulures courbes de la base ou du chapiteau d'une colonne. Cette surface du genre des tores serait précisément le réflecteur sidéral de M. Bordier-Macé [...] ». [*Œuvres*, t. 3, II(A), p. 16].

²⁰ [*Œuvres*, t. 3, X(D), p. 160-166].

²¹ [*Œuvres*, t. 3, Introduction, p. LXV-LXXV].

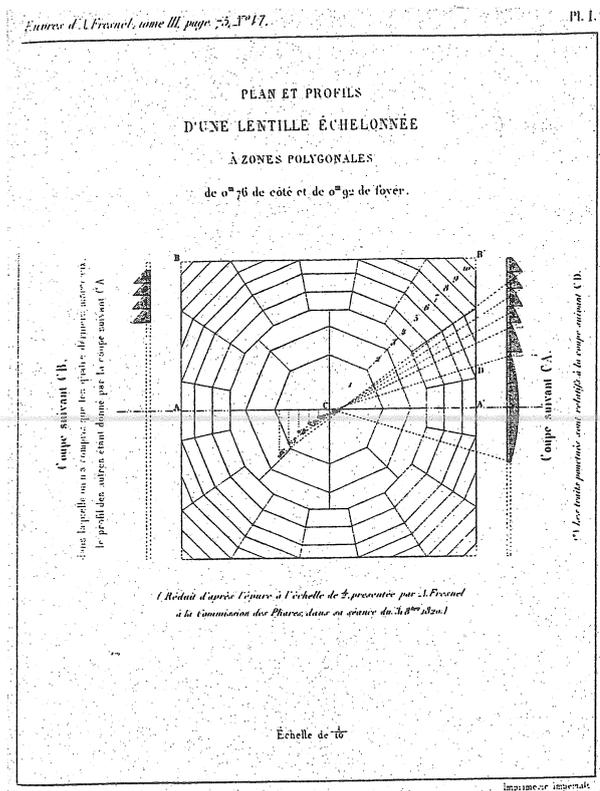


Illustration 8. Lentille à échelons à zones polygonales.
Œuvres complètes, planche I.

En outre, Fresnel donne, dans son *Projet d'un Phare à feux tournants...*, une évaluation de l'efficacité de son dispositif lenticulaire comparée à celle des réflecteurs de Lenoir ou de Bordier-Macet. Des mesures d'intensité lumineuse effectuées en laboratoire le conduisent à inférer que la quantité de rayons rassemblés dans le plan horizontal par une lentille à échelons est environ le triple de celle obtenue avec des réflecteurs paraboliques de mêmes dimensions. Il évalue le poids (masse) d'une lentille de 76 cm de côté et de 2,5 cm d'épaisseur moyenne à 36,83 kg, équivalent à celui d'un grand réflecteur de Bordier-Macet, lui-même moins lourd qu'un réflecteur de Lenoir. Quant au prix d'une lentille de cette taille, Fresnel l'estime à 1000 francs, sans compter le cadre, ce qui, selon lui, correspond à celui que paie l'administration pour un réflecteur de Bordier-Macet. Ainsi pour un poids et un prix identiques à ceux d'un réflecteur, chaque lentille produit l'effet de trois réflecteurs. Enfin, dernier avantage des lentilles, leur entretien est beaucoup plus facile que celui des réflecteurs à cause de l'inaltérabilité du verre et de la longue durée de son poli, et aussi du fait que, contrairement aux réflecteurs, la source lumineuse est éloignée de la lentille qui n'est alors pas exposée aux taches d'huile provenant de la lampe.

Essais des premiers phares lenticulaires

Le premier essai en vraie grandeur d'un système lenticulaire tournant a lieu dans la nuit du 7 au 8 septembre 1821 et est rapporté dans un procès-verbal établi par M. Schwilgué, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, en date du 12 septembre 1821²². Le phare de premier ordre, à feux tournants, équipé de lentilles à échelons est installé sur la plate-forme supérieure de l'Arc de Triomphe de l'Étoile ; il comprend, selon une note des éditeurs, six grandes lentilles placées sur six des huit côtés d'un octogone régulier et quatre demi-lentilles²³ occupant les deux côtés restants de l'octogone (cf. illustration 9) ; les grandes lentilles ne sont pas d'égale puissance, les unes, les plus anciennes, étant à zones polygonales, les autres, plus récentes, à zones annulaires. Les observations

²² [*Œuvres*, t. 3, VII, p. 91-96].

²³ Une demi-lentille est obtenue par retranchement, dans une grande lentille, de deux bandes verticales extrêmes de largeur égale au quart de la largeur de la lentille entière.

sont faites du village de Châtenay, situé à 13 000 toises (environ 24,5 km) de l'Arc de Triomphe, dans le département alors de Seine-et-Oise.

En dépit de conditions défavorables : montée de brouillard et Lune proche de la plénitude et voisine du phare, et d'une erreur de préparation due à Fresnel : manque d'huile provoquant une lumière rougeâtre, les éclats observés sont plus vifs que tous ceux qui ont été produits par les dispositifs antérieurs. En particulier, le rapporteur, Schwilgué, note l'apparition d'éclats imprévus, qu'il appelle *faux éclats*, d'une intensité plus faible que les éclats prévus ; selon Fresnel, ces faux éclats sont dus à la réflexion des vrais éclats sur les glaces de la lanterne et n'ont qu'un vingtième à peine de l'intensité des vrais éclats. Leur perception à une distance de 13 000 toises par clair de lune est pour lui une preuve de la forte intensité des vrais éclats.

Une révolution complète du phare dure 9 minutes et une demi-seconde, se répartissant en 2 minutes 29 secondes et demi pour la durée des éclats, y compris les faux, et 6 minutes 31 secondes pour les éclipses ; sans les faux éclats, la durée des éclats serait de 2 minutes 6 secondes et demi et celle des éclipses de 6 minutes 54 secondes ; ces mesures sont en fait des moyennes établies sur les cinq premières révolutions. Enfin, les écarts entre les milieux des feux successifs sont donnés par le tableau I, repris de celui établi par Schwilgué à la fin de son rapport.

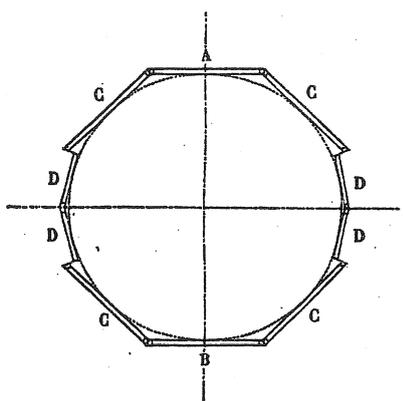


Illustration. 9. Coupe horizontale du phare lenticulaire essayé les 7-8 septembre 1821²⁴.
A et B désignent des grandes lentilles annulaires,
C des grandes lentilles polygonales et D des
demi-lentilles.

| DÉSIGNATION. | DURÉE |
|-------------------|-----------------|
| De A en C..... | 1' 7'',5 |
| De C en D..... | 52'' |
| De D en D..... | 31'' |
| De D en C..... | 52'' |
| De C en B..... | 1' 7'',5 |
| De B en C..... | 1' 7'',5 |
| De C en D..... | 52'' |
| De D en D..... | 31'' |
| De D en C..... | 52'' |
| De C en A..... | 1' 7'',5 |
| Total..... | 9' 0'',5 |

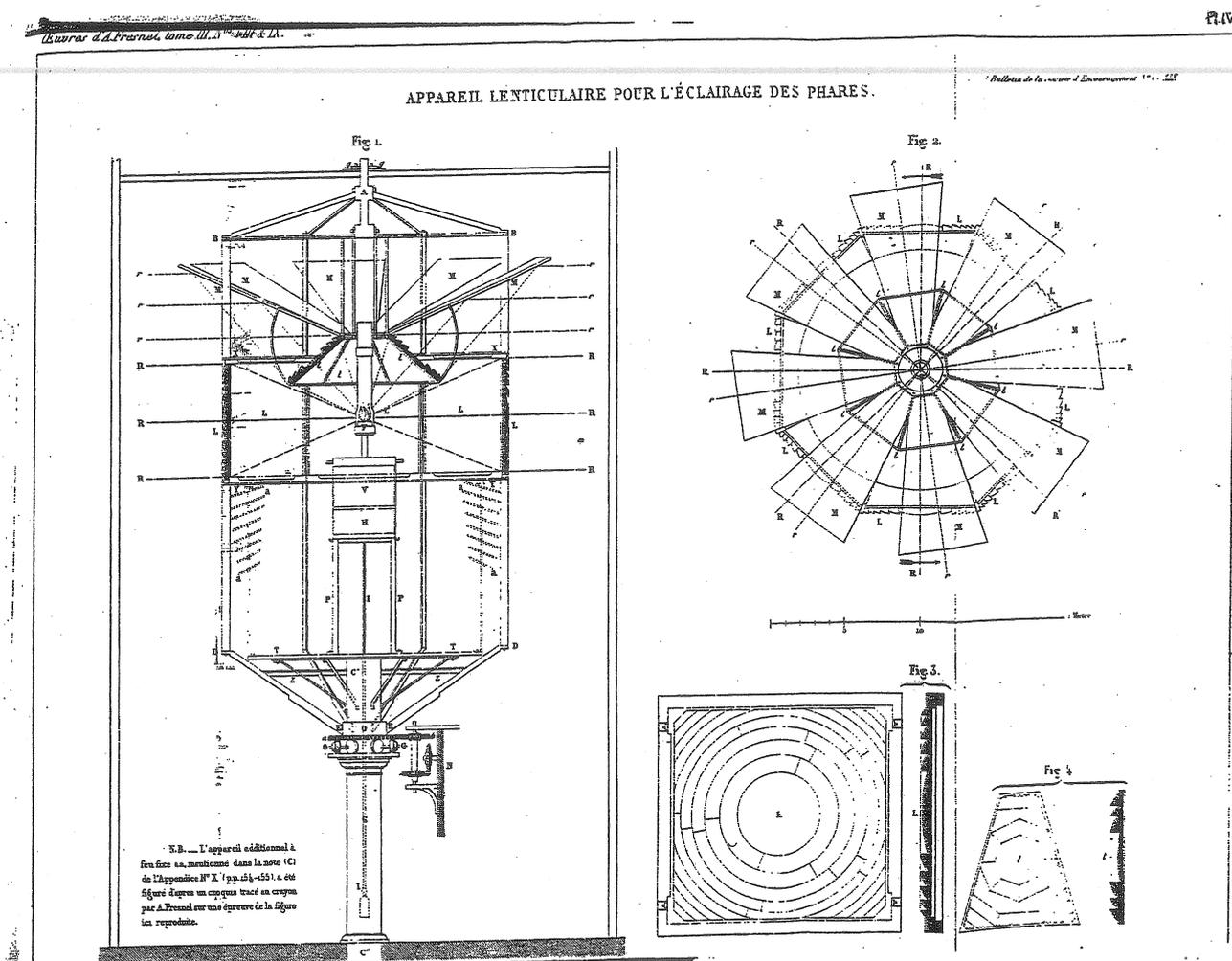
Tableau I.
Écarts entre les milieux des éclats

La réussite de cet essai conduit la Commission à commander à Fresnel la mise au point d'un système lenticulaire destiné à équiper le phare de Cordouan qui, en dépit de sa récente rénovation en 1791, rend aux navigateurs un service encore inférieur à leurs souhaits. L'appareil conçu par Fresnel est constitué d'un cadre de fer forgé en forme de prisme à base octogonale régulière (cf. illustration 10) ; chacune des huit faces verticales du prisme était occupée par une grande lentille annulaire L (cf. figure 3 de l'illustration 10), de 76 cm de côté et comportant, en plus du ménisque central, neuf échelons²⁵. Pour utiliser les rayons lumineux passant par-dessus les lentilles verticales, Fresnel surmonte l'armature prismatique d'un toit en tronc de cône de base octogonale, dont les faces obliques sont constituées de lentilles *l*, à échelons, polygonales et de forme trapézoïdale (cf. figure 4 de l'illustration 10) ; les rayons émergents de ces lentilles forment des faisceaux parallèles qui sont rabattus vers l'horizontale par huit grands miroirs plans et trapézoïdaux M (cf. figures 1 et 2 de l'illustration 10). Enfin, pour ne pas perdre la lumière dirigée vers le bas, Fresnel avait conçu dans un premier temps un système de petits miroirs aa (cf. figure 1 de l'illustration 10) disposés

²⁴ Figure extraite de [*Œuvres*, t. 3, VII, p. 95].

²⁵ Les lentilles à échelons ont été fabriquées par l'ingénieur opticien Soleil et l'armature métallique de cuivre et de fer ainsi que les machines d'horlogerie par le mécanicien Wagner.

comme les feuilles d'une jalousie à ceci près qu'elles n'auraient pas été parallèles mais inclinées de sorte qu'elles renverraient les rayons à l'horizontale. Cependant Fresnel renonce à ce dispositif pour lui préférer un système de feu fixe, donc désolidarisé du prisme tournant, alimenté par les mêmes rayons inférieurs, et permettant de visualiser le phare en permanence dans un rayon de 4 lieues marines²⁶ ; cette distance garantit une absolue sécurité par rapport aux écueils situés dans le voisinage du phare de Cordouan, le plus éloigné de ces écueils étant à deux lieues du phare.



réussi décide la Commission des Phares à doter le phare de Cordouan du système d'éclairage expérimenté le 20 août 1822.

La nouvelle rénovation du phare de Cordouan

Chargé par le Directeur général des Ponts et Chaussées, Becquey, du changement de l'éclairage du phare de Cordouan, Fresnel en réalise l'installation entre le 10 et le 25 juillet 1823, dont il rend compte dans un rapport à Becquey en date du 12 septembre 1823²⁷. Il passe les derniers jours de juillet à évaluer l'efficacité du nouvel équipement en navigant dans la Gironde et dans les environs de Royan. Il constate que sur l'océan, le feu fixe reste visible jusqu'à quatre lieues alors que dans la Gironde, la limite de visibilité s'étend jusqu'à six lieues ; quant aux feux tournants observés dans la Gironde, bien que cachés par les dunes de la pointe de Grave, ils projettent une auréole lumineuse au-dessus de celles-ci visible jusqu'à sept lieues ; en outre, il lui est rapporté que les mêmes feux produisaient sur la mer, lorsqu'ils sont rendus invisibles à cause de la courbure terrestre, une auréole observable jusqu'à huit à neuf lieues. Enfin une observation faite à Royan en compagnie de M. de Saint-Aubin, ingénieur des Ponts et Chaussées de l'arrondissement de Bordeaux, utilise une comparaison avec un fanal sidéral de Bordier-Macet installé dans le port de Royan ; ce fanal a une intensité lumineuse égale à celle de l'ancien feu de Cordouan à son maximum, ce qui, compte tenu des distances, donne à cet ancien feu une intensité de quarante fois celle du petit fanal qui équivalait, lui, à six becs de quinquet ; l'ancien feu est ainsi évalué à deux cent quarante becs de quinquet. Le maximum d'éclat d'une des grandes lentilles nouvelles est évalué à deux mille quatre cents becs de quinquet, soit dix fois celui des feux antérieurs ; le nouveau phare est visible, avec un éclat égal, de trois fois plus loin que l'ancien. Cette évaluation est confirmée par des marins qui estiment que le nouveau feu vu de Mortagne, port de Gironde, est aussi brillant que l'ancien vu de Royan, qui est trois fois plus proche du phare que l'est Mortagne. À cette évaluation s'ajoute celle des marins, capitaines de navires ou pilotes des ports de Royan et de Saint-Georges, réunis au bureau de la marine à Royan le 27 août 1823²⁸ ; leurs estimations sont moins favorables, accordant au nouvel appareillage une intensité double de celle de l'ancien²⁹. En dernier ressort, il semble que l'évaluation proposée par Fresnel soit la plus conforme, à savoir une intensité multipliée par neuf ou dix et donc une portée triple par rapport au précédent dispositif. Fresnel termine son *Rapport* du 12 septembre 1823 par des considérations financières ; il avait estimé dans une note du 19 mars 1823³⁰ le coût d'un grand appareil lenticulaire à feux tournants comprenant huit grandes lentilles, avec les pièces de rechange, à vingt cinq mille francs ; cette somme placée au denier vingt, c'est-à-dire à 5%, rapporterait un intérêt annuel de mille deux cent cinquante francs, tandis que l'économie annuelle réalisée par la réduction de moitié de la dépense d'huile est de cinq mille sept cents francs. Le nouveau système d'éclairage l'emporte sur l'ancien non seulement par ses performances physico-techniques, mais aussi par sa rentabilité financière.

Cette rentabilité économique n'est pas seulement due à l'amélioration du système optique mais aussi à celles apportées à d'autres composantes du dispositif.

Les autres améliorations apportées aux phares

Ces améliorations concernent d'une part les sources d'éclairage et d'autre part le mécanisme d'horlogerie assurant la rotation de l'appareil pour un phare à feux tournants.

²⁷ [*Œuvres*, t. 3, XI(A), p. 167-172].

²⁸ Cette réunion donna lieu à un procès-verbal reproduit dans [*Œuvres*, t. 3, XI(B), p. 173-176].

²⁹ Fresnel, dans une note jointe au procès-verbal conteste cette évaluation en arguant du fait qu'elle fut effectuée sur un souvenir et qu'il est très difficile de dire si une lumière est deux, trois, quatre, ... fois plus brillante qu'une autre, même si les lumières sont simultanément présentes, à plus forte raison si l'une n'est qu'un souvenir.

³⁰ [*Œuvres*, t. 3, X(B), p. 151, 152].

Les sources d'éclairage

Dès le premier *Projet d'expériences sur l'éclairage des phares* d'août 1819, Fresnel se préoccupe de l'amélioration des lampes et becs destinés à équiper les phares, sachant que le combustible employé est alors l'huile et beaucoup plus rarement le gaz, obtenu par distillation de ladite huile. Les objectifs sont multiples : tout d'abord obtenir la flamme la plus intense et la plus blanche possible, ensuite trouver un système de réservoir et d'alimentation qui offre la meilleure régularité et contribue à la brillance maximum, enfin assurer la meilleure fiabilité possible, notamment en permettant des réparations ou des remplacements rapides et simples en cas de besoin ; outre ces objectifs à caractère physique, une minimisation de la dépense d'huile est recherchée.

Les expériences menées par Fresnel, le plus souvent en collaboration avec Arago, vont s'inspirer de résultats obtenus antérieurement, en particulier par Rumford. Tout d'abord, il a été établi « *que les petites mèches donnent une flamme plus brillante et plus vive que les autres, et que [...] la combustion d'une même quantité d'huile y produit plus de lumière* »³¹. D'autre part, Rumford avait remarqué que la flamme de deux bougies augmente en intensité si les bougies sont assez proches pour que leurs flammes se réunissent ; il avait alors eu l'idée de former des becs de plusieurs mèches, plates et parallèles, séparées de l'intervalle juste suffisant à la circulation de l'air entre elles. Fresnel reprend cette idée en la conjuguant à celle due à Guyton de Morveau qui expérimenta le premier les mèches cylindriques concentriques triples³². Fresnel et Arago, auxquels se joindra parfois Mathieu, vont mener de septembre 1819 à septembre 1821 de nombreuses expériences de laboratoire sur ce sujet, dont les résultats seront consignés dans un registre très partiellement publié dans les *Œuvres complètes*³³. En date du 8 décembre 1819, Fresnel rédige une *Note sur l'objet et les résultats des expériences faites à l'Observatoire par MM. Arago et Fresnel*³⁴ ; il y annonce des résultats très satisfaisants avec les becs à mèches concentriques doubles qui, selon lui, équivalent chacun, pour la production de lumière, à cinq becs simples avec une consommation d'huile correspondant à celle de quatre becs, ou à peine plus ; il note que les becs triples expérimentés donnent aussi de grands effets de lumière, mais admet qu'un problème, quant à la séparation des bords du bec d'avec les deux flammes intérieures, reste irrésolu, problème qu'il compte bien résoudre cependant. De plus, il considère que les becs triples sont trop gros pour équiper des phares à réflecteurs et qu'ils ne seront utilisables que dans des phares à lentilles.

Pour ce qui regarde le réservoir d'huile et l'alimentation des mèches, il importe essentiellement « *de fournir constamment [à celles-ci] la quantité d'huile nécessaire pour donner à la flamme le plus grand éclat possible* »³⁵ et pour ce faire de maintenir un niveau d'huile constant dans le réservoir, au contraire des lampes ordinaires où le niveau d'huile baisse en cours de combustion. Fresnel cite deux dispositifs assurant cette constance du niveau : un mécanisme dû à Carcel dont la complexité lui paraît peu favorable à des réparations éventuelles sur place et une lampe hydrostatique de MM. Girard, simple et d'un effet constant. Au prix de quelques adaptations et expérimentations, notamment pour déterminer le niveau de pression le plus favorable à la combustion, c'est ce dernier procédé que Fresnel considère le plus adéquat à ses projets.

Les résultats et conclusions auxquelles parviennent Arago et Fresnel sont publiés successivement dans les *Annales de chimie et de physique* d'avril 1821, le *Bulletin de la Société d'encouragement* de juin de la même année et enfin en annexe du *Mémoire...* du 29 juillet 1822, sous forme d'une *Note sur les becs à mèches concentriques*³⁶. Arago et Fresnel y préconisent l'emploi de becs à mèches concentriques, de la simple à la quadruple selon la taille du phare à

³¹ [*Œuvres*, t. 3, I, p. 6].

³² Guyton, « Nouveaux moyens de fournir, presque sans frais, le feu et l'eau pour les expériences chimiques », *Annales de chimie*, t. XXIV, p. 310-326. La mention des mèches concentriques figure page 312.

³³ [*Œuvres*, t. 3, III(B), p. 29, 30].

³⁴ [*Œuvres*, t. 3, III(A), p. 27, 28].

³⁵ [*Œuvres*, t. 3, I, p. 7].

³⁶ [*Œuvres*, t. 3, VIII(B), p. 127-132].

équiper³⁷ (cf. illustration 11), ainsi qu'un système d'alimentation inspiré de la lampe hydrostatique des Girard.

C'est ce type de dispositif d'éclairage qui est installé lors de la rénovation du phare de Cordouan après avoir été testé lors de l'expérience du 20 août 1822 dont le programme d'expérience prévoyait des variations de longueur des mèches³⁸.

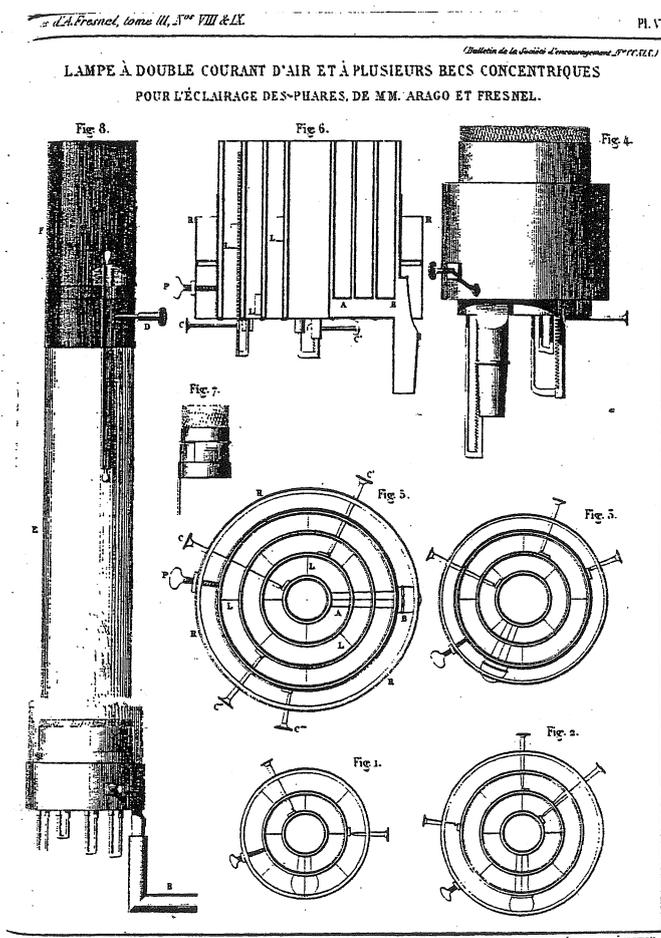


Illustration 11. Lampe à double courant d'air et à plusieurs becs concentriques pour l'éclairage des phares.
Planche V des *Œuvres complètes*.

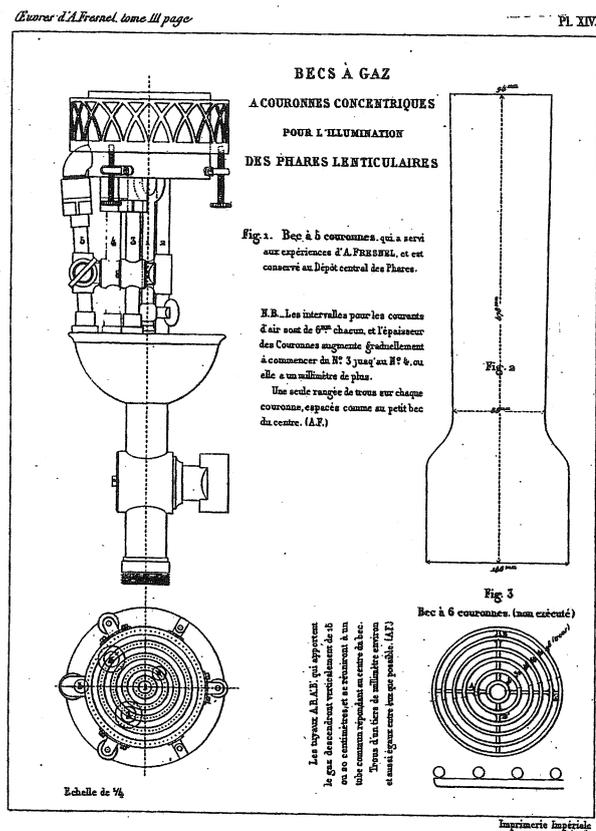


Illustration 12. Becs à gaz à couronnes concentriques pour l'illumination des phares lenticulaires.
Planche XIV des *Œuvres complètes*.

Entre juin 1823 et décembre 1826, Fresnel se livre à des expériences de laboratoire sur l'usage de divers gaz pour l'illumination des phares lenticulaires³⁹; les mèches concentriques sont remplacées dans les becs par des couronnes concentriques percées de trous (cf. illustration 12); les gaz essayés sont: gaz d'huiles diverses obtenu par distillation, gaz de charbon de terre, gaz provenant de la distillation de la résine. Toutefois, Fresnel n'a pas le temps de mettre en application ce procédé de combustion, en raison de son décès survenu le 14 juillet 1827.

³⁷ Voir l'annexe II sur les ordres de phare.

³⁸ [*Œuvres*, t. 3, VIII(D), p. 137, note (a)].

³⁹ [*Œuvres*, t. 3, XXII(D), p. 309-332].

La régulation du mouvement de rotation

Les mécanismes de rotation installés sur les premiers phares tournants sont des horloges à pendule oscillant avec échappement qui présentent l'inconvénient de fonctionner par à-coups ; cet arrêt régulier d'une masse de l'ordre de quatre cents livres, pour un phare tournant à lentilles, nuit à la régularité du mouvement sur une période longue et risque de provoquer des dégradations dont la réparation sur place pourrait être difficile. Fresnel propose donc, dans son *Rapport sur le système d'éclairage à adopter pour le phare du Four*⁴⁰ du 14 janvier 1821, de remplacer la régulation par échappement par une machine à mouvement continu réglée par un volant. Cependant ce n'est qu'en avril 1822 que Fresnel exécute les premiers calculs sur ce mode de régulation⁴¹ et seulement trois ans plus tard, en février 1825, qu'il effectue des expériences sur le mécanisme de volant-pendule qu'il a fait réaliser par l'horloger Lepaute⁴² (cf. illustration 13). Les résultats en sont favorables quant à la régularité de la rotation et la moindre usure des pièces mécaniques.

Œuvres d'A. Fresnel, tome III, page 195, Pl. VII (C).

Pl. VI.

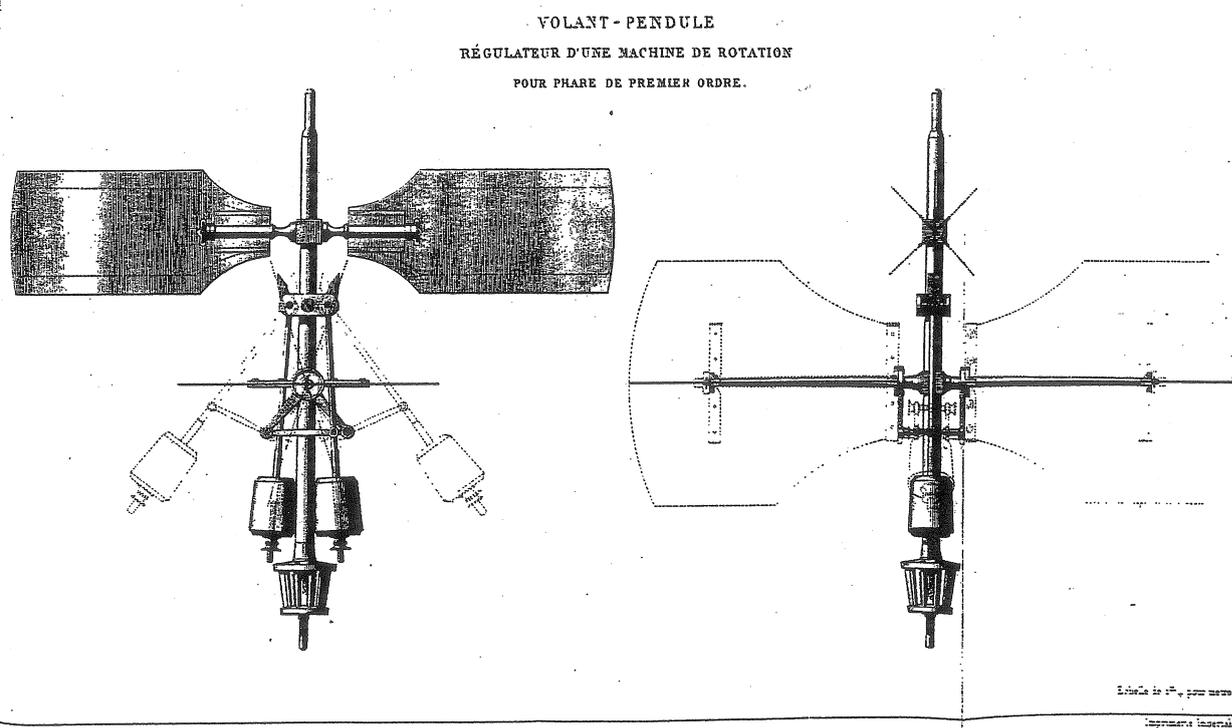


Illustration 13. Volant-pendule régulateur pour une machine de rotation.
Planche VI des *Œuvres complètes*.

⁴⁰ [*Œuvres*, t. 3, XIII(A), p. 189-192]. Le phare du Four se trouve à la sortie de l'embouchure de la Loire, face à Guérande.

⁴¹ [*Œuvres*, t. 3, XIII(B), *Calcul sur le pendule réglé par la force centrifuge*, p. 193, 194].

⁴² [*Œuvres*, t. 3, XIII(C), *Expériences sur une machine de rotation à volant-pendule, appliquée à un appareil à seize demi-lentilles*, p. 195-198].

Et ensuite...pour conclure

Le projet d'éclairage des côtes de France

Les performances supérieures à celles de l'ancien système, constatées sur le phare de Cordouan, conduisent la Commission des phares⁴³ à élaborer un plan général de rénovation et de construction de phares sur l'ensemble des côtes françaises. Ce plan, élaboré entre fin 1823 et fin 1825, est présenté à la Commission par son président, le contre-amiral de Rossel⁴⁴, à la séance du 9 septembre 1825, sous forme d'un *Rapport contenant l'exposition du système adopté par la Commission des phares pour éclairer les côtes de France*⁴⁵ ; il est approuvé par la Commission lors de la même séance⁴⁶. Ce rapport donne les principes présidant à la réalisation des phares, décrit les moyens de les mettre en œuvre, précise les différents ordres de phares ; il énonce des observations générales sur la répartition des feux pour enfin, donner, ordre par ordre, une distribution détaillée des phares et feux de port sur les côtes françaises. Le rapport est complété d'un *Tableau de la distribution générale des feux sur les côtes de France*⁴⁷, distinguant les phares existants, à rénover, de ceux à construire, classés par ordre, ainsi que d'une carte⁴⁸. En 1830, dix phares sont rénovés selon les principes de Fresnel et une trentaine d'autres sont en projet de rénovation ou de construction.

La description des travaux d'Augustin Fresnel sur les systèmes d'éclairage devrait, pour être complète, mentionner des expériences et des travaux dont une liste loin d'être exhaustive comprendrait :

- une étude d'un système d'éclairage pour le cadran de l'Hôtel de Ville de Paris, effectuée en février 1822 à la demande du comte Chabrol de Volvic, préfet de la Seine,
- une expérience comparative entre deux systèmes de feux tournants, l'un muni de huit grandes lentilles, l'autre de seize demi-lentilles, en date du 9 octobre 1823,
- une étude sur les appareils dioptriques à feux fixes munis soit d'un système accessoire catoptrique, soit d'un dispositif dioptrique rotatif produisant un effet d'éclats et d'éclipses, avec une suite d'expériences réalisées courant mai 1825,
- une étude, avec expériences, sur les fanaux catadioptriques à réflexion totale, en vue de l'éclairage des quais du canal Saint-Martin, effectuée de décembre 1826 à juin 1827, à la demande du même préfet de la Seine,
- une étude avec expériences sur un système d'éclairage des théâtres proposé par un ingénieur nommé Locatelli, à la demande du vicomte de La Rochefoucauld, aide de camp du Roi, chargé du Département des Beaux-Arts, de janvier à juin 1827

sans oublier la correspondance avec divers collaborateurs : membres de la Commission des phares, ingénieurs des Ponts et Chaussées de divers départements, ingénieurs des Affaires Maritimes, ingénieurs et entrepreneurs de fabrication, ... ou avec des personnalités étrangères intéressées à ses découvertes, et tout particulièrement des ingénieurs britanniques ou néerlandais chargés de l'administration des phares de leur pays.

Que reste-t-il aujourd'hui des améliorations apportées par Augustin Fresnel aux systèmes d'éclairage publics : phares de mer ou de port, réverbères urbains, éclairage de salles de spectacles... ? Certes, les innovations concernant les sources lumineuses et les mécanismes de

⁴³ La Commission des phares a changé de composition depuis 1811 ; l'annexe I donne la liste de ses membres en 1811 et en 1825.

⁴⁴ La présentation du plan général par de Rossel fut précédée de celle d'un *Rapport sur les caractères distinctifs de divers appareils d'éclairage qu'on propose d'employer sur les côtes de France dans le projet général soumis à la Commission*, rédigé par Fresnel et présenté à la Commission le 22 avril 1825.

⁴⁵ [*Œuvres*, t. 3, XX(A), p. 241-284].

⁴⁶ [*Œuvres*, t. 3, XX(B), p. 285].

⁴⁷ [*Œuvres*, t. 3, XX(C), p. 286-289].

⁴⁸ [*Œuvres*, t. 3, planche XVIII].

rotation sont devenus obsolètes avec la généralisation de l'usage de l'électricité ; les becs à huile ou à gaz ont été remplacés par des lampes à incandescence et les dispositifs horlogers par des moteurs électriques. Mais pour ce qui regarde les systèmes optiques, dont l'élément principal est la lentille à échelons dite depuis *de Fresnel*, ils n'ont pas connu depuis près de deux siècles de modifications fondamentales et gardent toute leur valeur innovante⁴⁹, même si des perfectionnements de détail ont été accomplis, notamment dans la fabrication des verres tant pour l'homogénéité de la matière que pour la précision du poli. Bien plus, leur usage s'est étendu à d'autres dispositifs éclairants comme les projecteurs de studio photographique ou cinématographique ou les phares de voitures automobiles.

Qu'il nous soit permis, pour finir, dans une époque qui a connu, depuis celle de Fresnel, de si nombreuses découvertes scientifiques et nouveautés techniques dont presque toutes possèdent une double face, l'une blanche, l'autre noire, d'acquiescer au propos de François Arago qui, dans son éloge historique d'Augustin Fresnel, prononcé devant l'Académie des Sciences le 26 juillet 1830, déclarait à propos de ses travaux sur les phares :

« Je serai ici l'interprète des uns et des autres en affirmant que la France [...] possède maintenant, grâce aux travaux de notre savant confrère, les plus beaux phares de l'univers. Il est toujours glorieux de marcher à la tête des sciences ; mais on éprouve surtout une vive satisfaction à réclamer le premier rang pour son pays, quand il s'agit d'une de ces applications heureuses auxquelles toutes les nations sont appelées à prendre une part égale, et dont l'humanité n'aura jamais à gémir. »⁵⁰

Caen, le 27 août 2004.

Bibliographie

- A. Fresnel, *Œuvres complètes*, t. 3 publié par H. de Senarmont, É. Verdet et L. Fresnel. Introduction de L. Fresnel. Paris : Imprimerie impériale, 1870. Reprint en fac-simile par Johnson reprint Corporation, New-York, 1965. LXXV + 751 p. et 19 pl.
- Collectif, Article « Fresnel, Augustin » par R. H. Silliman, *Dictionary of scientific biography*, éd. Ch. Gillispie, vol. 5, p. 165-171.
- F. Dutour, N. Poirier, R. Poirier, *Augustin Fresnel (1788-1827)*, collection « Les Cahiers des Archives départementales du Calvados », n°17 ; Caen, 2000.
- J. Rosmorduc, V. Rosmoduc, F. Dutour, *Les révolutions de l'optique et l'œuvre de Fresnel*, Paris : Vuibert-Adapt, collection « Inflexions », 2004.

⁴⁹ Bien sûr, d'autres méthodes de repérage et de guidage en mer sont apparues plus récemment : balises radioélectriques, G.P.S....

⁵⁰ [*Œuvres*, t. 3, p. 520].

ANNEXES

Annexe I

Commission des phares constituée en 1811.

Extrait de : A. Fresnel, *Œuvres complètes*, tome 3, Paris, 1870. Introduction de Léonor Fresnel, p. XXI, note a.

| | | |
|--|---|---|
| MM. Sané, inspecteur général des constructions navales, membre de l'Institut, | } | désignés par le ministère de la marine. |
| De Moncabrié, capitaine de vaisseau, | | |
| Jacob, <i>id.</i> | | |
| Duperrey, <i>id.</i> | | |
| Ferregeau, inspecteur général des ponts et chaussées, directeur des travaux maritimes, | } | désignés par le ministère de l'intérieur. |
| Sganzin, inspecteur divisionnaire des ponts et chaussées, | | |
| Tarbé, <i>id.</i> | | |
| Malus, officier du génie, membre de l'Institut, | } | désignés par l'Institut. |
| Charles, physicien, membre de l'Institut, | | |
| Arago entra dans la commission en 1813, à la mort de Malus. | | |

Commission des phares en 1825.

| | |
|------------------------|---|
| MM. Becquey | conseiller d'État, directeur général des Ponts et Chaussées, <i>président</i> ; |
| Halgan..... | contre-amiral, directeur du personnel au Ministère de la Marine ; |
| De Rossel..... | contre-amiral honoraire, membre de l'Académie des Sciences ; |
| Rolland..... | inspecteur général des constructions navales ; |
| Arago..... | astronome, membre de l'Académie des Sciences ; |
| Mathieu..... | astronome, membre de l'Académie des Sciences ; |
| De Prony..... | inspecteur général des Ponts et Chaussées, membre de l'Académie des Sciences ; |
| Sganzin..... | inspecteur général des travaux hydrauliques des ports militaires ; |
| Tarbé de Vaux-Clairs.. | inspecteur général des Ponts et Chaussées ; |
| A. Fresnel..... | ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, membre de l'Académie des Sciences ; <i>secrétaire</i> . |

Annexe II

Typologie des phares

Extrait de : A. Fresnel, *Œuvres complètes*, tome 3, Paris, 1870. Introduction de Léonor Fresnel, p. LI.

| ORDRE DES APPAREILS. | DISTANCE FOCALE. | nombre DES MECHES. | diamètre du bec de lampe. | CONSOMMATION D'HUILE par heure. | OBSERVATIONS. |
|--|---------------------|--------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1 ^{er} ordre..... | o ^m 92 | 4 | 90 ^{mm} | 750 ^g | On n'indique pas ici la <i>portée</i> , qui varie pour le même ordre, avec la disposition des pièces optiques. * Les études commencées en 1825 par Fresnel, pour les appareils lenticulaires de 4 ^e ordre, ne furent terminées que vers la fin de 1826. |
| 2 ^e ordre..... | o 70 | 3 | 75 | 500 | |
| 3 ^e ordre { grand modèle | o 50 | 2 | 45 | 175 | |
| { petit modèle.. | o 25 | | | | |
| 4 ^e ordre ou fanaux de port*..... | o 15 | 1 | 30 | 60 | |

Annexe III

Optimisation d'un réflecteur parabolique

Cette annexe propose un résumé de l'étude et des calculs faits par Fresnel dans le but d'optimiser, sous des conditions fixées, l'effet utile d'un réflecteur parabolique. Ces travaux, rédigés dans les carnets de notes de Fresnel, ont été publiés dans ses *Œuvres complètes*, au troisième tome, partie IV (A), intitulée *Sur l'éclairage des phares* (p. 31-38) et suivie d'un appendice, *Calcul du degré de profondeur le plus avantageux à donner à un réflecteur parabolique* (p. 39-56). Ces extraits ont été proposés à la lecture critique des participants à l'atelier « Optimisation des réflecteurs paraboliques par Augustin Fresnel ».

Dans le premier texte, Fresnel établit la notion d'effet utile et définit sa mesure comme le produit de la durée de l'éclat par l'intensité de sa lumière.

« L'effet utile est donc en raison inverse seulement de la première puissance de la divergence et, par conséquent, proportionnel au rayon vecteur FM, que je représente par r. Ainsi l'effet utile produit par les rayons incidents compris dans l'élément de la sphère lumineuse $2\pi \sin s ds$ sera proportionnel à $2\pi r \sin s ds$. »⁵¹ (cf. figure 1).

L'appendice de calculs commence par une évaluation de l'aire du parabolôide de révolution qui constitue le réflecteur. A est le sommet du parabolôide, B son foyer, CD le paramètre.

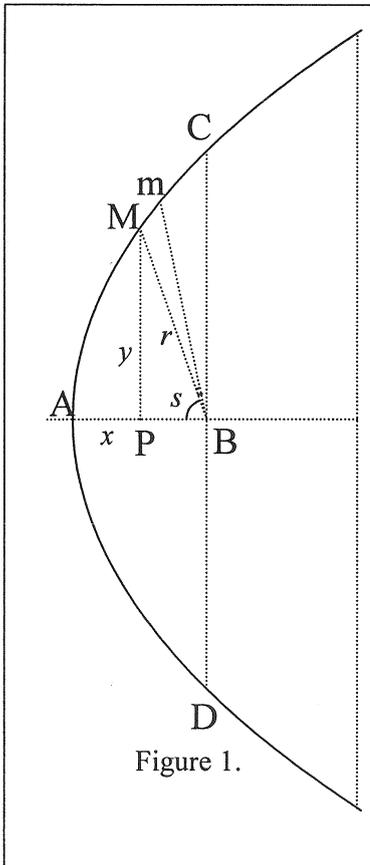


Figure 1.

$$AP = x \quad MP = y \quad \widehat{ABM} = s \quad MB = r \quad CD = p$$

Première phase : calcul de l'aire de la calotte de parabolôide de base de rayon donné.

L'équation de la parabole : $y^2 = px$ donne par différentiation

$$2y \cdot dy = p \cdot dx \quad \text{d'où } dx = \frac{2y \cdot dy}{p}$$

Alors l'arc différentiel \widehat{Mm} vaut

$$\widehat{Mm} = d\alpha = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{p} \sqrt{4y^2 + p^2}$$

La circonférence de rayon MP étant $2\pi y$, l'aire de l'anneau différentiel du parabolôide engendré par la révolution de l'arc \widehat{Mm} autour de l'axe AB est

$$dA = 2\pi y \cdot d\alpha = \frac{2\pi}{p} y \cdot dy \sqrt{4y^2 + p^2} = \frac{2\pi}{p} y (4y^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

L'aire de la calotte de parabolôide engendrée par la révolution de

l'arc \widehat{AM} est alors $A = \frac{2\pi}{p} \int_0^y (4\omega^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} \omega \cdot d\omega$

Donc $A = \frac{\pi}{6p} (4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{6} p^2$ posée égale à a^2

⁵¹ [*Œuvres*, t. 3, p. 36].

Deuxième phase : Évaluation de l'effet utile.

La quantité de rayons lumineux issus du foyer B qui éclairent la partie du miroir engendrée par l'arc \widehat{Mm} , qui constitue le cône lumineux différentiel, vaut $2\pi \cdot \sin s \cdot ds$, ds étant la mesure de l'angle différentiel \widehat{MBm} .

L'effet utile de ces rayons est alors le produit de cette quantité par la distance $MB = r$, à savoir $2\pi r \sin s \cdot ds$, qu'il faut intégrer pour obtenir la mesure de l'effet utile sur toute l'étendue du réflecteur.

Il convient donc tout d'abord d'exprimer r en fonction de s , qui sera la variable d'intégration.

$$y = r \sin s \quad \text{et} \quad x = AB - PB = \frac{p}{4} - r \cos s ;$$

$$\text{Alors } y^2 = px \text{ devient } r^2 \sin^2 s = p \left(\frac{p}{4} - r \cos s \right) = \frac{p^2}{4} - pr \cos s,$$

$$\text{Soit, en divisant par } \sin^2 s, \quad r^2 + r \cdot \frac{p \cos s}{\sin^2 s} - \frac{1}{4} \frac{p^2}{\sin^2 s} = 0,$$

$$\text{équation dont le discriminant est } \Delta = \left(\frac{p \cos s}{\sin^2 s} \right)^2 + \frac{p^2}{\sin^2 s} = \frac{p^2}{\sin^4 s} (\cos^2 s + \sin^2 s) = \left(\frac{p}{\sin^2 s} \right)^2.$$

$$r \text{ devant être positif, il vient} \quad r = \frac{1}{2} \left(-\frac{p \cos s}{\sin^2 s} + \frac{p}{\sin^2 s} \right) = \dots = \frac{1}{2} \frac{p}{2 \cos^2 s/2}$$

$$\text{Donc } \boxed{r = \frac{p}{4 \cos^2 s/2}}$$

L'effet utile de l'ensemble des rayons renvoyés par le réflecteur est alors, k étant une constante dépendant du miroir,

$$U = k \int r \sin s \cdot ds = kp \int \frac{\sin s}{4 \cos^2 s/2} ds = \dots = -kp \ln \left(\cos s/2 \right) + c$$

$$\text{Or } s = 0 \Rightarrow U = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{U = -kp \ln \left(\cos s/2 \right)}$$

Il faut maintenant déterminer la valeur de s qui maximise U , l'aire du réflecteur, a^2 , étant fixée.

Troisième phase : Maximisation de l'effet utile, à aire constante.

$$\text{Il a été établi précédemment} \quad a^2 = \frac{\pi}{6p} (4y^2 + p^2)^{3/2} - \frac{\pi}{6} p^2$$

$$\text{D'autre part} \quad y = r \sin s = \frac{p}{4 \cos^2 s/2} \sin s = p \frac{2 \cos s/2 \sin s/2}{4 \cos^2 s/2} = \frac{p \sin s/2}{2 \cos s/2}$$

$$\text{Donc} \quad y^2 = \frac{p^2 \sin^2 s/2}{4 \cos^2 s/2}$$

$$\text{Alors} \quad a^2 = \frac{\pi}{6p} \left(p^2 \frac{\sin^2 s/2}{\cos^2 s/2} + p^2 \right)^{3/2} - \frac{\pi}{6} p^2 = \dots = \frac{\pi}{6} p^2 \left(\frac{1}{\cos^3 s/2} - 1 \right)$$

$$\text{D'où } p^2 = \frac{6a^2}{\pi} \frac{1}{\frac{1}{\cos^3 \frac{s}{2}} - 1}$$

On pose $\frac{1}{\cos \frac{s}{2}} = t$, alors $p^2 = \frac{6a^2}{\pi} \frac{1}{t^3 - 1}$ et $U = -kp \ln(\cos \frac{s}{2}) = -kp \ln \frac{1}{t} = kp \ln t$

$$\text{Donc } U^2 = k^2 p^2 \ln^2 t = k^2 \frac{6a^2}{\pi} \frac{\ln^2 t}{t^3 - 1}$$

On pose $f(t) = \frac{\ln^2 t}{t^3 - 1}$. Sa dérivée f' est donnée par $f'(t) = \frac{2 \ln t \cdot \frac{1}{t}(t^3 - 1) - \ln^2 t \cdot 3t^2}{(t^3 - 1)^2}$

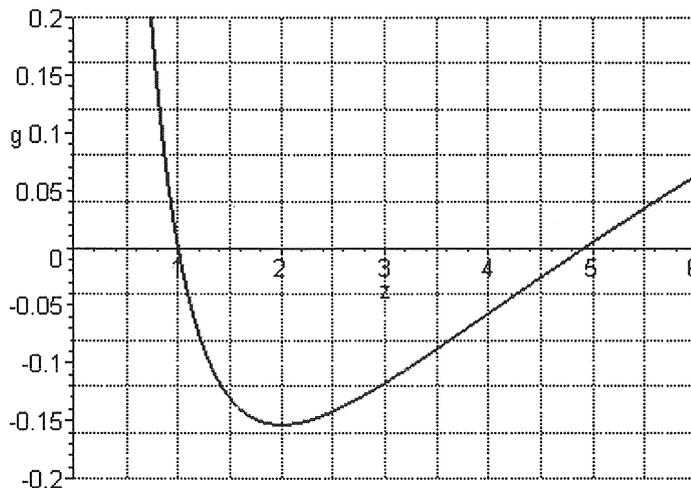
[On suppose $s \neq 0$, alors $\cos \frac{s}{2} \neq 1$ alors $t \neq 1$ donc $\frac{\ln t}{(t^3 - 1)} \neq 0$]

$$\text{Alors } \frac{f'(t)}{\frac{\ln t}{(t^3 - 1)^2}} = 2 \frac{t^3 - 1}{t} - 3t^2 \ln t = 2 \frac{t^3 - 1}{t} - t^2 \ln t^3$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln t^3 = \frac{2(t^3 - 1)}{t^3} \Leftrightarrow \ln z = \frac{2(z - 1)}{z} \text{ (en posant } z = t^3) \Leftrightarrow \ln z = 2 - \frac{2}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{z} - 1 = 0$$

La valeur $z = 1$ est solution de ces équations, mais elle donne $t = 1$, qui est proscrite.

La fonction g définie par $g(z) = \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{z} - 1$ a pour représentation graphique sur $[0 ; 6]$ la courbe ci-dessous.



Elle fait apparaître une seconde racine comprise entre 4,8 et 5.

La résolution approchée par la méthode de Newton-Raphson, donne, après calcul machine,

$$z_n \approx 4,921553638 \text{ dès que } n \geq 4.$$

Quatrième phase : Résolution approchée de l'équation $\ln z = \frac{2(z-1)}{z}$ effectuée par Fresnel.

n est une valeur approchée connue de z et δ est l'écart (inconnu) entre z et cette valeur approchée. Donc $z = n + \delta$.

$$\ln z = \frac{2(z-1)}{z} \Leftrightarrow z = e^{\frac{2(z-1)}{z}} = e^{2-\frac{2}{z}} = e^2 \cdot e^{-\frac{2}{z}} \quad (i)$$

$$-\frac{2}{z} = -\frac{2}{n+\delta} = -2 \frac{1}{n \left(1 + \frac{\delta}{n}\right)} = -\frac{2}{n} \frac{1}{1 + \frac{\delta}{n}} \text{ avec } \frac{\delta}{n} \text{ voisin de } 0.$$

$$\text{Or, au voisinage de } 0, \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - \dots$$

Dans la suite, Fresnel commet une erreur de calcul élémentaire dont il s'aperçoit plus loin, sans pour autant la rechercher ni la corriger. Le présent commentaire donne en vis-à-vis les calculs de Fresnel et les mêmes calculs corrigés.

Calcul effectué par Fresnel

Calcul corrigé

Alors

$$\begin{aligned} -\frac{2}{z} &= -\frac{2}{n} \frac{1}{1 + \frac{\delta}{n}} = -\frac{2}{n} \left(1 - \frac{\delta}{n} + \dots\right) \\ &= -\frac{2}{n} + \frac{2\delta}{n^2} + \dots \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} -\frac{2}{z} &= -\frac{2}{n} \frac{1}{1 + \frac{\delta}{n}} = -\frac{2}{n} \left(1 - \frac{\delta}{n} + \dots\right) \\ &= -\frac{2}{n} + \frac{2\delta}{n^2} + \dots \end{aligned}$$

En tronquant à la première puissance, on obtient

$$e^{-\frac{2}{z}} = e^{-\frac{2}{n} + \frac{2\delta}{n^2}} = e^{-\frac{2}{n}} \cdot e^{\frac{2\delta}{n^2}}$$

$$e^{-\frac{2}{z}} = e^{-\frac{2}{n} + \frac{2\delta}{n^2}} = e^{-\frac{2}{n}} \cdot e^{\frac{2\delta}{n^2}}$$

et l'équation (i) devient

$$z = e^2 \cdot e^{-\frac{2}{n}} \cdot e^{\frac{2\delta}{n^2}}$$

$$z = e^2 \cdot e^{-\frac{2}{n}} \cdot e^{\frac{2\delta}{n^2}}$$

$$\text{Or } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Donc, en tronquant à la première puissance de δ ,

$$e^{\frac{2\delta}{n^2}} = 1 - \frac{2\delta}{n^2}$$

$$e^{\frac{2\delta}{n^2}} = 1 + \frac{2\delta}{n^2}$$

donc

$$z = n + \delta = e^{2-\frac{2}{n}} \left(1 - \frac{2\delta}{n^2}\right) = e^{\frac{2n-2}{n}} - \frac{2\delta \cdot e^{\frac{2n-2}{n}}}{n^2}$$

donc

$$z = n + \delta = e^{2-\frac{2}{n}} \left(1 + \frac{2\delta}{n^2}\right) = e^{\frac{2n-2}{n}} + \frac{2\delta \cdot e^{\frac{2n-2}{n}}}{n^2}$$

d'où

$$\delta \left(1 + \frac{2e^{\frac{2n-2}{n}}}{n^2}\right) = e^{\frac{2n-2}{n}} - n$$

d'où

$$\delta \left(1 - \frac{2e^{\frac{2n-2}{n}}}{n^2}\right) = e^{\frac{2n-2}{n}} - n$$

puis

$$\delta = \frac{e^{\frac{2n-2}{n}} - n}{1 + \frac{2e^{\frac{2n-2}{n}}}{n^2}} = n^2 \frac{e^{\frac{2n-2}{n}} - n}{2e^{\frac{2n-2}{n}} + n^2} \quad (ii)$$

puis

$$\delta = \frac{e^{\frac{2n-2}{n}} - n}{1 - \frac{2e^{\frac{2n-2}{n}}}{n^2}} = n^2 \frac{e^{\frac{2n-2}{n}} - n}{n^2 - 2e^{\frac{2n-2}{n}}} \quad (ii)$$

En substituant 5 à n ,

$$\delta = 25 \cdot \frac{e^{8/5} - 5}{2e^{8/5} + 25}$$

En prenant $e = 2,71828$,

$$\delta = -0,03364$$

d'où, nouvelle valeur approchée de z ,
 $n = 4,96636$
 qui, réinjectée dans (ii), donne

$$\delta = -0,019088$$

donnant pour valeur approchée de z ,

$$z = 4,94727$$

$$\delta = 25 \cdot \frac{e^{8/5} - 5}{25 - 2e^{8/5}}$$

$$\delta = -0,07780$$

d'où, nouvelle valeur approchée de z ,
 $n = 4,92220$
 qui, réinjectée dans (ii), donne

$$\delta = -0,00065$$

donnant pour valeur approchée de z ,

$$z = 4,92154$$

Les calculs précédents effectués, en utilisant dans (ii), la fonction exponentielle à la place des puissances de 2,71828 donnent successivement

$$\delta = -0,07779 \quad \text{puis } n = 4,92221 \quad \text{puis } \delta = -0,00065$$

et enfin $z = 4,92155$

qui ne diffère de la valeur précédemment trouvée, après correction, que de 10^{-5} .

Cinquième phase : Détermination de la valeur optimum de s .

Sachant que $z = t^3$ et $t = \frac{1}{\cos s/2}$ alors $t = \sqrt[3]{z}$ puis $\cos s/2 = \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ d'où $s/2 = \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$

Donc $s = 2 \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$, ce qui donne pour valeur approchée de l'angle ABM optimum

$$s \approx 2 \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{4,94727}}$$

$$\approx 1,88721 \text{ radians soit } 108^\circ 7' 45''$$

$$s \approx 2 \arccos \frac{1}{\sqrt[3]{4,92154}}$$

$$\approx 1,88469 \text{ radians soit } 107^\circ 59' 4''$$

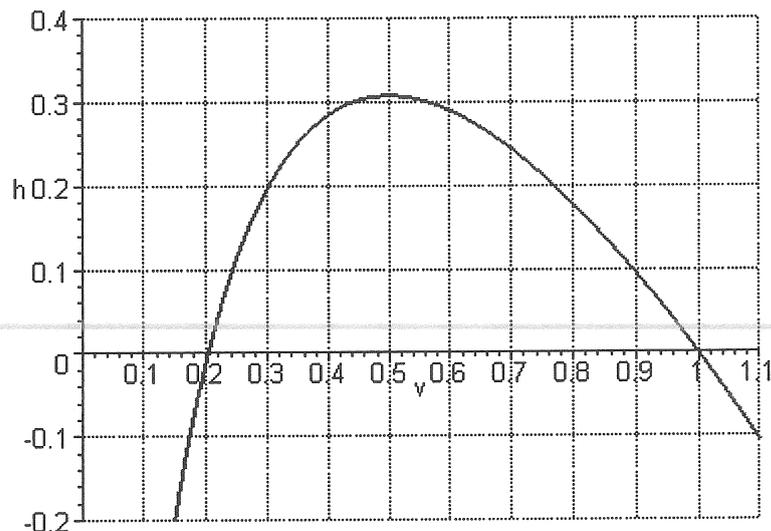
L'insatisfaction de Fresnel quant au résultat qu'il obtient et qu'il juge éloigné de son attente lui fait supputer « *quelque erreur dans le calcul* », ce qui le conduit à proposer le

CALCUL D'UNE NOUVELLE FORMULE D'APPROXIMATION POUR RESOUDRE L'EQUATION

$$\ln z = 2 - \frac{2}{z}$$

On pose $z = \frac{1}{v}$ soit $v = \frac{1}{z}$ et l'équation devient $\ln \frac{1}{v} = 2 - 2v$ soit $\ln v = 2v - 2$ (iii).

La fonction h définie par $h(v) = \ln v - 2v + 2$, représentée ci-dessous sur $[0 ; 1,1]$, s'annule en 1, valeur proscrite, et en v_0 , compris entre 0,2 et 0,22.



Par passage à l'exponentielle dans (iii), $v = e^{2v-2} = \frac{e^{2v}}{e^2}$ soit enfin $ve^2 = e^{2v}$ (iv).

Posant $v = n + \delta$, δ voisin de 0, il vient : $ne^2 + \delta e^2 = e^{2n+2\delta} = e^{2n} \cdot e^{2\delta}$
 or $e^{2\delta} = 1 + 2\delta + \dots$, donc en tronquant à la première puissance de δ , il vient

$$ne^2 + \delta e^2 = e^{2n} \cdot (1 + 2\delta) = ne^2 + \delta e^2 = e^{2n} + \delta \cdot 2e^{2n}$$

$$\text{d'où } \delta(e^2 - 2e^{2n}) = e^{2n} - ne^2$$

$$\text{donc } \delta = \frac{e^{2n} - ne^2}{e^2 - 2e^{2n}} = \frac{e^{2n-2} - n}{1 - 2e^{2n-2}} = \frac{n - e^{2n-2}}{2e^{2n-2} - 1} = \frac{ne^{2-2n} - 1}{2 - e^{2-2n}} \quad (\text{v})$$

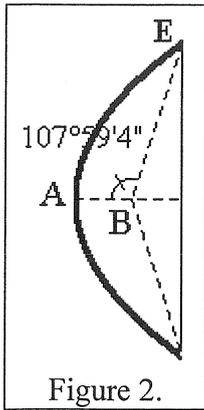
Prenant $n = 0,2 = \frac{1}{5}$, il vient $2 - 2n = \frac{8}{5}$ puis $\delta = \frac{\frac{1}{5}e^{8/5} - 1}{2 - e^{8/5}} = \frac{0,046972906}{14,76513547} = 0,003181339362$

d'où la nouvelle valeur de n , $n' = 0,2031813394$ qui, réinjectée dans (v), donne :

$$\delta' = 0,000006897 \text{ et enfin } v = \mathbf{0,20318823}.$$

Sachant que $v = \frac{1}{z}$, $z = t^3$ et $t = \frac{1}{\cos s/2}$

$$\text{alors } z = \frac{1}{v}, t = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\frac{1}{v}} \text{ puis } \cos s/2 = \frac{1}{t} = \sqrt[3]{v} \text{ d'où } s/2 = \arccos \sqrt[3]{v}$$



Donc $s = 2 \arccos \sqrt[3]{v}$, ce qui donne pour valeur approchée de l'angle \widehat{ABM} optimum, \widehat{ABE} sur la figure 2.

$$s = 2 \arccos \sqrt[3]{0,203188}$$

$$\approx 1,88469 \text{ radians soit } 107^\circ 59' 4''$$

valeur identique à celle trouvée par la première méthode, après correction.

CALCUL COMPARATIF DE L'EFFET UTILE POUR LES VALEURS SUIVANTES DE s :

$$90^\circ, \quad 107^\circ 59' 4'' \quad \text{et} \quad 120^\circ$$

En fait, Fresnel prend pour mesure de l'effet utile $\frac{\ln^2 t}{t^3 - 1}$, où $t = \frac{1}{\cos s/2}$, qui est proportionnel

au carré de l'effet utile ; en outre il y remplace le logarithme népérien par le logarithme décimal ou *tabulaire*. Ce changement, destiné à faciliter les calculs numériques pour lesquels l'outil le plus efficace est à cette époque la table établie sur le logarithme décimal, n'affecte en rien les résultats sur les taux ; en revanche, l'emploi du carré de l'effet utile n'est pas sans conséquence sur ces résultats, puisqu'il en double approximativement la valeur.

Toutefois, les moyens de calcul disponibles aujourd'hui permettant de calculer aussi aisément avec le logarithme népérien qu'avec le logarithme décimal, cette étude comparative des effets utiles sera effectuée en utilisant le logarithme népérien et portera sur le carré de l'effet utile, comme le fit Fresnel, et sur l'effet utile lui-même.

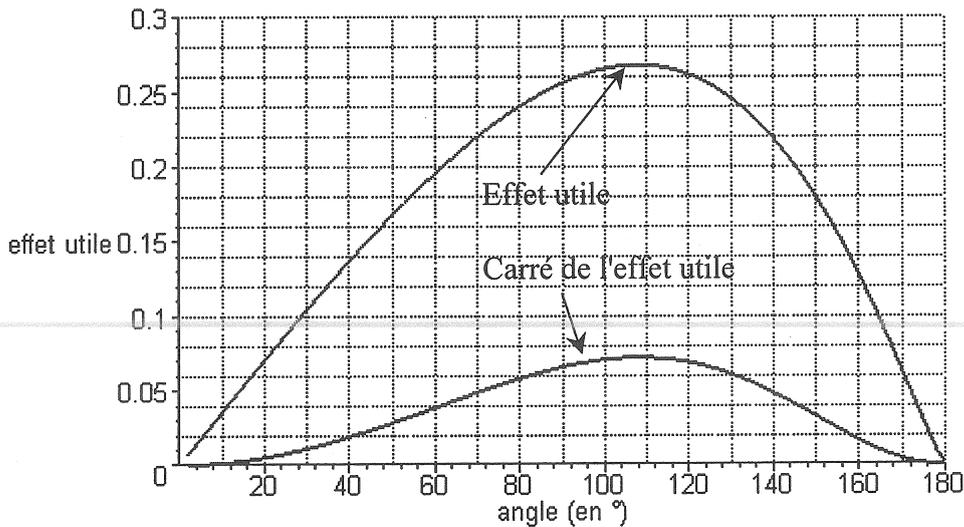
La fonction f définie par $f(t) = \frac{\ln^2 t}{t^3 - 1}$, où $t = \frac{1}{\cos s/2}$, est proportionnelle au carré de l'effet utile, tandis que la fonction \sqrt{f} est proportionnelle à l'effet utile.

Expression de f en fonction de s .

$$f(t) = \frac{\ln^2 t}{t^3 - 1} \text{ et } t = \frac{1}{\cos s/2} \Rightarrow f(t) = f_1(s) = \frac{\ln^2 \frac{1}{\cos s/2}}{\frac{1}{\cos^3 s/2} - 1} = \frac{(-\ln \cos s/2)^2}{\frac{1 - \cos^3 s/2}{\cos^3 s/2}} = \frac{\cos^3 s/2 \cdot \ln^2 (\cos s/2)}{1 - \cos^3 s/2}$$

| s | t | $f(t)$ | $\sqrt{f(t)}$ |
|---------------------|------------|---------|---------------|
| $107^\circ 59' 4''$ | 1,68117 | 0,07193 | 0,26821 |
| 90° | $\sqrt{2}$ | 0,06569 | 0,25630 |
| 120° | 2 | 0,06863 | 0,26198 |

Valeurs de l'effet utile en fonction de l'angle s .



Courbes de l'effet utile (en rouge) et du carré de l'effet utile (en bleu).

Fresnel évalue pour chacune des deux valeurs de 90° et 120° la perte d'efficacité par rapport à l'effet utile maximum. Il annonce pour 90° une perte de l'ordre de 10% et pour 120° , de l'ordre de 5%. Les calculs faits avec les valeurs de f du tableau ci-dessus confirment ces évaluations : en effet,

$$\frac{f(107^\circ, 9845) - f(90^\circ)}{f(107^\circ, 9845)} \approx 0,087 \quad \text{et} \quad \frac{f(107^\circ, 9845) - f(120^\circ)}{f(107^\circ, 9845)} \approx 0,046.$$

Toutefois ces résultats effectués avec le carré de l'effet utile surestiment les pertes puisque les mêmes calculs faits avec \sqrt{f} , qui mesure vraiment l'effet utile, donnent pour 90° , 0,044 et pour 120° , 0,023, soit, respectivement moins de 5% et de 2,5%.

Fresnel examine dans un second temps, la question de l'optimisation de l'effet utile en supposant constant le diamètre de base de la calotte de parabolôïde.

2^e PROBLÈME.

Déterminer la profondeur la plus avantageuse d'un réflecteur dont l'ouverture est donnée.

Première phase : Condition de maximisation de l'effet utile.

Reprenant les formules établies pour l'effet utile et l'ordonnée d'un point de la parabole de profil en fonction de l'angle : $U = -p \ln(\cos s/2)$ et $y = \frac{p \sin s/2}{2 \cos s/2} = \frac{p}{2} \tan s/2$

et notant λ le diamètre d'ouverture du réflecteur, il vient : $\lambda = 2y = p \tan s/2$ d'où $p = \frac{\lambda}{\tan s/2}$

$$\text{puis } U = -\lambda \frac{\ln(\cos s/2)}{\tan s/2} = \lambda f(s) \quad \text{où } f(s) = -\frac{\ln(\cos s/2)}{\tan s/2} = -\cot s/2 \cdot \ln(\cos s/2)$$

La fonction dérivée de la fonction cotangente (\cot) étant $-\frac{1}{\sin^2}$, la fonction dérivée de f est

$$\text{définie par : } f'(s) = -\left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 s/2} \ln(\cos s/2) + \cot s/2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{\sin s/2}{\cos^2 s/2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(\cos s/2)}{\sin^2 s/2} + 1 \right)$$

Deuxième phase : Résolution de $f'(s) = 0$.

$$f'(s) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\cos \frac{s}{2}\right)}{\sin^2 \frac{s}{2}} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\cos \frac{s}{2}\right) = -\sin^2 \frac{s}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\cos \frac{s}{2}\right) = -1 + \cos^2 \frac{s}{2} \quad (\text{vi})$$

Posant $z = \cos \frac{s}{2}$

$$(\text{vi}) \Leftrightarrow \ln z = z^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow z = e^{z^2 - 1} \quad (\text{vii})$$

La résolution directe à l'aide du logiciel Maple V de l'équation $\ln z - z^2 + 1 = 0$, comme la résolution par la méthode de Newton-Raphson, donne, hors la solution évidente 1,

$$z = 0,450\,763\,6521$$

puis $s = 2\arccos z = 2,206\,351\,354$ radians soit $126^\circ 24' 52'',6$

Résolution approchée de (vii).

Posant $z = n + \delta$, δ étant petit par rapport à n , $z^2 = n^2 + 2n\delta + \delta^2 \approx n^2 + 2n\delta$, δ^2 étant négligeable.

L'équation (vii) devient $n + \delta = e^{n^2 + 2n\delta - 1} = e^{n^2 - 1} \cdot e^{2n\delta}$.

Or, au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \dots$, en négligeant les termes après la première puissance,

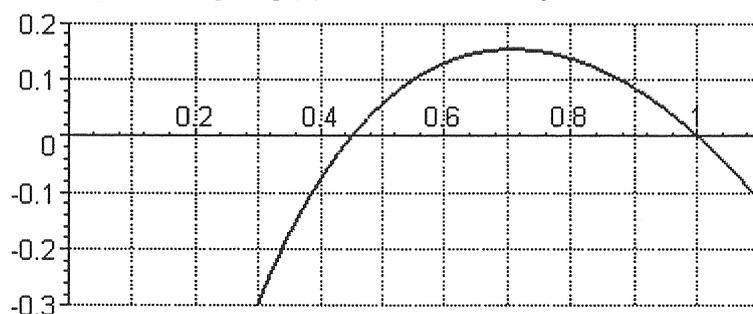
alors l'équation devient : $n + \delta = e^{n^2 - 1} (1 + 2n\delta) = e^{n^2 - 1} + 2e^{n^2 - 1} n\delta$

d'où $\delta(1 - 2e^{n^2 - 1} n) = e^{n^2 - 1} - n$

puis

$$\delta = \frac{e^{n^2 - 1} - n}{1 - 2e^{n^2 - 1} n} = \frac{1 - ne^{1 - n^2}}{e^{1 - n^2} - 2n}$$

La courbe de la fonction g définie par $g(z) = \ln z - z^2 + 1$, figurant ci-dessous, donne



qui amène à $n = 0,45$

Fresnel en déduit après une itération, avec $e = 2,71828$,

$$\delta = \frac{0,001008}{1,31998} = 0,00076365 \text{ puis } z = 0,45076365$$

et enfin $s = 126^\circ 24' 52''$.

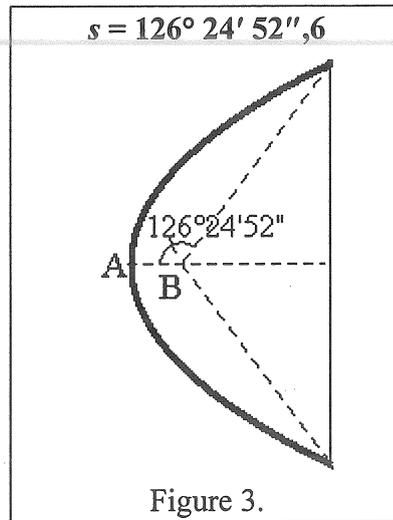
Les mêmes calculs effectués avec machine donnent :

- en utilisant la fonction exponentielle
 $\delta = 0,00076303$ et $z = 0,45076303$, à la première itération

- puis $\delta = 0,00000062$ et $z = 0,45076365$, à la deuxième itération
 en utilisant $e = 2,71828$,
 $\delta = 0,00076343$ et $z = 0,45076343$, à la première itération
 puis $\delta = 0,00000062$ et $z = 0,45076406$, à la deuxième itération

Dans les deux cas, la troisième itération donne : $\delta = 0$.

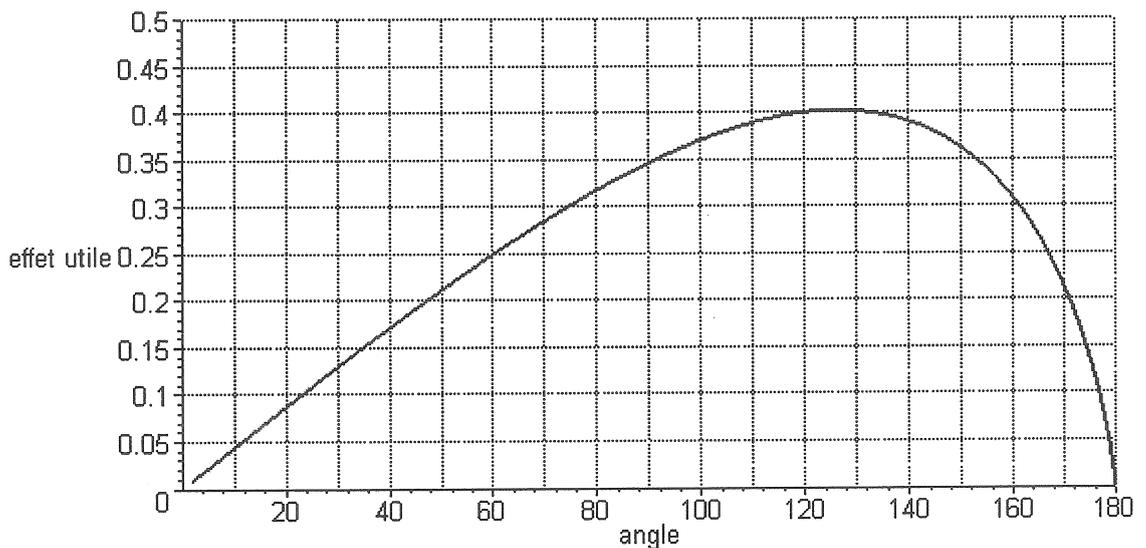
Toutefois tous les résultats obtenus ci-dessus produisent la même valeur pour s , à une demie seconde près, à savoir



Troisième phase : Évaluation comparative de l'effet utile.

L'effet utile U est mesuré par la fonction f définie par : $f(s) = -\cot \frac{s}{2} \cdot \ln \left(\cos \frac{s}{2} \right)$.

La courbe représentative f sur $[0 ; 180]$ figure ci-dessous.



Valeurs de l'effet utile en fonction de l'angle s .

| s | $f(s)$ |
|----------------------|---------|
| $126^{\circ}24'52''$ | 0,40237 |
| 120° | 0,40019 |
| 135° | 0,39787 |
| 90° | 0,34657 |
| $107^{\circ}59'4''$ | 0,38440 |

Perte relative d'efficacité de l'effet utile en fonction de l'angle.

| s | $\frac{f(s) - f(126^\circ 24' 52'')}{f(126^\circ 24' 52'')}$ | |
|----------------------|--|-----------|
| $126^\circ 24' 52''$ | 0,00000 | — |
| 120° | 0,00542 | $< 1/184$ |
| 135° | 0,01118 | $< 1/89$ |
| 90° | 0,13867 | $< 1/7$ |
| $107^\circ 59' 4''$ | 0,04465 | $< 1/22$ |

Ainsi, pour un angle de $107^\circ 59' 4''$, correspondant au maximum d'effet utile avec une aire fixée, la perte d'efficacité est inférieure à $1/20$.

Quatrième phase : Évaluation comparative des aires du réflecteur.

L'aire du réflecteur est donnée, en fonction de l'angle s et du paramètre p , par

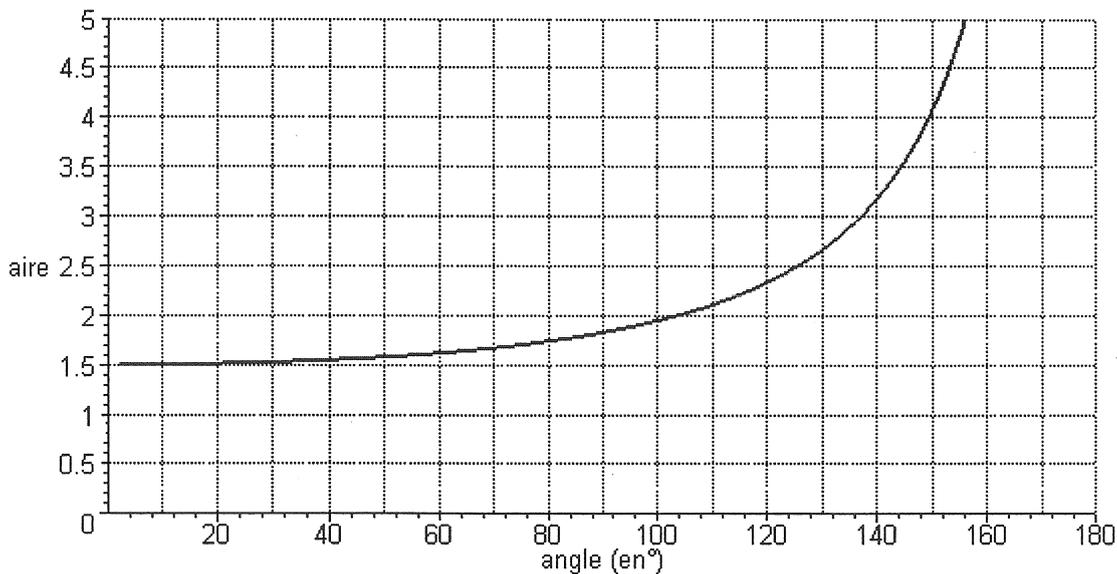
$$A = \frac{\pi}{6} p^2 \left(\frac{1}{\cos^3 s/2} - 1 \right) \text{ et le paramètre par } p = \frac{\lambda}{\tan s/2} \text{ si bien que l'aire s'exprime en fonction de}$$

l'angle s par

$$A(s) = \frac{\pi}{6} \lambda^2 \left(\frac{1}{\cos s/2 \cdot \sin^2 s/2} - \cot s/2 \right)$$

$$\text{On pose } a(s) = \frac{1}{\cos s/2 \cdot \sin^2 s/2} - \cot s/2.$$

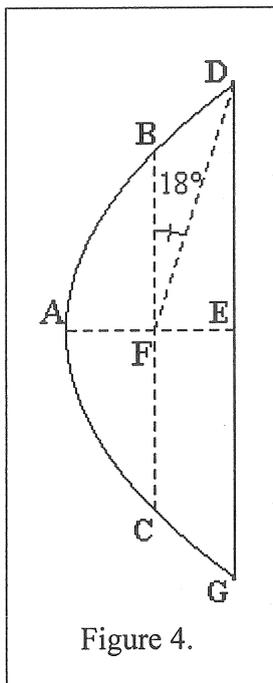
Courbe représentative de a . Avec $\lim_{s \rightarrow 180} a(s) = +\infty$



**Aire du réflecteur pour diverses valeurs de s
et variation relative à l'aire pour $126^{\circ}24'52''$.**

| s | $a(s)$ | $\frac{a(s) - a(126^{\circ}24'52'')}{a(126^{\circ}24'52'')}$ | |
|----------------------|---------|--|----------------|
| $126^{\circ}24'52''$ | 2,52916 | — | — |
| 120° | 2,33333 | 0,07743 | $\approx 1/12$ |
| 135° | 2,88989 | - 0,14263 | $\approx -1/8$ |
| 90° | 1,82843 | 0,27706 | $\approx 1/3$ |
| $107^{\circ}59'4''$ | 2,07122 | 0,18782 | $\approx 1/5$ |

Donc, pour un angle de $107^{\circ}59'04''$, soit près de 108° , le gain de surface du réflecteur, par rapport à un angle de $126^{\circ}24'52''$, est d'environ $1/5$ alors que la perte d'efficacité n'est que d'environ $1/22$. Cet avantage économique sur l'aire détermine Fresnel à choisir l'angle de $107^{\circ}59'4''$ comme le montre sa note à l'ingénieur opticien Gambey, pressenti pour la fabrication de réflecteurs paraboliques. Dans cette note, Fresnel lui indique les dimensions à donner à ces réflecteurs.



Données :

$$\widehat{BFD} = 18^{\circ} \text{ donc } \widehat{AFD} = s = 108^{\circ}$$

$$DG = \lambda = 650\text{mm}$$

Il s'en déduit :

$$BC = p = \frac{\lambda}{\tan \frac{s}{2}} \approx 472,3\text{mm}$$

$$AF = \frac{p}{4} \approx 118,1\text{mm}$$

$$FE = \frac{\lambda}{2} \cot(180^{\circ} - s) \approx 105,6\text{mm}$$

$$AE = \frac{\lambda}{4} \tan \frac{s}{2} \approx 223,7\text{mm}$$

et l'aire

$$\mathcal{A}(s) = \frac{\pi}{6} \lambda^2 \left(\frac{1}{\cos \frac{s}{2} \cdot \sin^2 \frac{s}{2}} - \cot \frac{s}{2} \right) \approx 0,4583\text{m}^2$$

Tout ce travail n'aura pourtant aucune suite concrète puisque, pendant les longues discussions que nécessitera l'établissement du contrat entre M. Gambey et la puissance publique, Fresnel étudiera le remplacement des réflecteurs par des lentilles et inventera la lentille à échelons, dite depuis *de Fresnel*, dispositif qui équipera et équipe encore aujourd'hui les phares de mer et autres systèmes d'éclairage.