QUELQUES RELATIONS HISTORIQUES ENTRE MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE : ATTENDUES, INATTENDUES, AD HOC, ADEQUATES...

Patrice BAILHACHE, Centre François Viète, Université de Nantes

Résumé

Certaines relations entre mathématiques et physique sont "attendues", qu'elles soient exactes ou fausses, comme par exemple la "loi de la dynamique" chez Aristote, la loi des gaz parfaits... D'autres sont au contraire inattendues et ne sont découvertes qu'avec peine ou après des détours ; les lois de la transformation relativiste des composantes du champ électromagnétique peuvent sans doute être rangées dans cette catégorie. D'autres lois ou théorèmes physiques peuvent aussi surprendre et révéler ainsi des rapports inattendus : telles apparaissent, au moins à première vue, les lois établies par des considérations dimensionnelles. D'autres relations, enfin, ne sont souvent pas loin d'être purement ad hoc... pour s'épanouir ensuite en de merveilleuses découvertes ; la manière même de "fonder" la nature quantique de la physique peut donner cette impression. Mais à force de travail de compréhension, en définitive, toute relation entre mathématiques et physique devrait aboutir à l'adéquation.

Remarques épistémologiques préliminaires

La croyance ou la confiance en l'utilité des mathématiques pour la physique est inégalement perçue selon les savants ou philosophes. Il est d'usage de rapporter à Galilée l'expression d'une telle confiance :

> La philosophie est écrite dans ce très grand livre qui se tient constamment ouvert devant les yeux (je veux dire l'Univers), mais elle ne peut se saisir si tout d'abord on ne se saisit point de la langue et si on ignore les caractères dans lesquels elle est écrite. Cette philosophie, elle est écrite en langue mathématique ; ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques [...], (Galilée, *L'Essayeur*)

Il est bien clair toutefois que Galilée n'est pas le premier à utiliser les mathématiques dans des questions de physique ; bien avant lui, tous les "mécaniciens" antiques, par exemple Archimède, le faisaient aussi, même s'ils considéraient leurs réflexions comme appartenant plus au domaine mathématique qu'au domaine physique.

Mais l'usage des mathématiques en physique se multipliant et se compliquant, l'adéquation des deux domaines apparaissait de plus en plus miraculeuse. Le philosophe Kant est sans doute l'un des premiers à avoir cherché à résoudre cette question difficile autrement que d'une manière purement dogmatique. Selon lui, c'est parce que notre esprit, riche de toute sa structure a priori (et donc des mathématiques), construit la science en s'appliquant lui-même aux données de l'expérience que mathématiques et physique font si bon ménage, ce qu'il dit en ces termes :

> Si extravagant et si absurde qu'il semble donc de dire que l'entendement est lui-même la source des lois de la nature, et par conséquent de l'unité formelle de la nature, une telle assertion est cependant tout à fait exacte et conforme à l'objet, c'est-à-dire à l'expérience. (*Critique de la raison pure*, PUF, p. 143)

C'est ce que j'appelle le concept kantien de *nature conciliante*. Cela n'est cependant pas, semble-t-il, la conception la plus commune aujourd'hui. Car l'implication des mathématiques dans les sciences de la nature est devenue si profonde et si complexe, que le sentiment de miracle paraît avoir repris le dessus. Ainsi Einstein écrit-il :

> Ce qu'il y a de plus incompréhensible dans l'Univers, c'est qu'il soit compréhensible.

Une relation mathématiques-physique attendue mais fausse : la loi de la dynamique d'Aristote. Mathématiques des lois empiriques

Dans la *Physique*, Aristote énonce diverses lois du mouvement en rapport avec sa conception de la nature : il n'y a pas de vide, il y a un haut et un bas absolus, le mouvement diffère du repos, le mouvement a besoin d'une cause pour se produire, etc. Du reste, le mouvement aristotélicien a le sens plus général de *changement*. Ainsi, le jaunissement d'une feuille à l'automne est un mouvement selon la qualité de la couleur. Concernant le mouvement proprement dit, c'est-à-dire selon le lieu, la vitesse est proportionnelle à la force. Plus exactement, voici la façon dont le Stagirite énonce cette loi :

> Le moteur meut toujours dans quelque chose et jusqu'à quelque chose. Je dis d'abord "dans quelque chose", à savoir dans le temps ; puis "jusqu'à quelque chose", à savoir selon une grandeur d'une certaine quantité ; toujours en effet en même temps il est en train et il a achevé de mouvoir ; et il y aura toujours une certaine quantité selon laquelle, et une autre dans laquelle le mouvement se sera produit.
>
> Soit donc A le moteur, B le mû, Γ la grandeur selon laquelle il est mû, et Δ le temps dans lequel il est mû. Dans un temps égal une force égale, à savoir A, mouvra la moitié de B du double de Γ, mais de Γ dans la moitié de Δ ; de cette façon, en effet, la proportion est gardée. (*Physique*, VII 249b-250a, trad. H. Carteron, Les Belles Lettres.)[1]

N'entrons pas ici dans les détails. Le "moteur", c'est la force ou ce qu'Aristote appelle ailleurs la "puissance" ; la vitesse n'est pas introduite explicitement, puisqu'il n'est question que de "grandeur" parcourue en un certain temps. L'essentiel qui m'intéresse est la raison donnée à cette loi physique, celle de la *conservation de la proportion*. Après tout, pourquoi cette proportion, pourquoi cette conservation? Il faut reconnaître que la réponse est d'autant moins évidente, pour nous hommes du XXI^{e} siècle, que nous savons bien que la loi énoncée par Aristote est fausse ; et telle qu'il la présente, sa justification semble circulaire, il y a des grandeurs en proportion parce qu'il y a proportion, comme ce somnifère endort par sa vertu dormitive. Mais bien sûr ce n'est pas ainsi qu'il faut comprendre ce texte. Quelle est la théorie mathématique sur les nombres du temps d'Aristote, sinon justement celle des proportions, élaborée par Eudoxe et dont Euclide fera plus tard le livre V de ses *Éléments*? Même si aucune référence explicite n'est faite à la théorie, il faut souligner que c'est cette notion mathématique de proportion dont Aristote dispose et dont il peut faire un usage immédiat. Et par ailleurs il est supposé que les mouvements ne se produisent pas n'importe comment, mais bien en respectant certaines règles, ici celles des proportions arithmétiques. La nature n'est pas le chaos, elle est gouvernée par des lois, celles-ci étant d'autant plus exactes que les phénomènes concernés sont de caractère d'autant plus divin : les phénomènes célestes sont les plus ordonnés, parce qu'ils sont les plus proches de Dieu. La physique d'Aristote repose sur sa métaphysique.

Cette introduction de l'ordre mathématique dans les phénomènes, encore un peu caricaturale dans la dynamique aristotélicienne, correspond en fait à une démarche "vieille comme le monde", qu'on retrouve à l'œuvre dans l'élaboration de nombreuses lois physiques, du moins les lois les plus simples ou certaines lois empiriques : la loi de la dilatation thermique, la loi des gaz parfaits, etc. Même les lois de Kepler, en particulier, peuvent être appréhendées de cette manière. Prenons la première loi, celle qui énonce que les planètes décrivent des ellipses dont le centre du Soleil occupe la place d'un des foyers. Constatant, d'après les mesures de Tycho Brahé, que les trajectoires des planètes étaient des "cercles aplatis", que pouvait dire Kepler sinon qu'il s'agissait d'ellipses? Rien d'autre, car à son époque on ne connaissait guère d'autres courbes mathématiques en forme de cercle aplati. En forçant un peu, cette remarque épistémologique aboutit à ce truisme, qu'on ne fait de la physique qu'avec les mathématiques dont on dispose...

[1] A. Stevens (Vrin, 1999, p. 265) traduit de manière plus littérale les derniers mots : "car telle sera la proportion".

Mathématisation à outrance : Euler et la musique

Je commencerai par résumer très brièvement le fondement de la théorie mathématique de Leonhard Euler sur la musique.

Par l'intermédiaire des vibrations de l'air, les sons musicaux simples produisent des *coups* réguliers sur notre tympan, dont l'impression est d'autant plus agréable que ces coups sont d'autant mieux ordonnés ou *coïncidents* (c'est la théorie dite *de la coïncidence des coups*, qui date du début du XVII^{e} siècle). Dans les *Lettres à une princesse d'Allemagne* et dans le *Tentamen theoriae musicae* (1739), Euler visualise ces coups, dans le cas des accords les plus simples *de deux sons*, par les figures suivantes (fig. 1 un seul son, fig. 2 deux sons à l'octave, fig. 3 deux sons à la quinte de l'octave, fig. 4 deux à la double octave, fig. 5 deux sons à la quinte) :

Fig. 1

Fig. 2

Fig 3

Fig. 4

Fig. 5

Il s'agit alors de *classer* selon leur degré de douceur les consonances produites par deux sons. Euler procède de la manière suivante.

— Une note unique, ou deux notes à l'unisson, (fig. 1) donne l'ordre le plus simple. Il répond au rapport 1:1 et correspond au *premier degré de douceur*.

— Le rapport 1:2, qui est celui de l'octave (fig. 2), donne l'ordre le plus simple après celui de l'unisson : c'est le deuxième degré de douceur.

— Les rapports 1:3 et 1:4 sont assez simples (fig. 3 et 4) ; le premier (celui de la quinte de l'octave supérieure) comporte des nombres plus petits, mais le deuxième est double de la proportion double (c'est la double octave) donc facile à percevoir. Ils sont regroupés dans le même degré de douceur : le troisième.

— Euler attache ensuite le degré $n+1$ au rapport $1:2^n$, chaque puissance de 2 incrémentant le degré d'une unité.

Remarquant alors, que 1:5 doit être plus complexe que 1:8 ($=1:2^3$), lequel a le degré 4, Euler lui attribue le degré 5 et *en déduit par induction* que pour p premier $1:p$ est de degré p. Ensuite, cette fois pour p quelconque :

> [...] si le rapport 1:p appartient au degré dont l'indice est m, celui de 1 à 2p appartient au degré m+1, celui de 1 à 4p au degré m+2, et en général le rapport 1 à 2^np au degré m+n ; car la multiplication du nombre p par 2 donne un rapport deux fois seulement plus difficile à reconnaître que le rapport de 1 à p, et n'augmente que d'une unité le nombre qui exprime le degré d'agrément de ce dernier.

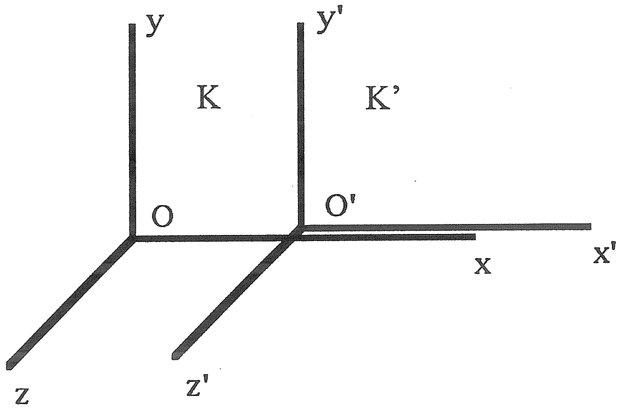
Et finalement Euler calcule le degré qu'il faut attacher à 1:*pq*, *p* et *q* étant de nouveau premiers. Cela lui donnera les degrés de douceur de tous les accords de deux sons, car *p*:*q* (par exemple 3:2 pour la quinte, 4:3 pour la quarte, etc.) est de la même complexité que 1:*pq* et l'on peut ensuite étendre sans difficulté aux cas de nombres qui ne sont pas premiers :

> On détermine de la même manière le degré d'agrément du rapport 1:pq, en supposant que p et q soient des nombres premiers ; car de 1:p à 1:pq il y a la même différence de complexité que de 1:1 à 1:q ; par conséquent le degré d'agrément de 1:pq doit former avec les degrés 1, p et q une proportion arithmétique ; il sera donc p+q-1.

L'"outrance" mathématique se développe à partir de là, Euler, dans le *Tentamen*, dressant de très nombreux et copieux tableaux, classant non seulement les accords de deux sons, mais aussi ceux de trois, quatre… sons, puis les successions d'accords, les gammes, les morceaux de musiques eux-mêmes! Mais ce caractère outrancier se constate déjà dans la simple formule *p*+*q*-1. Car enfin, ce résultat était directement accessible, d'une façon beaucoup plus simple et beaucoup plus rigoureuse. Il suffisait pour cela de compter les *coups* d'une période en tenant compte des coïncidences. Par exemple, dans la quinte la période contient 3 plus 2 coups, dont aucun ne coïncide sauf les premiers de chaque son (voir la fig. 5). La coïncidence fait qu'on en compte un de trop lorsqu'on ajoute 3 et 2 ; il y a donc en tout 4 coups par période. D'où plus généralement *p*+*q*-1[2].

Le champ électromagnétique en relativité restreinte : une adéquation mathématiques-physique réussie

Commençons par quelques rappels indispensables. En relativité restreinte, on considère deux repères galiléens (c'est-à-dire des repères dans lesquels le principe de l'inertie s'applique) en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre ($OO' = vt$) :



Le passage d'un repère à l'autre se fait par la *transformation de Lorentz* :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt)$$

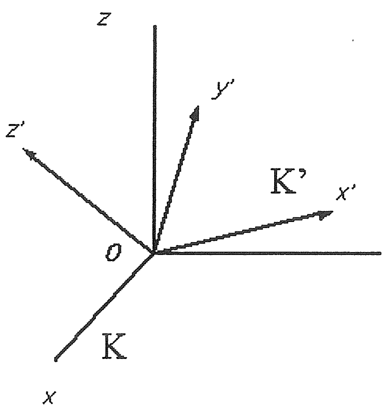
$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = (t - \frac{v}{c^2}x)$$

Moyennant la *notation de Minkowski* : $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ ($i^2 = -1$), on montre sans difficulté que cette transformation est celle d'une rotation dans l'espace-temps à quatre dimensions.

[2] Le raisonnement d'Euler a toutefois l'avantage de distinguer les cas où les nombres sont premiers de ceux où ils ne le sont pas. A taille à peu près égale, l'oreille (c'est-à-dire l'esprit musical) comprend plus facilement un nombre décomposable en facteurs premiers qu'un nombre premier.



En effet, dans le cas de la rotation à trois dimensions :

$$x' = b_{xx}\,x + b_{xy}\,y + b_{xz}\,z$$
$$y' = b_{yx}\,x + b_{yy}\,y + b_{yz}\,z$$
$$z' = b_{zx}\,x + b_{zy}\,y + b_{zz}\,z$$

où les b_{jk} sont les cosinus des angles des axes.
Avec la notation de Minkowski ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) et la *convention d'Einstein*, on réduit ces écritures à :

$$x'_\mu = b_{\mu\alpha} x_\alpha \qquad \text{T1}$$

La transformation de Lorentz a bien cette forme dans la notation de Minkowski.

Vecteurs, tenseurs, invariants

Soit un phénomène physique qui mesuré dans K produit trois nombres A_1, A_2, A_3 et mesuré dans K' trois autres A'_1, A'_2, A'_3. Si ces nombres respectent la transformation T1, ils forment un *vecteur* (comme les x et les x' eux-mêmes).
De même, si neuf nombres A_{11}, $A_{12}, \ldots$, A_{33} dans K et neuf autres $A'_{11}, A'_{12}, \ldots, A'_{33}$ pour le même phénomène dans K' respectent la transformation :

$$A'_{\mu\nu} = b_{\mu\alpha} b_{\nu\beta} A_{\alpha\beta} \qquad \text{T2}$$

ils représentent une entité indépendante du repère, par exemple la quadrique d'équation $A'_{\mu\nu} x'_\mu x'_\nu = 1$ (cette équation se conserve entre K et K' par la transformation T2). Les $A_{\mu\nu}$ forment un *tenseur* (d'ordre 2). La généralisation est aisée à tout ordre supérieur à 2. Un vecteur apparaît comme un tenseur d'ordre 1, un invariant comme un tenseur d'ordre 0.

Deux exemples bien connus d'application du formalisme

1) Le vecteur impulsion-énergie

Celui-ci est très connu et très simple, je n'insisterai donc pas. On définit le vecteur par ses quatre composantes, par exemple dans le cas d'une masse ponctuelle attachée au repère K'. On mesure dans le repère K :

$P_1 = mv$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, $P_4 = \dfrac{i}{c} mc^2$, avec $m = m_0 \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ (m_0 étant la *masse au repos*).

Dans le repère K' *on mesure directement et on calcule à partir de P_μ grâce à la transformation T1* :

$P'_1 = 0$, $P'_2 = 0$, $P'_3 = 0$, $P'_4 = \dfrac{i}{c} m_0 c^2$.

L'identité des résultats dans ces deux manières de les obtenir constitue la preuve que les quatre nombres mesurés sont bien les composantes d'un vecteur de l'espace-temps.

2) Le tenseur du champ électromagnétique

Dans le mémoire fondateur de 1905, Einstein avait retrouvé, par une voie complètement différente, les formules de transformation des champs établies dès 1904 par Lorentz :
$\vec{E}$ champ électrique, $\vec{H}$ champ magnétique.

$$E'_x = E_x \qquad\qquad H'_x = H_x$$

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\left(E_y - \frac{v}{c} H_z\right) \qquad\qquad H'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\left(H_y + \frac{v}{c} E_z\right)$$

$$E'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(E_z + \frac{v}{c}H_y) \qquad\qquad H'_z = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(H_z - \frac{v}{c}E_y)$$

(La méthode d'Einstein pour trouver ces formules est semblable à celle qui permet de justifier le caractère vectoriel du vecteur impulsion-énergie. Cf. ci-dessous.)

Considérons un tenseur $C_{\mu\nu}$ antisymétrique, c'est-à-dire :

$$C_{\mu\nu} = -C_{\nu\mu}$$

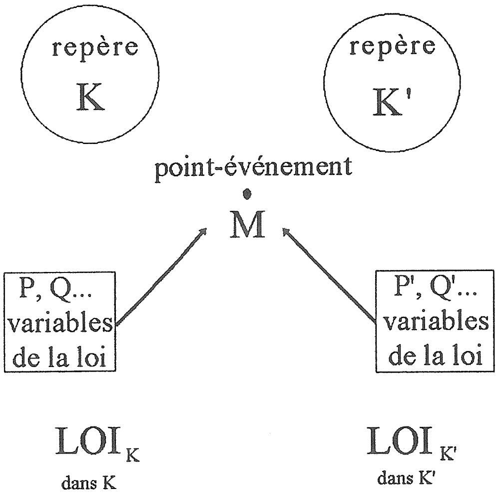
(On vérifie que cette égalité se conserve dans un changement de repère, d'où la pertinence de l'antisymétrie.)
Combien a-t-il de composantes indépendantes? Les diagonales sont nulles, il reste donc 16 – 4 = 12 composantes, opposées deux à deux, donc finalement 6. C'est deux fois trois : un tel tenseur se présente donc comme un bon candidat pour regrouper en une même entité les composantes des deux champs. Et en effet, en posant :

$$C_{23} = H_x,\ C_{31} = H_y,\ C_{12} = H_z \quad C_{41} = \mathrm{i}\ E_x,\ C_{42} = \mathrm{i}\ E_y,\ C_{43} = \mathrm{i}\ E_z,$$

les formules de transformation des champs sont vérifiées. Le champ électromagnétique est ainsi beaucoup mieux formalisé par ce tenseur quadridimensionnel que par le couple de deux vecteurs tridimensionnels. On doit même dire que le calcul tensoriel est le bon ingrédient mathématique pour parler comme il faut du champ électromagnétique. Pour autant que nous disposons de liberté pour créer des théories, le tenseur électromagnétique est beaucoup plus *vrai* que le couple champ électrique — champ magnétique.

Il est sans doute important d'expliciter aussi clairement que possible la méthode suivie par Einstein dans l'application du principe de relativité. Cette méthode permet de tester les expressions candidates à représenter des lois physiques théoriques. Si elles passent le test et seulement si elles le passent, alors on peut conserver ces expressions comme lois physiques ; sinon, elles n'en ont que l'apparence. Voici sous forme de diagramme l'abrégé de cette méthode.

De la transformation de Lorentz (T)[3], on déduit par le calcul différentiel la transformation des différentielles (TD), la transformation des vitesses (TV), la transformation des accélérations (TA), la transformation des dérivées partielles (TDP)...



La loi LOI_K étant posée dans K, il y a deux manières d'obtenir la loi $\mathrm{LOI}_{K'}$ dans K' :
— par le principe de relativité, en *supposant* que la LOI est bien une "vraie" loi de la nature, c'est-à-dire que sa forme est indépendante du repère ;
— en partant de LOI_K et en appliquant (T) et ses conséquences (TD), (TV), (TA), (TDP)...

Les deux résultats doivent être identiques. S'ils le sont, c'est qu'on a bien affaire à une loi indépendante du repère (une "vraie" loi) et l'identification produit en général des formules de transformation pour certaines variables intervenant dans la loi.

Dans le cas des équations de Maxwell, les variables P, Q de la loi sont $\vec{E}, \vec{H}, \rho$ et $\vec{u}$, respectivement le vecteur champ électrique, le vecteur champ magnétique, la densité de charge électrique, la vitesse des charges ; la loi est l'ensemble des quatre équations de Maxwell. Toutes ces quantités peuvent évidemment être avantageusement exprimées dans le formalisme tensoriel.

[3] Notée également ci-dessus T1.

Un exemple de relation faussement ad hoc : le spin en mécanique quantique

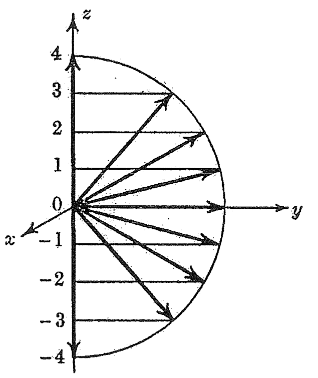
Toute la mécanique quantique, en un sens, paraît fondée sur des relations ad hoc. Car, comme on le sait, elle repose principalement sur le remplacement de grandeurs classiques par des *opérateurs*, c'est-à-dire des nombres mesurables par des fonctions opérant sur une certaine fonction censée représenter le système étudié (la *fonction d'onde*). Ainsi, dans le cas d'une particule à une dimension, la position x de la particule et son impulsion p sont remplacées par les opérateurs :

$$\hat{x} \to x$$

$$\hat{p} \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

Il en résulte notamment que les opérateurs ne commutent pas, c'est-à-dire que leur produit n'est pas le même selon l'ordre dans lequel on les applique : $[\hat{x}, \hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$

Dès lors, puisqu'on doit résoudre des équations différentielles nouvelles par rapport aux équations classiques, il n'est pas surprenant qu'une quantification apparaisse. Par exemple, l'énergie d'une particule "prisonnière" dans un puits de potentiel ne pourra prendre que certaines valeurs discrètes, bien déterminées. Cela n'est guère étonnant, puisque la "machinerie" des opérateurs a précisément été introduite à cet effet. On pourrait donc craindre que cette machinerie soit trop artificielle, mais en fait on doit considérer qu'elle possède un réel pouvoir explicatif au regard du nombre considérable de phénomènes qu'elle implique.



Semblablement, la rotation d'une particule comme l'électron autour d'un proton —c'est l'atome d'hydrogène— fait apparaître une quantification du moment angulaire (figure ci-contre). Plusieurs nombres quantiques décrivent le découpage discontinu des modes de rotations possibles de l'électron :

$n = 1, 2, 3, \ldots$

$l = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$ $\quad$ ($2l + 1$ valeurs)

Il n'est ni nécessaire ni possible ici d'entrer dans les détails. n est le nombre quantique *principal*, caractéristique de l'énergie totale de l'atome. Ce nombre, comme on le voit dans les égalités ci-dessus, fixe les valeurs possibles des deux autres : pour une énergie donnée, l'atome peut être dans un nombre fini de configurations. Celles-ci dépendent de divers facteurs, le nombre m dépend du champ magnétique appliqué (d'où son nom de nombre quantique *magnétique*).

En particulier, lorsque l'atome est dans son état d'énergie le plus faible, $n = 1$, $l = 0$ et l'on ne devrait avoir qu'une seule configuration possible : $m = 0$. Mais l'expérience en montre deux (c'est l'effet *Zeeman*). Cela voudrait donc dire que le moment angulaire devrait être associé à un nombre quantique l tel que $2l + 1 = 2$, ce qui conduirait à $l = 1/2$. Mais une valeur fractionnaire n'est pas admissible pour un nombre quantique. Que faire?

Les calculs précédents impliquaient certaines relations de commutation entre les différents moment orbitaux (selon x, selon y, selon z ou total). Laissons complètement de côté les entités précédentes et considérons les matrices suivantes (matrices de spin de Pauli) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En définissant :

$$\hat{l}_x = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_y = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_z = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

on s'aperçoit que ces opérateurs respectent les mêmes relations de commutation que celles qu'on obtenait avec les fonctions d'onde ordinaires. Et ces opérateurs, justement, conduisent bien à la valeur 2 pour $2l + 1$ (on préfère alors employer un nouveau nombre, j ; c'est le nombre quantique de spin).

Présenté de cette manière, on pourrait penser qu'il s'agit d'un vrai tour de passe-passe. On sait en fait que si l' "explication" a eu au tout départ un tel caractère ad hoc, elle l'a ensuite perdu lorsque Dirac, en 1928, a fait rentrer la théorie du spin dans celle de la mécanique quantique *relativiste*, c'est-à-dire en cherchant à concilier l'équation de Schrödinger avec la transformation de Lorentz de la relativité restreinte. Depuis, la notion de spin a encore acquis de la cohérence dans la théorie quantique des champs...

La sphère dans toutes ses dimensions : une relation mathématiques-physique inattendue[4]

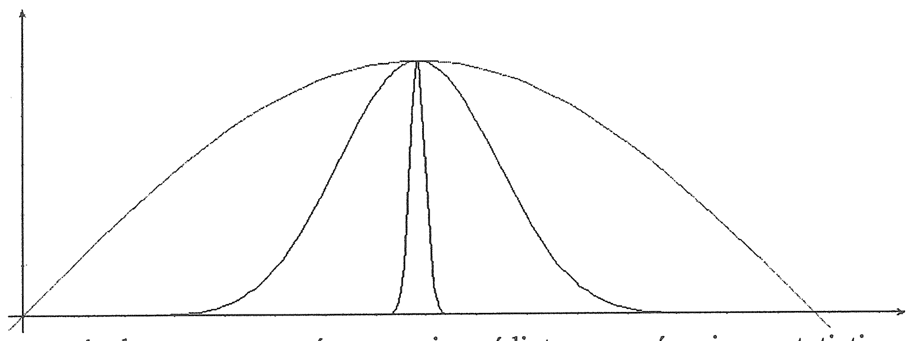
n	S^n	B^n
0	2	2
1	$2\pi = 6{,}2832$	$\pi = 3{,}14159$
2	$4\pi = 12{,}5664$	$4\pi/3 = 4{,}188$
3	$2\pi^2 = 19{,}7392$	$\pi^2/2 = 4{,}93$
4	26,3189	5,2638
5	31,0063	5,1677
6	33,0734	4,7248
7	32,4697	4,0587
8	29,6886	3,2985
9	25,5016	2,5502
...	...	...
99	10^{-39}	2×10^{-40}

A trois dimensions la *sphère* (S^2) est la surface que tout le monde on connaît, la *boule* (B^2) l'intérieur délimité par cette surface. Ces définitions s'étendent sans problème aux autres dimensions. S^1 est la circonférence, B^1 le cercle plein, S^0 est constitué de deux points, B^0 d'un segment, etc. En considérant les sphères et les boules de rayon unité, on montre que $S^{n+2} = 2\pi\ S^n/(n+1)$ et $B^n = S^n/(n+1)$. D'où le tableau des valeurs approchées de S^n et B^n :

On voit bien dans ce tableau que, si les valeurs commencent par augmenter avec le nombre des dimensions, elles diminuent ensuite, pour tendre vers zéro.

On montre aussi que $S^{n+1} = S^n \int_0^\pi \sin n\theta\, d\theta$, θ étant l'angle d'intégration sur la sphère (la relation est évidente dans le cas de S^2 et S^1).

Cela a pour conséquence que, puisque pour n grand la fonction de l'intégrale $\int_0^\pi \sin n\theta\, d\theta$ n'a de valeur significative qu'au voisinage de $\pi/2$, l' "aire" de S^n est pratiquement concentrée en son "équateur". En effet, les valeurs de $\sin n\theta$ ont cette allure (respectivement $n = 1$, 10 et 1000) :



On tire de ces résultats une conséquence immédiate en mécanique statistique. A énergie cinétique constante, la statistique d'une particule libre est caractérisée par une sphère de dimension 2 (une sphère ordinaire) dans l'*espace des phases* dont les axes de coordonnée portent les composantes en x, y, z de sa vitesse. Pour un système de n particules libres identiques, il faut

[4] Cette section est tirée de Marcel Berger *in* "La sphère sous toutes ses formes", *Dossier Pour la science*, oct./déc. 2003, p. 92-94.

prendre un espace de phase à $3n$ dimensions. Or dans une *mole*, il y a 6,022 x 10^{23} particules (nombre d'Avogadro), nombre immense. Ainsi, pour un système macroscopique :

- les fluctuations par rapport à la moyenne sont quasi nulles ;
- presque toutes les particules sont dans un état proche de la moyenne.

> "Il semble que ce soit là un principe implicitement admis dans toute théorie de mécanique statistique, écrit Marcel Berger, mais ce principe a en fait une justification mathématique, mystérieusement passée sous silence dans les ouvrages de physique." (*op. cit.*, p. 94)

On voit que cette relation entre mathématiques et physique est tout à fait inattendue, puisqu'elle a été longtemps ignorée. Et pourtant, elle ne tient qu'à des propriétés élémentaires de géométrie.

Des relations mathématiques-physique "extrapolées" : la gravitation quantique à boucles

La relativité générale relie l'espace-temps à l'énergie ou, ce qui revient au même, à la gravitation (cf. le principe de l'équivalence de la masse pesante et de la masse inerte). Cette théorie explique et gère l'espace-temps comme des quantités continues et en fonction de concepts physiques continus (positions, impulsions, énergies...). La mécanique quantique traite de concepts physiques discontinus ("quantifiés") dans un espace-temps continu. Les deux théories sont incompatibles probablement en raison de cette double différence. La théorie de la *gravitation quantique à boucles* tente de les concilier en quantifiant l'espace-temps[5].

La théorie quantique permet de définir des quanta d'énergie, mais aussi, par l'intermédiaire des autres constantes de la physique, des quanta de longueur et de temps. Ainsi la *longueur de Planck* est de l'ordre de 10^{-35} mètres et le temps de Planck de 10^{-43} secondes[6].

Il y a donc de bonnes raisons de quantifier l'espace-temps, comme le reste des grandeurs en mécanique quantique. Mais comment faire? Il faut d'abord quantifier l'espace indépendamment du temps. Cependant, si l'on garde l'espace tel qu'il est, il n'est pas possible d'empiler commodément des morceaux d'espace si celui-ci n'est pas euclidien. Aussi faut-il commencer par opérer une première traduction, dans laquelle les surfaces deviennent de lignes, les volumes des points. On obtient ainsi des *graphes* et l'on représente l'ensemble des volumes élémentaires qui sont les *briques* de l'univers par des diagrammes appelés *réseaux de spins*. La courbure de l'espace prend donc sa place dans cette représentation et puisque, comme en relativité générale, la courbure est synonyme de gravitation, ces diagrammes sont susceptibles de réaliser la synthèse de la gravitation et de la quantification.

Il faut ensuite introduire le temps, quantifié, dans les *réseaux de spins*. Pour cela, on ajoute la dimension temporelle comme une coordonnée, mais en supposant que les valeurs permises forment un ensemble discret. On obtient une *mousse de spins*. Ainsi les lignes et les nœuds d'un réseau de spins apparaissent comme des sections respectivement des surfaces bidimensionnelles et des lignes d'une mousse de spins.

Cette théorie montre une fois de plus l'effort conceptuel, ainsi que la nécessaire abstraction mathématique qu'il faut fournir pour interpréter la "nature" ; effort d'autant plus périlleux, que les expériences qui permettraient de confirmer pleinement ses hypothèses sont à présent hors de notre atteinte : par exemple, la gravitation quantique à boucle permet de retrouver ce résultat de Stephen Hawking, que les trous noirs ont une entropie proportionnelle à leur surface ; elle caractérise même

---

[5] Le terme de *gravitation quantique à boucles* vient de ce que cette théorie reprend celle dite "des cordes" et que dans le cas de la gravitation ces cordes se referment sur elles-mêmes (les *gravitons* sont des boucles). La recherche d'une théorie physique unitaire, c'est-à-dire associant en un tout cohérent relativité générale et théorie quantique du modèle "standard", n'a toujours pas abouti.

[6] Avec G constante de la gravitation, c vitesse de la lumière et h constante de Planck, on définit la longueur de Planck $\sqrt{(Gh/c3)} \approx 2 \times 10^{-35}$ mètre. En divisant cette quantité par la vitesse de la lumière, on obtient une grandeur qui a la dimension d'un temps, c'est le temps de Planck, 10^{-43} s.

de manière détaillée leur rayonnement quantique. Mais nous sommes à 16 ordres de grandeur de la possibilité de créer les micro-trous noirs qui permettraient la vérification. En revanche, d'autres conséquences semblent plus proches de notre portée.

Conclusion

D'Aristote aux scientifiques d'aujourd'hui qui tentent d'unifier la relativité générale et le *modèle standard*, la distance semble immense, les progrès inouïs. Pourtant, c'est bien de la même recherche de compréhension des phénomènes naturels par des schémas ou des hypothèses théoriques qu'il s'agit. Mais le degré de complexité est évidemment devenu aujourd'hui sans commune mesure avec ce qu'il était chez les Grecs anciens.

Cependant, le développement historique de la science nous présente de très nombreuses variations dans la nature des rapports entre mathématiques et physique, ainsi du reste que dans la manière dont les lois empiriques ou théoriques en jeu ont été découvertes ou établies. Certaines vont presque d'elles-mêmes dès lors qu'on y a pensé… et peuvent d'ailleurs être fausses (comme la loi de la dynamique aristotélicienne). D'autres paraissent plus difficiles à atteindre, car plus élaborées, plus "distantes" des phénomènes, plus théoriques. D'autres encore, l'expérience devenant en quelque sorte exigeante face aux théories censées l'interpréter, sont frappées d'un caractère ad hoc qui en affaiblit la valeur (la loi de la contraction des longueurs de Lorentz), mais il y a aussi des cas où ce caractère est trompeur : l'apparence d'artifice ne masquait en fait que de profonds changements théoriques indispensables (comme l'introduction d'une pluralité de temps en relativité, l'introduction du mécanisme des opérateurs en mécanique quantique). Les plus belles lois, les rapports les plus satisfaisants entre mathématiques et physique sont sans doute ceux qu'on a obtenus lorsque s'est établi cet équilibre, cette adéquation, qui donnent l'impression que la nature a trouvé dans telle branche des mathématiques le seul langage qui lui convenait. Ainsi en est-il peut-être du formalisme tensoriel en relativité restreinte et générale.