

- le carré inférieur a 10 boulets de côté ;
- le carré inférieur a  $n$  boulets de côté.

### ▲ Piles à bases triangulaires

Une pile à base triangulaire se compose de boulets arrangés en forme de triangles équilatéraux superposés de manière à former une pyramide.

Si le triangle inférieur a  $n$  boulets de côté, celui au-dessus en a  $n-1$ , le suivant  $n-2$  et ainsi de suite, de telle sorte que la pile se termine par un seul boulet.

Calculer le nombre total de boulets contenus dans une pile triangulaire lorsque :

- le triangle inférieur a 5 boulets de côté ;
- le triangle inférieur a 10 boulets de côté ;
- le triangle inférieur a  $n$  boulets de côté.

## 5.9 Fractions et suites

On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{n}{2^n}$ .

Les numérateurs des  $n$  fractions forment une suite arithmétique finie de premier terme égal à 1 et de raison  $r = 1$ , alors que les dénominateurs forment une suite géométrique finie de premier terme égal à 2 et de raison  $q = 2$ .

Exprimer  $S_n$  uniquement en fonction de  $n$ .

Vérifier pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 3$  la formule obtenue.

### Bibliographie

- [Eule95] Euler L. (An trois ou 1795) *Elémens d'algèbre*, p. 322-411.
- [Eule96] Euler L. (An quatre ou 1796) *Introduction à l'analyse infinitésimale*, p. 81-82.
- [Laga75] Lagarias J. (1975) The  $3x+1$  problem and its generalizations, *American Mathematical Monthly*, janvier 1985, p. 3.
- [Macé62] Macé J. (1862) *L'arithmétique de Grand-Papa*, p. 42.
- [Poin27] Poincaré H. (1927) *La Science et l'Hypothèse*, p. 20-22.

# PENSER BEAUCOUP EN UN

Sergio Toledo Prats

Fondation Orotava des Canaries de l'Histoire des Sciences

Traduit de l'espagnol par Roseline Cases (IREM de Toulouse)

## Introduction

Un objectif possible de l'enseignement de l'Histoire de la Philosophie est que les élèves comprennent la naissance de la philosophie comme la construction collective d'un type de discours avec ses concepts, relations et usages rhétoriques. A ses débuts, le langage philosophique n'étant pas séparé du mythico-religieux, on peut rechercher l'origine des termes philosophiques à partir d'expériences rituelles ou techniques, de coutumes, de récits mythopoétiques ou de situations politiques, d'usages médicaux ou juridiques. Il est intéressant que les élèves constatent la relative unité et généralité du savoir philosophique de l'époque en comparaison avec la pluralité et la spécialisation des sciences actuelles, car je crois que nous partageons tous l'idée que l'interdisciplinarité est un des objectifs et avantages de l'Histoire des Sciences.

La connaissance historique, en plus d'expliquer le passé, sert à rendre compte du présent, en faisant prendre conscience de l'historicité de notre propre époque. Et vice-versa : dans l'enseignement de l'histoire des sciences, on ne peut esquiver le fait que les élèves ont certaines connaissances sur les sciences et, en conséquence, une idéologie implicite à son sujet. Ils nourrissent des croyances et perspectives, extraient des valeurs et des méthodes ; en définitive, nous savons que la science est aujourd'hui une des sources du sens de la vie. C'est pourquoi il ne me paraît pas approprié de réduire cette discipline à un système formel d'énoncés sur des objets et événements ou de présenter la science comme un système axiologiquement neutre dans un monde aseptique idéal. Il faut montrer que, dans l'Antiquité comme maintenant, la construction du savoir est travail et hasard, accumulation et crises,

transmission et polémique, qu'elle a lieu dans une société réelle, avec une politique, une économie et une légalité déterminées, et avec diverses idéologies.

## 1. Langue et Science

Il y a longtemps tomba entre mes mains un texte de Heisenberg (1955) où il exposait la possibilité que la forme ultime de la matière accessible à la connaissance humaine serait un vaste ensemble de particules élémentaires, et non quelques-unes seulement, comme la majorité des scientifiques semblait l'attendre. Cela me fit réfléchir sur la présence dans le langage scientifique de certains concepts et relations, qui ont eu une importance décisive dans l'histoire de la pensée : principe et fin, l'un et le multiple, cause et conséquence, corps, forme, limite, espace et vide, hasard et nécessité, être et devenir, vérité... Nous les utilisons comme poutres maîtresses dans l'échafaudage de la pensée et, par leur fréquence, ils ont généré des automatismes de la pensée, comme la croyance implicite que le fondamental est non seulement plus simple que ce qui en dérive, mais qu'il tend vers la simplicité absolue. Cette préférence pour le simple n'est pas spécifique à la science ; on la rencontre aussi dans la mythologie et la philosophie. Dans la plupart des cosmogonies mythiques, l'univers connu provient d'une divinité unique ou double, même dans les religions polythéistes. Les premières cosmologies des philosophes grecs sont unitaires et il faut attendre un siècle pour qu'apparaissent les théories physiques pluralistes.

La physique du XX<sup>ème</sup> siècle présente, heureusement, un aspect assez problématique. Les théories de la relativité et de la mécanique quantique, ainsi que l'impossibilité de les concilier, ont produit des changements notables dans la perception de l'univers, qui se sont transférés à d'autres territoires de la culture. C'est pourquoi il n'est pas étrange que, dans *La Nature et les Grecs*, Schrödinger explique qu'il avait étudié les philosophes présocratiques pour mieux comprendre la science actuelle, que Popper qualifie Einstein de Parménide en quatre dimensions, que les scientifiques redécouvrent de vieux thèmes philosophiques, comme Bohm avec sa distinction entre *ordre explicite* et *ordre implicite*, ou Wheeler en affirmant qu'en mécanique quantique :

*aucun phénomène n'est réel jusqu'à ce que ce soit un phénomène observé.*

Les avancées de la physique microscopique semblent avoir dilué le concept même de réalité :

*Mais les atomes et les particules ne sont pas si réels ; ils constituent un monde de potentialités, plutôt que des choses ou faits* (Heisenberg).

Sur le terrain macroscopique, la relativité récuse l'idée de simultanéité absolue et le propre concept de temps s'évapore : *Passé, présent et futur sont une illusion* (Einstein), *Le monde est, simplement, il n'advient pas* (H. Weyl). Quelques scientifiques maintiennent une épistémologie réaliste et affirment que les théories physiques et leurs formalismes mathématiques nous décrivent le monde tel qu'il est ; d'autres, plus avisés, adoptent une position instrumentaliste :

*Il est erroné de penser que la tâche de la physique consiste à découvrir comment est la Nature. La physique s'occupe de ce que nous pouvons dire au sujet de la Nature.*  
(Bohr)

Il est normal que devant ce panorama problématique beaucoup de scientifiques mettent leurs espoirs dans une future Théorie du Tout, soit la théorie du champ unifié, soit celle des supercordes. La physique spéculative de grande classe ne s'arrête pas au scepticisme. Pour la plupart des physiciens, la théorie du Big Bang est très vraisemblable et, avec le temps, continuera à se perfectionner. Certains critiques sont en désaccord pour des raisons physiques ou épistémologiques - comme Hoyle ou Feyerabend - et pensent qu'une telle théorie est un récit mytho-scientifique qui repose sur les lois locales de la matière dans notre région de l'Univers, augmenté de quelques observations, de multiples extrapolations et quelques rares prédictions. Je crois qu'il y a un parallélisme intéressant entre le Big Bang et la cosmologie milésienne, de laquelle nous parlerons aujourd'hui, et que sa dignité intellectuelle n'est pas meilleure que d'autres cosmogonies mythiques ou scientifiques, comme l'Œuf cosmique des orphiques ou les tourbillons cartésiens.

La mécanique quantique a été le terrain privilégié pour des interprétations plurielles et opposées : celle de Copenhague, celle d'Einstein et Schrödinger, les variables cachées de Bohm... Certaines questions fondamentales sont toujours en suspens. Doit-on interpréter la quantification comme discontinuité physique ou comme discontinuité mathématique ? Est-ce une question expérimentale ou statistique ? Que signifie la dualité onde-corpuscule ? Les propriétés de la matière sont-elles de simples potentialités statistiques ? Quel sens a la causalité dans la sphère quantique ? Est-ce un principe de localité qui y fonctionne ou y a-t-il l'action à distance ? Le vide est-il un champ rempli d'énergie ou un pur espace géométrique ? Oui ou non, le principe d'indétermination implique-t-il l'irruption de la subjectivité de l'observateur dans l'objectivité physique ? Ces thèmes ont popularisé divers paradoxes et expériences mentales, tels que la non-conservation de la simultanéité, le pseudo paradoxe des jumeaux de Langevin et la dilatation du temps, le chat de Schrödinger, le problème des fentes de Young. Des concepts ayant une longue tradition dans notre culture ont été remis en cause : espace, temps, réalité, matière, continu et vide, causalité et déterminisme, sujet et objet...

L'extension de la science est un facteur qui contribue à la prolifération de modèles alternatifs, tandis que l'accroissement de la communication entre scientifiques favorise la réduction et concentration d'alternatives. On a l'habitude de dire que la plupart des physiciens s'intéressent seulement à leurs travaux et sont insensibles à ces débats. Cependant, cette situation d'ambiguïté permet, à ceux qui apprécient la spéculation théorique, de concevoir des hypothèses et modèles suggestifs et extravagants, comme les univers parallèles de Everett ou la réinterprétation de Wigner de l'opposition macroscopique/microscopique comme matière/esprit, tandis que d'autres physiciens réclament l'urgence d'un changement linguistico-conceptuel. C'est le cas de Bohm, avec sa proposition de remplacer l'atomisme linguistique des langues occidentales par un nouveau langage qui décrive la réalité en termes d'une totalité fluide, le *reomodo*. En termes plus modestes, Bell a écrit :

*Il se pourrait bien qu'une réelle synthèse des théories quantique et relativiste n'ait pas besoin simplement de développements techniques mais d'une radicale rénovation conceptuelle.*

Le développement de la physique théorique a favorisé le développement de nouvelles techniques mathématiques, comme l'algèbre des matrices ou le calcul tensoriel, ainsi que des théories où physique et mathématique s'imbriquent presque totalement, comme la théorie des supercordes et la supersymétrie. En même temps, on accuse les physiciens d'avoir recours fréquemment à des artifices mathématiques ad hoc sans signification théorique pour résoudre des anomalies ; on a douté, par exemple, de la pertinence logique des techniques de renormalisation en théorie quantique des champs pour éviter que certaines variables prennent des valeurs infinies.

Ce panorama d'ambiguïté et de crise stable n'est pas l'exclusivité de la physique actuelle ; en chaque science, il a ses propres nuances. Dans les mathématiques, on rencontre une situation moins compromise. On y trouve les paradoxes auto référentiels de la théorie des ensembles ou le théorème d'incomplétude de Gödel. Les mathématiques intuitionnistes rejettent le principe du tiers exclu et le concept de l'infini, se déclarant partisans d'une épuration de l'activité et du langage des mathématiques. Les théorèmes obtenus par ordinateur ont remis en question le statut de la démonstration.

Quelques historiens des mathématiques ont essayé de relier celles-ci avec la structure du langage. De la même manière que l'on a mis en relation la philosophie occidentale de l'Être avec la structure prédicative du grec, ou la philosophie de concepts universels avec l'importance de la fonction nominale dans les langues indo-européennes, on a mis en relation l'algèbre des chinois avec leur écriture idéographique et le caractère particulariste de leurs mathématiques avec l'importance de la fonction verbale dans leur langue ; de même, on a mis en relation le caractère algébrique de la mathématique hindoue et l'écriture linguistique du sanscrit.

La nécessité d'une adaptation du langage aux nouveaux résultats de la science ne passe pas, selon ce que je crois, par l'illusion de créer un langage parfait, ni en termes algébriques (Lulio, Leibniz) ni de morphologie rationnelle (espéranto, volapuk) ; la langue est une construction sociale et, par conséquent, historiquement ambiguë, dès qu'elle implique la subjectivité de l'expérience de multiples individus et sa transmission dans le temps. Ainsi, le processus d'adaptation entre langage et science doit être une tâche permanente dont les effets ne peuvent être perçus qu'à long terme.

## 2. Nos ancêtres et les nombres

Diverses études éthologiques ont montré que des espèces animales beaucoup plus anciennes que l'homme disposent de la capacité de distinguer entre des quantités réduites. Nous pouvons supposer que c'est une qualité très utile, par exemple, pour le contrôle de la portée chez les espèces qui ont un petit nombre de nourrissons à chaque moment de l'élevage. Les études sur nos parents les plus proches, les primates, confirment leur capacité à reconnaître de petites quantités et des formes géométriques simples lorsqu'on leur fournit les stimulants adéquats. Nous pouvons, donc, partir de l'hypothèse que les hominidés d'il y a deux millions d'années, qui semble-t-il, vivaient comme chasseurs-cueilleurs en groupes stables de 30 à 50 membres, avaient la capacité de se reconnaître entre eux comme membres de la même communauté sans nécessité de postuler qu'ils auraient eu une idée de la quantité

d'individus qui la formaient. En effet, aujourd'hui encore notre capacité à percevoir avec exactitude des quantités d'objets semblables est très limitée. D'un simple coup d'œil, il est difficile de distinguer s'il y a six ou sept ânes dans le pré, quatre ou cinq mouches en train de voler au-dessus de nos têtes. Cette capacité perceptive quantifiante réduite a laissé des traces, encore de nos jours, dans des langues où les mots pour dénombrer se limitent à un, deux, trois et beaucoup. Je crois que nous pouvons raisonnablement nourrir la conviction que les progrès dans la distinction de la quantité n'ont pas dû se produire avant le développement du langage, processus que les paléontologues actuels, en étudiant l'évolution de l'appareil phonatoire des hominidés, estiment qu'il commença il y a 400000 ans au plus tôt et 100000 ans au plus tard.

Toute origine est mythique ; poursuivre l'origine est un rêve nébuleux dans lequel il faut se résigner à des approximations. Nous ne connaissons jamais l'origine du langage articulé ni celui des nombres, mais il m'en coûte de croire que les humains qui procédaient à des enterrements rituels il y a 70000 ans, n'auraient pas développé déjà certaines notions de quantité plus complexes que celles des primates actuels, bien qu'il n'y ait pas de preuves de cela. Les fossiles les plus anciens qui montrent de possibles usages numériques sont les os de Lebembo et ceux de Tchécoslovaquie, d'il y a 30000 ans, qui ont différents groupements d'encoches et paraissent avoir été utilisés comme archives de quantité. Quelques historiens contestent que ce système graphique de représentation de quantité ait une caractéristique numérique, puisqu'il n'y a pas de noms de quantité, mais ceci me paraît être un exemple de logo centrisme. Puisque des recherches récentes signalent que l'activité d'élevage a pu débuter en Afrique il y a 35000 ans, on a postulé que le premier développement des nombres fut lié à la nécessité de compter les troupeaux et que l'apparition postérieure de l'agriculture, il y a 15000 ans, ne fit que le renforcer.

L'hypothèse est plausible, quoique paraissant une extrapolation à partir de ce que nous savons sur l'apparition de l'écriture en Mésopotamie. Les tablettes les plus anciennes avec écriture, de type cunéiforme, provenant de la civilisation Sumérienne ont été datées du XXXIII<sup>ème</sup> siècle avant J. C. ; elles ne contiennent que des signes numériques et des signes représentant des moutons, des chèvres, des sacs de céréales... On croit qu'au milieu du quatrième millénaire avant J. C. l'écriture est apparue, à Sumer comme en Egypte, pour que l'État puisse enregistrer des quantités de biens agricoles et d'élevages, à des fins administratives. Ainsi, l'apparition de l'écriture serait liée à la constitution des empires antiques, caractérisés par la croissance démographique, le développement urbain et la centralisation du pouvoir.

Nous pouvons considérer l'opération de comptage par accumulation d'inscriptions sur un objet comme un système à base un. Par la suite, il évolua avec l'apparition des bases deux et cinq. On ne peut mettre en doute que la mise en valeur du nombre 2 se trouve liée à la division des sexes. Le sexe comme métaphore a été très puissant dans les civilisations antiques ; par exemple, les historiens ont recueilli de multiples mythes de sexualisation de la métallurgie, où l'on conçoit la terre enfantant les métaux dans ses entrailles ; chez les pythagoriciens, la lettre delta, symbolisait l'archégeneseos, principe générateur, triangle-vulve. On a trouvé de nombreux exemples du processus de comptage par accouplement dans des villages centrafricains, polynésiens, amazoniens et patagoniens. Leurs langues conservent dans la dénomination des nombres la trace de leur construction comme système de base 2.

Personne n'a contesté que l'emploi très répandu de la base 5, et ses extensions postérieures aux bases 10 et 20, ait son origine dans le fait que le calcul était digital. Diverses hypothèses ont essayé d'expliquer le choix Sumérien d'une base aussi élevée que 60 pour son système de numération. L'une d'elles considère que ce fut le résultat de la fusion de deux peuples, avec des numérations de base 5 et 12. Cette base 12 que nous, européens, utilisons encore dans des cadres restreints, a une origine plus obscure, car l'existence antérieure d'une base 6 n'est pas attestée, et elle pourrait découler de la relation entre année lunaire et année solaire.

Le succès d'une invention pourrait se mesurer par l'extension et la rapidité de sa diffusion ; il est certain que les développements concernant la mesure des quantités se diffusèrent rapidement à cause de leur utilité. Il y a des indices qui montrent que déjà au quatrième millénaire se serait répandu à travers différentes civilisations du Croissant Fertile un système métrologique élaboré par un peuple indo-européen et qu'il fut appliqué à diverses techniques, comme la fabrication de briques avec des mesures dans la proportion 1:2:4. De la même manière, le succès de l'écriture cunéiforme adoptée par les peuples voisins des Sumériens, traduit l'importance de pouvoir enregistrer des quantités de manière indélébile.

Les psychologues racontent que la première séparation qu'établit l'enfant - et il met des mois à la réaliser - est entre le soi et le non soi ; entre son corps et le monde extérieur. Chez les peuples les plus anciens, la séparation fondamentale s'établit entre nous - le groupe - et le reste. Compter, c'est unir : ceci implique de reconnaître que des choses distinctes sont aussi les mêmes ; à côté de l'altérité transparait l'unité, jeu de la différence et répétition. Compter, c'est aussi séparer. Séparer le distinct pour unir le même. Comment le berger primitif verrait-il le même et le distinct en comptant ? Pour compter un troupeau, verrait-il d'abord l'identique - que c'étaient des chèvres - ou le distinct - un ensemble d'individus ? Cette méthode de séparation et union, après des millénaires de perfectionnement, conduirait à la méthode par excellence de Platon : généralisation et division.

Poincaré et Brouwer pensaient que la conception des nombres entiers était le résultat de la perception, de l'intuition des choses sensibles ; Russell, par contre, considérait qu'il était né avec la pensée humaine, faisait partie de sa logique implicite. En étudiant empiriquement le développement intellectuel de l'enfant, Piaget arriva à une conclusion intermédiaire entre les positions antérieures : à partir de la manipulation de choses concrètes, l'enfant arrive à développer le schéma formel du nombre, principe de conservation de la quantité.

### 3. Un monde de dieux

Le regard des anthropologues du XIX<sup>ème</sup> siècle voulut voir dans le totémisme la réponse humaine au polymorphisme du monde, un mode de sélection d'êtres et de phénomènes naturels, élaboré en fonction de son intérêt spécifique pour le groupe humain, et sur lequel articuler les rites correspondants pour symboliser le rapport mutuel ; rites auxquels les mythes fournissent le sens verbal, moyen de conservation et de transmission. A ce point de vue, les anthropologues du XX<sup>ème</sup> siècle ont superposé une vision du totémisme comme système symbolique pour structurer des traits d'intérêt social tels que les relations de parenté. Faisant face à la vaste pluralité des êtres naturels et des relations sociales, l'homme répond en développant un esprit taxonomique qui essaye d'organiser le réel en le schématisant.

Peut-être la peur, comme émotion primordiale de l'homme devant un monde qu'il contrôle à peine, justifie-t-elle la divinisation de ces êtres et phénomènes naturels avec lesquels il reconnaît une relation de dépendance. Ainsi, en transformant les nécessités en rituels, l'homme se propose de dominer magiquement ces relations grâce à la répétition et d'en garder une mémoire historique. L'animisme, la phase la plus ancienne de la pensée religieuse, se caractérise par le fait d'attribuer à tout ce qui existe conscience et volonté. Cette projection de l'humain sur le monde indique la valeur qu'accorde l'homme à sa propre capacité perceptive et à sa capacité d'action comme formes essentielles de relation avec l'autre. Cette reconnaissance de la différence humain/ non humain, qui postule à la fois une communauté de sentiment et amour, dût s'accompagner d'un sentiment d'infériorité de l'homme vis-à-vis de la Nature. Ce doivent être l'invention de l'élevage et de l'agriculture, ainsi que le développement des techniques métallurgiques, qui marquèrent un changement de cap dans les relations symboliques de l'homme avec la Nature. La domestication des animaux, plantes et métaux, diminua la dépendance de l'homme quant à son habitat, favorisant son narcissisme.

Les sociétés à histoire les plus anciennes que nous connaissons, celles de la Mésopotamie et de l'Égypte, de la fin du quatrième millénaire, se trouvaient dans une phase avancée de transition de l'animisme au polythéisme. Leurs dieux ne sont pas encore pleinement humains, ils conservent des corps partiellement zoomorphiques ; quand le processus sera achevé, les traits animaux et végétaux se seront transformés en des symboles conventionnels qui accompagnent la représentation iconographique de dieux totalement humains. C'est le pas qui nous mène du serpent Tiamat, du faucon Horus, du singe Hanuman ou des anges ailés, à Dionisos avec sa coupe et ses pampres ou Héphaïstos avec son enclume. Le polythéisme suppose un accroissement de l'abstraction par rapport à l'animisme : l'événement s'est dédoublé en agent et action. Dieu n'est plus l'ibis, le palmier ou le fleuve ; maintenant il y a un dieu qui fait présent de l'arrivée des ibis, un autre qui fait fructifier le palmier et un autre qui accroît le fleuve. La manipulation technique est projetée sur la nature et modifie l'interprétation symbolique du monde.

On attribue au pharaon Amenhotep IV, au XIV<sup>ème</sup> siècle avant J. C., le premier essai connu de réduire le polythéisme au monothéisme, en instaurant le culte d'Aton comme dieu unique. Bien que sa tentative ait échoué, elle fut le signe précurseur d'un processus intellectuel culminant avec les philosophes grecs et les prêtres juifs, au VI<sup>ème</sup> siècle avant J. C. On a l'habitude de lier l'apparition du monothéisme au régime de monarchie dynastique où se réalise la propre divinisation du monarque. Cette séparation symbolique entre le roi et les sujets contribue à justifier que le pouvoir avec lequel il les gouverne soit le même pouvoir, solitaire et total, avec lequel le dieu unique dirige le cours des événements. Nous lisons dans Homère : *Le commandement de plusieurs n'est pas bon, celui d'un seul suffit.*

### 4. Mythologie, poésie, philosophie

Plutarque disait que la religion est la contemplation des mystères et la philosophie la contemplation de l'éternel. Le type de discours baptisé philosophie naît à l'intérieur du discours mythico-religieux et lentement s'en distancier ; il y a justement d'abondants éléments religieux chez les penseurs présocratiques. L'expérience religieuse peut s'exprimer

sous forme de récits mythiques, sentences oraculaires, poèmes chantés ou récités, ou de mises en scène comme la tragédie. L'expression poétique perdurera chez quelques-uns des premiers philosophes, comme Parménide et Empédocle ; par contre, les physiciens ioniens écriront en prose. Entre la poésie d'Homère et la prose de Thalès il y a l'énorme distance qui sépare un monde oral d'un monde avec une mémoire écrite ; c'est pour cela que l'on a dit que le genre philosophique naquit comme une forme nouvelle d'écriture.

En Grèce, depuis le VIII<sup>ème</sup> siècle avant J. C., la religion des dieux olympiens a un monument didactique : les poèmes homériques. Lorsque Homère invoque les Muses :

*Moi, je ne pourrai dire ni nommer la foule des héros qui allèrent à Troie,*

il sollicite l'inspiration divine pour réaliser son travail, égrener le récit d'un temps ancien dont les faits doivent perdurer comme leçon dans la mémoire du peuple hellène. Lorsque Hésiode, vers 700 avant J. C., réclame de même l'aide des Muses pour composer sa Théogonie, il est interpellé ainsi par celles-ci :

*Nous savons dire beaucoup de choses fausses qui résonnent comme des vérités, mais nous savons aussi, lorsque nous le voulons, dire la vérité.*

De cette façon, Hésiode se distancie d'Homère : son intention n'est pas de conter un récit émotif et édifiant avec dieux et héros, mais de donner une représentation logique des grandes réalités de la Nature symbolisées par les dieux : Terre, Eros, Cieux, Nuit, Jour... Ce lien de la vérité avec le divin se maintient comme une constante de la philosophie présocratique, avec de rares exceptions - comme les sophistes et Démocrite - et perdurera dans l'Académie platonicienne.

La cosmogonie hésiodique s'alimente à des sources babyloniennes, hittites et hourrites. Avec sa Théogonie, il prétend expliquer l'univers comme un Tout, dont le devenir échappe au pouvoir de l'homme, à qui il ne reste comme option que se soumettre. Hésiode situe l'origine dans le Chaos ; bien qu'il n'y ait pas unanimité sur sa signification, on l'interprète aujourd'hui comme l'espace vide, abîme primitif qui sépare la Terre de la voûte céleste, ou bien, l'acte de la séparation ; la version du Chaos comme désordre primordial fut un ajout stoïcien étranger à l'esprit de l'œuvre. L'action d'Eros, principe dynamique, en unissant la Terre et les Cieux (Gaïa et Ouranos) commence le cycle des générations divines. Dans cette œuvre bat un esprit monothéiste dont la finalité est de montrer le pouvoir de Zeus comme roi des Dieux et seigneur de la Nature. Ces trois éléments théogoniques, la recherche de l'origine, le dynamisme d'Eros et la tendance monothéiste, continueront à être présents dans les cosmologies de beaucoup de penseurs présocratiques qui, en général, possèdent certains éléments communs :

- L'analogie entre le Cosmos, ordre céleste, et la polis, ordonnée par les lois. Le terme cosmos vient du verbe kosmein, disposer l'armée en formation de combat, ce qui indique une projection de l'ordre politique sur les cieux.

- L'hylozoïsme, la croyance que tout ce qui est naturel est vivant ; on ne fait pas de différence entre monde animé et monde inanimé. La physis est l'ensemble du vivant, terrain de la reproduction et engendrement, totalité vivante.

- La considération des événements naturels comme des actions intentionnelles, ce qui montre à la fois une survivance animiste et une projection du psychisme humain sur la Nature.

## 5. Les philosophes présocratiques

### 5.1 Thalès de Milet (625-545 env.)

Ce n'est pas un hasard que la philosophie soit apparue à l'est de la Grèce, en Ionie, zone en contact permanent avec les cultures orientales et l'Égypte. La thèse la plus célèbre de Thalès, que le monde est fait d'eau, a été mise en relation avec des mythes babyloniens (Marduk et Tiamat), égyptiens (le dieu Nun) et hittites, et avec des mythes grecs archaïques sur le dieu Océan, dont on trouve encore des échos dans Homère et Hésiode. Mais, d'après Thalès, il n'est plus question simplement que la Terre et les cieux aient émergé des eaux primitives. Son caractère rationaliste consiste à comprendre la physis comme un processus dynamique, à partir d'un état originel. Son génie réside à réduire la multiplicité de ce qui existe, avec sa gamme variée de différences, à l'unité de l'eau. Ici il ne s'agit pas de passer du semblable à l'un, comme pour nommer, sinon du distinct à l'un. Unité qui n'est pas cachée, mais qui montre son importance parmi les autres choses. L'eau se transforme en modèle de changement, ce d'où tout provient et à quoi tout retourne. Thalès n'a pas dû expliquer le mécanisme concret de transformation de l'eau en les autres choses, car il subsisterait quelques traces chez des auteurs postérieurs, et il est possible qu'il se soit limité à signaler le dynamisme de l'eau, observable dans la pluie et les chutes de neige, ou dans les marées, qu'il rendait responsables de tremblements de terre. Lorsque Thalès affirme que tout est rempli de dieux, il affranchit la physis de la tutelle des dieux olympiques, en affirmant que chaque chose contient en elle-même - et non à l'extérieur - les principes de sa nature, de son dynamisme ; il renforce ainsi l'unité et l'autonomie des êtres physiques.

Quelques auteurs présentent Thalès comme un voyageur à l'esprit pratique qui, au cours de ses séjours pour raisons commerciales dans des villes de Mésopotamie, d'Égypte et de Phénicie, apprit diverses techniques qu'il introduisit chez les ioniens, comme prédire une éclipse de soleil à partir de tables astronomiques babyloniennes, mesurer la hauteur d'une pyramide en comparant la mesure de son ombre à celle d'un objet de hauteur connue, mesurer la distance d'un bateau en haute mer à un port et naviguer suivant les étoiles. Mais, pour la plupart d'entre eux, Thalès est, surtout, l'inventeur de la science géométrique. Pêchant par eurocentrisme, les historiens situent avec Thalès le début de la science mathématique, parce qu'ils en acceptent pour définition le modèle axiomatique-déductif, qui prit forme dans la culture hellène depuis (Enopide jusqu'à Euclide. L'exigence d'abstraction, de démonstration, de règles générales et de précision, supposait la dévaluation de la mathématique pré-grecque, pratique, algorithmique, particulière et approximative. Quoi qu'il en soit, avec Thalès, la mathématique initie sa transition de l'empirique vers la théorie, passe de son usage technique dans la polis, à une spéculation sur le monde ; en dépassant sa simple manipulation magique et technique, on commence à élaborer une nouvelle image de la nature.

Les théorèmes attribués à Thalès par la tradition semblent indiquer que leurs démonstrations étaient basées sur la symétrie ou superposition de figures. Je m'arrêterai

seulement sur la division d'un cercle par son diamètre en deux moitiés égales. Le multiple et l'un s'y présentent de deux manières :

- Le centre est un point unique comparé à la multiplicité des points que l'on peut déterminer sur le cercle ; il est le point qui définit, précisément, lesquelles de toutes les cordes possibles sont diamètres. Grâce au centre, tous les diamètres sont le diamètre.

- Tous les cercles sont le cercle ; la pluralité de taille des cercles est réduite à l'unité de sa forme grâce à la définition de ses propriétés.

Deux conditions nécessaires pour pouvoir considérer comme démonstration ce saut depuis les nombreux cercles empiriques à l'idée unique de cercle.

Thalès conseilla aux ioniens qu'il y ait un seul lieu pour l'assemblée politique et qu'elle soit à Téos, ville située au centre de l'Ionie. Nous pouvons y voir un retour de la théorie à la polis, un exemple appliqué des vertus de la théorie.

## 5.2 Anaximandre de Milet (610-545 env.)

Dans la cosmologie d'Anaximandre, l'Un se présente en forme du Tout, qu'il nomme Apeiron, terme qu'Homère appliquait à la mer sans limite et à la terre qu'on ne finit jamais de parcourir. Il semble qu'avec ce terme, il voulait signifier à la fois l'illimité et l'indéterminé. Illimité veut dire absence de limites spatiales, de forme externe. Indéterminé veut dire absence de limites internes, de séparations. C'est pourquoi l'Apeiron ne peut avoir de qualités qui appartiennent seulement aux choses concrètes. En ce sens, l'Apeiron, est à la fois Tout et Rien, puisque concept théorique construit grâce à la négation des qualités sensibles. C'est peut-être la première préfiguration de ce qu'Aristote appellera matière première, sauf que celle-ci n'avait qu'une existence virtuelle.

La principale différence avec Thalès consiste à ne pas avoir choisi un élément empirique comme principe de la physis. L'Apeiron est l'environnant caché, réservoir inépuisable d'où provient tout le présent ; il est immortel et indestructible, ensuite divin ; il n'a pas été généré, mais génère toutes les choses. Le processus cosmique commence grâce à la séparation du Feu et de la Brume (air humide). Comme Anaximandre affirme que l'Apeiron embrasse toutes les choses, nous devons comprendre que la séparation se passe intérieurement. Quelques auteurs ont cru qu'une telle séparation se produisait à partir d'un mouvement de rotation de l'Apeiron, bien qu'il n'y ait aucun indice textuel de cela. L'hypothèse est plausible, car la plupart des présocratiques ont considéré que le mouvement était un principe fondamental, quelque chose qui existait depuis toujours et il n'y avait pas à expliquer son origine, puisqu'il n'en avait pas. Une autre possibilité est qu'Anaximandre ait conçu une telle séparation comme le début du mouvement, ce qui rapprocherait l'Apeiron du Chaos d'Hésiode. Des commentateurs anciens lui attribuèrent la doctrine selon laquelle l'Apeiron génère beaucoup de mondes, bien qu'il n'y ait pas là non plus de références textuelles. L'idée de mondes multiples successifs est compatible et cohérente avec la notion d'Apeiron ; l'idée de mondes multiples coextensifs que d'autres commentateurs ont défendue paraît moins raisonnable.

Tandis que Thalès pensait que la Terre était plate et l'univers semi-sphérique, Anaximandre semble avoir été le premier grec qui parle d'un univers sphérique. Malgré cela il conserva l'idée archaïque que la Terre était cylindrique. Son intérêt pour les mathématiques se

voit dans sa carte du ciel, la première en Grèce, où il ordonna proportionnellement les distances à la Terre des anneaux du soleil, 27 diamètres terrestres, de la lune, 18 diamètres terrestres, et des étoiles, 9 diamètres terrestres.

Je veux attirer l'attention sur une idée que je considère d'origine mathématique et extrapolée à la physis. Selon Anaximandre, la Terre se trouve fixe au centre de l'Univers parce qu'elle est en équilibre. Là apparaît l'idée du centre comme *un*, distinct du reste de multiples lieux, comme on l'a vu dans la géométrie de Thalès ; trois siècles plus tard, ce sera Archimède qui développera cette idée féconde en reliant la géométrie et la statistique des solides, anticipant avec la notion de centre de poids l'idée de centre de gravité.

## 5.3 Anaximène de Milet (585-520 env.)

La cosmologie d'Anaximène situe l'Air comme principe fondamental de tout ce qui existe. Comme pour le cas de Thalès et de l'eau, il y a aussi des précédents dans la mythologie, par exemple, la théogonie du phénicien Sanchuniathon, qui prend pour origine l'air illimité, ténébreux et venteux, et avec lequel on a voulu aussi apparenter le chaos d'Hésiode. Anaximène semble avoir pris certaines idées à ses prédécesseurs milésiens ; son Air est, comme l'Eau de Thalès, un élément empirique, abondant et nécessaire pour la vie ; d'autre part, il affirme qu'il est illimité, comme l'Apeiron d'Anaximandre, et qu'il est invisible lorsqu'il est parfaitement réparti, bien qu'il se montre par la chaleur, l'humide et par son mouvement. L'importance d'Anaximène tient à avoir donné une explication sur la manière dont l'un - l'Air - se transforme en le multiple, les choses. Il soutint que grâce à un processus réversible de raréfaction et condensation, l'Air se raréfie en feu ou se condense progressivement en vent, vapeur, nuage, eau, terre et pierre. Ce processus dynamique est éternel, tout naît de l'Air et peut retourner à l'Air. Il ne semble pas, cependant, qu'il ait imaginé des mondes alternatifs ou successifs.

Par contre, il a mis en évidence la nécessité de l'Air pour tout le vivant. Il considéra que le monde respirait de l'Air, comme les êtres naturels de leur vivant. Dans Homère, on trouve déjà le souffle (pneuma), âme vitale des hommes. L'Air, en tant qu'originaire et éternel, pénètre tout, est l'Ame du Monde, comme l'était l'humidité pour Thalès. Il maintient l'unité du cosmos comme l'âme confère son unité au corps. Reprenant l'idée d'Anaximandre, il situe la Terre, qu'il imagine plate et de faible épaisseur, au centre du cosmos, flottant dans l'Air. L'idée géométrico-physique d'équilibre a disparu, probablement remplacée par l'observation empirique du fait que les corps étendus, plats et minces, sont d'autant plus stables qu'ils offrent moins de résistance au vent.

## 5.4 Pythagore (570-505 env.)

On croit qu'il fut le premier à s'appeler philosophe ; bien qu'ionien, pour des raisons politiques, il émigra à Croton, au sud de l'Italie, où il fonda sa secte vers 525 avant J. C. Il n'y a pas unanimité sur la datation des différentes doctrines pythagoriciennes, car les commentateurs postérieurs parlent, en général, des pythagoriciens. Nous ferons référence ici aux doctrines considérées les plus anciennes, antérieures en tout cas à l'expulsion de la secte de Croton vers 450 avant J. C.

La cosmologie pythagoricienne est basée sur deux principes : les corps et le vide, c'est-à-dire, le limité et l'illimité. A cette époque encore, on ne distingue pas clairement air et vide ; ainsi, la filiation milésienne de l'illimité est évidente ; d'autre part, considérer les corps comme ce qui admet des limites, et donc une figure déterminée, nous amène immédiatement à la géométrie. Pour les Pythagoriciens, la Terre est ronde et a deux mouvements : translation et rotation.

Je pense que la découverte que les vérités mathématiques étaient des vérités éternelles les a amenés à considérer les mathématiques comme étant le savoir sacré qui révélait l'essence du monde. De là naît leur fameuse thèse : Les choses sont des nombres. La mystique de la secte Pythagoricienne était le savoir mathématique. Il semble que son origine ait été dans la découverte par Pythagore des sons harmoniques émis en jouant sur des instruments monocordes si les longueurs des cordes gardaient entre elles des proportions, telles que 1:2, 2:3, 3:4. Ceci motiva un intérêt pour les mathématiques qui se concrétisa par le développement de l'arithmo-géométrie, phase à laquelle on peut attribuer la démonstration du théorème de Pythagore, les nombres polygonaux et l'étude des nombres pairs et impairs.

Les Pythagoriciens furent les premiers atomistes ; si toutes les choses étaient nombres, elles devaient être formées d'unités. Ces monades, ou Horos, étaient des unités arithmétiques, géométriques et physiques à la fois. Les propriétés de chaque chose dépendaient de leur quantité et de leur disposition spatiale. Il n'y avait pas de différences physiques entre les horos, tous étaient égaux. Les nombres figurés sont un essai d'expression en termes arithmétiques de la réalité géométrique. Lorsque le pythagoricien Hippase de Métaponte découvre, dans la première moitié du V<sup>ème</sup> avant J. C., les grandeurs irrationnelles, il ruine cette cosmologie arithmétique, car bien qu'on puisse opérer en géométrie avec de telles grandeurs, on ne pouvait cependant pas les exprimer à l'aide de nombres. C'est peut-être de là que démarre la transformation de l'atomisme mathématique des Pythagoriciens en atomisme physique de Leucippe.

Si nous observons la table de Pythagore, nous verrons non seulement la place préminente qu'occupent l'un et le multiple, mais aussi que nous pouvons les mettre en relation avec d'autres paires d'opposés :

limite-illimité

impair-pair

un-multiple

droite-gauche

masculin-féminin

au repos-en mouvement

droit-courbe

lumière-obscurité

bien-mal

carré-oblong

La supériorité de la limite sur l'illimité est celle de la Terre sur l'Air, de la forme sur l'amorphe ; chaque être naturel a son unité de forme, l'air n'a pas de figure.

L'impair et le pair sont deux principes des nombres. La primauté de l'impair découle du fait que le pair, par décomposition, peut se réduire à l'impair, et non vice versa, par conséquent l'impair est plus simple.

Pour les Pythagoriciens, l'Un n'est pas un nombre, sinon le principe premier et fondamental des nombres, leur *archê* générateur. Il n'est ni pair, ni impair. Les nombres naissent de l'Un comme chez Anaximandre les choses naissent de l'Apeiron. C'est pourquoi l'unité est supérieure à la multiplicité composée d'unités.

Le repos conserve l'unité de la chose, par contre, les mouvements peuvent être multiples. Seul, le droit a une forme, le courbe en a plusieurs. Seuls, le carré et les nombres carrés ont une forme, le rectangle et les nombres oblongs en ont plusieurs.

Certains indices laissent supposer que les Pythagoriciens adoraient une divinité unique, dénommée Apollon, la mieux adaptée à leur vision du monde mathématique. On sait que la secte croyait en la réincarnation et on considère Pythagore comme étant le premier grec à postuler l'immortalité de l'âme individuelle, idée qui apparaît à la même époque dans d'autres cultures, en Perse avec Zoroastre et en Inde avec Bouddha, sans qu'on ait pu prouver une voie de diffusion dans un sens ou dans l'autre. Les cultes mystérieux de l'époque, comme celui d'Eleusis, sont liés au cycle traditionnel de mort et renaissance, comme on le voit dans le mythe de Dionisos dépecé et éparpillé, des restes duquel rejaillira la vie. La rationalisation du mythe chez les Pythagoriciens se convertit en l'idée que la vie naît de la mort et la mort naît de la vie, de la même façon que tous les opposés se génèrent entre eux. Selon la notion hellénique la plus ancienne, l'âme individuelle est la portion de l'Ame du Monde présente en chaque être vivant. Pour les Pythagoriciens, l'âme individuelle est l'harmonie du corps. L'Ame du Monde est au macrocosme ce que l'âme individuelle est au microcosme du corps. Il y a une avancée vers la différenciation des âmes individuelles, condition nécessaire pour articuler un discours éthique dans lequel la faute et la responsabilité ne sont plus seulement collectives. L'idée de l'immortalité personnelle est le mirage qui mobilise les émotions en quête de la voie du salut que la secte enseigne. Atteindre l'excellence en tant qu'homme signifie libérer l'âme de son destin de réincarnations successives et réaliser la fusion avec la divinité. Ainsi, le Pythagorisme implique un double changement par rapport à la religion traditionnelle : il évolue depuis les dieux multiples jusqu'à la divinité unique et l'Ame du Monde se multiplie dans les âmes individuelles immortelles.

## 5.5 Xénophane de Colophon (570-477 env.)

De ce poète ionien, qui émigra jeune en Sicile, sont très connus ses fragments de théologie philosophique où il réfute les idées anthropomorphiques sur les dieux. Dieu est UN, immobile, et tout entier voit, pense et entend sans nécessité d'yeux, d'esprit et d'ouïe, et sans fatigue, il secoue tout avec la force de sa pensée. Il semble qu'il défendit, en relation avec Anaximandre, l'idée que les mondes multiples possibles étaient égaux entre eux.

Un trait caractéristique de sa cosmologie est l'affirmation que le soleil est chaque jour nouveau ; il naît, à chaque aube, en Orient par agglomération de vapeurs ignées et avance vers

l'Occident en ligne droite jusqu'à ce qu'on le perde de vue ; la distance fait que son mouvement apparent est circulaire. Ainsi, Xénophane sépare l'unité du soleil en la multiplicité de ses apparitions diurnes.

### 5.6 Héraclite d'Ephèse (540-480 env.)

Héraclite représente un nouveau type de philosophe ; son intérêt prioritaire est l'éthique et ses doctrines physiques sont subordonnées à son attitude morale. Apparaît avec lui le penseur solitaire qui méprise la plupart de ses congénères parce qu'ils préfèrent vivre selon le plaisir plutôt que selon la sagesse ; le maître seul face aux nombreux ignorants. Sa méthode justifie cette position : pour vérifier la vérité sur le monde, Héraclite ne scrute pas les cieux : il se cherche lui-même. Sa thèse principale est qu'il y a une seule loi qui gouverne le monde, le Logos, qui agit selon mesure et proportion. Unité de la loi naturelle qui contraste avec la multiplicité des lois humaines. En principe, la pensée de tout homme peut connaître le Logos, mais ce n'est pas facile : la nature aime se cacher, la réalité unique se cache derrière ses multiples manifestations et derrière les multiples noms qu'on leur donne. Chaque homme croit avoir son propre savoir sans se rendre compte que la raison est commune : la vérité est unique, celle de tous, les erreurs sont multiples, celles de chacun pour son compte.

Le bien et le mal, le juste et l'injuste, le beau et le laid, le jour et la nuit, ne sont opposés que dans l'apparence du langage ; toute paire de contraires recèle ainsi son identité. Le réel, la diké, la manière dont les choses sont, se manifeste toujours comme opposition, discorde, guerre ; ainsi le Logos gouverne le devenir de la nature. Unité réelle et dualité manifeste.

Pour Héraclite, il n'y a pas un stade originnaire du cosmos distinct de l'actuel. Le Feu est l'Ame du Monde, le Logos incarné dans la physis, sa force qui transforme tout. Il est éternel et illimité. L'âme humaine est de feu. Sous la pluralité des choses et des corps gît l'unité du Feu - Logos.

### 5.7 Alcméon de Crotoné (530-470 env.)

Ce médecin, bien qu'on croie qu'il n'ait pas été membre de la secte, a été très influencé par les pythagoriciens. Sa doctrine est clairement dualiste :

*la plupart des choses humaines vont par paires.*

Il doit sa renommée au fait d'avoir été le premier à distinguer perception et pensée, ainsi qu'à sa théorie de la santé comme équilibre entre de multiples paires d'opposés : chaleur/froid, humidité/sécheresse, douceur/amertume... Nous trouvons des arguments concernant l'un et le multiple dans trois de ses fragments :

- La vérité n'est accessible qu'aux dieux ; les hommes doivent se contenter de la pluralité de leurs opinions et conjectures.

- Posséder la capacité de compréhension distingue l'espèce humaine de toutes les autres, qui ne disposent que de la perception.

- Les hommes meurent parce qu'ils ne sont pas capables de joindre le commencement et la fin. Selon Alcméon, les astres sont divins parce qu'ils ont un mouvement circulaire perpétuel ;

l'homme est mortel parce que son âme ne parvient pas à perpétuer son mouvement. Une fois de plus nous voyons là l'usage du cercle comme unité, qui n'a ni début ni fin.

### 5.8 Parménide d'Elée (520-445 env.)

Parménide a été éduqué dans la tradition pythagoricienne, bien que son fameux Poème constitue une attaque directe des fondements de cette philosophie. Il rejettera le dualisme et élaborera un système moniste ; des deux principes pythagoriciens, les corps et le vide, il niera l'existence du second et donnera une nouvelle forme au premier. Comme Héraclite, Parménide est un sage illuminé par la divinité qui avertit les hommes qu'ils vivent dans l'erreur. Il pose pour la première fois en toute rigueur le problème de la réalité et de l'apparence. La réalité est une et la découvrir exige de posséder une méthode de connaissance ; les apparences sont multiples et sont constamment présentes devant nous. Seule la réalité est accessible à la pensée rationnelle, tandis que nous saisissons le monde des apparences par les sens. Dans son Poème, il explique d'abord la Voie de la Vérité, la seule possible pour la connaissance, et ensuite la Voie de l'Erreur, une justification de l'apparence du cosmos.

Face à la tradition et à la perception, la méthode de Parménide est la déduction logique, en particulier, la démonstration dite indirecte ou réduction à l'absurde. C'est une question encore débattue que de savoir s'il prit ce procédé aux mathématiciens pythagoriciens ou vice-versa. Sa doctrine commence par une affirmation dogmatique : ce qui est, est, et ce qui n'est pas, n'est pas ; c'est-à-dire : on affirme le réel et on nie le vide, le rien. Cela dit, tout ce qui existe n'est pas ; il faut distinguer entre ce qui est, l'Être, et ce qui semble être, mais n'est pas Être : les apparences trompent. A partir de cette thèse, par réduction à l'absurde, il démontrera les propriétés de ce qui est : il n'a pas eu de genèse, il n'aura pas de fin dans le temps, il est unique, indivisible, homogène, continu, inaltérable et immobile, semblable à une sphère. Quelques-unes de ces propriétés appartiennent à la place supérieure de la table des valeurs pythagoriciennes ; d'autres, comme l'homogénéité et la continuité semblent directement dirigées contre Anaximène et sa conception du changement physique comme condensation et raréfaction. Mais l'important est de savoir à quoi se réfère Parménide avec son expression *ce qui est*, ou bien, l'Un.

Nous trouvons la réponse dans son insistance en quoi être et penser sont équivalents. L'Un est la réalité-pensée qui est sous-jacente au monde des apparences. Étant pensée, cette réalité, ne peut être connue qu'au moyen de la raison ; étant corporelle, cette pensée est le fondement de la nature. Bien que ce ne soit pas établi dans les fragments conservés, tout nous porte à croire que cette pensée gouverne la nature, est une version rationnelle de l'Ame du Monde.

On conserve de rares fragments de la Voie de l'Erreur. Pour Parménide, le monde des apparences est aussi régi par la nécessité, il a son propre sens. Pour expliquer sa vraisemblance il conçut une cosmologie dualiste : la nature est composée de deux principes, Lumière-Feu et Obscurité-Nuit. A partir de là, il reprend des éléments des cosmologies ionienne et pythagoricienne.

En résumé, dans la philosophie de Parménide, nous rencontrons l'Unité de l'Être face à la multiplicité des apparences, l'unité de la raison face à la multiplicité des perceptions, l'unité de la vérité face à la diversité des opinions, l'unité de l'éternité face à la pluralité du devenir.

### 5.9 Zénon d'Elée (490-430 env.)

Zénon, disciple de Parménide, en accord avec la méthode indirecte de son maître, préféra défendre la doctrine de celui-ci en attaquant celle de ses rivaux, spécialement, le pythagorisme. Au lieu d'argumenter que l'Être est un et immobile, il préfère exposer les contradictions qui se déduisent de l'affirmation que l'Être est pluriel et mobile ; en réfutant la seconde thèse, il prouve la première. La pluralité et le mouvement appartiennent au monde des apparences, à l'expérience sensible et non à la pensée logique, à la raison. Ses arguments sont appelés apories parce qu'ils débouchent sur des contradictions en relation avec l'illimité.

L'aporie du grain :

*Une multitude de grains font du bruit en tombant, un grain seul ne fait pas de bruit ; le grain a-t-il la propriété de la sonorité ?*

utilise l'opposition entre unité et pluralité pour attaquer la connaissance sensible, à laquelle nous ne pouvons pas nous fier, parce qu'elle est contradictoire.

L'aporie de l'espace :

*L'espace n'existe pas car s'il existait, il devrait être dans un espace, et celui-ci à son tour dans un autre espace, et ainsi de suite...*

réfute le principe pythagoricien du vide en montrant que, s'il y avait un espace, il devrait y avoir une infinité d'espaces, ce qui est absurde.

Les apories contre le multiple sont dirigées contre la doctrine pythagoricienne selon laquelle toutes les choses sont formées d'unités égales et indivisibles (horos). Zénon démontre habilement qu'en considérant à la fois les horos comme des unités physiques indivisibles (avec dimension), arithmétiques (comme quantités numériques), et géométriques (comme des points), il en découle d'insurmontables contradictions. Il est très probable que la logique de Zénon ait obligé les pythagoriciens à remplacer leur théorie des unités mathématique par une théorie des unités physique, d'où surgirait l'atomisme.

Les apories contre le mouvement essayent de démontrer que celui-ci n'est pas logiquement pensable et c'est pourquoi il n'est pas une réalité, mais une apparence, parce que des contradictions se produisent aussi bien si on pense que l'espace est quelque chose de continu - les deux premières - comme discontinu - les deux dernières -. L'aporie du stade affirme qu'il est impossible de parcourir une quelconque distance donnée, car d'abord il faudrait parcourir sa moitié, ensuite la moitié de la moitié restante et ainsi de suite. Comme on le voit, Zénon utilise la dichotomie pour convertir une unité - une distance quelconque - en une multiplicité illimitée de parties. En effet, ceux qui considéraient l'espace comme continu le pensaient comme infiniment divisible. Zénon signale que de ce processus sans fin découlent immédiatement des contradictions. Zénon refuse d'admettre qu'une distance limitée puisse être conçue comme la somme d'une quantité illimitée de parties. L'aporie d'Achille et la

tortue réitère le même argument que l'aporie du stade, mais en référence à deux corps mobiles, c'est-à-dire à un mouvement relatif.

Les apories de la flèche et du défilé sont dirigées contre ceux qui considéraient que l'espace est formé d'une multiplicité d'unités indivisibles juxtaposées, c'est-à-dire un espace discontinu. Zénon affirme que durant son vol la flèche, apparemment en mouvement, est réellement au repos. Pour le démontrer, il décompose la distance parcourue en la multiplicité de ses positions intermédiaires entre la position initiale et la position finale. Cet ensemble de positions est limité, puisque le nombre d'unités qui composent une quelconque distance est limité. Alors Zénon fait voir qu'à chaque position, la flèche se trouve au repos. Traduit en termes modernes, quelques vingt siècles avant Daguerre et les Lumières, Zénon a décomposé dans la chambre noire de son esprit, l'illusion du mouvement continu en la multiplicité de ses photogrammes.

L'aporie du défilé est dirigée contre ceux qui argumentaient, non pas que le mouvement consistât à parcourir successivement une série de positions, autant que le parcours contenait d'unités indivisibles, mais qu'il consistait dans le passage de chaque position ou unité indivisible à la suivante. L'aporie de la flèche déconstruit un mouvement absolu et celle du défilé déconstruit un mouvement relatif, celui de deux corps mobiles entre eux par rapport à un troisième corps fixe. En définitive, pour Zénon l'illimité ne peut être réel ni ne peut être pensé.

### 5.10 Méliossos de Samos (485-420 env.)

Il a été le commandant de la flotte de Samos qui vainquit la flotte Athénienne dirigée par Périclès ; bien que ionien, il adopta la philosophie de Parménide, en y introduisant un changement important. Pour Méliossos, ce qui est, l'Être Un, est un Tout illimité parce que, s'il ne l'était pas, il ne serait pas Un et il y aurait trois choses : l'Être Un, la limite et le limitant. De même, du fait que l'Être est illimité, il en déduit son éternité, puisqu'il ne peut avoir ni commencement ni fin. Il affirma que l'Un est incorporel, parce que s'il avait un volume, il aurait des parties et ne serait pas Un. Il soutint que toute prétendue philosophie pluraliste devrait attribuer à ses principes fondamentaux les mêmes caractéristiques qui définissaient l'Un, ce qui de fait arriva avec Anaxagore et Leucippe.

### 5.11 Les philosophes pluralistes

Jusqu'à la moitié du V<sup>ème</sup> siècle avant J. C., certains philosophes en désaccord avec le monisme de Parménide élaborèrent des théories physiques pluralistes. Bien qu'ils nient que l'Être est Un, la puissante logique de l'éléate les poussera à attribuer à leurs principes fondamentaux respectifs la plupart des autres caractéristiques de l'Être parméniénien : éternité, indivisibilité, immutabilité, homogénéité. En effet, après Parménide, on ne peut plus dire que les choses se forment par génération et corruption, c'est pourquoi les principes élémentaires ne peuvent avoir eu une origine ni avoir une fin. Chez les philosophes pluralistes, les changements des êtres naturels sont expliqués comme des changements de la proportion dans laquelle se trouvent mélangés les principes constituants. Le concept de proportion avait été développé abondamment par les mathématiciens pythagoriciens. Précisément, les

philosophies pluralistes partagent le fait de synthétiser des aspects de la tradition pythagoricienne, éléatique et de la physique ionienne.

### 5.12 Empédocle d'Agrigente (485-425 env.)

Ce médecin et homme politique sicilien, sans doute éduqué dans la tradition pythagoricienne, semble avoir écrit, à part une œuvre sur la médecine, deux livres philosophiques : *Purifications*, aux profondes résonances orphiques, et *De la Nature*. Les deux exposent un même modèle : le passage de l'Un au multiple par l'œuvre de la Haine et le retour du multiple à l'Un par l'action de l'Amour. Dans le premier livre, ce modèle s'applique aux avatars de l'âme, dans le second à la Nature comme totalité.

Les âmes des êtres naturels ont été séparées de l'Ame primordiale par l'œuvre de la Haine ; leur vie terrestre doit être un chemin ascétique de perfectionnement jusqu'à parvenir à se réintégrer dans l'unité de l'Ame primitive immortelle.

Dans la Physique d'Empédocle, le stade primitif du cosmos était une Sphère composée d'un mélange parfaitement homogène de quatre principes élémentaires, qu'il nomme racines : Air, Feu, Terre et Eau. En outre, il y a deux autres principes vitaux non corporels en mouvement continu : Amour et Haine. La pénétration de la Haine dans la Sphère unie par l'Amour va produire la séparation des racines jusqu'à obtention de la désunion totale : la Sphère formée par quatre sous-sphères concentriques de Terre, Eau, Air et Feu. Alors, par l'action de l'Amour s'initie le retour vers l'unité primordiale.

La doctrine des quatre racines est probablement d'origine pythagoricienne et ses traces se trouvent déjà chez Xénophane et Héraclite. Chaque être naturel est constitué par un mélange des quatre éléments dans une proportion déterminée et émet continuellement des effluves, qui le rendent perceptible par d'autres êtres naturels, qui les captent grâce à leurs organes sensoriels. Nous voyons ici l'unité de l'Être comme fond inépuisable d'une multiplicité d'effluves.

La théorie biologique d'Empédocle sur l'origine des êtres vivants présente un aspect curieux. Dans une première étape, naissent plusieurs membres et organes isolés ; dans la seconde, ils se mêlent au hasard, engendrant des monstres. Dans la troisième prédominent les combinaisons réussies, celles dont l'harmonie leur permet de se reproduire, de manière non sexuelle ; dans la quatrième, apparaissent les êtres naturels sexués. Dans cette doctrine, nous voyons que l'on avance, depuis la multiplicité jusqu'à l'unité comme harmonie, au moyen de combinaisons aléatoires.

### 5.13 Anaxagore de Clazomènes (500-428 env.)

Sa cosmologie est clairement en liaison avec celle d'Anaximandre. Il conçoit le stade primitif du cosmos comme un Tout, un mélange hétérogène sans qualités, indéfini, composé de feu ou éther, air, terre, eau et de semences. Ce sont les principes fondamentaux constituants des êtres naturels, les différences entre ces derniers sont dues aux variations dans les proportions de leur combinaison. Anaxagore différencie nettement le microcosme - les éléments et les semences - du macrocosme - les êtres naturels. Les semences sont la nouveauté de son microcosme : elles sont illimitées en quantité, dimensions et types. Elles

sont infinitésimales et, à cause de cela, imperceptibles à nos sens. Une force de rotation, induite par l'Intellect sur une zone du mélange initial, va s'étendre sur lui tout entier, séparant le chaud du froid, le sec de l'humide, le dense du rare, le lumineux de l'obscur. Les premiers à se séparer sont le feu-éther et l'air qui, par leur extension illimitée, seront les composants les plus abondants du cosmos.

Dans sa conception du macrocosme, Anaxagore accepte quelques points de la philosophie de Parménide. Le vide n'existe pas ; ainsi, il n'y a ni génération ni destruction, mais composition et séparation. Le cosmos est plein et continu, les corps physiques sont infiniment divisibles. Par contre, il réfute que l'Être est Un et admet une pluralité de principes éternels. Il défendit la pluralité face aux apories de Zénon, seulement valables, selon lui, contre ceux qui pensaient le cosmos comme discontinu et composé par une pluralité d'unités indivisibles, mais non valables contre un cosmos continu infiniment divisible.

Dans le cosmos, en plus des semences existe l'Intellect, l'unique qui ne se mélange jamais avec le reste, la substance la plus subtile et pure, parfaitement homogène, qui s'étend en tous lieux et dont l'autonomie lui permet de gouverner toutes les choses, étant omniscient et omnipotent, initiateur du mouvement du cosmos et présent de différentes façons en chaque espèce d'êtres vivants. Ainsi, l'Intellect est l'Ame du Monde et l'âme des êtres particuliers, le Logos qui gouverne tout, l'Esprit qui embrasse et entoure le cosmos. Ce qui explique que, selon le commentateur Simplicius, il n'y a réellement chez Anaxagore que deux principes : l'Intellect et le mélange illimité de semences.

En chaque être naturel, pierre, plante, animal, il y a une part de chaque type de semences, en proportion distincte ; sa nature propre lui est donnée par la semence dont la part sera la plus abondante. Ceci nous fait voir que le recours d'Anaxagore à la pluralité illimitée fut sa réponse à la question du changement d'une chose en une autre. En répondant que c'est au moyen de la variation des proportions relatives des semences, il présente une théorie antiéconomique, mais ingénieuse, qui évite un gros effort spéculatif pour expliquer l'exubérance de la nature.

### 5.14 Leucippe d'Elée ou Milet (480-425 env.) et Démocrite d'Abdère (470-380 env.)

Leucippe élaborait les grandes lignes de l'atomisme, comme réinterprétation de la théorie des unités pythagoricienne après les attaques de Parménide et Zénon. Démocrite perfectionna la théorie en la développant en de nombreux livres. Les rares fragments qui ont été conservés des deux ne permettent pas de préciser avec assurance les apports de chacun. Pour les atomistes, il y a deux principes : le vide, illimité en extension, et le plein, illimité en quantité, les atomes. Ceux-ci sont compacts, homogènes, indivisibles, impénétrables et impassibles ; ils ont un nombre illimité de formes, bien que tous possèdent la même nature. Ils ont un nombre illimité de grandeurs, bien que tous soient imperceptibles par leur petitesse ; leur poids dépend de leur taille.

Le vide et les atomes sont éternels et ceux-ci se trouvent en mouvement incessant depuis toujours. Au cours du temps, d'innombrables mondes se créent et s'anéantissent dans le vide. Lorsqu'une grande quantité d'atomes afflue vers une même région du vide, un monde se

forme. Cette agglomération produit un tourbillon, que l'on appelle nécessité, qui maintient les atomes lourds au centre et projette les légers vers l'extérieur, ceux-ci formant une membrane, le firmament, qui dans sa rotation capte des corps du vide extérieur. Les corps se produisent par agrégation d'atomes, qui en s'entrechoquant les uns les autres se lient ou se repoussent, mais ne fusionnent pas. Les caractéristiques fondamentales des corps sont la forme de leurs atomes, leur ordre interne et leur configuration. Les qualités sensibles ne sont pas réelles, c'est-à-dire, n'appartiennent pas aux atomes individuels ; elles sont conventionnelles, caractérisent seulement les corps macroscopiques.

Le mouvement des atomes obéit à des causes mécaniques, à l'exception des atomes sphériques de l'âme et du feu, qui ont la capacité de se mouvoir par eux-mêmes. Grâce à elle les corps peuvent connaître et gouverner. La perception se produit quand les sens captent les effluves constamment émis par les corps.

En résumé, la relation entre unité et pluralité se présente, chez les atomistes, sous divers aspects :

- Un est le vide et innombrables les mondes qui se forment en lui.
- Ils transforment l'Être Un de Parménide en une multiplicité d'atomes qui partagent quelques unes de leurs principales caractéristiques avec lui.
- Les atomes ont une unité de nature et une pluralité de formes, dimensions et mouvements.
- \_ Unité provisoire du corps et multiplicité d'effluves émises, simulacres de lui-même.

### 5.15 Diogène d'Apollonie (475-415 env.)

Grâce aux fragments que l'on a conservés, on croit qu'il a été médecin et on a l'habitude d'attribuer à sa profession technique l'empirisme que manifeste sa philosophie, ce qui concorde avec la tradition de l'école hippocratique. Réfutant aussi bien les conséquences de l'Eléatisme que celles des physiques pluralistes, Diogène revient au principe cosmologique unique : l'Air, ou selon d'autres sources, la substance intermédiaire entre l'Air et le Feu, l'Ether qui engendrerait les deux. Cet Air ou Ether est éternel et illimité et dans son intérieur surgissent d'innombrables mondes. Il justifia ce retour au monisme en argumentant que l'interaction que nous percevons entre les êtres naturels n'est possible que parce qu'ils ont la même nature sous-jacente ; s'il n'en était pas ainsi, il n'y aurait de rapports qu'entre les êtres de la même espèce.

Le cosmos est ordonné de la meilleure façon possible, ce qui démontre que l'Air ou l'Ether est intelligent. Étant la substance la plus subtile, il se trouve présent en toutes choses, bien que de manière différente dans chacune, ce qui lui permet de les gouverner. L'âme des êtres vivants est formée d'air chaud. Leur capacité de connaissance est due à différentes formes d'interaction entre l'âme ou air interne avec l'air externe à travers les organes du corps, suivant la doctrine disant que le semblable connaît le semblable. Quant à la relation entre unité et multiplicité, Diogène revient au point de départ de la physique ionienne ; comme Thalès de Milet, il explique l'immense diversité des choses sensibles au moyen d'un principe unique qui leur confère une unité de nature.

## DEUX SIÈCLES D'INTUITION GÉOMÉTRIQUE EN ALGÈBRE LINÉAIRE

Ghislaine Chartier

IREM de Rennes

Laboratoire de didactique des mathématiques, Université de Rennes 1

### Résumé

La genèse de l'algèbre linéaire est un processus qui s'étale sur plusieurs siècles, et dans lequel les interventions de la géométrie ont été fondamentales. La théorie développée par Fischbein à propos de l'intuition en mathématiques et de l'utilisation de différents types de modèles intuitifs nous permet d'analyser en termes d'intuition géométrique les contributions de différents mathématiciens au développement de l'algèbre linéaire. De Leibniz à Fréchet, en passant par Grassmann, nous dégageons ainsi de multiples emplois de modèles géométriques, et les conséquences du recours à ces modèles.

### Introduction

Le questionnement qui nous a conduit à cette étude est de nature didactique. Il pourrait être résumé par la question suivante : comment peut-on utiliser au mieux la géométrie, ou plus généralement, ce qui est de l'ordre du géométrique (les figures en particulier), pour enseigner l'algèbre linéaire et bilinéaire ? Depuis que l'algèbre linéaire a disparu des programmes de l'enseignement secondaire (1986), les étudiants la rencontrent pour la première fois à l'université. Cette rencontre pose de nombreux problèmes, comme en témoignent les enseignants concernés, et comme le confirment plusieurs études de didactique. Or il n'est pas rare d'entendre des réflexions du type : *si les étudiants avaient un peu plus d'intuition géométrique, ils réussiraient bien mieux en algèbre linéaire*, réflexions associées à des propositions de cours de géométrie précédant celui d'algèbre linéaire. L'un des aspects de notre travail consiste à comprendre ce à quoi pensent les enseignants lorsqu'ils tiennent ce genre de propos : quel contenu imaginent-ils pour un tel cours de géométrie, qu'appellent-ils *intuition géométrique* chez les étudiants ? Ce n'est pas cette partie de notre travail que nous détaillons ici ; nous allons présenter des extraits d'une étude historique dont l'objectif est