engendrent le groupe G des isométries directes qui conservent le pavage. On a $r_J\, r_A\, r_O = \mathrm{Id}$. On peut montrer que toute relation entre r_J, r_A et r_O est une conséquence des quatre relations :

$$r_O^5 = r_A^4 = r_J^2 = r_J\, r_A\, r_O = \mathrm{Id}.$$

Dans la figure 17, on montre, dans le disque de Poincaré, un pentagone régulier ABCDE de centre O et les dix pentagones adjacents obtenus à partir du premier par symétrie par rapport à un côté ou par demi-tour autour d'un sommet.

Il reste donc à développer la géométrie de ce pavage et à en déduire quelques propriétés essentielles du plan hyperbolique... une affaire à suivre donc.

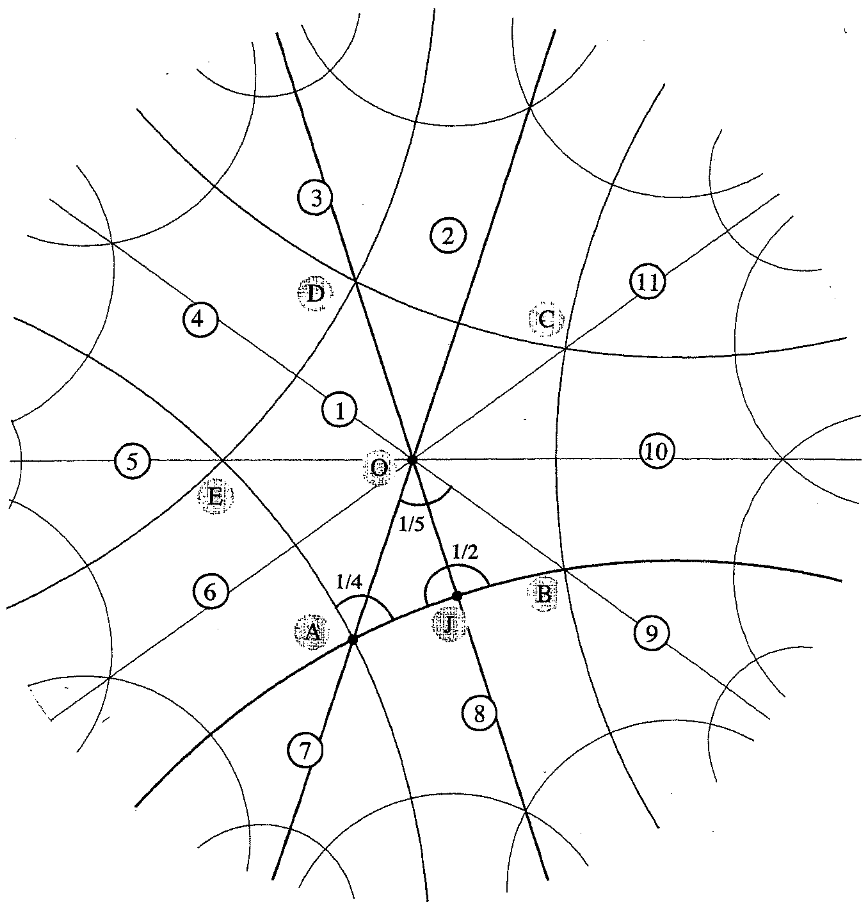


Figure 17 — Trois symétries orthogonales qui engendrent le groupe du pavage du plan hyperbolique par des pentagones réguliers à angles droits.

UN SUPPORT HISTORIQUE POUR L'ÉTUDE DES SUITES EN PREMIÈRE

Jean-Yves Hély

IREM de Rennes

Résumé

Nous avons cherché à rédiger, dans un groupe de l'IREM de Rennes, un chapitre sur les suites pour les élèves de Première où l'histoire était imbriquée dans la partie proprement mathématique du cours. Après avoir considéré un exemple (la conjecture de Syracuse) et défini ce qu'est une suite, nous étudions deux types particuliers de suites : les suites arithmétiques et les suites géométriques. Ces deux suites sont étudiées à partir d'extraits d'un livre d'algèbre intitulé *Elémens d'algèbre*, publié par Leonhard Euler en 1770 et traduit en français en 1784. La notion de récurrence est abordée : pour montrer, dans un exemple, la croissance d'une suite, on utilise un raisonnement par récurrence. Le chapitre se termine par une série d'exercices dont certains présentent un aspect historique. A noter aussi que dans ce chapitre, il n'intervient aucune connaissance sur la dérivation et que la notion de limite n'est pas abordée.

Introduction

Pinchinette prit sa baguette, une jolie baguette en ivoire doré que lui avait donnée la marraine, et traça sur le sable la longue suite de chiffres que voici :

324.549.672.815.

Jean Macé

Tout élève de première admet volontiers que lorsqu'on écrit les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc., on écrit bien une *suite* de nombres. Mais quel sens donne-t-on en mathématiques au mot *suite* ? Que faut-il penser, par exemple, de la définition suivante donnée dans un Larousse universel datant de 1923 : *Suite. Math. Termes qui se succèdent suivant une certaine loi* ?

Après avoir exposé de manière assez classique les généralités sur les suites, il nous a paru intéressant de traiter les suites arithmétiques et les suites géométriques en utilisant des textes historiques.

Les textes ont été choisis dans un livre écrit par Leonhard Euler (1707-1783). Si nous avons choisi ce mathématicien, ce n'est pas par hasard : nous avons estimé que les extraits étaient d'une telle clarté que la majorité des élèves n'aurait pas trop de mal à comprendre ce qu'un mathématicien avait écrit il y a un peu plus de deux siècles. De fait, les élèves se sont bien investis dans l'étude de ces textes historiques qui ont suscité chez eux une motivation supplémentaire pour apprendre le cours. Le fait, pour les élèves, de voir qu'ils arrivaient eux-mêmes à comprendre un cours à partir d'extraits choisis dans un livre ancien a contribué à les valoriser.

La compréhension des documents ne leur posant pas trop de problèmes, le travail du professeur a été essentiellement un travail de synthèse.

Voici le plan que nous avons adopté.

1. Le problème $3A+1$
2. Généralités sur les suites
   - 2.1 Définitions - Notations
   - 2.2 Exemples
   - 2.3 Différentes façons de définir une suite
   - 2.4 Représentations graphiques des termes d'une suite sur un axe
   - 2.5 Suite croissante - Suite décroissante
   - 2.6 Un exemple de raisonnement par récurrence
   - 2.7 Suite majorée, suite minorée, suite bornée
3. Suites arithmétiques
   - 3.1 Introduction
   - 3.2 Définition
   - 3.3 Expression du terme général en fonction de n
   - 3.4 Somme de termes consécutifs
4. Suites géométriques
   - 4.1 Introduction
   - 4.2 Définition
   - 4.3 Expression du terme général en fonction de n
   - 4.4 Somme de termes consécutifs
5. Exercices
   - 5.1 D'après Leonhard Euler
   - 5.2 Problème égyptien
   - 5.3 La légende du jeu d'échecs

   - 5.4 Un bon tuyau
   - 5.5 Tableau de nombres
   - 5.6 Tableau de nombres (bis)
   - 5.7 D'après Leonhard Euler
   - 5.8 Les piles de boulets
   - 5.9 Fractions et suites

1. Le problème $3A+1$

Enoncé du problème

On prend un nombre entier positif A. S'il est pair, on le divise par 2, s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.

On recommence avec le nouveau nombre et ainsi de suite.

Que se passe-t-il ?

▲ On part, par exemple, du nombre A = **17**.

On obtient successivement 3×17+1 = **52** ; 52 : 2 = **26** ; 26 : 2 = **13** ; 3×13+1 = **40** ; 40 : 2 = **20** ; 20 : 2 = **10** ;10 : 2 = **5** ; 3×5+1 = **16** ; 16 : 2 = **8** ; 8 : 2 = **4** ; 4 : 2 = **2** ; 2 : 2 = **1** ; 3×1+1 = **4** ; 4 : 2 = **2** ; 2 : 2 = **1**.

Que se passe-t-il alors ?

Plaçons les résultats dans un tableau en introduisant une notation pour chacun des nombres obtenus.

Etape	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…	n	…
Nombre	**17**	**52**	**26**	**13**	**40**	**20**	**10**	**5**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**…**	**…**	**…**
Notation	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}	…	u_n	…

▲ Faire les calculs pour A = 11, A = 19, A = 27, en utilisant éventuellement une calculatrice.

▲ On obtient à chaque fois une suite de nombres. Quelle conjecture peut-on faire ?

➠ ***Remarque***

Cette conjecture est parfois appelée conjecture de Syracuse (l'université de Syracuse se trouve aux Etats-Unis dans l'état de New - York).

Bien sûr, ce n'est pas parce que votre conjecture est vérifiée pour les nombres 17, 11, 19, 27, qu'elle est vérifiée pour tout nombre entier naturel.

Pour explorer plus rapidement d'autres cas, nous vous proposons d'écrire un programme sur calculatrice. Ce programme, écrit pour une TI 83, pourra être adapté à d'autres calculatrices. Il permet de connaître :

▲ le nombre minimal d'étapes pour arriver à la valeur 1 ;

▲ la valeur maximale obtenue durant les étapes successives.

Algorithme	Programme **PUITS** (sur TI 83)
Choisir un entier naturel A.	PROGRAM : PUITS
	:Prompt A
▲ Si A est différent de 1 alors :	:0→ N : 0→ M
	:While A > 1
➤ si A est pair	:If A > M : A → M
remplacer A par $A/2$	:If (A – 2 × int (A/2))=0
➤ si A est impair	:Then
remplacer A par $3 \times A+1$	:(A/2) →A
	:Else
▲ Si A est égal à 1	:(1+3 × A) → A
	:End
➤ arrêter.	:N+1 → N
	:End
	:Disp « N= », N, « Max= », M, « A= », A
	:Prgm PUITS

▲ Prendre $A = 31$ ou d'autres valeurs (on pourra essayer les nombres 703 et 871).

Un peu d'histoire

Ce problème est un problème récent. Personne ne semble être capable de dire qui l'a formulé, peut-être le mathématicien allemand Lothar Collatz, de l'université de Hambourg dans les années 1930, mais certains pensent plutôt que c'était vers 1950.

A ce jour, personne n'a été capable de prouver ni d'infirmer la conjecture :

On arrive à la valeur 1 quel que soit le nombre de départ.

On a vérifié sur des ordinateurs puissants que, pour tout $A \leq 2^{40}$, la conjecture était vraie ; mais ceci n'est pas suffisant pour établir un résultat général. Le problème reste donc ouvert.

Notations

Le nombre obtenu à l'étape n est noté u_n , ce qui se lit « u indice n » ou par abréviation « u ... n ».

Cette notation définit le nombre correspondant à une étape comme on définit la valeur d'une fonction en un point.

Cette nouvelle notation permet d'écrire autrement l'énoncé du problème.

Second énoncé du problème

On donne $u_0 = 17$.

Si à l'étape n correspond le nombre u_n, alors à l'étape $n+1$ correspond le nombre u_{n+1} défini de la manière suivante :

➤ *si u_n est pair, alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$;*

➤ *si u_n est impair, alors $u_{n+1} = 3\,u_n+1$.*

Que se passe-t-il ?

☞ Attention ! Ne pas confondre u_{n+1} et u_n+1.

➠ *Document*

Un article de *Jeffrey C. Lagarias* est paru sur ce sujet dans la revue **American Mathematical Monthly,** January 1985.

The 3x+1 problem and its generalizations

The $3x+1$ *problem*, also known as *the Collatz problem*, *the Syracuse problem*, *Kakutani's problem*, *Hasse's algorithm*, and *Ulam's problem*, concerns the behavior of the iterates of the function which takes odd integers n to $3n+1$ and even integers n to $n/2$. The 3x+1 Conjecture asserts that, starting from any *positive* integer n, repeated iteration of this function eventually produces the value 1.

2. Généralités sur les suites

2.1 Définitions - Notations

Une suite u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

On note $u(n) = u_n$.

Le réel u_n est le terme de rang n et est appelé terme général de la suite.

La suite u se note aussi $(u_n)_{n\geq 0}$.

➠ ***Remarque***

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \sqrt{n-4}$.

Le terme u_n est défini pour $n\geq 4$. On dit que la suite (u_n) est définie à partir du rang 4. La suite est alors notée $(u_n)_{n\geq 4}$.

Dans la suite du cours, on ne s'intéresse qu'aux **suites définies à partir d'un certain rang**.

2.2 Exemples

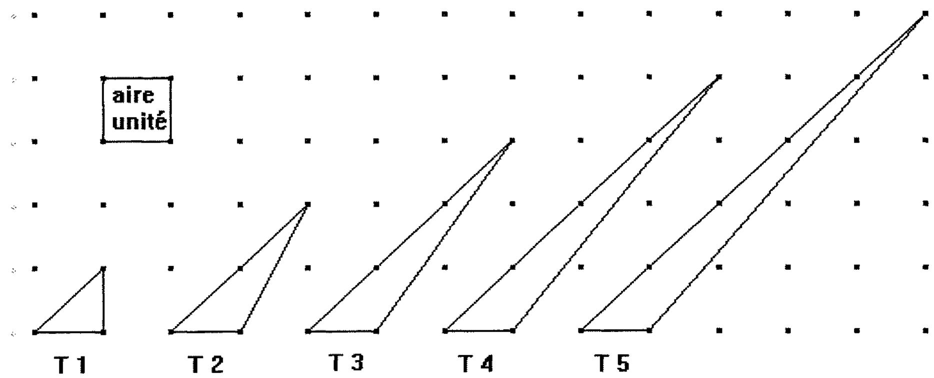
$\boxed{a}$ Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 3n-4$.

n	0	1	2	3	4	…	12	…	100	1000	10^{10}	…
u_n	-4	-1	2	5	8	…	32	…	296	2996	$3.10^{10}-4$	…

$\boxed{b}$ Soit $(v_n)_{n\geq 5}$ la suite définie par : $v_n = \dfrac{n+1}{n-4}$.

Calculer les 10 premiers termes de cette suite.

$\boxed{c}$ Soit (a_n) la suite des aires des triangles ci-dessous (a_n désigne l'aire du triangle T_n) :



Calculer a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Que remarque-t-on ?

Exprimer a_n en fonction de n.

$\boxed{d}$ Un capital C_0 est placé, le 1er Janvier 1999, au taux annuel de 4 %.

C_n désigne le capital le 1er janvier de l'année $(1999+n)$.

Exprimer C_1, C_2, C_3, C_4 en fonction de C_0 puis C_{n+1} en fonction de C_n.

Conjecturer une relation entre C_n et C_0.

Si le capital initial est de 5 000 F, en quelle année le capital atteindra-t-il 10 000 F ?

$\boxed{e}$ On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 8$ et, pour tout $n\geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$$

Calculer les 5 premiers termes de la suite. Pouvez-vous calculer u_{20}, u_{40} ?

2.3 Différentes façons de définir une suite

❶ Le terme u_n est exprimé explicitement en fonction de n par $u_n = f(n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est le cas des suites (u_n), (v_n) et (a_n) définies en $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ et $\boxed{c}$.

➤ pour $\boxed{a}$ $f(n) = u_n$ avec $f : x \mapsto 3x - 4$

➤ pour $\boxed{b}$ $f(n) = v_n$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-4}$

➤ pour $\boxed{c}$ $f(n) = a_n$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}$.

La suite (a_n) est définie à partir d'une situation géométrique.

❷ La suite (u_n) est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C'est le cas des suites (C_n) et (u_n) définies en $\boxed{\text{d}}$ et $\boxed{\text{e}}$.

➤ pour $\boxed{\text{d}}$, le 1[er] terme est C_0 et $C_{n+1} = 1{,}04\ C_n$, c'est-à-dire que l'on a : $C_{n+1} = f(C_n)$ avec $f(x) = 1{,}04\ x$.

➤ pour $\boxed{\text{e}}$, le 1[er] terme est $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 3 = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$.

❸ Beaucoup d'autres façons sont possibles, mais ne font pas l'objet de ce cours.

Donnons quelques exemples de telles suites :

➤ la suite $3A+1$ (voir paragraphe 1).

➤ la suite des décimales du nombre π : les problèmes concernant la probabilité de l'apparition d'un chiffre donné ne sont pas actuellement résolus.

➤ la suite des distances au Soleil, année après année, d'une planète du système solaire intéresserait beaucoup les astronomes ; mais le problème est extrêmement difficile et il est impossible de prévoir si, à long terme, une planète ne risque pas d'être expulsée du système solaire.

➤ la suite de Léonard de Pise (vers 1170–1240), dite de Fibonacci, définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

2.4 Représentations graphiques des termes d'une suite sur un axe

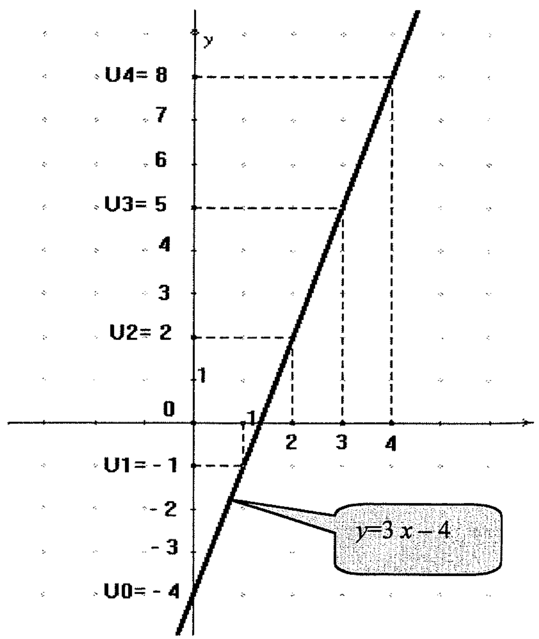
Dans certains cas, il est intéressant de représenter graphiquement les termes d'une suite sur un axe.

Exemple 1

Reprenons la suite (u_n) définie en $\boxed{\text{a}}$ par $u_n = 3n-4$ pour $n \geq 0$.

On représente la fonction $f : x \mapsto 3x - 4$.

Les termes $u_n = f(n)$ sont ainsi représentés sur **l'axe des ordonnées**.



Exemple 2

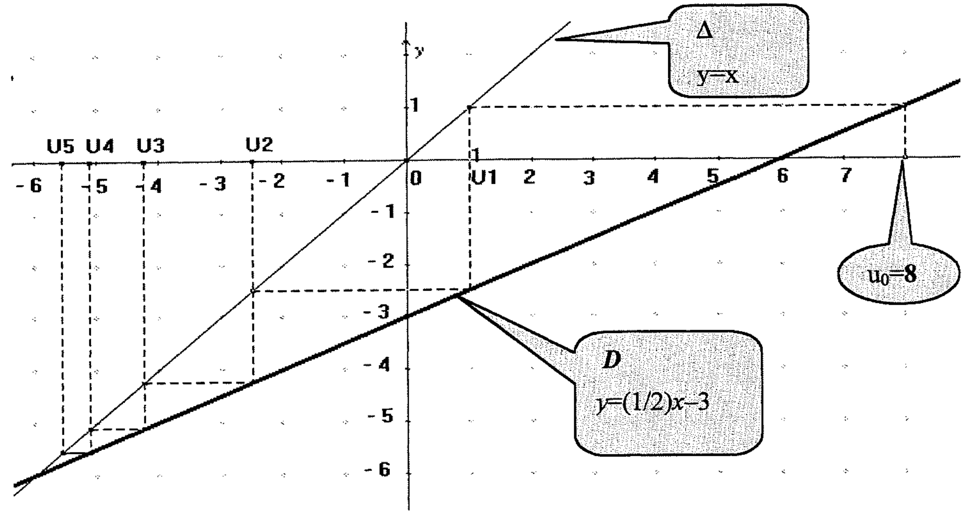
Reprenons la suite (u_n) définie en $\boxed{\text{e}}$, pour tout $n \geq 0$, par:

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n - 3 \end{cases}$$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{2}x - 3$.

Dans un repère orthonormal, on trace la droite D représentative de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

On cherche à représenter les termes u_1, u_2, u_3, u_4, ... sur **l'axe des abscisses**.



Quelles conjectures peut-on faire d'après cette représentation graphique ?

2.5 Suite croissante - Suite décroissante

Définitions

Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est :

➤ croissante si, pour tout entier n : $u_n \leq u_{n+1}$;

➤ décroissante si, pour tout entier n : $u_n \geq u_{n+1}$;

➤ constante si, pour tout entier n : $u_n = u_{n+1}$.

Toute suite croissante, ainsi que toute suite décroissante, est dite monotone.

Méthode usuelle pour étudier les variations d'une suite : étude du signe de $u_{n+1}-u_n$

➤ si pour tout n, $u_{n+1}-u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est croissante.

➤ si pour tout n, $u_{n+1}-u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est décroissante.

➤ si $u_{n+1}-u_n$ n'a pas un signe constant, alors la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante : on dit qu'elle n'est pas monotone.

Exemple 1

Reprenons la suite $\boxed{b}$ du paragraphe **2.2** : $v_n = \dfrac{n+1}{n-4}$ pour $n \geq 5$.

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)-4} = \frac{n+2}{n-3}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{n+2}{n-3} - \frac{n+1}{n-4} = \frac{(n+2)(n-4)-(n+1)(n-3)}{(n-3)(n-4)} = \frac{n^2-2n-8-n^2+2n+3}{(n-3)\,(n-4)}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{-5}{(n-3)\,(n-4)}.$$

Pour $n \geq 5$, on a $n-3 > 0$, $n-4 > 0$ donc $v_{n+1}-v_n \leq 0$.

La suite (v_n) est donc décroissante.

Les résultats obtenus pour la suite $\boxed{b}$ du paragraphe **2.2** permettent de vérifier cette propriété sur les dix premiers termes.

Exemple 2

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_n = \sqrt{n}$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante, pour tout n l'inégalité $n < n+1$ implique l'inégalité $f(n) < f(n+1)$ c'est-à-dire $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

Méthode pour l'étude des suites définies par : $u_n = f(n)$

➤ Si f est croissante sur $[0;+\infty[$, l'inégalité $n < n+1$ implique $f(n) < f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.

➤ Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$, l'inégalité $n < n+1$ implique $f(n) > f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc décroissante.

☞ Attention ! Cette méthode ne s'applique pas aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ (voir *exemple 2* du paragraphe **2.4** où la fonction f est croissante et où l'observation de la suite montre que celle-ci n'est pas croissante).

Exemple 3 Cas des suites monotones à partir d'un certain rang

Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_n = 2n^2-60n+13$.

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2-60(n+1)+13$$

$$u_{n+1}-u_n = 2[(n+1)^2-n^2]-60[(n+1)-n]$$

$$u_{n+1}-u_n = 2(2n+1)-60$$

$$u_{n+1}-u_n = 4n-58.$$

$u_{n+1}-u_n \geq 0$ dès que $n \geq 15$.

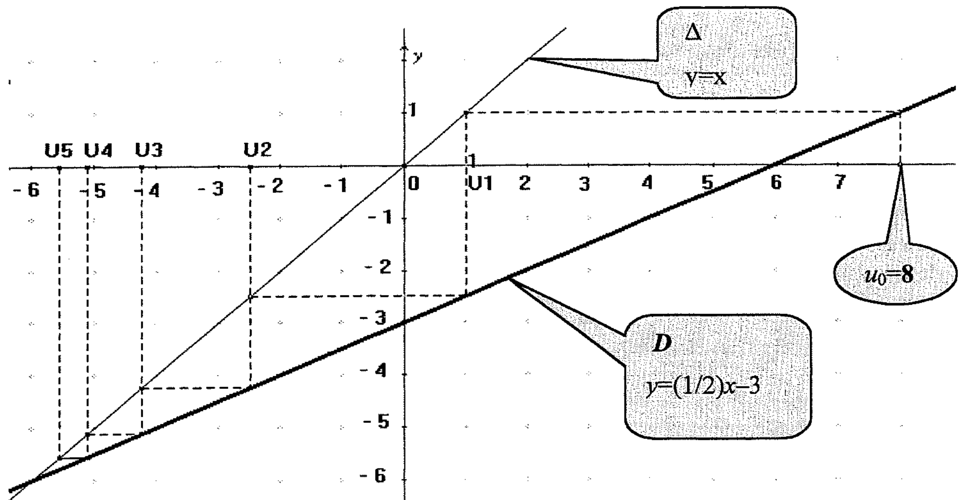
On dit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 15.

Cette conclusion peut aussi être obtenue en étudiant le comportement de la fonction définie, pour $x \geq 0$, par : $x \mapsto 2x^2-60x+13$.

2.6 Un exemple de raisonnement par récurrence

Reprenons la suite $\boxed{e}$ du paragraphe **2.2** définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3.$$



L'étude graphique de la suite permet de conjecturer que, pour tout n, $u_n > -6$, autrement dit : $u_n+6 > 0$ pour tout entier n.

Montrons-le à l'aide d'**un raisonnement par récurrence** que nous allons expliciter. C'est la première fois que nous utilisons un raisonnement par récurrence : un tel raisonnement comporte **trois étapes**.

***Etape* 1**

$u_0+6 = 8+6 = 14$, donc $u_0+6 > 0$, autrement dit : $u_n+6 > 0$ pour $n = 0$.

***Etape* 2**

Supposons que, pour un certain rang k, $u_k+6 > 0$. On a alors :

$$u_{k+1}+6 = \frac{1}{2}u_k - 3+6$$

$$u_{k+1}+6 = \frac{1}{2}(u_k+6)$$

donc $u_{k+1}+6 > 0$.

On a ainsi montré qu'à chaque fois que $u_k+6 > 0$ alors $u_{k+1}+6 > 0$.

***Etape* 3 : Conclusion**

On conclut que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n+6 > 0$. En effet :

- on sait que $u_0+6 > 0$, donc $u_1+6 > 0$ d'après l'étape 2 avec $k = 0$.
- on sait maintenant que $u_1+6 > 0$, donc $u_2+6 > 0$ d'après l'étape 2 avec $k = 1$.
- on sait maintenant que $u_2+6 > 0$, donc $u_3+6 > 0$ d'après l'étape 2 avec $k = 2$.
- etc.

Ce résultat permet d'étudier les variations de la suite (u_n).

Comme $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}u_n-3-u_n = -\frac{1}{2}u_n-3 = -\frac{1}{2}(u_n+6)$ on en déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n < 0.$$

Par conséquent la suite (u_n) est bien décroissante.

Voici ce que disait Henri Poincaré (1854 - 1912) dans le chapitre I de son ouvrage **La Science et l'Hypothèse** dont la première édition date de 1902.

Dans le paragraphe V du chapitre I, intitulé *Sur la nature du raisonnement mathématique*, Poincaré montre l'intérêt du raisonnement par récurrence qui est, selon lui *un instrument qui permet de passer du fini à l'infini.*

V

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.

Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.

Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.

Le théorème est vrai du nombre 1.
Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.
Donc il est vrai de 2.
Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.
Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.

De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.

Si le théorème est vrai de $n-1$, il l'est de n.

On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures.

Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes.

Il est facile maintenant de comprendre pourquoi toute conséquence particulière d'un théorème peut, comme je l'ai expliqué plus haut, être vérifiée par des procédés purement analytiques.

Si au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade; il nous en faudrait 9 si nous voulions démontrer le théorème pour le nombre 10; il nous en faudrait davantage encore pour un nombre plus grand; mais quelque grand que soit ce nombre nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible.

Et cependant, quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler.

Je demandais au début pourquoi on ne saurait concevoir un esprit assez puissant pour apercevoir d'un seul coup d'œil l'ensemble des vérités mathématiques.

La réponse est aisée maintenant; un joueur d'échecs peut combiner quatre coups, cinq coups d'avance, mais, si extraordinaire qu'on le suppose, il n'en préparera jamais qu'un nombre fini; s'il applique ses facultés à l'arithmétique, il ne pourra en apercevoir les vérités générales d'une seule intuition directe; pour parvenir au plus petit théorème, il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini.

Cet instrument est toujours utile, puisque, nous faisant franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons, il nous dispense de vérifications longues, fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. Mais il devient indispensable dès qu'on vise au théorème général, dont la vérification analytique nous rapprocherait sans cesse, sans nous permettre de l'atteindre.

Dans ce domaine de l'arithmétique, on peut se croire bien loin de l'analyse infinitésimale, et, cependant, nous venons de le voir, l'idée de l'infini mathématique joue déjà un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général.

2.7 Suite majorée, suite minorée, suite bornée

La suite précédente possède d'autres propriétés intéressantes.

➤ Elle est majorée par le nombre 8, c'est-à-dire que pour tout n on a $u_n \leq 8$ puisque la suite est décroissante et que $u_0 = 8$.

On dit que 8 est un majorant de la suite.

De même 10, ou tout autre nombre réel supérieur à 8, est un majorant de la suite.

➤ Elle est minorée par le nombre –6, c'est-à-dire que pour tout n on a $u_n > -6$, puisque $u_n + 6 > 0$.

On dit que –6 est un minorant de la suite.

De même –10, ou tout autre nombre réel inférieur à –6, est un minorant de la suite.

➤ Une telle suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.

3. Suites arithmétiques

3.1 Introduction

Voici un extrait d'un livre d'algèbre, **Elémens d'algèbre**, publié par Leonhard Euler en 1770 et traduit en français en 1784.

402.

Des Progreſſions Arithmétiques.

Nous avons infinué qu'on nomme *progreſſion arithmétique* une ſuite de nombres compoſée d'autant de termes qu'on veut, leſquels croiſſent ou décroiſſent toujours d'une même quantité.

Ainſi les nombres naturels écrits par ordre, comme 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c. forment une progreſſion arithmétique, parce qu'ils augmentent toujours de l'unité ; & la ſuite 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, &c. eſt auſſi une telle progreſſion, puiſque ces nombres diminuent conſtamment de 3.

403.

Le nombre ou la quantité dont les termes d'une progreſſion arithmétique deviennent plus grands ou plus petits, ſe nomme la *différence*. Ainſi quand le premier terme eſt donné avec la différence, on peut continuer la progreſſion arithmétique auſſi loin qu'on voudra. Soit, par exemple, le premier terme = 2, & la différence = 3 ; on aura la progreſſion croiſſante qui ſuit : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, &c. où chaque terme ſe trouve en ajoutant la différence au terme précédent.

404.

On a coutume d'écrire les nombres naturels, 1, 2, 3, 4, 5, &c. au-deſſus des termes d'une telle progreſſion arithmétique, afin qu'on reconnoiſſe d'abord le rang où un terme quelconque ſe trouve être dans la progreſſion. On peut nommer ces nombres écrits au-deſſus des termes, des *indices* ; ainſi l'exemple cité s'écrira comme il ſuit :

Indices, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Prog. arithm. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29

&c. où l'on voit que 29 eſt le dixieme terme.

3.2 Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Le réel r est appelé **raison** de la suite.

➠ ***Remarques***

❶ La raison r est appelée *différence* par Euler. En effet on a : $r = u_{n+1} - u_n$.

❷ Dans une suite arithmétique, la différence entre deux termes consécutifs est une constante. On en déduit que :

➤ si $r > 0$ alors la suite est croissante ;

➤ si $r < 0$ alors la suite est décroissante ;

➤ si $r = 0$ alors la suite est constante.

Exemple

Reprenons la suite (a_n) des aires des triangles (voir **2.2** $\boxed{c}$).

On a montré que $a_n = \frac{n}{2}$.

Donc $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$ ce qui prouve que la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et qu'elle est croissante.

3.3 Expression du terme général en fonction de n

405.

Soit a le premier terme, & d la différence, la progreſſion arithmétique continuera dans cet ordre :

1 2 3 4 5 6 7
$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d,$ &c.

par lequel on voit qu'il eſt facile de trouver auſſi-tôt un terme quelconque de la progreſſion, ſans qu'il ſoit néceſſaire de connoître tous les termes précédens, & uniquement par le moyen du premier terme a & de la différence d. Par exemple, le dixieme terme ſera $= a + 9d$, le centieme terme $= a + 99d$, & en général le terme n quelconque ſera $= a + (n-1)d$.

Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison **r**.

➤ Si le rang du premier terme est égal à 1, en procédant comme Euler, on a :	➤ Si le rang du premier terme est égal à 0 les termes de la suite sont :
 u_1 $u_2 = u_1+r$ $u_3 = u_1+2r$ $u_4 = u_1+3r$ .... $u_{10} = u_1+9r$ .... $u_n = u_1+(n-1)r$	u_0 $u_1 = u_0+r$ $u_2 = u_0+2r$ $u_3 = u_0+3r$ $u_4 = u_0+4r$ .... $u_{10} = u_0+10r$ .... $u_n = u_0+nr$
On admettra : pour tout $n\geq 1$, $\boldsymbol{u_n = u_1+(n-1)r}$	On admettra : pour tout $n\geq 0$, $\boldsymbol{u_n = u_0+nr}$

Exercice 3.1 D'après Leonhard Euler (*Extrait du n° 406 page 324*)

406. Suppoſez, par exemple, une progreſſion arithmétique de cent termes, dont le premier $=4$, & que la différence ſoit $=3$, le dernier terme ſera $=99.3+4=301$.

Vérifier l'affirmation d'Euler.

Exercice 3.2 Le 100$^{\text{ème}}$ nombre impair est-il 199 ou 201 ?

Exprimer, en fonction de n, le n-ième nombre impair.

3.4 Somme de termes consécutifs

412.

On a ſouvent beſoin auſſi de prendre la ſomme d'une progreſſion arithmétique. On la trouveroit en ajoutant enſemble tous les termes ; mais comme cette addition ſeroit très-prolixe, quand la progreſſion conſiſte en un grand nombre de termes, on a imaginé une regle, par le ſecours de laquelle on trouve très-facilement la ſomme dont nous parlons.

413.

Nous conſidérerons d'abord une progreſſion de cette eſpece qui ſoit donnée, & telle que le premier terme $=2$, la différence $=3$, le dernier terme $=29$, & le nombre des termes $=10$:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Nous voyons que dans cette progreſſion la ſomme du premier & du dernier terme $=31$; la ſomme du ſecond & du pénultieme $=31$; la ſomme du troiſieme & de l'antépénultieme $=31$, & ainſi de ſuite ; & nous en concluons que la ſomme de deux termes quelconques également éloignés l'un du premier & l'autre du dernier terme, eſt toujours égale à la ſomme du premier & du dernier terme.

414.

Il eſt facile d'en ſaiſir la raiſon. Car ſi nous ſuppoſons le premier terme $=a$, le dernier $=z$, & la différence d, la ſomme du premier & du dernier terme eſt $=a+z$; & le ſecond terme étant $=a+d$ & le pénultieme $=z-d$, la ſomme de ces deux termes eſt auſſi $=a+z$. Enſuite le troiſieme terme étant $a+2d$, & l'antépénultieme $=z-2d$, il eſt clair que ces deux termes ajoutés enſemble font auſſi $a+z$. On démontrera la même choſe de tous les autres.

415.

Pour parvenir donc à déterminer la ſomme de la progreſſion propoſée on écrira deſſous, terme pour terme, la même progreſſion priſe à rebours, & on fera l'addition des termes correſpondans, comme il ſuit :

$$\begin{array}{l}
2+5+8+11+14+17+20+23+26+29\\
29+26+23+20+17+14+11+8+5+2\\
\hline
31+31+31+31+31+31+31+31+31+31
\end{array}$$

Cette ſuite de termes égaux eſt évidemment égale au double de la ſomme de la progreſſion propoſée ; or le nombre de ces termes égaux eſt 10, comme dans la progreſſion, & leur ſomme, par conſéquent, $=10.31=310$. Ainſi, puiſque cette ſomme eſt le double de la ſomme de la progreſſion arithmétique, il faut que cette ſomme cherchée ſoit $=155$.

416.

Si on procede de la même maniere à l'égard d'une progreſſion arithmétique quelconque, dont le premier terme ſoit $=a$, le dernier $=z$, & le nombre des termes $=n$; en écrivant ſous la progreſſion donnée la même progreſſion en rétrogradant, on aura, en faiſant l'addition terme à terme, une ſuite de n termes, dont chacun ſera $=a+z$; la ſomme de cette ſuite ſera par conſéquent $=n(a+z)$, & elle ſera le double de la ſomme de la progreſſion arithmétique propoſée ; celle-ci ſera donc $=\frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Ce réſultat fournit une méthode facile pour trouver la ſomme d'une progreſſion arithmétique quelconque ; elle ſe réduit à cette regle :

Multipliez la ſomme du premier & du dernier terme par le nombre des termes, la moitié du produit indiquera la ſomme de toute la progreſſion.

Ou, ce qui revient au même, multipliez la ſomme du premier & du dernier terme par la moitié du nombre des termes.

Ou bien, multipliez la moitié de la ſomme du premier & du dernier terme par le nombre total des termes. Ces deux manieres d'énoncer la regle, donnent également la ſomme de la progreſſion.

418.

Il ſera néceſſaire d'éclaircir cette regle par quelques exemples.

Soit d'abord la progreſſion des nombres naturels, 1, 2, 3 &c. juſqu'à 100, dont il s'agiſſe de trouver la ſomme. Celle-ci ſera par la premiere regle $=\frac{100.101}{2}=50.101=5050$.

Soit (u_n) une suite **arithmétique** et S la somme d'un certain nombre de termes consécutifs. On a :

$$S = \frac{\text{nombre de termes}}{2}\left(\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}\right)$$

Ainsi :

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n = \frac{n+1}{2}(u_0+u_n).$$

$$u_1+u_2+\ldots\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n = \frac{n}{2}(u_1+u_n).$$

On retiendra le cas particulier suivant :

$$\mathbf{1+2+3+\ldots+(n\text{-}1)+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercice 3.3

Calculer 8+11+14+17+...........+158+161+164.

4. Suites géométriques

4.1 Introduction

Voici un autre extrait du livre d'algèbre **Elémens d'algèbre** publié par Léonhard Euler en 1770.

Des Progreſſions géométriques.

505.

UNE ſuite de nombres qui deviennent toujours un même nombre de fois plus grands ou plus petits, ſe nomme une *progreſſion géométrique*, parce que chaque terme eſt conſtamment au ſuivant dans le même rapport géométrique. Et le nombre qui indique combien de fois chaque terme eſt plus grand que le précédent, s'appelle l'*expoſant*. Ainſi, quand le premier terme eſt 1 & l'expoſant = 2, la progreſſion géométrique devient :

Termes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 &c.
Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 &c.
les nombres 1, 2, 3 &c. marquant toujours les quantiemes termes de la progreſſion.

4.2 Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

Le réel q s'appelle la **raison** de la suite.

➠ ***Remarque***

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q.

Si $q = 0$, alors tous les termes de la suite sont nuls sauf, peut-être, le premier terme u_0.

Désormais, on ne considérera que les ***suites géométriques*** (u_n) *dont* ***le 1^er^ terme et la raison sont non nuls****. Dans ce cas, aucun terme de la suite n'est nul.*

Exemple 1

Reprenons la suite (C_n) des capitaux (voir **2.2** $\boxed{\mathbf{d}}$).

On a montré que : $C_{n+1} = 1{,}04\, C_n$.

Donc (u_n) *est une suite géométrique de raison* $q = 1{,}04$ *et de* 1^er^ *terme* C_0.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

La suite (u_n) est géométrique car : $u_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}u_n$.

La raison est $q = \frac{2}{3}$ et le premier terme $u_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$.

De même, pour tout q non nul, on a : $q^{n+1} = q \times q^n$.

Donc la suite (u_n) définie par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q.

4.3 Expression du terme général en fonction de *n*

506.

Si on ſuppoſe, en général, le premier terme $= a$ & l'expoſant $= b$, on a la progreſſion géométrique ſuivante :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \ldots n.$$

$$\textit{Progr.}\ a,\ ab,\ ab^2,\ ab^3,\ ab^4,\ ab^5,\ ab^6,\ ab^7 \ldots ab^{n-1}.$$

Ainſi, quand cette progreſſion eſt de n termes, le dernier terme eſt $= ab^{n-1}$. Il faut remarquer ici, que ſi l'expoſant b eſt plus grand que l'unité, les termes augmentent continuellement ; que ſi l'expoſant $b = 1$, les termes ſont tous égaux ; enfin, que ſi l'expoſant b eſt plus petit que 1, ou qu'il ait une fraction, les termes décroiſſent ſans ceſſe. Ainſi quand $a = 1$ & $b = \frac{1}{2}$, on a cette progreſſion géométrique :

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{64},\ \tfrac{1}{128},\ \&c.$$

Soit (u_n) une suite **géométrique** de raison q.

➤ Si le rang du premier terme est égal à 1, en procédant comme Euler, on a :	➤Si le rang du premier terme est égal à 0, les termes de la suite sont :
	u_0
u_1	$u_1 = u_0\, q$
$u_2 = u_1\, q$	$u_2 = u_0\, q^2$
$u_3 = u_1\, q^2$	$u_3 = u_0\, q^3$
$u_4 = u_1\, q^3$	$u_4 = u_0\, q^4$
....	....
$u_{10} = u_1\, q^9$	$u_{10} = u_0\, q^{10}$
....	....
$u_n = u_1\, q^{n-1}$	$u_n = u_0\, q^n$
On admettra : Pour tout $n \geq 1$, $\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$	On admettra : pour tout $n \geq 0$, $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$

Exercice 4.1 D'après Leonhard Euler (*Extrait du n° 507 pages 404 et 405*)

Si on demandoit donc le 50^e terme de la progreſſion géométrique 1, 2, 4, 8, &c. on auroit $a = 1$, $b = 2$ & $n = 50$; par conſéquent le 50^e terme $= 2^{49}$. Or 2^9 étant $= 512$; 2^{10} ſera $= 1024$. Donc le quarré de 2^{10}, ou 2^{20}, $= 1048576$, & le quarré de ce nombre, ou 1099511627776 $= 2^{40}$. Multipliant donc cette valeur de 2^{40} par 2^9 ou par 512, on a 2^{49} égalant 562949953421312.

Vérifier le calcul d'Euler.

Exercice 4.2

L'épaisseur d'une feuille de papier est de 50 µ (1000 µ = 1 mm).

On plie successivement cette feuille en deux 50 fois.

Quelle épaisseur obtient-on ?

Combien faut-il faire de pliages pour dépasser la hauteur de la tour Eiffel, la distance de la Terre à la Lune ?

4.4 Somme de termes consécutifs

508.

Une des principales queſtions qui ſe préſentent dans cette matiere, c'eſt de trouver la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique ; nous allons donc en expliquer la méthode. Soit donnée d'abord la progreſſion ſuivante, compoſée de dix termes :

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512,

dont nous indiquerons la ſomme par ſ, de ſorte que :

ſ $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$, nous aurons, en prenant le double de part & d'autre, 2ſ $= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$. Otant de ceci la progreſſion indiquée par ſ, il reſte ſ $= 1024 - 1 = 1023$; donc la ſomme cherchée $= 1023$.

509.

Suppoſons maintenant que dans la même progreſſion le nombre des termes ſoit indéterminé & $= n$, de façon que la ſomme en queſtion, ou ſ, ſoit $= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^{n-1}$. Si on multiplie par 2, on a 2ſ $= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots 2^n$, & ſouſtrayant de cette égalité la précédente, on a ſ $= 2^n - 1$. On voit donc que la ſomme cherchée ſe trouve, en multipliant le dernier terme, 2^{n-1}, par l'expoſant 2, afin d'avoir 2^n, & en ſouſtrayant de ce produit l'unité.

514.

Suppoſons maintenant, en général, le premier terme $= a$, l'expoſant $= b$, le nombre des termes $= n$, & leur ſomme $=$ ſ, en ſorte que

ſ $= a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^{n-1}$.

Si nous multiplions par b, nous avons bſ $= ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + \ldots ab^n$, & ſouſtrayant l'égalité précédente il reſte $(b-1)$ſ $= ab^n - a$; d'où nous tirons facilement la ſomme cherchée ſ $= \dfrac{ab^n - a}{b-1}$.

Soit (u_n) une suite **géométrique** de n termes, de raison q et de premier terme a.

Euler a montré que la somme S de ces n termes est égale à : $\boxed{S=a\dfrac{1-q^n}{1-q}}$

Ce résultat n'est valable que si $q\neq 1$: pour $q = 1$, on a : $S = n\,a$.

On retiendra, **pour $q \neq 1$**, la formule suivante :

$$\boxed{S = a\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$$

En particulier, pour a = 1, on a :

$$\boxed{1+q+q^2+q^3+\dots\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Exercice 4.3 Calculer $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{4096}$.

5. Exercices

5.1 D'après Leonhard Euler

511.

On propoſe ordinairement dans cette matiere la queſtion qui ſuit : Un homme propoſe de vendre ſon cheval par les clous, qui ſont au nombre de 32 ; il demande 1 liard pour le premier clou, 2 liards pour le ſecond clou, 4 liards pour le troiſieme clou, 8 liards pour le quatrieme, & ainſi de ſuite, en demandant pour chaque clou le double du prix du précédent. On demande quel ſeroit le prix du cheval ?

5.2 Problème égyptien

Extrait du papyrus Rhind (écrit vers –1650, acheté à Louksor en 1858 par l'Ecossais Henry Rhind et conservé au British Museum).

Comment diviser 100 pains entre 5 hommes de façon que les 5 parts forment une suite arithmétique et que le septième de la somme des trois plus grandes parts soit égal à la somme des deux plus petites ?

5.3 La légende du jeu d'échecs

Asaphad, historien arabe, raconte que Sessa présenta le jeu d'échecs qu'il venait d'inventer à Schéran, prince de l'Inde.

Celui-ci lui demanda ce qu'il voulait comme récompense. Sessa répondit :

Que Votre Majesté daigne me donner 1 grain de blé pour la 1ère case, 2 grains pour la 2ème, 4 grains pour la 3ème, 8 grains pour la 4ème et ainsi de suite en doublant toujours jusqu'à la 64ème case.

Charmé de la modestie de l'inventeur, le prince ordonna que l'on récompense Sessa sur le champ…

❶ Combien de grains de blé le prince doit-il donner ? Trouver un ordre de grandeur du résultat en prenant $2^{10} \approx 10^3$.

❷ Sachant que 16 grains de blé pèsent 1 gramme, calculer le poids total des grains de blé.

❸ On peut estimer la production mondiale annuelle de blé à 500 millions de tonnes. Comparer cette production avec la récompense.

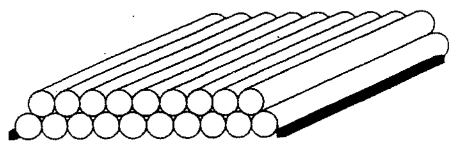
On peut estimer la production française annuelle de blé à 32 millions de tonnes. Comparer cette production avec la récompense.

5.4 Un bon tuyau

Des tuyaux cylindriques dont le diamètre extérieur est de 50 cm sont stockés de la manière suivante :

– une rangée de 10 tuyaux mis côte à côte est placée entre deux butées ;

– sur cette rangée sont disposés 9 tuyaux reposant sur la première rangée comme l'indique la figure et ainsi de suite.



❶ Combien y a-t-il de rangées ?

❷ Quel est le nombre maximal de tuyaux que l'on peut stocker en un seul tas ?

5.5 Tableau de nombres

On considère le tableau de n lignes et n colonnes ci-contre.

Quel est le dernier nombre qu'il faut écrire sur la dernière ligne ?

Calculer la somme de tous les nombres alors écrits dans le tableau.

1	2	3	4	… n
2	3	4	5	… $n+1$
3	4	5	6	… $n+2$
…………				
…………				
…………				
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	……..?

5.6 Tableau de nombres (bis)

On considère le tableau de n lignes et n colonnes ci-contre.

Quel est le dernier nombre qu'il faut écrire sur la dernière ligne ?

Calculer la somme de tous les nombres alors écrits dans le tableau.

1	2	3	4	… n
2	4	6	8	… $2n$
3	6	9	12	… $3n$
…………				
…………				
…………				
n	$2n$	$3n$	$4n$	……..?

5.7 D'après Leonhard Euler

Dans son ouvrage intitulé *Introduction à l'analyse infinitésimale* écrit en 1748, Euler pose le problème suivant :

Un particulier doit 400 000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 % ; il acquitte tous les ans 25 000 florins ; on demande après combien d'années sa dette sera entièrement éteinte.

Pour résoudre le problème, on pose S_0 = 400 000 la somme en florins qu'on supposera empruntée le 1/1/1999.

On appelle S_n la somme restant à rembourser au 1^er^ janvier de l'année $(1999+n)$, $n \in \mathbb{N}$.

❶ a. Expliquer pourquoi $S_1 = 395\ 000$.

b. Calculer le montant des intérêts pour l'année $(1999+n)$ en fonction de S_n. En déduire, pour tout entier naturel n, la relation : $S_{n+1} = 1{,}05\ S_n - 25\ 000$.

❷ On pose, pour tout entier naturel n, $T_n = S_n - 500\ 000$.

a. Montrer que la suite (T_n) est géométrique de premier terme (–100 000) et de raison 1,05.

b. Exprimer T_n en fonction de n et en déduire que $S_n = 100\ 000\ (5 - 1{,}05^n)$.

❸ La conclusion donnée par Euler est :

Le nombre d'années sera un peu moindre que 33 ; c'est-à-dire qu'au bout de 33 ans la dette sera non seulement acquittée mais le créancier sera tenu de rendre 318 $\frac{4}{5}$ florins.

Justifier cette conclusion.

5.8 Les piles de boulets

Partie A Somme des carrés des n premiers nombres entiers

On pose :

$$S_1 = 1+2+3+\ldots\ldots+n$$
$$S_2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$$

On se propose de calculer S_2, qui est la somme des carrés des n premiers nombres entiers, en procédant comme suit.

Pour ce faire, on écrit les égalités successives suivantes :

$\mathbf{(0+1)^3}$	=	0	+	0	+	0	+	1
$\mathbf{(1+1)^3}$	=	$\mathbf{1^3}$	+	3×1^2	+	3×1	+	1
$\mathbf{(2+1)^3}$	=	$\mathbf{2^3}$	+	3×2^2	+	3×2	+	1
$\mathbf{(3+1)^3}$	=	$\mathbf{3^3}$	+	3×3^2	+	3×3	+	1
…	…	**…**		…		…		…
$\mathbf{n^3}$	=	$\mathbf{(n-1)^3}$	+	$3(n-1)^2$	+	$3(n-1)$	+	1
$(n+1)^3$	=	$\mathbf{n^3}$	+	$3\times n^2$	+	$3\times n$	+	1

Ajoutons membre à membre les $(n+1)$ égalités ci-dessus.

Après avoir simplifié **les cubes en caractères gras** il nous reste :

$$(n+1)^3 = 3\ S_2 + 3S_1 + n + 1.$$

➤ Connaissant l'expression de S_1 en fonction de n en déduire que :

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Partie B Les piles de boulets

■ Piles à bases carrées

Une pile à base carrée se compose de boulets arrangés en forme de carrés superposés de manière à former une pyramide.

Si le carré inférieur a n boulets de côté, celui au-dessus en a $n-1$, le suivant $n-2$ et ainsi de suite, de telle sorte que la pile se termine par un seul boulet.

Calculer le nombre total de boulets contenus dans une pile à base carrée lorsque :

➤ le carré inférieur a 5 boulets de côté ;

➤ le carré inférieur a 10 boulets de côté ;

➤ le carré inférieur a n boulets de côté.

▲ Piles à bases triangulaires

Une pile à base triangulaire se compose de boulets arrangés en forme de triangles équilatéraux superposés de manière à former une pyramide.

Si le triangle inférieur a n boulets de côté, celui au-dessus en a n–1, le suivant n–2 et ainsi de suite, de telle sorte que la pile se termine par un seul boulet.

Calculer le nombre total de boulets contenus dans une pile triangulaire lorsque :

➤ le triangle inférieur a 5 boulets de côté ;

➤ le triangle inférieur a 10 boulets de côté ;

➤ le triangle inférieur a n boulets de côté.

5.9 Fractions et suites

On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + ... + \frac{n}{2^n}$.

Les numérateurs des n fractions forment une suite arithmétique finie de premier terme égal à 1 et de raison $r = 1$, alors que les dénominateurs forment une suite géométrique finie de premier terme égal à 2 et de raison $q = 2$.

Exprimer S_n uniquement en fonction de n.

Vérifier pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ la formule obtenue.

Bibliographie

[Eule95] Euler L. (An trois ou 1795) *Elémens d'algèbre,* p. 322-411.

[Eule96] Euler L. (An quatre ou 1796) *Introduction à l'analyse infinitésimale*, p. 81-82.

[Laga75] Lagarias J. (1975) The 3x+1 problem and its generalizations, *American Mathematical Monthly*, janvier 1985, p. 3.

[Macé62] Macé J. (1862) *L'arithmétique de Grand-Papa*, p. 42.

[Poin27] Poincaré H. (1927) *La Science et l'Hypothèse*, p. 20-22.

PENSER BEAUCOUP EN UN

Sergio Toledo Prats

Fondation Orotava des Canaries de l'Histoire des Sciences

Traduit de l'espagnol par Roseline Cases (IREM de Toulouse)

Introduction

Un objectif possible de l'enseignement de l'Histoire de la Philosophie est que les élèves comprennent la naissance de la philosophie comme la construction collective d'un type de discours avec ses concepts, relations et usages rhétoriques. A ses débuts, le langage philosophique n'étant pas séparé du mythico-religieux, on peut rechercher l'origine des termes philosophiques à partir d'expériences rituelles ou techniques, de coutumes, de récits mythopoétiques ou de situations politiques, d'usages médicaux ou juridiques. Il est intéressant que les élèves constatent la relative unité et généralité du savoir philosophique de l'époque en comparaison avec la pluralité et la spécialisation des sciences actuelles, car je crois que nous partageons tous l'idée que l'interdisciplinarité est un des objectifs et avantages de l'Histoire des Sciences.

La connaissance historique, en plus d'expliquer le passé, sert à rendre compte du présent, en faisant prendre conscience de l'historicité de notre propre époque. Et vice-versa : dans l'enseignement de l'histoire des sciences, on ne peut esquiver le fait que les élèves ont certaines connaissances sur les sciences et, en conséquence, une idéologie implicite à son sujet. Ils nourrissent des croyances et perspectives, extraient des valeurs et des méthodes ; en définitive, nous savons que la science est aujourd'hui une des sources du sens de la vie. C'est pourquoi il ne me paraît pas approprié de réduire cette discipline à un système formel d'énoncés sur des objets et événements ou de présenter la science comme un système axiologiquement neutre dans un monde aseptique idéal. Il faut montrer que, dans l'Antiquité comme maintenant, la construction du savoir est travail et hasard, accumulation et crises,