forme. Cette agglomération produit un tourbillon, que l'on appelle nécessité, qui maintient les atomes lourds au centre et projette les légers vers l'extérieur, ceux-ci formant une membrane, le firmament, qui dans sa rotation capte des corps du vide extérieur. Les corps se produisent par agrégation d'atomes, qui en s'entrechoquant les uns les autres se lient ou se repoussent, mais ne fusionnent pas. Les caractéristiques fondamentales des corps sont la forme de leurs atomes, leur ordre interne et leur configuration. Les qualités sensibles ne sont pas réelles, c'est-à-dire, n'appartiennent pas aux atomes individuels ; elles sont conventionnelles, caractérisent seulement les corps macroscopiques.

Le mouvement des atomes obéit à des causes mécaniques, à l'exception des atomes sphériques de l'âme et du feu, qui ont la capacité de se mouvoir par eux-mêmes. Grâce à elle les corps peuvent connaître et gouverner. La perception se produit quand les sens captent les effluves constamment émis par les corps.

En résumé, la relation entre unité et pluralité se présente, chez les atomistes, sous divers aspects :

- Un est le vide et innombrables les mondes qui se forment en lui.

- Ils transforment l'Etre Un de Parménide en une multiplicité d'atomes qui partagent quelques unes de leurs principales caractéristiques avec lui.

- Les atomes ont une unité de nature et une pluralité de formes, dimensions et mouvements.

_ Unité provisoire du corps et multiplicité d'effluves émises, simulacres de lui-même.

5.15 Diogène d'Apollonie (475-415 env.)

Grâce aux fragments que l'on a conservés, on croit qu'il a été médecin et on a l'habitude d'attribuer à sa profession technique l'empirisme que manifeste sa philosophie, ce qui concorde avec la tradition de l'école hippocratique. Réfutant aussi bien les conséquences de l'Eléatisme que celles des physiques pluralistes, Diogène revient au principe cosmologique unique : l'Air, ou selon d'autres sources, la substance intermédiaire entre l'Air et le Feu, l'Ether qui engendrerait les deux. Cet Air ou Ether est éternel et illimité et dans son intérieur surgissent d'innombrables mondes. Il justifia ce retour au monisme en argumentant que l'interaction que nous percevons entre les êtres naturels n'est possible que parce qu'ils ont la même nature sous-jacente ; s'il n'en était pas ainsi, il n'y aurait de rapports qu'entre les êtres de la même espèce.

Le cosmos est ordonné de la meilleure façon possible, ce qui démontre que l'Air ou l'Ether est intelligent. Étant la substance la plus subtile, il se trouve présent en toutes choses, bien que de manière différente dans chacune, ce qui lui permet de les gouverner. L'âme des êtres vivants est formée d'air chaud. Leur capacité de connaissance est due à différentes formes d'interaction entre l'âme ou air interne avec l'air externe à travers les organes du corps, suivant la doctrine disant que le semblable connaît le semblable. Quant à la relation entre unité et multiplicité, Diogène revient au point de départ de la physique ionienne ; comme Thalès de Milet, il explique l'immense diversité des choses sensibles au moyen d'un principe unique qui leur confère une unité de nature.

DEUX SIÈCLES D'INTUITION GÉOMETRIQUE EN ALGÈBRE LINÉAIRE

Ghislaine Chartier

IREM de Rennes

Laboratoire de didactique des mathématiques, Université de Rennes 1

Résumé

La genèse de l'algèbre linéaire est un processus qui s'étale sur plusieurs siècles, et dans lequel les interventions de la géométrie ont été fondamentales. La théorie développée par Fischbein à propos de l'intuition en mathématiques et de l'utilisation de différents types de modèles intuitifs nous permet d'analyser en termes d'intuition géométrique les contributions de différents mathématiciens au développement de l'algèbre linéaire. De Leibniz à Fréchet, en passant par Grassmann, nous dégageons ainsi de multiples emplois de modèles géométriques, et les conséquences du recours à ces modèles.

Introduction

Le questionnement qui nous a conduite à cette étude est de nature didactique. Il pourrait être résumé par la question suivante : comment peut-on utiliser au mieux la géométrie, ou plus généralement, ce qui est de l'ordre du géométrique (les figures en particulier), pour enseigner l'algèbre linéaire et bilinéaire ? Depuis que l'algèbre linéaire a disparu des programmes de l'enseignement secondaire (1986), les étudiants la rencontrent pour la première fois à l'université. Cette rencontre pose de nombreux problèmes, comme en témoignent les enseignants concernés, et comme le confirment plusieurs études de didactique. Or il n'est pas rare d'entendre des réflexions du type : *si les étudiants avaient un peu plus d'intuition géométrique, ils réussiraient bien mieux en algèbre linéaire*, réflexions associées à des propositions de cours de géométrie précédant celui d'algèbre linéaire. L'un des aspects de notre travail consiste à comprendre ce à quoi pensent les enseignants lorsqu'ils tiennent ce genre de propos : quel contenu imaginent-ils pour un tel cours de géométrie, qu'appellent-ils *intuition géométrique* chez les étudiants ? Ce n'est pas cette partie de notre travail que nous détaillons ici ; nous allons présenter des extraits d'une étude historique dont l'objectif est d'analyser comment la géométrie, ou une certaine forme d'intuition géométrique, est intervenue dans la genèse de l'algèbre linéaire. Cette étude nous permet de dégager un éventail de possibilités et de prendre le recul nécessaire pour notre étude didactique.

Il nous faut avant tout préciser ce que l'on peut appeler *intuition géométrique*. Parler d'intuition en mathématiques est à la fois très courant et très ambigu. D'une part, nous allons nous pencher sur des œuvres écrites dans différentes langues ; or le *Anschauung* allemand ne désigne pas la même chose que le *intuizione* italien par exemple. D'autre part, le mot *intuition* peut apparaître avec des sens différents chez un même auteur.

Certains mathématiciens ont tenté une étude approfondie de l'intuition, qui les conduit à distinguer différents types d'intuition : c'est le cas notamment de Klein, Bouligand ou Poincaré. Ces auteurs partent d'abord d'un point de vue philosophique et se tournent peu à peu d'une manière plus ou moins marquée vers un point de vue psychologique ; ils tentent en fait de déterminer les origines possibles de l'intuition, les conditions de son existence.

Il semble donc que l'aspect psychologique de l'étude de l'intuition est indispensable pour comprendre la nature et les rôles possibles de celle-ci.

Notre étude nécessite une définition précise de l'intuition géométrique, donc des facteurs qui conduiront à une telle intuition (qui la différencieront, par exemple, d'une intuition purement algébrique) et des critères permettant d'identifier les interventions de celle-ci.

C'est dans les travaux de Fischbein, en particulier en ce qui concerne les facteurs d'intuition, que nous avons trouvé un cadre suffisamment riche pour l'analyse des interventions de l'intuition géométrique dans des œuvres d'auteurs et d'époques variés.

1. Intuition géométrique : tentative de définition

1.1 L'intuition selon Fischbein

Selon Fischbein, le rôle essentiel de l'intuition est de répondre à notre besoin naturel de certitudes ; c'est ce besoin, élément incontournable de toute activité mentale, qui nous conduit à fabriquer des représentations et des interprétations apparemment évidentes.

> *L'intuition n'est pas la principale source de connaissances certaines, mais elle semble l'être, parce que c'est exactement son rôle : créer l'apparence de certitude, conférer à différentes interprétations ou représentations un caractère de certitude intrinsèque et indiscutable.* (Fischbein 1987, p. 12)

Fischbein précise ce rôle en écrivant :

> *L'intuition résume l'expérience, offre une représentation compactée et globale d'un groupe de données, pallie à l'insuffisance d'informations, introduit des interprétations significatives pour le comportement dans un processus de réflexion, et donc confère à l'activité mentale les qualités de continuité, de fermeté et d'efficacité qui caractérisent un comportement actif et adaptatif. Mais, dans le même temps, l'intuition reste une source d'erreurs potentielles, car elle ne constitue pas simplement un double de conditions données. Son rôle est d'offrir des représentations significatives sur le plan du comportement, structurées, intrinsèquement crédibles, même si ces qualités n'existent pas en fait dans la situation donnée.* (ibid., p. 12)

Nous avons besoin de certitudes pour agir, quand bien même celles-ci ne seraient qu'apparentes.

Les modèles constituent une source fondamentale de connaissances intuitives ; ils permettent de remplacer une notion par un substitut intuitivement acceptable. Fischbein définit ainsi la notion de modèle :

> *Un système B représente un modèle du système A si, sur la base d'un certain isomorphisme, une description ou une solution produite dans A admet un correspondant cohérent dans B et vice versa.* (ibid., p. 121)

Un modèle suggère des questions pertinentes, inspire des stratégies de résolution, permet de vérifier la validité d'un résultat ; un modèle sera efficace s'il est suffisamment fidèle à l'original (sur un plan structurel) et qu'il a cependant une relative autonomie par rapport à celui-ci.

Modèles abstraits et modèles intuitifs

Une première distinction peut être faite entre modèles abstraits et modèles intuitifs.

Citons Fischbein :

> *Les relations mathématiques sont habituellement des modèles abstraits pour une certaine réalité concrète.*

Dans le cadre qui nous préoccupe, on peut dire, par exemple, que l'espace euclidien de dimension 3 est un modèle abstrait de l'espace ambiant. Un modèle intuitif, en revanche, offre les caractéristiques d'une réalité concrète, bien qu'il dépasse souvent celle-ci ; notons cependant que ceci n'exclut pas qu'une théorie mathématique puisse jouer le rôle de modèle intuitif.

Modèles analogiques et modèles paradigmatiques

Une analogie se manifeste entre deux entités si celles-ci présentent certaines similarités qui permettent d'en supposer d'autres.

Un modèle analogique et l'original auquel il est associé appartiennent à deux champs conceptuels différents ; pour être réellement efficace, un modèle analogique doit être suffisamment indépendant de l'original ; il pourra ainsi guider un questionnement sur l'original, suggérer des propriétés ou même des notions.

Fischbein oppose à la notion de modèle analogique celle de modèle paradigmatique, qui désigne une sous-classe de l'original, employée comme modèle.

Le modèle paradigmatique n'est pas indépendant de l'original ; au contraire, il est un exemple, choisi comme particulièrement représentatif. Il aide à la compréhension de l'original ; le sujet le garde ensuite à l'esprit et l'utilisera dans les résolutions de problèmes. C'est ce modèle qui permet à un concept d'être productif pour le sujet.

Fischbein souligne le fait que l'emploi d'un modèle quel qu'il soit comporte des risques ; la relative autonomie du modèle peut attirer l'attention sur des faits non pertinents ; même les modèles explicites comportent des composantes dont nous ne sommes pas toujours conscients et qui peuvent induire des erreurs.

En ce qui concerne la notion de modèle analogique, nous serons conduit à souligner un élément qui, bien que faisant partie de la définition même de modèle, n'est plus mentionné par la suite : la réversibilité des rôles entre modèle et original.

En effet, comme nous le verrons dans les exemples qui vont suivre, si une théorie mathématique joue pour une autre le rôle de modèle analogique à un certain moment, par exemple pour suggérer des propriétés pertinentes, il est fréquent que les propriétés de l'original mises à jour suggèrent à leur tour des propriétés du modèle ; on assiste alors à une inversion des rôles entre modèle et original.

1.2 L'intuition géométrique

Dans notre étude de textes mathématiques, nous désignerons comme interventions de l'intuition géométrique l'emploi fait par l'auteur de modèles, analogiques ou paradigmatiques, issus d'une géométrie (nous précisons ci-dessous le sens que nous attribuerons à ce terme dans ce contexte) .

Ce choix de définition pour l'intuition géométrique est directement lié à l'objet de notre étude, qui vise à dégager des liens entre deux théories.

Ainsi nous ne parlerons d'intuition géométrique que dans les cas d'emploi d'un modèle intramathématique, et non pour des modèles extramathématiques directement issus de l'espace physique ; nous nommerons *intuition de l'espace* l'usage d'un tel modèle, dont nous n'approfondirons pas l'analyse.

La *géométrie* à laquelle font référence les différents mathématiciens sur les œuvres desquels nous nous sommes penchés n'est pas toujours la même ; mais ce terme désigne systématiquement une théorie qui est un modèle abstrait de l'espace physique (au sens de Fischbein). C'est ce lien direct de la géométrie avec la réalité qui permet à un modèle issu de la géométrie de fournir au raisonnement un support qui semble concret ; c'est dans cette mesure que l'utilisation d'un tel modèle engendre une intuition, au sens de Fischbein.

Les usages faits selon les auteurs seront très variés, et pourront s'apparenter aussi bien à la recherche d'un modèle symbolique pour la géométrie qu'à celle d'un modèle géométrique pour une théorie issue d'un autre domaine mathématique. Nous tenterons de préciser les caractéristiques exactes du modèle utilisé, c'est-à-dire les notions et les propriétés retenues par l'auteur dans la géométrie à laquelle il fait référence. Nous étudierons alors l'emploi que fait l'auteur de ce modèle. S'agit-il d'un modèle analogique, issu d'une géométrie indépendante de la théorie en cours d'élaboration ou d'exposition, ou d'un modèle paradigmatique, issu d'une géométrie qui apparaît comme une application privilégiée de cette théorie ?

Ce modèle est-il utilisé pour l'élaboration de la théorie, et dans ce cas, sert-il au choix des prémisses, à celui des théorèmes, voire dans les démonstrations ?

Il est également possible que le modèle soit utilisé à l'intention du lecteur, pour justifier la validité d'un résultat ou d'un raisonnement, ou pour aider à la compréhension.

En particulier, lors de l'emploi d'un modèle analogique, nous chercherons à dégager les éléments sur lesquels porte l'analogie, et les propriétés suggérées par le modèle, ainsi que les éventuelles modifications apportées ensuite à l'original, dans le cas d'une inversion des rôles modèle-original.

2. Survol de la genèse de l'algèbre linéaire

Le processus qui a conduit à l'algèbre linéaire moderne est long et complexe ; nous n'en rappellerons ici que les principales étapes, pour situer les œuvres que nous allons regarder en détail (le lecteur intéressé pourra consulter notamment (Dorier 1997) pour plus de précisions).

Un premier domaine dont l'étude a conduit à formuler des concepts qui deviendront par la suite des concepts centraux d'algèbre linéaire est l'étude des systèmes d'équations linéaires. Ainsi Euler étudie dès 1750 la dépendance linéaire, mais uniquement en ce qui concerne les équations (il appelle cette notion dépendance inclusive).

En 1750 également, Cramer publie un texte dans lequel il établit une règle de calcul des solutions d'un système linéaire carré ; ceci marque le début de la théorie des déterminants et d'une étude plus calculatoire que qualitative des systèmes linéaires, qui permettra tout de même de dégager le concept de rang.

Mais la dépendance des n-uplets et celle des équations étaient considérées comme des notions de natures différentes, et ce jusqu'aux travaux de Frobenius en 1875. Celui-ci traite les deux objets, n-uplets et équations, comme deux versions d'un même concept : il ouvre donc la voie à la dualité. Il définit en outre précisément le concept de rang (c'est lui qui introduit ce terme, en 1879).

L'autre domaine à l'origine du développement de l'algèbre linéaire est la géométrie. L'introduction par Descartes et Fermat de la méthode analytique en géométrie, conduit à une algébrisation de la géométrie, qui souligna en particulier la simplicité des problèmes linéaires.

Mais c'est ensuite la critique de la méthode analytique et la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque qui apportèrent les résultats les plus féconds en ce qui concerne la genèse de l'algèbre linéaire.

Les œuvres de Leibniz et Grassmann en particulier relèvent de ce courant ; nous les examinerons en détail ci-dessous.

De tous ces travaux, ce sont ceux de Grassmann qui sont les plus complets ; on y trouve l'essentiel des concepts de l'algèbre linéaire moderne. Cependant aucun des auteurs que nous avons cités ne propose d'approche axiomatique.

C'est Peano qui aura le premier une démarche axiomatique, en même temps qu'il tentera de diffuser les travaux de Grassmann ; Pincherle généralisera ensuite l'approche de Peano.

Mais ce sont en fait les développements de l'analyse fonctionnelle qui mèneront à l'algèbre linéaire sous sa forme moderne. Le résolution de problèmes en dimension infinie a en effet conduit à développer une approche qui permette de généraliser et d'unifier les différents problèmes : d'où l'étude d'espaces fonctionnels, la définition d'une notion de distance entre objets qui ne sont pas de nature géométrique et de celle de norme. On peut citer dans ce courant les travaux de Fréchet, de Riesz et de Schmidt notamment.

Nous n'avons retenu, pour la présentation que nous faisons ici, que certains des auteurs que nous avons cités : Leibniz, Grassmann, Peano, Fréchet et Schmidt.

3. L'intuition géométrique dans la genèse de l'algèbre linéaire

3.1 Gottfried Wilhem Leibniz

Selon Leibniz, l'intuition, qui seule donne accès à la véritable connaissance, désigne la capacité d'appréhension directe et immédiate d'un objet, appréhension qui sera assistée par des signes (il ne s'agit évidemment pas ici de l'intuition géométrique que nous avons définie ci-dessus). Il n'est donc pas étonnant d'observer que Leibniz juge insatisfaisante la méthode cartésienne, consistant à représenter les objets géométriques par des coordonnées ; l'accès direct au concept, *l'intuition de l'objet* est alors impossible.

Ainsi Leibniz tente de développer une caractéristique géométrique, c'est-à-dire un système fondé sur des signes donnant directement accès aux objets géométriques avec leurs caractéristiques de position et permettant par le calcul d'établir les propriétés des figures d'une manière telle que la signification géométrique reste toujours présente.

Nous allons tenter de comprendre ici quel est, plus précisément, le dessein de Leibniz, et par quelle méthode celui-ci compte l'atteindre.

Caractéristique géométrique et Caractéristique universelle

La recherche de la Caractéristique géométrique s'inscrit dans un projet plus vaste, celui de Caractéristique universelle, à propos de laquelle Leibniz écrit, dans le brouillon d'une lettre destinée au duc Jean Frédéric de Hanovre :

> *J'ay quelque chose de plus grand que tout cela ... C'est cette langue ou caractéristique universelle, que j'ay coutume d'appeler le tableau des choses, l'inventaire des connoissances et le juge des controverses. C'est le grand organe de la raison qui portera aussi loin les forces de l'esprit que le microscope a poussé celles de la vue.* (Leibniz, trad. Echeverria 1995, p. 14)

L'élaboration de cette langue permet à la science de se développer et, en retour, le développement de la science permet de nouvelles évolutions de la langue ; cette possibilité d'échange et d'amélioration mutuelle est fondamentale dans l'approche de Leibniz.

La Caractéristique géométrique apparaît alors comme une application de la Caractéristique universelle ; cette application est centrale à cause de l'importance historique de la géométrie en tant que science. De plus, le développement de la Caractéristique géométrique justifie la possibilité de la Caractéristique universelle, elle laisse supposer l'existence de propriétés encore plus générales. La Caractéristique géométrique doit être une nouvelle géométrie, qui dépasse les précédentes, en particulier celles d'Euclide et de Descartes.

Cet objectif sera atteint de manière sûre si certains axiomes des géométries précédentes sont démontrés (Leibniz pensait que tous les axiomes d'Euclide étaient démontrables), si de meilleures définitions sont données (nous reviendrons ci-dessous à la question des définitions) et surtout si de nouveaux objets et problèmes géométriques sont créés.

La méthode de Leibniz

Le développement de la caractéristique se fait selon trois axes principaux.

Tout d'abord, la recherche des meilleures définitions possibles ; la définition idéale doit mettre en évidence la possibilité de l'objet défini. Ainsi Leibniz donnera plusieurs définitions des notions de droite, de plan, de cercle... Ici nous pouvons noter une première intervention de l'intuition, liée au rapport à la réalité ; la définition choisie doit traduire au mieux l'intuition de l'objet, qui devient alors une notion intuitive, selon le sens attribué par Fischbein à ce terme.

Il ne s'agit pas d'intuition géométrique comme nous l'avons définie ci-dessus, mais *d'intuition de l'espace*, puisque le modèle est extramathématique, fourni par l'espace concret et non par une géométrie.

Le second axe est le choix des caractères : la recherche des meilleures notations permettant d'exprimer une notion ou une propriété.

Echeverria commente ainsi ce choix de caractères fait par Leibniz :

> *Chacun des mots et des signes choisis pour nommer et pour désigner les notions géométriques est arbitraire, mais leur système ne l'est pas du tout ... les relations entre les caractères utilisés en géométrie doivent être conformes aux relations entre les notions géométriques correspondantes. Parfois, on ne parviendra qu'à des conformités partielles, mais l'objectif est de pousser l'analyse et d'améliorer le système de signes en tentant d'atteindre l'isomorphisme entre le système de caractères et celui des notions géométriques qu'on est en train de formaliser.* (Leibniz, trad. Echeverria 1995, p.21)

L'intuition de l'espace intervient encore dans ce choix des caractères ; elle seule permet d'assurer le lien entre les caractères et les objets et de tendre vers l'isomorphisme désiré ; la définition de modèle donnée par Fischbein s'applique clairement à cette démarche.

Le troisième axe de la démarche, une fois les caractères choisis, concerne le raisonnement qui va porter sur ceux-ci ; la combinaison de ces signes donnera des théorèmes, connus ou nouveaux, d'une manière que Leibniz veut entièrement rigoureuse et indépendante de l'intuition. Mais il ne procédera pas en fait à des combinaisons aveugles de signes ; celles qu'il utilise sont choisies par rapport à un objectif géométrique.

En employant les termes de Fischbein, on peut dire que le système des caractères est un modèle symbolique, algébrique associé par analogie à un modèle intuitif de nature géométrique ; c'est sur ce dernier modèle que repose la productivité du système et, par conséquent, l'ensemble de la théorie. L'analogie doit permettre d'assurer un accès direct à l'objet, dépassant ainsi une simple correspondance comme lors de l'emploi de coordonnées cartésiennes.

La caractéristique géométrique

Dans une lettre adressée à Huygens en septembre 1679, Leibniz écrit à propos de la caractéristique géométrique :

> *J'ay trouvé quelques éléments d'une nouvelle caractéristique, tout à fait différente de l'algèbre, et qui aura de grands avantages pour représenter à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figure, tout ce qui dépend de l'imagination. L'algèbre n'est autre chose que la caractéristique des nombres ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles, et le mouvement, d'où vient, qu'il est souvent difficile de réduire dans un calcul de ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des démonstrations et des constructions géométriques assez commodes lors même que le calcul de l'algèbre est tout fait. Mais cette nouvelle caractéristique suivant des figures de vue ne peut manquer de donner en même temps la solution et la construction et la démonstration géométrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse.* (Leibniz, trad. Echeverria 1995, p. 257)

En fait, la géométrie développée par Leibniz ne remplit pas ce programme parce qu'elle reste fondée sur la distance et ne prend pas en compte, notamment, les notions de sens et de direction. Mais Leibniz aura initié l'idée de la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque. L'élaboration de sa théorie (il s'agit ici d'une géométrie) s'identifie à la recherche d'un modèle analogique symbolique pour l'espace physique, l'analogie portant sur les positions des objets et les relations entre ceux-ci.

Pour Leibniz, l'analogie de structure est obtenue par le choix des bons caractères ; grâce à l'isomorphisme entre caractères et objets géométriques, les combinaisons de caractères donneront ensuite des théorèmes géométriques.

Dans les travaux de Leibniz, l'aspect : recherche d'un calcul géométrique intrinsèque basé sur une analogie de structures (qui s'inscrit dans un projet plus vaste : la caractéristique universelle), est fondamental. Nous allons voir maintenant que l'on retrouve cet aspect dans les travaux de Grassmann et ce, bien que celui-ci n'ait pas connu, selon ses propres déclarations, la théorie de Leibniz.

3.2 Grassmann

L'examen de l'œuvre de Grassmann est fondamental pour notre étude ; d'une part, à cause de l'importance de ses travaux dans la genèse de l'algèbre linéaire, mais aussi à cause de l'usage très particulier que fait Grassmann de l'intuition géométrique. Grassmann souligne explicitement dans l'Ausdehnunglehre l'importance de l'intuition et il mentionne l'analogie avec la géométrie comme facteur d'intuition. En réalité, la géométrie joue de multiples rôles dans l'Ausdehnunglehre, comme le souligne Flament (1992) :

> *On parle d'abord de la relation analogique entre une science pure, l'Ausdehnunglehre, et son application, ou forme concrète, la géométrie.*
>
> *Les constructions géométriques sont ensuite introduites pour servir l'intuition.*
>
> *Enfin, la géométrie est considérée pour elle-même dans la partie applications que l'on retrouve à la fin de chaque chapitre du livre.* (Flament 1992)

Chacun des trois rôles mentionnés par Flament peut être en fait interprété comme une utilisation d'un modèle entraînant le développement d'intuitions ; les différents types de modèles distingués par Fischbein vont donc nous permettre de préciser l'articulation entre géométrie et théorie des formes et les interventions de l'intuition géométrique.

Recherche d'un modèle analogique symbolique pour la géométrie et découverte de la théorie des formes

Dans la préface de l'Ausdehnunglehre, Grassmann explique comment il a découvert celle-ci ; il était à la recherche d'une caractéristique géométrique, c'est-à-dire d'un modèle symbolique analogique de l'espace physique. Lorsqu'il parvient à ce modèle, il écrit notamment :

> *Les formules se transformèrent en formules très simples et symétriques. La façon de les développer s'harmonisait avec le concept.* (Grassmann 1844, p. II)

Grassmann a obtenu l'analogie recherchée ; mais son modèle dépasse l'objectif fixé :

> *Il apparut que l'Analyse que j'avais découverte ne se situait pas seulement, comme il me semblait au début, dans le domaine de la géométrie ; mais j'aperçus bientôt que j'avais atteint là le terrain d'une nouvelle science, dont la géométrie elle-même n'est qu'une application particulière.* (ibid., p. III)

La recherche d'un modèle analogique symbolique pour l'espace physique a conduit Grassmann à découvrir une science plus vaste, qui sera donc en particulier un modèle analogique symbolique pour la géométrie. Cette géométrie elle-même est déjà un modèle abstrait pour une réalité concrète : l'espace ; les lois de la géométrie proviennent de cette fonction. Un modèle symbolique pour la géométrie sera donc analogique si ses lois sont semblables aux lois de la géométrie ; en outre celles-ci ne doivent pas être tirées de l'espace pour préserver l'indépendance du modèle.

Le modèle obtenu par Grassmann remplit toutes ces conditions, comme il l'écrit lui-même :

> *En fait, j'avais compris depuis longtemps qu'on ne peut pas considérer la géométrie comme une branche de la mathématique, mais plutôt que la géométrie fait référence à quelque chose qui est déjà donné dans la nature (c'est-à-dire l'espace) et qu'il devait y avoir par conséquent une branche de la mathématique qui tire d'elle même de façon purement abstraite des lois semblables comme celles qui, en géométrie, semblent reliées à l'espace.* (ibid., p. III)

La théorie des formes sera explicitement employée comme modèle symbolique de la géométrie à la fin de chaque chapitre, dans la partie consacrée aux applications. Par ailleurs, l'analogie va permettre un renversement des rôles et, dans l'exposition de la théorie, ce sera la géométrie qui servira de modèle intuitif pour la théorie des formes, situation que nous avions déjà rencontrée pour les nombres complexes et les quaternions. Toutefois, la possibilité de considérer la géométrie soit comme une science indépendante, soit comme une application de la théorie des formes rend ici la situation très différente de celle que nous avons pu observer pour les nombres complexes.

Ainsi nous verrons la géométrie se manifester tantôt comme modèle analogique, tantôt comme modèle paradigmatique de la théorie des formes.

La géométrie comme application de la théorie des formes : un modèle paradigmatique

La géométrie apparaît comme modèle paradigmatique dans les exemples donnés tout au long de l'exposition de la théorie, à la suite de la définition d'une nouvelle notion ou de l'établissement d'une propriété, et dont l'auteur souligne souvent qu'ils sont destinés à soutenir l'intuition.

Ainsi dès l'introduction et l'exposition du concept de l'Ausdehnunglehre, Grassmann illustre les notions d'élément générateur et de changement continu en écrivant :

> *Dans la théorie de l'espace c'est le point qui figure comme élément, le changement de lieu ou mouvement qui se présente comme son changement continu, et ce sont les différentes positions du point dans l'espace qui figurent ses différents états.*
>
> (ibid., p. XIII)

De même, dans le premier chapitre de la première section, Grassmann, qui a défini notamment les formations d'extension et les systèmes de différents échelons, propose immédiatement une illustration géométrique :

> *Je veux soutenir l'intuition [Anschauung] par des considérations géométriques. Car il est clair que le système de deuxième échelon correspond au plan, et que le plan est pensé comme engendré en déplaçant tous les points d'une ligne dans une direction qui*

n'est pas contenue en elle. On obtient également tout l'espace infini comme le système du troisième échelon ... et la géométrie ne peut pas avancer plus loin, tandis que la science abstraite ne connaît pas de limite. (ibid., p. 15)

Nous nous limitons ici à ces deux exemples, mais chaque chapitre de l'Ausdehnunglehre en comporte un grand nombre.

Rappelons que, selon Fischbein, le rôle du paradigme est essentiel pour la compréhension, l'apprentissage et la résolution d'exercices ; c'est ce modèle que le sujet gardera présent à l'esprit, et qui permettra à un concept d'avoir une productivité semblable à celle d'un objet concret. Grassmann incite clairement le lecteur désireux de comprendre une nouvelle notion ou propriété à traduire celle-ci dans le domaine de la géométrie (traduction qui est la plupart du temps donnée explicitement dans l'ouvrage).

Or comme le souligne Grassmann lui-même, le modèle géométrique est limité, en particulier par le nombre “d'échelons” (Stufe).

Ainsi on peut se demander si la généralité atteinte par Grassmann dans sa théorie ne risque pas d'être écrasée par le modèle géométrique, qui peut entraîner le lecteur de l'Ausdehnunglehre à ne retenir que les applications à la géométrie. Il est remarquable à cet égard de noter que les premières diffusions significatives des travaux de Grassmann se sont précisément limitées à leurs applications à la géométrie (voir ci-dessous).

La géométrie comme modèle analogique de la théorie des formes

C'est dans cet emploi de la géométrie que le renversement des rôles entre modèle et original se fait le plus sensible. Grassmann est parvenu à la théorie des formes en cherchant un modèle analogique symbolique pour l'espace physique ; il a finalement obtenu une théorie plus vaste, dont l'application à l'espace fournit une géométrie.

Mais, comme nous l'avons signalé en 1), Grassmann décrit également une géométrie axiomatique *indépendante de la théorie des formes*, et dont les axiomes sont des *vérités tirées de l'intuition de l'espace*. Il dispose ainsi d'une géométrie indépendante de sa théorie, géométrie qu'il va utiliser comme modèle analogique, modèle dont il décrit explicitement le rôle en disant que son développement va suivre une idée directrice qui est une analogie, pour que le lecteur puisse anticiper les différentes étapes grâce à ce fil conducteur.

Grassmann souligne à différents endroits du livre l'importance et le rôle de cette analogie ; il parle lui-même d'intuition, comme au début du deuxième chapitre de la première section :

> *Nous partons d'abord de la géométrie pour obtenir l'analogie selon laquelle la science abstraite doit procéder, et pour avoir sous les yeux, tout de suite, une idée intuitive [anschauliche Idee] qui nous mènera sur les chemins inconnus et souvent pénibles du développement abstrait.* (ibid., p. 33)

Il est clair ici que le rôle du modèle analogique est différent de celui du modèle paradigmatique : alors que ce dernier intervenait pour aider à la compréhension d'un concept ou d'une propriété introduits dans la théorie générale, pour conférer à ceux-ci, selon les termes de Fischbein, la productivité nécessaire, le modèle analogique intervient *avant* l'exposition d'un concept.

Il sert à préparer l'introduction d'une notion, à donner au lecteur la possibilité d'anticiper un développement théorique ; le modèle doit alors être suffisamment indépendant de l'*original*.

Ainsi, lorsque Grassmann présente, dans le premier chapitre de la première section, la géométrie comme une science existant indépendamment de la théorie des formes, il fait usage, dans sa présentation, du concept de nombre. Or ce concept n'a pas encore été rencontré à ce stade de la théorie générale ; la notion de *grandeur de nombre* (Zahlengrösse) n'est définie que dans le quatrième chapitre, à partir de la division extérieure. Grassmann souligne cette anticipation en écrivant :

> *Nous avons anticipé ici, pour donner tout de suite une vue d'ensemble, le concept du nombre dont il ne pouvait pas encore être question dans la science abstraite.*

(ibid., p. 29)

Le concept de nombre existe déjà dans la géométrie ; on peut donc s'attendre à ce qu'un concept analogue y corresponde dans la théorie des formes ; c'est ici un emploi caractéristique du modèle analogique. L'analogie permet de supposer que les propriétés vues dans le cadre géométrique anticipent des propriétés générales ; celles-ci seront d'autant plus facilement comprises qu'elles sont alors attendues.

Grassmann insiste encore ici sur le fait que ce modèle a un objectif uniquement pédagogique et, qu'en dépit de la présentation adoptée, sa théorie sera indépendante de la géométrie ; cependant, on peut supposer que cette indépendance subsistera difficilement.

L'exemple de Peano que nous allons examiner maintenant va nous montrer d'une part l'importance de l'influence du modèle géométrique chez un lecteur de Grassmann, mais aussi, d'autre part, des facteurs qui permettent de limiter l'influence du modèle à l'analogie cherchée.

3.3 Peano

L'œuvre de Grassmann, d'un abord difficile, sera l'objet de critiques comme celle de Apelt, écrivant à Möbius :

> *Le caractère essentiel de la connaissance mathématique, l'intuition, en semble être complètement bannie. Une telle Ausdehnunglehre abstraite, telle qu'il l'a cherchée, pourrait être développée uniquement à partir des concepts. Mais la source de la connaissance mathématique ne repose pas sur des concepts mais sur l'intuition.*

(Apelt, cité par Flament 1994, p. 13)

Cette remarque semble indiquer que les efforts déployés par Grassmann pour soutenir l'intuition de son lecteur n'ont manifestement pas atteint leur objectif (Möbius répondra d'ailleurs à Apelt qu'en effet, l'aspect intuitif fait totalement défaut à l'Ausdehnunglehre).

Mais cette réaction était marginale ; en fait, l'Ausdehnunglehre fut essentiellement méconnue.

L'un des premiers mathématiciens à avoir pris la défense de Grassmann, et tenté de faire connaître la théorie de l'extension est Peano. Il publie en 1888 : *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnunglehre di H. Grassmann*, livre dans lequel il développe la théorie de Grassmann restreinte au cadre géométrique.

Calcolo geometrico

Dans la préface du *Calcolo geometrico*, Peano explique ce qu'est selon lui le calcul géométrique, et quels sont les objectifs de son livre. Il écrit notamment :

Le calcul géométrique présente des analogies avec la géométrie analytique ; ils diffèrent en ceci que, tandis qu'en géométrie analytique le calcul se fait sur des nombres qui déterminent les objets géométriques, dans cette nouvelle science, le calcul s'effectue sur ces objets eux-mêmes. (Peano 1888, préface p. V)

Peano mentionne alors le projet de caractéristique géométrique de Leibniz ; en fait, le projet de Peano est bien en deça de celui de Leibniz ; ce dernier avait pour objectif de fonder une nouvelle géométrie, ce qui n'est pas le cas de Peano comme nous le verrons ci-dessous.

Peano cite également Möbius, Bellavitis, Hamilton et Grassmann. Il ajoute que la théorie de ce dernier contient toutes les autres, mais que son degré d'abstraction a empêché jusque-là sa diffusion, et même celle de ses applications à la géométrie ; d'où l'objectif du livre :

L'objectif du présent livre est de les (les applications à la géométrie) *exposer directement, et sous une forme accessible à tous ceux qui connaissent les fondements de la géométrie et de l'algèbre*[1]*, basée sur quelques notations tirées de l'Ausdehnunglehre, et d'en développer les principales conséquences.* (ibid. p. VI)

L'essentiel est annoncé dans cette citation : Peano veut présenter les applications à la géométrie de la théorie des formes, d'une manière qui soit accessible au lecteur.

Mais le calcul géométrique n'a en aucun cas pour objectif de fonder la géométrie ; au contraire les fondements de la géométrie apparaissent comme des prérequis. Il ne s'agit donc pas ici de la partie " géométrique " de l'Ausdehnunglehre, dans laquelle nous avons vu que la géométrie jouait plusieurs rôles ; dans ce livre, la géométrie est une science indépendante de la théorie des formes et n'apparaît pas comme application de celle-ci.

Il paraît également clair, à la lecture de cette citation, que la part de la théorie des formes qui sera présentée sera très restreinte ("quelques notations"). Il ne s'agit pas ici d'appliquer à la géométrie une théorie plus vaste, exposée préalablement ou supposée connue ; dans ce livre, Peano ne définira les objets de la théorie des formes que dans le cadre géométrique.

Ainsi, il définit les formations de première espèce comme les expressions de la forme $mA + nB + \ldots$ (A, B, ... sont des points, et m, n, ... sont des réels) et les vecteurs comme les formations de première espèce de la forme $B-A$ (c'est-à-dire de masse nulle).

De même les formations de seconde espèce sont les expressions de la forme $ma+nb+\ldots$ où a et b sont des lignes ; pour la troisième espèce a et b représenteront des surfaces et pour la quatrième des volumes. Les opérations définies par Grassmann : somme, produit extérieur, produit descendu, etc... sont présentées sur ces objets.

Seul, le dernier chapitre du livre propose une approche très générale et originale.

Dans ce chapitre, Peano propose une définition axiomatique des *systèmes linéaires*, c'est-à-dire des espaces vectoriels. Nous allons examiner ici le contenu de ce chapitre et essayer de préciser, en particulier, le rôle qu'y joue la théorie géométrique que Peano a développée dans les chapitres précédents.

Le calcul géométrique et les systèmes linéaires : contenu du chapitre IX du *Calcolo geometrico*

La définition axiomatique de système linéaire porte uniquement sur les propriétés des lois ; elle ne comporte aucun vocabulaire géométrique, tout comme les définitions de dépendance et de dimension données ensuite. Rien ne peut laisser supposer que ces définitions proviennent d'une quelconque analogie avec la géométrie. En revanche, les exemples qui suivent sont essentiellement tirés du *calcul géométrique* : si Peano cite les nombres réels et complexes, il met surtout l'accent sur les formations d'espèce quelconque de l'espace, les formations de première espèce d'une droite ou du plan, les vecteurs d'un plan ou de l'espace ; il signale que l'ensemble des points de l'espace ne constitue pas un système linéaire.

[1] C'est nous qui soulignons

A la fin du chapitre, dans la partie intitulée *Applications*, Peano donne également l'exemple des polynômes : l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un système linéaire de dimension $n+1$, l'ensemble de tous les polynômes est un système linéaire de dimension infinie. On peut se demander si cet exemple, placé en dehors de l'exposé de la théorie, n'est pas plutôt relié à la fin du chapitre, qui appartient au champ de l'analyse.

Le vocabulaire du calcul géométrique est utilisé pour la première fois avec la définition des coordonnées ; d'ailleurs, Peano souligne que la notion qu'il définit dans un cadre général coïncide, pour les formations de première espèce d'une droite, pour les vecteurs d'un plan, etc., avec la définition de coordonnée vue auparavant.

La donnée de cette définition marque le début de l'emploi d'analogies avec ce qui a été vu dans les chapitres précédents, c'est-à-dire dans le cadre géométrique. Il est clair que les coordonnées permettent d'étendre automatiquement tout résultat portant sur des objets géométriques appartenant à un système de dimension n a des objets généraux appartenant à un système de la même dimension. Mais elles permettent également de s'affranchir des limitations de dimension attachées aux objets géométriques.

Ainsi Peano va pouvoir parler de limite dans un système linéaire ; en fait, il semble que l'objectif principal de l'auteur dans ce chapitre soit de généraliser le calcul infinitésimal à des fonctions allant d'un système linéaire dans un autre, ce qui explique le titre du chapitre : *Trasformazioni di sistemi lineari.*

Il va utiliser pleinement l'analogie permise par les coordonnées pour définir les dérivées successives, l'intégrale d'un *élément variable d'un système linéaire, fonction d'une variable réelle* en écrivant simplement que les définitions données et les théorèmes démontrés dans les chapitres précédents sont directement applicables.

Il donne ensuite la définition d'application linéaire et les opérations sur les applications linéaires ; il souligne qu'il dispose alors d'un nouvel exemple de système linéaire : l'ensemble des applications linéaires d'un système A dans un système B.

Cette présentation est encore motivée par le même objectif de calcul différentiel : les opérations sur les applications linéaires vont lui permettre de définir l'exponentielle d'une application linéaire R et de donner la solution d'une équation différentielle $y'=Ry$, où y est une fonction de $\mathbb{R}$ dans un système linéaire quelconque.

Origine des systèmes linéaires et influence du modèle géométrique

Le dernier chapitre du *Calcolo geometrico* n'est pas entièrement déconnecté des précédents : des exemples y sont donnés, des analogies faites en utilisant ce qui a été vu auparavant. Toutefois, ce chapitre reste à part dans le livre, et il n'est pas une conséquence *naturelle* des autres, comme l'écrit Dorier :

Si on ne connaît pas le travail de Grassmann, il est difficile d'imaginer comment le dernier chapitre a pu être issu des seules idées développées auparavant, même si Peano s'applique à montrer comment ce qu'il a présenté de la théorie de Grassmann peut a posteriori s'interpréter dans l'approche axiomatique. De fait, l'approche axiomatique *proposée par Peano est issue autant de sa lecture de l'Ausdehnunglehre que de ses propres travaux et réflexions autour des questions de logique et de formalisme en mathématique*. (Dorier 1997, p. 63)

En effet, la portée du calcul géométrique présenté par Peano est beaucoup trop limitée pour permettre une approche aussi générale et il semble que l'origine de celle-ci, et de la présentation axiomatique, soit plutôt à chercher dans les travaux de Grassmann.

L'intérêt de Peano pour le calcul différentiel lui permet également de donner à la suite de cette présentation des exemples et propriétés sortant du cadre purement géométrique.

Le calcul géométrique développé dans les premiers chapitres servira alors de modèle analogique pour ces propriétés générales ; mais l'analogie, comme nous l'avons vu, porte sur les coordonnées dans une base. Ainsi le modèle sous-jacent, pour la partie géométrique comme pour la théorie générale, est simplement celui de $\mathbb{R}^n$, ce qui est paradoxal pour un livre dont l'objectif affiché était de présenter un calcul géométrique intrinsèque

3.4 Analyse fonctionnelle : Fréchet et Schmidt

3.4.1 Espaces topologiques et espaces normés

En 1906, Maurice Fréchet développe dans sa thèse une première approche des espaces fonctionnels topologiques, sans toutefois se pencher sur la structure algébrique de ceux-ci.

Espaces topologiques et espaces normés

C'est autour de 1920 que seront données indépendamment par Wiener, Hahn et Banach les premières définitions axiomatiques d'espaces vectoriels (ou affines) normés.

Wiener, Hahn et Banach manifestent une volonté d'unification de différents champs fonctionnels qui les conduit à établir des listes d'axiomes. L'exposé de ceux-ci est suivi d'exemples géométriques, mais le rôle éventuel de la géométrie, notamment dans le choix des axiomes, n'est pas explicité.

Fréchet reprend vers 1925 les définitions axiomatiques citées ci-dessus ; en 1928, il publie un ouvrage intitulé *Les espaces abstraits et leur théorie générale considérée comme une introduction à l'analyse générale*, dans lequel il donnera notamment une définition d'espace vectoriel normé s'inspirant de celles citées ci-dessus. Dans cet ouvrage, Fréchet dresse un bilan d'une partie importante de ses recherches, assorti de commentaires sur sa démarche. L'intuition géométrique y joue un rôle fondamental et significatif pour notre étude ; c'est pourquoi nous allons nous pencher plus précisément sur le contenu de ce livre.

Le rôle attribué à l'intuition est précisé dans la préface du même ouvrage, dans laquelle Fréchet fait siennes les opinions de plusieurs mathématiciens. Il cite notamment Moore :

> *L'existence d'analogies entre les traits principaux de diverses théories implique l'existence d'une théorie générale dont ces théories particulières ne sont que des rameaux et qui les unifie en ce qui concerne ces traits principaux*. (Moore, cité par Fréchet, 1928, p. 16)

En rapprochant ces propos de l'approche de Fischbein, on peut les interpréter en disant qu'en présence de deux théories mathématiques, dont l'une peut jouer pour l'autre le rôle de modèle analogique, il est légitime de supposer l'existence d'un modèle théorique commun au deux. Ici, il existe différents modèles pour lesquels l'auteur va tenter d'élaborer une théorie commune : celui des suites, celui des fonctions ...

Mais les analogies entre ceux-ci, en l'absence d'un modèle géométrique, n'auraient sans doute pas pu suffire comme facteurs d'intuition ; en effet, et comme nous l'avons déjà noté plus haut, seul le modèle géométrique, par son lien direct avec l'espace physique, offre au raisonnement un support d'apparence concrète, ce qui est essentiel pour l'intuition.

Choix d'un modèle géométrique

Comme nous l'avons dit ci-dessus, Fréchet dispose de différents objets mathématiques : fonctions, suites, ... mais ceux-ci ne suffisent pas à dégager une structure générale et il va utiliser un modèle géométrique. Il semble que Fréchet soit d'abord conduit à ce modèle par des aspects analytiques des objets qu'il étudie, aspects qui suggèrent un rapprochement avec les coordonnées. Il écrit dans sa thèse :

> *On peut considérer les nombres de la suite qui définit chacun de ses éléments comme les coordonnées de cet élément envisagé comme un point d'un espace (E_ω) à une infinité dénombrable de dimensions. Il y a plusieurs avantages à opérer ainsi. D'abord l'avantage qui se présente toujours quand on emploie le langage géométrique si propice à l'intuition par les analogies qu'il fait naître*. (Fréchet 1906, p. 39)

Ainsi la notion de coordonnées conduit à l'emploi d'un langage géométrique, et suggère donc des analogies avec la géométrie. L'importance du modèle géométrique va être renforcée par deux éléments essentiels.

D'abord, si Fréchet mentionne dans un premier temps les coordonnées, il écrit aussi :

> *C'est un artifice inutile de substituer à la fonction une suite infinie de nombres, qui, d'ailleurs, peut être choisie de plusieurs façons*. (Fréchet 1928, p. 5)

Il souhaite donc développer une approche synthétique ; or cette dualité analytique/synthétique existe déjà en géométrie (où elle est même fondamentale !).

Un rapprochement avec la géométrie, même basé sur une analogie d'origine analytique, permet donc de supposer l'existence d'une telle approche synthétique des fonctions.

D'autre part, Fréchet souhaite donner un sens au mot *près*, et ceci entre des éléments de diverses natures. Il est donc naturel de considérer la référence de la géométrie, puisque c'est le seul domaine dans lequel ce terme ait un sens jusque-là.

S'il souligne l'utilité des analogies suggérées par la géométrie, Fréchet tente de maîtriser la place du modèle géométrique ; il indique bien que son intention n'est pas de fonder la géométrie, qui ne devra apparaître que comme *un produit dérivé de l'Analyse générale* ; il insiste également sur le fait qu'il obtient avec son analyse des résultats sur les fonctions, résultats indépendants de la géométrie.

Emploi du modèle géométrique par Fréchet

L'emploi du modèle géométrique, et du langage associé, vont permettre à Fréchet d'atteindre ces différents objectifs.

Comme nous l'avons vu dans une des citations données ci-dessus, les fonctions (ou les suites), vont pouvoir ainsi être considérées comme les *points d'un espace*. Ce point de vue est fondamental ; la fonction acquiert ainsi un statut d'objet, élément d'un espace dont il convient de déterminer les propriétés, la structure. Mais avant même la recherche de cette structure, un autre aspect central est dégagé : c'est la possibilité de considérer des transformations de l'espace considéré. Ainsi, Fréchet souligne le fait que, si l'on considère une suite comme un point d'un ensemble, la somme de la série associée apparaît comme une *fonction de point* ; ceci permet de se pencher sur des fonctions de fonctions, dont le rôle sera primordial en analyse.

L'aspect *transformations* est fondamental dans l'œuvre de Fréchet ; lorsque celui-ci donne, en 1928, une définition axiomatique d'espace affine abstrait (s'inspirant des travaux de Banach et de Wiener), il mentionne aussitôt la possibilité d'effectuer dans ces espaces des translations et des homothéties.

Une autre notion fondamentale est celle de *distance* ; le modèle géométrique a joué un rôle déterminant dans l'élaboration de cette notion.

> *Ne pourrait-on, sans essayer d'introduire une distance géométrique, conserver l'avantage de brièveté que présentait l'emploi de la distance en repérant le degré de petitesse du groupe de nombres dont nous avons parlé au moyen d'un seul nombre ?* (Fréchet 1928, p. 55)

Fréchet cherche une définition *intrinsèque* de distance, c'est-à-dire une définition qui ne repose pas sur les coordonnées. Il propose d'abord différentes expressions utilisant les coordonnées, et aboutit à quatre caractéristiques communes (Fréchet 1928, p.55) :

1) $PQ=QP \geq 0$.

2) PQ n'est nul que si P et Q ne sont pas distincts.

3) P et Q sont proches quand PQ est petit.

4) $PQ \leq PR+RQ$.

On note qu'il subsiste dans cette définition une composante intuitive : la propriété 3) dépend en effet entièrement du système étudié. Cependant Fréchet est parvenu, tout en utilisant l'analogie avec la géométrie qui le guide vers une notion de proximité *intrinsèque*, c'est-à-dire caractérisée par un seul nombre, à se détacher de la distance euclidienne ; il souligne que celle-ci n'a aucune raison d'être préférée à une autre en dehors du cadre géométrique.

L'approche de Fréchet demeure essentiellement topologique ; de ce point de vue, les travaux que nous allons examiner maintenant ont un apport plus important que ceux de Fréchet en ce qui concerne la structure linéaire.

3.4.2 Les espaces de Hilbert

Entre 1900 et 1910, les équations intégrales donnèrent lieu à de nombreux travaux, en particulier ceux de Hilbert. Hilbert utilise pour cette étude une méthode inspirée des travaux de Fredholm et consistant à ramener la résolution de certaines équations intégrales à celle d'un système linéaire infini, en utilisant un système orthogonal de fonctions.

Hilbert lui-même n'emploie pas au début de ses travaux le terme orthogonal : ce terme est en fait introduit par Schmidt. La méthode de Hilbert, basée sur l'analogie avec la dimension finie (et en particulier sur les propriétés des formes quadratiques) reste délibérément très analytique et ne comporte pas de point de vue géométrique. Bien que l'apport de Hilbert soit fondamental pour ce champ de problèmes, il reste limité car il lui manque un point de vue unificateur, point de vue qui se dégagera de travaux se basant sur ceux de Hilbert, comme le travail de Schmidt que nous allons examiner maintenant.

Dans sa thèse, soutenue en 1905, Schmidt développe une généralisation de résultats dus à Hilbert, mais en utilisant une approche et un vocabulaire géométriques. Il y introduit, pour des fonctions de carré sommable, les notions d'orthogonalité et de norme, et donne, dans ce cadre, des propriétés analogues à des propriétés géométriques connues.

Dans un texte publié en 1908, Schmidt propose une approche semblable pour les suites de carré sommable (qu'il nomme *Funktion*). Il définit un produit scalaire entre deux telles suites (il n'emploie pas le terme produit scalaire), la norme associée, l'orthogonalité. Il montre la généralisation du théorème de Pythagore, dont il déduit que des suites orthogonales sont linéairement indépendantes.

Après avoir défini la convergence forte, Schmidt considère, parmi les ensembles de suites fermés, ceux qui ont la propriété de stabilité par combinaison linéaire (*lineares Funktiongebilde*) et, plus particulièrement encore, ceux qui pourront être munis d'une base formée d'un ensemble infini, mais dénombrable, de suites.

Schmidt définit l'orthogonalité de deux *lineare Funktiongebilde* et signale que dans le cas où l'on dispose d'une base, une suite sera orthogonale au sous-espace correspondant si et seulement si elle est orthogonale à chacune des suites de la base.

Il montre alors que toute suite D peut se décomposer en somme d'une suite appartenant à un ensemble linéaire de suites (*lineare Funktiongebilde*) A de base donnée et d'une suite orthogonale à cet ensemble (il n'emploie pas ce terme), nommée *Perpendikelfunktion*. En appliquant le théorème de Pythagore généralisé, il prouve que la norme de la *Perpendikelfunktion* réalise le minimum des normes des différences entre D et un élément de A, minimum qu'il désigne comme l'*éloignement* (*Entfernung*) de D à A, sans faire toutefois référence à la notion de distance (Schmidt, 1908).

L'analogie avec la géométrie est constante dans l'approche de Schmidt ; elle repose sur l'emploi du langage géométrique (dans une note à son article publié en 1908, Schmidt dit qu'il tient cette présentation géométrique de Gehrard Kowalewski). Schmidt écrit que la signification géométrique est encore plus claire, si l'on considère une suite comme un vecteur dans un espace de dimension infinie ; cependant, il n'emploie dans l'article ni le terme de vecteur, ni celui d'espace (*Raum*).

Schmidt reste, dans sa thèse, dans le cadre des fonctions, et dans l'article mentionné ci-dessus, dans le cadre des suites. Il utilise (sans détailler de quelle manière) le modèle géométrique dans chacun de ces cadres. L'analogie repose au départ sur les notions d'orthogonalité et de norme ; ce qui est fondamental dans l'approche de Schmidt et distingue celle-ci, par exemple, des travaux de Riesz, c'est qu'elle conduit à prendre en compte la structure linéaire.

Les problèmes d'indépendance linéaire sont posés très tôt ; la notion de base et celle d'ensemble linéaire de suites sont centrales.

Schmidt n'a pas l'ambition de développer une théorie générale comme celle de Fréchet ; le langage géométrique lui sert comme support à l'intuition dans les cadres qu'il considère, mais il ne cherche pas à obtenir des résultats qui pourraient s'appliquer en dehors de ces cadres.

Par ailleurs, la dualité analytique/synthétique n'est pas un élément central de l'analogie chez Schmidt ; la mise en rapport des suites et des fonctions n'apparaît pas chez lui ni comme objectif ni comme conséquence de l'emploi du modèle géométrique.

Conclusion

Cette présentation succincte de notre étude nous a permis de constater que l'intuition géométrique a joué un rôle déterminant dans la genèse de l'algèbre linéaire, intervenant à tous les stades du développement de la théorie, et de manières très diverses selon les époques, les auteurs, et les projets de ces auteurs.

Les recherches des mathématiciens dont le point de départ était de nature géométrique, comme Grassmann et Peano étaient soutenues par des projets philosophiques qui ont permis à chacun de ces auteurs de dépasser les limites du modèle géométrique qu'il employait, en particulier celle attachée aux trois dimensions de l'espace. Mais les projets philosophiques qui ont nourri ces œuvres les ont rendues peu transmissibles, et l'impact de celles-ci resta limité.

Ce sont donc les approches issues de l'analyse fonctionnelle qui ont été déterminantes pour la théorie des espaces vectoriels et la diffusion de cette théorie.

Le modèle analogique géométrique employé dans ces travaux d'analyse fonctionnelle (issu d'une géométrie fort différente de celle qui servait de référence à Grassmann ou même à Peano), modèle dont nous avons cité ci-dessus les caractéristiques, joue donc un rôle fondamental en algèbre linéaire. Cependant ce modèle est plus naturellement associé à la notion d'espace vectoriel normé ou d'espace de Hilbert qu'à celle d'espace vectoriel.

Le lien algèbre linéaire-géométrie qui émerge de cette évolution est donc très complexe et il est légitime de supposer que l'emploi de la géométrie dans l'enseignement de l'algèbre linéaire va poser de nombreux problèmes d'ordre didactique.

Bibliographie

Bouligand G. (1944) *Les aspects intuitifs de la mathématique*, Paris : Gallimard.

Dorier J.L. (1996) Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'histoire des mathématiques 2* , p. 149-191.

Dorier J.L. et al. (1997) :*L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* Grenoble : La Pensée sauvage éditions.

Fischbein E. (1987) *Intuition in science and Mathematics, An Educational Approach,* Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Flament D. (1992) La *lineale Ausdehnuglehre* (1844) de Hermann Günther Grassmann, in *1830-1930 : A Century of Geometry : Epistemology, History and Mathematics,* Lecture notes in Physics vol. 402, Berlin/New York/Paris : Springer, p. 205-221.

Flament D. (1994) *Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, la lineale Ausdehnunglehre,* Paris : Blanchard. Traduction préfacée de (Grassmann 1844).

Fréchet M. (1928) *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale,* Paris : Gauthier-Villars ; rééd, 1951.

Grassmann H. (1844) *Die lineale Ausdehnunglehre*, Leipzig : Otto Wigand.

Hilbert D. (1912) *Grunzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen,* Leipzig/Berlin : Teubner ; rééd. 1924 ; New-York : Chelsea, 1953.

Klein F. (1898) *Conférence sur les mathématiques*, Paris : Hermann.

Leibniz G.W. (1995) *La caractéristique géométrique*, trad. J. Echeverria, Paris : Librairie philosophique J. Vrin.

Moore G.H. (1995) The axiomatization of Linear Algebra : 1875-1940, *Historia mathematica* 22 , p. 262-303.

Peano G. (1888) *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnuglehre di H. Grassmann e precedunto dalle operazioni della logica deduttiva,* Torino : Fratelli Bocca Editori.

Peano G. (1958) *Opere Scelte*, vol I, II, III, Roma : Edizioni Cremonese.

Poincaré H. (1902) *La science et l'hypothèse*, Paris : Bibliothèque de philosophie scientifique.

Poincaré H. (1905) *La valeur de la science*, Paris : Bibliothèque de philosophie scientifique.

Schmidt E. (1907) Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 1, *Math. Ann.* 63 , p. 433-467.

Schmidt E. (1907) Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, partie 2, *Math. Ann.* 64 , p. 161-174.

Schmidt E. (1908) Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Palermo* 20, p. 53-77.