DE LA PHYSIQUE AUX MATHEMATIQUES : DU PROBLEME DES CORDES VIBRANTES AUX SERIES TRIGONOMETRIQUES

Hombeline Languereau, IREM de Franche-Comté

L'objectif de cet atelier est de montrer comment la mathématisation d'un problème physique (le mouvement d'une corde fixée à ses deux extrémités) a fait évoluer le concept de fonction.

Le livre de J. P. Kahane et P. G. Lemarié-Rieusset ainsi que celui de P. Dugac sont abondamment utilisé à cet effet.

Les textes étudiés sont des extraits de la *Théorie de la chaleur* de Fourier paru en 1822 ainsi que le mémoire fondamental de Dirichlet de 1829.

Cet atelier reprend une intervention effectuée lors d'un stage d'histoire des mathématiques organisé par l'IREM de Franche-Comté ; une rédaction de cet exposé ainsi que les textes originaux étudiés sont disponibles sur le site de l'IREM.[1]

Avant Fourier : Le problème des cordes vibrantes

a. Mise en équation du mouvement

Le problème des cordes vibrantes est celui de la description mathématique du mouvement d'une corde fixée à ses extrémités, la corde d'un violon par exemple. Jean Bernoulli (1667-1748) l'aborde dès 1727 avec les méthodes de la mécanique newtonienne. Dans un cadre atomiste, le mouvement de la corde est régi par un système d'équations $f = m\gamma$, chaque équation décrivant le mouvement d'un des corpuscules composant la corde bien qu'elle soit un « objet » continu dont on connaît seulement la masse totale M et la longueur l qui sont invariantes. Bernoulli discrétise ainsi le problème en assimilant la corde à un fil élastique sans épaisseur, auquel sont suspendues n masses dont la somme vaut M. Les masses sont placées à égales distances les unes des autres. Si x_k est l'abscisse de la k-ième masse, $x_k = k/n$. Le mouvement des masses est représenté par la variation de l'ordonnée y_k.

Bernoulli démontre, que l'équation du mouvement de la masse numéro k peut s'écrire :

$$\frac{d^2y_k}{dt^2} = \left(\frac{n\gamma}{l}\right)^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

Cette discrétisation était alors classique en physique mathématique pour aborder le continu ; mais conserver un modèle discret ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants : soit la description est grossière et elle n'apporte rien, soit elle est fine et les calculs sont épouvantables. D'Alembert (1717-1783) propose en 1746 une approche qui consiste à assimiler un corpuscule à un point géométrique muni d'une masse : la corde est ainsi à la fois continue et discrète. D'Alembert effectue un découpage analogue à celui de Bernoulli, mais jusqu'à l'infini. Il note x l'abscisse d'un point quelconque de la corde, y son ordonnée, dx l' “ intervalle entre deux points ” de la corde. L'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial^2 t} = a^2\left[\frac{y(t,x+\Delta x) - 2y(t,x) + y(t,x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right]$$

En faisant tendre Δx vers 0, d'Alembert obtient l'équation des cordes vibrantes qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \;;$$

[1] Languereau Hombeline, *De la physique aux mathématiques.* In Mathématiques vivantes, n° 70, bulletin de l'IREM de Besançon, 2004 et en ligne www-irem.univ-fcomte.fr/

avec les conditions aux bornes $y(t, 0) = y(t, l) = 0$ qui expriment que la corde est fixée aux deux extrémités ($x = 0$ et $x = l$) et les égalités $y(0, x) = \square(x)$ et $\frac{\partial}{\partial t} y(0,x) = \psi(x)$ qui expriment que la forme et la vitesse sont données au temps $t = 0$.

b. Résolution mathématique de cette équation aux dérivées partielles

C'est la recherche d'une solution " générale " de l'équation $\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$ qui entraîne une longue controverse[1] entre D'Alembert, L. Euler (1707-1783) et Daniel Bernoulli.(1700 – 1782) : La corde étant à la fois discrète (succession de particules) et continue (en un seul morceau), quelles sont les fonctions y que l'on va accepter ? Les fonctions trigonométriques fournissent des solutions élémentaires ; par linéarité, l'équation des ondes admet des solutions obtenues par superposition de telles fonctions. Quelle est la signification d'une telle solution ? Les coefficients sont calculés par intégration, sans souci de convergence :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

formules qui étaient couramment utilisés au 18è siècle par Euler et A. Clairaut (1713-1765) bien avant Fourier. Elles s'obtiennent en effet immédiatement par une intégration formelle à partir de :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

D'Alembert fait intervenir à la fois des considérations mathématiques et physiques: « Lorsqu'on est une fois arrivé à l'équation $\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}$ il faut regarder le problème comme purement algébrique, faire abstraction du mouvement de la corde, et intégrer ou construire l'équation proposée comme s'il n'y avait aucun rapport. Or l'équation étant considérée sous ce point de vue, il est évident que la construction ne s'y prête pas lorsque ddy/dx^2 fait des sauts. »

c. Ce qu'est une fonction

Bien que la notion de fonction ait été dégagée dans les dernières années du 17è siècle par G. W. Leibniz (1646-1716) et les frères Bernoulli, c'est Euler qui est le premier mathématicien à construire toute l'analyse sur ce concept premier dans son *Introductio in analysin infinitorum* de 1748 : « *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.* »

Par la suite, Euler classera les fonctions en « continues » c'est-à-dire analytiques pour nous et « discontinues » ou « mixtes et irrégulières » c'est-à-dire analytiques par morceaux.

En ce qui concerne la controverse sur la nature de la somme d'une série trigonométrique, D. Bernoulli fait un raisonnement de physicien : pour lui une fonction arbitraire peut être représentée par une série trigonométrique, tandis qu'Euler, qui envisage une fonction donnée par la position quelconque d'une courbe dessinée à main levée ne peut pas imaginer que la somme d'une série trigonométrique soit aussi irrégulière ; D'Alembert, lui, considère qu'une série trigonométrique se comporte comme une série entière ; il reviendra sur la question des fonctions arbitraires dans son mémoire publié en 1761 : *Recherches sur la vibration des cordes sonores* où il avance une « raison métaphysique » qui restreint la généralité mathématique des solutions : « Le mouvement de la corde ne peut être soumis à aucun calcul analytique, ni représenté par aucune construction, quand la courbe fait saut en quelque point. » Donc si les dérivées partielles secondes n'existent pas, il n'y a pas de solution au problème. (cf ci-dessus).

---

[1]Première série d'articles en 1747-1748 ; la polémique est reprise en 1753.

Les travaux de D'Alembert amènent Euler à s'interroger sur ce qu'est une fonction arbitraire. Il accepte les fonctions continues par morceaux ; c'est ainsi qu'il écrit le 20 décembre 1763 à D'Alembert : « Il me semble que la considération de telles fonctions, qui ne sont assujetties à aucune loi de continuité, nous offre une carrière tout à fait nouvelle en analyse. » Euler donne également une définition d'une fonction continue ; il est convaincu que toute fonction continue est monotone par morceaux. Finalement, D'Alembert adopte une position intermédiaire entre celles d'Euler et de D. Bernoulli : « Il me semble que M. Euler l'a trop étendue, et que M. Bernoulli l'a trop restreinte. » Cette discussion pose, entre autres, deux questions auxquelles se sont attelés les mathématiciens du XIX^e siècle : toute fonction continue est-elle dérivable ? une fonction quelconque est-elle développable en série trigonométrique ?

Fourier : l'équation de la chaleur

D'après Kahane, la théorie des cordes vibrantes eut une influence manifeste sur Fourier. En premier lieu, l'équation des cordes vibrantes joua le rôle de paradigme pour l'équation de la chaleur. Ensuite Joseph Fourier (1768–1830) traita l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ de la même manière que D. Bernoulli l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

a. Les recherches de Fourier sur la propagation de la chaleur

Fourier qui a participé à l'expédition d'Egypte et occupé d'importantes charges administratives envoie à l'Institut en 1807 son premier mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides. Le secrétaire perpétuel, Delambre, demande à Lagrange, Laplace, Lacroix et Monge d'être rapporteurs. Lagrange s'oppose fermement à ce qu'écrit Fourier sur les séries trigonométriques et le mémoire n'est pas publié. Le même sujet étant soumis de nouveau à concours, Fourier envoie un deuxième manuscrit en septembre 1811. Les rapporteurs sont les trois mêmes L. Le prix fut attribué à Fourier mais avec des réserves : " Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface : et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur. "

Après différents incidents de parcours dus à l'instabilité politique de l'époque, Fourier est élu définitivement à l'Institut en 1817; il en devient secrétaire perpétuel cinq ans plus tard, année de la publication de son ouvrage *Théorie analytique de la chaleur.*

b. La Théorie analytique de la chaleur (1822)

Voici un extrait du discours préliminaire p. XXV : « L'ouvrage que nous publions aujourd'hui a été écrit depuis longtemps ; diverses circonstances en ont retardé et souvent interrompu l'impression. Dans cet intervalle, la science s'est enrichie d'observations importantes ; les principes de notre Analyse, que l'on n'avait pas saisis d'abord, ont été mieux connus ; on a discuté et confirmé les résultats que nous en avions déduits. Nous avons appliqué nous-même ces principes à des questions nouvelles, et changé la forme de quelques démonstrations. Les retards de la publication auront contribué à rendre l'Ouvrage plus clair et plus complet. »

En voici le plan.
Chapitre I : introduction (p. 1 à 83)
Chapitre II : Equations différentielles (p. 84 à 140)

C'est dans ce chapitre qu'apparaît p. 103 l'équation exprimant le mouvement de la chaleur dans l'intérieur d'un solide : $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$.

Chapitre III (p. 141 à 238) : Solide rectangulaire infini
Voici le détail de la composition de ce chapitre III

Résolution de $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$ dans le cas stationnaire en dimension deux qui devient $0=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$avec conditions aux limites : $v(x, \pm\pi/2) = 0$; $v(0, y) = 1$ (Fourier étalonne ses températures de 0 à 1) et $\lim\limits_{x\to\infty} v(x,y) = 0$ p. 144

Recherche d'une fonction de deux variables sous forme d'un produit de deux fonctions d'une variable, puis combinaison linéaire des fonctions trouvées (décomposition en somme de cosinus) puis recherche des coefficients en résolvant des systèmes n x n puis passage à la limite en n

§ 219 : on peut étendre les mêmes conséquences à des fonctions quelconques, même à celles qui seraient discontinues et entièrement arbitraires.

§233 : décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ;

§ 234 : introduction des bornes dans l'intégrale ; c'est une innovation de notation.

§ 235 : synthèse des résultats précédents : en particulier, à l'instar de D. Bernoulli, Fourier considère que toutes les séries trigonométriques convergent !

Chap IV : propagation de la chaleur dans une armille
Chap V : propagation de la chaleur dans une sphère solide
Chap VI : propagation de la chaleur dans un cylindre solide
Chap VII : propagation de la chaleur dans un prisme rectangulaire
Chap VIII : propagation de la chaleur dans un cube solide
Chap IX : de la diffusion de la chaleur

L'article de Dirichlet de 1829

La théorie analytique de la chaleur de Fourier présente de nombreuses lacunes sur le plan de la rigueur mathématique ; en particulier, il n'y a aucune justification de convergence des séries trigonométriques utilisées. C'est à P. G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859) que l'on doit le premier théorème rigoureux de convergence sous des hypothèses mathématiques précises. Dans son article *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, publié en français dans le journal de Crelle de janvier 1829, il énonce le théorème qui porte son nom auquel on associe habituellement le nom de Jordan : La série de Fourier de f en x converge, sous certaines conditions vers 1/2 ($f(x+0)+f(x-0)$). A la fin de l'article apparaît la célèbre fonction de Dirichlet (qui vaut c sur les rationnels et d sur les irrationnels) qui montre le degré de généralité du concept de fonction auquel était parvenu l'auteur. On ne possédait pas alors d'une théorie de l'intégration permettant d'aborder des fonctions aussi générales. Ce manque est le point de départ des recherches de B. Riemann (1826 - 1866) dans sa deuxième thèse soutenue en 1854 : reprenant l'historique du sujet, il voit clairement que pour établir une théorie satisfaisante des séries trigonométriques, il faut disposer une théorie solide de l'intégrale. Sa construction sera pourtant elle-même insuffisante et ce n'est qu'avec l'intégrale de H. Lebesgue (1875 – 1941), qu'on disposera au tout début de XX^e siècle d'une théorie permettant de traiter rigoureusement les problèmes fins de l'analyse mathématique.

Le problème de convergence ses séries trigonométriques est au cœur même du sujet, en particulier de la série de Fourier d'une fonction. Il faut tout d'abord que les intégrales qui fournissent les coefficients de Fourier aient un sens mais cela ne suffit pas ainsi la série de Fourier d'une fonction continue 2π-périodique peut diverger. Le premier contre-exemple est donné par P. Du Bois-Reymond, d'autres exemples plus simples furent produits par Fejer et Lebesgue.

L'étude de l'ensemble des points de convergence d'une série trigonométrique conduit Cantor aux débuts de la topologie de R et de la théorie des ensembles.

En 1966, Kahane et Katznelson ont montré que la série de Fourier d'une fonction continue peut diverger sur n'importe quel ensemble donné dont la mesure de Lebesgue est nulle. La même année, Lennart Carleson a montré que pour toutes les fonctions de carré intégrable sur le cercle, la série de Fourier converge presque partout. L'étude des séries de Fourier reste un domaine de recherche très actif en mathématiques. Dans ce domaine qui a nourri l'analyse mathématique pendant trois siècles, il reste encore des problèmes ouverts.

Bibliographie

Bourbaki Nicolas, *Histoire des mathématiques*, Masson, 1984.

Bruneau Michel et Didier André, *Acoustique – Propagation et production des sons* in Encyclopédie Universalis.

Dieudonne Jean, *History of fonctional analysis*, north-holland, 1981.

Dugac Pierre, *Histoire de l'analyse*, Vuibert, 2004.

Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres année 1753, Berlin 1755.

Israel Giorgo, *La mathématisation du réel*, Science ouverte, Seuil, 1996.

Journal für dir reine und andgewandle Mathematik, Crelle vierter band, Berlin 1829.

Kahane Jean-Pierre, *Séries trigonométriques*, in Encyclopédie Universalis.

Kahane Jean-Pierre, Lemarié-Rieusset Pierre-Gilles, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998

Kline Morris, *Mathematical thought from ancient to modern times,* Oxford university press, 1972.

Lebesgue Henri, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Gauthiers-Villars, 1906.

Riemann Bernard (trad. Laugel), œuvres mathématiques, Gauthiers-Villars, 1898, facsimilé. Gabay, 1990.

Annexe suite à l'article d'Hombeline Languereau

Après avoir terminé mon article, dans un tout autre objectif, j'ai ouvert la *"Théorie analytique des probabilités"* de Laplace (édition de 1812). Comme l'auteur le précise lui-même, l'ouvrage est divisé en deux livres : le premier a pour objet le calcul des fonctions génératrices qui sert de base au calcul des probabilités ; le second est l'exposition de la théorie des probabilités.
En feuilletant la première partie, j'ai vu que Laplace avait lui aussi écrit au sujet des cordes vibrantes. Voici son propos :

"Considérons présentement les vibrations d'une corde tendue, dont la figure initiale soit quelconque, pourvu qu'elle soit très-rapprochée dans tous ses points, de l'axe des abscisses. Nommons x l'abscisse, t le tems, $y_{x,t}$ l'ordonnée d'un point quelconque de la corde, après le tems t. Concevons de plus l'abscisse x partagée dans une infinité de parties égales à dx, et que nous prendrons pour unité ; ce qui revient à considérer x comme un nombre infini. Cela posé, on aura par les principes de dynamique,

$$\left(\frac{ddy_{x,t}}{dt^2}\right) = \frac{a^2}{dx^2}\cdot(y_{x+1,t} - 2y_{x,t} + y_{x-1,t});$$

a étant un coefficient constant dépendant de la tension et de la grosseur de la corde. Si l'on fait $t = \frac{x'}{a}$; on aura $dt = \frac{dx'}{a}$, et $y_{x,t}$ deviendra une fonction de x et de x', que nous désignons par $y_{x,x'}$; or la grandeur de dt étant arbitraire, on peut la supposer telle, que la variation de x' soit égale à celle de x, que nous avons prise pour l'unité ; l'équation précédente devient ainsi

$$y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1} = y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'},$$

x et x' étant ici des nombres infinis. Cette équation est la même que celle que nous venons de considérer ; ainsi la construction géométrique que nous avons donnée précédemment, peut-être employée dans ce cas : le polygone dont les ordonnées des angles sont représentées par $y_{x,0}$, est ici la figure initiale de la corde ; mais il faut pour cela supposer la longueur n, divisée dans une infinité de parties égales à dx. Il faut de plus que la corde soit fixe à ses extrémités, afin que l'on ait $y_{0,x'} = 0$, $y_{n,x'} = 0$. D'ailleurs l'équation de condition

$$y_{x,1} = \tfrac{1}{2}\cdot y_{x+1,0} + \tfrac{1}{2}\cdot y_{x-1,0};$$

ou, ce qui revient au même,

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \tfrac{1}{2}\cdot(y_{x+1,0} - 2\cdot y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

se change en celle-ci,

$$dt\cdot\left(\frac{dy_{x,0}}{dt}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot dx^2\cdot\left(\frac{d^2y_{x,0}}{dx^2}\right);$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dy_{x,0}}{dt}\right) = 0.$$

Or $\left(\frac{dy_{x,0}}{dt}\right)$ est la vitesse initiale de la corde; cette vitesse doit donc être nulle à l'origine du mouvement. Toutes les fois que ces conditions auront lieu, la construction précédente donnera toujours le mouvement de la corde, quelle que soit sa figure initiale, pourvu cependant que dans tous ses points, $y_{x+2,0} - 2y_{x+1,0} + y_{x,0}$ soit un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire que deux élémens contigus de la corde, ne forment point un angle fini. Cette condition est nécessaire pour que l'équation différentielle du problême puisse subsister, et pour que celle-ci

$$dt.\left(\frac{dy_{x,0}}{dt}\right) = \tfrac{1}{2}.(y_{x+1,0} - 2.y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

donne $\left(\frac{dy_{x,0}}{dt}\right) = 0$. Mais d'ailleurs il est évident, par ce qui précède, que la figure initiale de la corde peut être discontinue et formée d'un nombre quelconque d'arcs de courbes différentes, pourvu que ces arcs se touchent.

Les diverses situations de la corde dans son mouvement, sont représentées par les rangs horizontaux de la table (Z); et comme les rangs qui correspondent aux valeurs de x', $x'+2n$, $x'+4n$, etc. sont les mêmes par ce qui précède, il en résulte que la corde revient à la même situation après les tems t, $t+\frac{2n}{a}$, $t+\frac{4n}{a}$, etc.

On voit encore par la construction géométrique donnée ci-dessus, que si l'on conçoit une suite de cordes liées entre elles, et placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses, comme dans cette construction; toutes ces cordes vibreront de la même manière, ensorte que leurs figures initiales étant les mêmes, leurs figures seront constamment pareilles. On peut même ne fixer que les deux extrémités de cette suite, et laisser leurs nœuds entièrement libres; car les élémens des deux cordes au point de leur jonction, étant en ligne droite et également tendus, ce point n'a aucune tendance à se mouvoir, et doit conséquemment rester immobile; ce que l'expérience confirme.

Cette analyse des cordes vibrantes, établit d'une manière incontestable, la possibilité d'admettre des fonctions discontinues dans ce problème; et l'on en doit généralement conclure que ces fonctions peuvent être employées dans tous les problèmes qui dépendent d'équations à différences partielles infiniment petites, pourvu qu'elles puissent subsister avec ces équations et avec les conditions du problème. On peut en effet considérer ces équations, comme des cas particuliers d'équations aux différences finies, dans lesquelles on suppose que les variables deviennent infinies; or rien n'étant négligé dans la théorie des équations aux différences finies partielles, il est visible que les fonctions arbitraires de leurs intégrales, ne sont point assujéties à la loi de continuité, et que les constructions de ces équations, au moyen de polygones, ont lieu quelle que soit la nature de ces polygones. Maintenant lorsqu'on passe du fini à l'infiniment petit, ces polygones se changent dans des courbes qui, par conséquent, peuvent être discontinues ; ainsi la loi de continuité n'est nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales, ni dans les constructions géométriques qui les représentent. Il faut seulement observer que si l'équation aux différentielles partielles en $y_{x,x'}$ est de l'ordre n, il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $\left(\frac{d^{n-r}.y_{x,x'}}{dx^s.dx'^{n-r-s}}\right)$; r et s étant des nombres entiers positifs, s pouvant être nul ; c'est-à-dire que la différentielle de cette quantité doit être infiniment petite par rapport à cette quantité elle-même. Cette condition est indispensable pour que l'équation différentielle proposée puisse subsister ; parce que toute équation différentielle partielle suppose que les différentielles partielles de $y_{x,x'}$ dont elle est formée, et divisées par les puissances respectives de dx et de dx', sont des quantités finies et comparables entre elles ; mais rien n'oblige d'admettre la même condition relativement aux différences de $y_{x,x'}$ de l'ordre n ou d'un ordre supérieur. En prenant pour fonctions arbitraires, les différences les plus élevées des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale d'une équation aux différences partielles; cette intégrale ne renfermera plus alors que des fonctions arbitraires et leurs intégrales successives qui sont continues, parce qu'en général l'intégrale $\int ds.\varphi(s)$ est continue dans le cas même où la fonction $\varphi(s)$ ne l'est pas. La condition précédente se réduit donc à ce que la différence $(n-1)^{ième}$ de chaque fonction arbitraire soit continue, c'est-à-dire que sa différentielle soit infiniment plus petite. Il ne doit donc point y avoir de saut entre deux tangentes consécutives de la courbe qui représente la fonction arbitraire de l'intégrale d'une équation aux différentielles partielles du second ordre ; ainsi dans le problème des cordes vibrantes que nous venons de discuter, il est nécessaire et il suffit que deux élémens quelconques contigus de la figure initiale de la corde, forment entre eux un angle infiniment peu différent de deux angles droits. Il ne doit point y avoir de saut entre deux rayons osculateurs consécutifs de la courbe qui représente la fonction arbitraire continue dans l'intégrale, si l'équation aux différences partielles est du troisième ordre; et ainsi de suite.