ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES À PROPOS DE LA MESURE DE LA TERRE

Pascal Quinton

IREM de Rennes

Résumé

Le thème de la mesure de la Terre peut donner lieu à diverses activités mathématiques dans les classes de lycée. Elles permettent d'illustrer diverses notions figurant au programme de ces classes, mais elles sont aussi l'occasion d'une réflexion scientifique approfondie. Même les questions les plus simples (par exemple : quelle est la forme de la Terre ?) peuvent donner lieu à un débat scientifique, à partir du moment où l'on refuse toute forme d'argument d'autorité. La lecture de textes anciens est particulièrement adaptée à ce type de débat.

Introduction

Le travail qui est présenté ici est constitué d'un ensemble d'activités utilisables en classe de 1ère S. Le thème de la mesure de la Terre permet en effet d'illustrer les notions de trigonométrie qui sont au programme de cette classe. Ces activités peuvent bien entendu être utilisées partiellement, mais il m'est apparu que l'examen par les élèves de l'ensemble de ces activités permet une démarche scientifique plus riche, dans la mesure où les questions posées apparaissent naturellement.

La première activité est basée sur un texte de Ptolémée, extrait de L'Almageste, dans lequel est expliqué pourquoi on peut considérer *à bon droit* que la Terre est *sensiblement en forme de sphère*.

Dans une deuxième activité, on examine avec les élèves la mesure du méridien terrestre par Eratosthène. Le texte utilisé est extrait de l'histoire des mathématiques par Montucla. Outre son caractère pittoresque, ce texte a le mérite de mettre en évidence l'irritant problème des unités de mesure utilisées dans l'Antiquité.

La troisième activité concerne la mesure du degré de méridien effectuée par Jean Picard en 1669-1670. La méthode utilisée pour cette mesure est plus aisément comprise par les élèves du fait qu'ils ont pu auparavant comprendre le caractère en quelque sorte théorique de la mesure d'Eratosthène, du moins telle qu'elle nous apparaît à travers les récits qui nous en sont parvenus.

1 La forme de la Terre

1.1 Texte de l'activité

Preuve que la terre est sphérique selon Ptolémée

On ne sait pas grand chose de la vie de Ptolémée. Il vivait à Alexandrie. On ne connaît pas la date de sa naissance ni de sa mort. Cependant les résultats des observations astronomiques qu'il a effectuées permettent aux astronomes modernes de situer dans le temps ces observations : elles ont eu lieu entre 127 et 150 après J.C.

Le texte qui suit est extrait de l'ouvrage le plus fameux de Ptolémée : l'Almageste.

Que la terre aussi, quand elle considérée dans son ensemble, soit sensiblement en forme de sphère, voici comment on pourrait le concevoir : le soleil, la lune et les autres astres, on peut le constater, ne se lèvent pas (ou ne se couchent pas) au même instant pour tous les hommes sur terre, mais ils le font toujours plus tôt pour ceux qui habitent vers l'orient, toujours plus tard pour ceux qui habitent à l'occident. En effet, nous découvrons que les observations d'éclipses, et tout particulièrement celles de la lune, qui sont pourtant faites au même instant, ne sont pas rapportées partout à la même heure (c'est-à-dire à égale distance par rapport au midi), mais que les heures notées par les plus à l'est des observateurs sont toujours plus tardives que celles notées par les plus à l'ouest. Et puisque la différence des heures est trouvée proportionnelle à la distance entre les lieux, c'est à bon droit que l'on peut assumer que la surface de la terre est sphérique, parce que sa surface arrondie d'une manière homogène (lorsqu'elle est prise comme un tout) masque [des parties du ciel] pour [les observateurs] successifs d'une manière proportionnelle. Or, si la terre présentait quelque autre forme, cela n'arriverait pas, comme le montrent les considérations suivantes.

Si la terre était concave, les astres en se levant apparaîtraient d'abord aux habitants les plus proches de la région du couchant ; si elle était plate, [les astres] se lèveraient et se coucheraient en même temps pour tous les habitants de la terre ; si elle avait la forme d'un triangle ou d'un quadrilatère ou de quelque autre parmi les polygones, de nouveau [les astres se lèveraient et se coucheraient] de la même façon et au même instant pour ceux qui habitent sur la même surface plane : or on voit bien que cela ne se produit en aucune façon.

Que la terre ne peut pas non plus être en forme de cylindre, de telle sorte que la surface incurvée soit tournée vers le levant et le couchant, tandis que les côtés plats qui forment les bases seraient dirigés vers les pôles de l'univers, comme certains pourraient l'accepter comme étant tout à fait plausible, voici qui le montre. Pour aucun des habitants de la surface incurvée, aucun des astres ne serait toujours visible, mais ou bien tous et se lèveraient et se coucheraient pour tous les hommes, ou bien les mêmes astres, distant d'une distance déterminée de chacun des deux pôles, seraient toujours invisibles pour tous les hommes. Or dans la réalité, plus nous nous avançons vers le nord, plus nombreuses parmi les étoiles du sud sont celles qui deviennent cachées, plus nombreuses au contraire parmi les étoiles du nord celles qui apparaissent ; cela montre donc clairement que la courbure de la terre, cachant régulièrement les astres dans la direction nord-sud dans tous les cas, établit que la forme [de la terre] est de type sphérique.

À cela s'ajoute encore le fait suivant : si nous faisons voile vers des montagnes ou quelque endroit élevé, depuis quelque direction que ce soit, nous voyons leur grandeur s'accroître petit à petit, comme s'ils surgissaient de la mer elle-même, alors qu'auparavant ils y étaient plongés comme à cause de la courbure de la surface de l'eau.

Questions

Expliquer, à l'aide de schémas, et en vous aidant du texte de Ptolémée, les affirmations suivantes :

a. La terre n'est pas plate.

b. La terre n'est pas concave.

c. La terre n'est pas un polyèdre.

d. La terre n'est pas un cylindre dont l'axe est orienté du nord au sud.

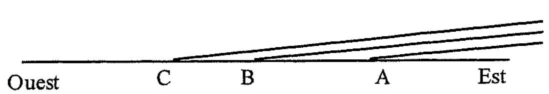
1.2 Réaction des élèves

C'est avec surprise que les élèves apprennent que les astronomes de l'antiquité savaient déjà que la terre est sphérique. Nombreux sont ceux qui pensaient en effet que la preuve de la sphéricité de la terre avait été donnée, au péril de sa vie, par Galilée.

Une fois rétablie la vérité, il reste à comprendre comment les astronomes grecs ont pu se rendre compte que la terre n'est pas plate, alors que toute notre perception sensible du monde qui nous entoure nous conduit à penser le contraire. Lorsqu'on demande aux élèves de prouver que la terre n'est pas plate, une fois écartées les photographies de la terre prise de l'espace, les choses deviennent encore plus mystérieuses. L'examen du texte de Ptolémée peut commencer.

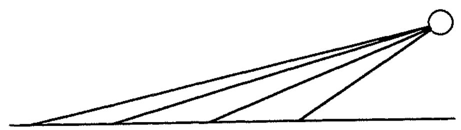
Les dessins auxquels on peut penser sont les suivants :

a.



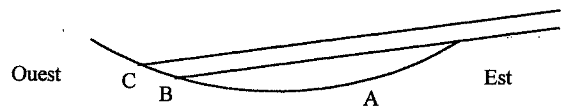
Si la terre était plate, la hauteur du soleil au dessus de l'horizon serait la même en tous les points de la terre. Comme le dit Ptolémée : *si elle était plate, [les astres] se lèveraient et se coucheraient en même temps pour tous les habitants de la terre.*

La grande difficulté pour les élèves est de représenter les directions dans lesquelles on voit le soleil en C et en B comme des droites parallèles. Spontanément, ils cherchent à placer le soleil sur le dessin. On voit des dessins de ce type :



La discussion sur ce sujet est importante. La légitimité du premier des deux dessins ci-dessus n'est pas du tout évidente pour les élèves. Celle du dessin traditionnellement utilisé pour expliquer la mesure d'Eratosthène ne l'est pas plus, et pour les mêmes raisons. Une fois ce point acquis pour les élèves, les autres questions sont rapidement traitées.

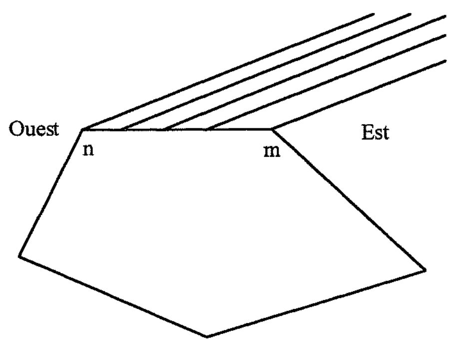
b.



Dans ce dessin, le soleil se lève en B. Il fait encore nuit en A, alors que A est situé à l'est de B.

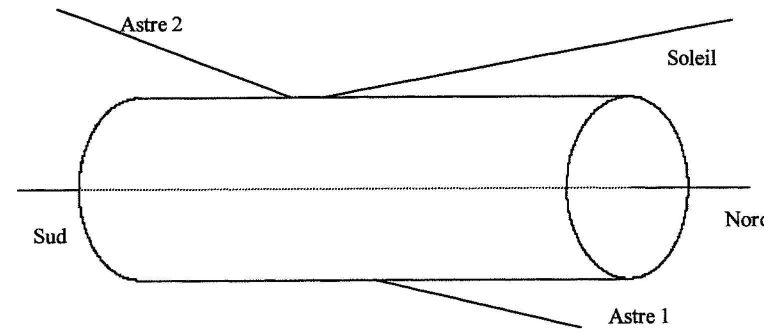
Si la terre était concave, les astres en se levant apparaîtraient d'abord aux habitants les plus proches de la région du couchant

c.



Si [la terre] avait la forme d'un triangle ou d'un quadrilatère ou de quelque autre parmi les polygones, de nouveau [les astres se lèveraient et se coucheraient] de la même façon et au même instant pour ceux qui habitent sur la même surface plane : or on voit bien que cela ne se produit en aucune façon.

d. L'astre 2 ne serait visible par aucun habitant de la terre, puisqu'il serait au-dessus de l'horizon seulement pendant le jour. L'astre 1 se lèverait et se coucherait toutes les nuits pour tous les habitants de la terre.



2 Mesure de la circonférence terrestre par Eratosthène

2.1 Texte de l'activité

2.1.1 Ératosthène

C'est aux mathématiciens, astronomes et philosophes grecs que l'on doit l'idée que la Terre est ronde. On leur doit également les premières évaluations de la circonférence de la Terre.

Une des mesures les plus fameuses est due à Ératosthène. Celui-ci a vécu à Alexandrie, en Égypte, de 273 à 192 avant Jésus-Christ. Ératosthène est resté célèbre à plus d'un titre. On lui doit en particulier une méthode permettant de rechercher les nombres premiers (les nombres entiers qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes).

Voici comment Montucla raconte, dans son *Histoire des mathématiques*, publiée en 1758, la vie d' Ératosthène :

> *Ératosthène fut un de ces hommes rares dont le génie étendu embrasse tous les genres de savoir : orateur, poète, antiquaire, mathématicien et philosophe, il fut nommé par quelques-uns πενταθλος (pentathlos), surnom qu'on donnoit à ceux qui avoient remporté la victoire dans les cinq exercices des jeux olympiques. Ce vaste savoir le fit choisir par le troisième Ptolémée pour son bibliothécaire, emploi qu'il exerça jusqu'à l'âge de quatre vingt ans, où, las d'une vie infirme et languissante, il la termina en se laissant mourir de faim. Il eût été plus philosophique d'attendre la mort de pied ferme.*

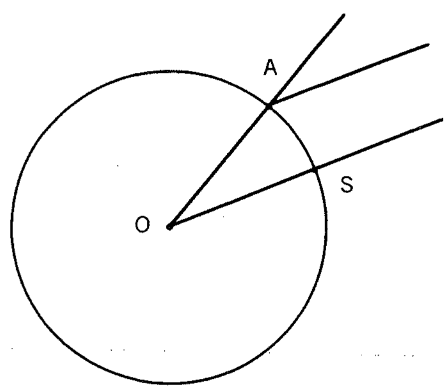
2.1.2 Mesure de la circonférence terrestre

Le même Montucla décrit ainsi la manière dont Ératosthène a effectué sa mesure.

Il y avoit à Syène, un puits profond qui étoit entièrement illuminé à midi, le jour même du solstice d'été. Ératosthène l'avoit remarqué ; et comme à 300 stades à la ronde les hauteurs verticales ne jettoient pas d'ombre à ce moment, il en concluoit que Syène étoit précisément sous le tropique du Cancer. Il supposa ensuite que Syène et Alexandrie étoient l'une et l'autre sous le même méridien, et il estima leur distance de 5000 stades. Il ne s'agissoit plus que de connoître quelle partie du méridien terrestre étoit l'arc compris entre ces deux villes. Pour y parvenir, il attendit à Alexandrie le midi du jour du solstice, moment où le soleil étoit absolument vertical à Syène ; et (...) il mesura l'arc intercepté entre le soleil alors au zénith de Syène, et le zénith d'Alexandrie. Il le trouva par-là d'une 50^{eme} partie de la circonférence, d'où il conclut que la grandeur du degré terrestre étoit de 250 000 stades.

On peut schématiser ainsi la situation. On a représenté le méridien passant par Alexandrie (point A) et Syène (point S). Ce méridien est un cercle dont le centre O est le centre de la terre.

Questions:



1. Indiquer sur le dessin les directions suivantes :

a. le zénith de Syène ;

b. le zénith d' Alexandrie ;

c. la direction du soleil à Syène le jour du solstice ;

d. la direction du soleil à Alexandrie le jour du solstice.

2. Marquer sur le dessin l'angle que mesure Ératosthène.

3. Démontrer que cet angle est égal à l'angle AOS

4. Cet angle étant la 50-ème partie de la circonférence terrestre, calculer la longueur en stades de cette circonférence.

5. Calculer en stades le rayon de la terre.

2.1.3 Critique du résultat attribué à Ératosthène

a. Les unités de longueurs utilisées

Le malheur est que nous ignorons la valeur du stade utilisé par Ératosthène. Voici ce que nous dit Montucla :

Au reste un élément fort important qui nous manque ici, est l'espèce de stade qu'Eratosthène employa. On est d'abord porté à penser que c'est un stade Égyptien dont 60 composoient un schène, qui lui même valoit 4 milles romains ou 3024 toises, dans lequel cas ce stade valoit 50 toises 2 pieds.

Questions

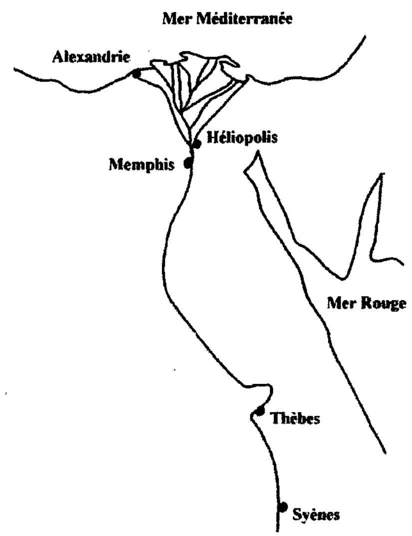
1. Sachant que la toise vaut 6 pieds, quelle est en toises, la mesure de la circonférence terrestre obtenue par Ératosthène, si le stade qu'il emploie est le stade égyptien ?

2. Même question, dans l'hypothèse où le stade employé par Ératosthène serait le stade olympique lequel vaut, selon Montucla, environ 94 toises.

3. La toise utilisée par Montucla vaut approximativement 1,95 m. Exprimer en kilomètres les valeurs obtenues aux questions 1 et 2.

b. Les situations respectives de Syène et d'Alexandrie

Les villes de Syène (actuellement Assouan) et d'Alexandrie ne sont pas situées sur le même méridien. De plus, la mesure de la distance entre ces deux villes, qu'Ératosthène estime à 5 000 stades, n'est sûrement qu'une évaluation. Pour pouvoir obtenir une mesure précise de la circonférence terrestre par le méthode d'Eratosthène, il nous faudrait disposer de deux points A et B, dont on soit sûr qu'ils sont situés sur un même méridien, assez distants l'un de l'autre, et dont on puisse mesurer la distance avec précision.



2.2 Réaction des élèves

Compte tenu de ce qui a été acquis lors de la première activité, le dessin proposé dans l'énoncé pour rendre compte de la mesure d'Eratosthène ne pose pas de problème aux élèves. Par contre, la discussion sur la validité de cette mesure introduit un certain sentiment de malaise. C'est, à mon sens, une situation tout à fait saine. Le malaise des élèves a plusieurs causes. Tout d'abord, ils n'ont guère l'habitude d'exercer leur esprit critique dans le cadre d'un cours de mathématiques, où l'argument d'autorité (qui a l'avantage de procurer un profond sentiment de sécurité) tient souvent lieu de démonstration. Ensuite, la discussion sur les unités de mesures, telle que la mène Montucla, pose une vraie question à laquelle aucune réponse n'est apportée dans le cadre de cette activité. En sondant un peu plus les connaissances des élèves, il s'avère qu'aucun d'entre eux ne sait comment est défini le mètre, ni même quand il a été défini. Il m'a été donné d'entendre des étudiants de l'IUFM de Rennes, à qui je présentais cette activité, s'extasier sur la coïncidence extraordinaire qui fait que la circonférence terrestre mesure 40 000 km (*ça tombe juste*) ! En définitive, l'enjeu de cette discussion avec les élèves me semble être de comprendre ce que peut être la nature d'un texte scientifique et de se rendre compte qu'un résultat n'a pas de valeur en soi, s'il n'est pas justifié de telle façon qu'on puisse le critiquer de façon précise.

3 La mesure de Picard

3.1 Texte de l'activité

Au cours des années 1669-1670, l'abbé Jean Picard, membre de l'Académie des Sciences, fut chargé par celle-ci de mesurer la longueur du degré du méridien à la latitude de Paris. Diverses mesures avaient déjà été effectuées (Snellius, Riccioli), mais les résultats obtenus divergeaient. Une mesure précise était nécessaire pour permettre l'établissement de cartes détaillées.

Voici comment Picard parle des mesures effectuées antérieurement à la sienne. Elles sont toutes basées sur le même principe.

Ce n'est pas d'aujourd'hui qu'on tâche de déterminer la grandeur de la Terre. Plusieurs anciens se sont signalés par cette recherche ; mais la plus mémorable entreprise qui ait été faite pour ce sujet, est celle des Arabes, qui est rapporté par leur Géographe[1] *en ces termes. « Les grands cercles de la Terre sont divisés en 360 parties, comme ceux que nous imaginons dans le Ciel : Ptolomée Auteur de l'Almageste, & plusieurs autres des Anciens, ont observé quel espace contenait sur la Terre l'une de ces 360 parties ou Dégrés, & ont trouvé qu'elle contenoit 66 milles et 2/3 ; & ceux qui sont venus après eux, ont voulu s'en éclaircir par eux propre expérience ; car s'étant assemblés par l'ordre d'Almanon dans les plaines de Sanjar, & ayant pris la hauteur du pôle, ils se séparèrent en deux troupes, les uns s'avancèrent vers le septentrion, & les autres vers le midi, allant le plus droit qu'il leur fût possible, jusqu'à ce que l'une des*

[1] Il s'agit, nous dit Picard en note, d'Abulfeda.

troupes eût trouvé le pôle plus élevé d'un Dégré, & que l'autre au contraire l'eût trouvé abaissé d'un Dégré ; ils se rassemblèrent après leur première station pour confronter leurs Observations. L'on trouva que l'une des troupes avoit compté dans son chemin 56 milles &2/3, au lieu que l'autre n'avoit compté que 56 milles justes ; mais ils demeurèrent d'accord du compte de 56 milles 2/3, pour un Dégré, si bien qu'entre les Observations des Anciens , & celle des Modernes, il y a une différence de dix milles. »

(...)

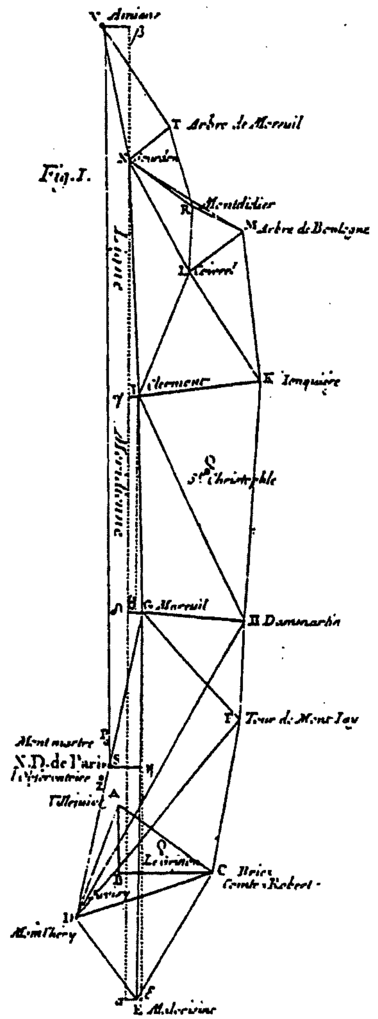
Entre les auteurs modernes, Fernel & Snellius ont été les premiers qui ne se contentant pas d'une tradition incertaine, nous ont voulu laisser leurs Observations particulières pour la grandeur du Dégré. Fernel au commencement de sa Cosmothéorie, dit qu'étant parti de Paris, il marcha directement vers le Nord, jusqu'à ce que par les hauteurs méridienne du Soleil, il eût trouvé la hauteur du Pole plus grande qu'à Paris d'un Dégré entier : mais soit qu'il ait voulu imiter les Arabes, ou pour quelqu'autre considération, il nous a celé le nom du lieu où il s'étoit arrêté, disant seulement que c'étoit à vingt-cinq lieuès de Paris, & que pour sçavoir plus précisément cette distance, il monta dans un coche, compta tous les tours de rouè jusqu'à Paris ; & qu'enfin ayant estimé ce que les inégalités & les détours des chemins avoient pû apporter d'augmentation, il jugea qu'un Dégré d'un grand cercle de la Terre contenoit 68096 pas géométriques, qui selon notre façon de mesurer, valent 56746 toises 4 pieds.

Le principe d'une telle mesure est simple en théorie. Il suffit de considérer deux lieux A et B, situés sur un même méridien, et dont la différence de latitude soit de 1°. On mesure alors la distance de A à B, qui est la longueur cherchée.

Dans la pratique, c'est compliqué à réaliser, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, il est difficile de mesurer avec précision une distance en ligne droite dont l'ordre de grandeur est de 110 kilomètres. D'autre part, il n'est en rien évident de s'assurer que deux endroits A et B sont sur un même méridien.

A. Principe de la mesure de Picard

Dans son compte rendu, publié en 1671, Picard donne le schéma ci-dessous.



Les points A, B, ..., Y sont des points choisis par Picard de telle façon qu'on puisse mesurer sans difficulté les angles des triangles ABC, ACD, etc. Ces points sont donc visibles de loin, et facilement identifiables.

Ainsi :

A est le milieu du moulin de Villejuive.

B le plus proche coin du pavillon de Juvisy.

C la pointe du clocher de Brie-Comte-Robert.

D le milieu de la tour de Monthléry.

E le haut du pavillon de Malvoisine.

F une pièce de bois dressée exprès au haut des ruines de la tour de Monjay, & grossie de paille.

G le milieu du Tertre de Mareuil, où l'on a été obligé de faire des feux pour le marquer.

....

I le Clocher de Saint Samson de Clermont.

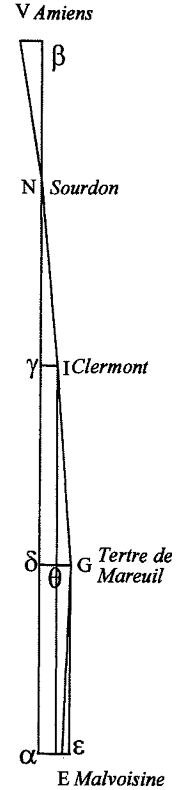
....

N le Clocher de Sourdon.

....

V le Clocher de Notre-Dame d'Amiens.

Cinq points jouent un rôle important : E, G, I, N et V. Du schéma de Picard, on peut extraire le schéma suivant :



On a figuré le méridien qui passe en N. Les points β, γ, δ et α sont les projetés orthogonaux de V, I, G et E sur ce méridien.

La méthode utilisée par Picard comporte trois étapes.

a. On mesure les distances VN, NI, IG et GE.

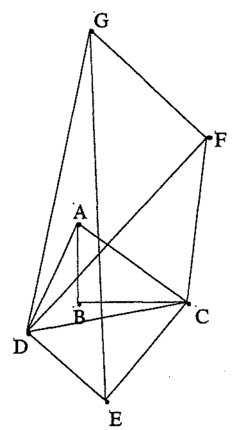
b. On mesure les angles VNβ, γNI θIG et εGE. On en déduit facilement les distances βN, Nγ, γδ et δα puis la distance βα.

Cette mesure se fait donc sans qu'il soit nécessaire de situer les points β et α sur le terrain.

c. Il ne reste plus qu'à déterminer les latitudes φ_V et φ_E des points V et E. Ce sont aussi les latitudes des points β et α.

La longueur du degré de méridien est égale à $\dfrac{\beta\alpha}{\varphi_V - \varphi_E}$

B. Mesure des distances EG, GI, IN et NV



On ne s'intéresse ici qu'à la mesure de la distance GE. Les distances GI, IN et NV se calculent de manière analogue.

Considérons le schéma ci-contre.

Le segment AB constitue la base de la mesure de Picard. Sa longueur est mesurée avec précision, ce qui est possible car les points A et B sont relié par *le grand chemin de Villejuive à Juvisy, lequel chemin étant pavé en droite ligne sans aucune inégalité considérable, & d'une longueur telle qu'on verra ci-après, est propre à servir de base fondamentale à toute la mesure qu'on y avait entreprise.*

Picard évalue cette distance à 5663 toises.

Après quoi, il mesure les angles des triangles ABC, ACD, DEC, DCF, DFG et DEG.

Question : Les données suivantes sont extraites du texte de Picard. Compléter les blancs.

I TRIANGLE ABC

Pour connaître le côté AC

CAB	*54° 4' 35"*	*ABC*	*95° 6' 55"*	*ACB*	*30° 48' 30"*
AB	*5663 toises de mesure actuelle*				
Donc AC	..... *Et*	*BC*	.....		

II TRIANGLE ADC

Pour connaître DC & AD

DAC	*77° 25' 50"*	*ADC*	*55° 0' 10"*	*ACD*	*47° 34' 0"*
AC	.....				
Donc DC	..... *Et*	*AD*	.....		

III TRIANGLE DEC

Pour DE & CE

DEC	*74° 9' 30"*	*DCE*	*40° 34' 0"*	*CDE*	*65° 16' 30"*
DC	.....				
Donc DE	.....				
Et CE	.....				

IV TRIANGLE DCF

Pour DF

DCF	*113° 47' 40"*	*DFC*	*33° 40' 0"*	*FDC*	*32° 32' 20"*
DC	.....				
Donc DF	.....				

V TRIANGLE DFG

Pour DG & FG

DFG	*92° 5' 20"*	*DGF*	*57° 34' 0"*	*GDF*	*30° 20' 40"*
DF	.....				
Donc DG	..... *Et*	*FG*	.....		

VI TRIANGLE GDE

Pour GE

GDE	*128° 9' 30"*	*DG*	.....	*DE*	.....
Donc GE	.....				

C. Mesure de l'angle entre la droite (GI) et le méridien

Cette mesure se fait à l'aide d'une visée astronomique.

Dans la figure suivante, G est le tertre de Mareuil. On repère les directions de l'espace à l'aide d'une sphère centrée en G et de rayon *R* quelconque. Cette sphère coupe le plan horizontal selon un cercle centré en G.

[GP) a la direction du pôle nord céleste.

[GZ) indique la verticale.

[GP") indique la direction du nord sur l'horizon. P' est le projeté orthogonal de P sur le plan horizontal.

Les points G, P, Z, P' et P" sont donc coplanaires. P' est sur la demi-droite [GP").

[GE) indique la direction de l'est sur l'horizon (l'angle EGP" est donc droit).

[GI) indique la direction de Clermont.

[GA) indique la direction de l'étoile polaire au moment où elle se situe le plus à l'est. A' est le projeté orthogonal de A sur le plan horizontal.

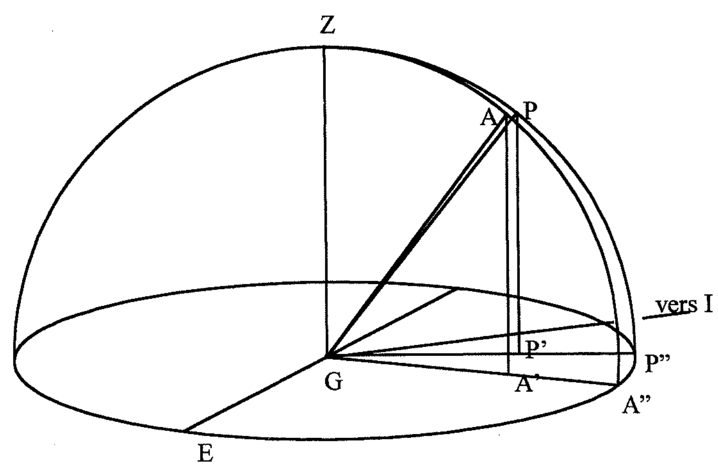
La demi-droite [GA') coupe le cercle de centre G passant par E et P en A".

L'angle PGA est, semble-t-il connu à l'aide de mesures effectuées antérieurement :

PGA = c = 2°28'.

La mesure de Picard concerne l'angle A"GI. L'angle A"GI vaut 4°55'. L'angle P"GP, la *hauteur du pôle* vaut a = 49°5'. La mesure en est faite par Picard par d'autres visées astronomiques que nous n'examinerons pas ici.

On cherche l'angle A"GP" = b, qui nous permettra de calculer l'angle P"GI.



La demi-droite [GA) donne la direction de la polaire au moment où elle se situe à l'est du pôle. À ce moment là, le pôle et l'étoile polaire ont la même hauteur au dessus de l'horizon, c'est-à-dire que les angles PGP' et AGA' sont égaux. Il est alors facile de voir que AA'P'P est un rectangle et que, par conséquent, les longueurs AP et A'P' sont égales.

L'instrument qu'utilise Picard permet de matérialiser le plan (ZAG). Ce plan coupe le cercle horizontal en un point A".

Picard laisse en place son instrument toute la nuit et est en mesure, le matin, de repérer sur l'horizon, la direction du point A".

Questions

Expression de cos *b* en fonction de *a* et *c*

Dans les questions 1 à 4, on n'utilisera pas les valeurs numériques des angles a et c.

1. Exprimer PA^2 en fonction de R et de l'angle c. (Indication : appliquer le théorème d'Al-Kashi dans le triangle PGA).

2. On rappelle que les angles A'GA et P'GP sont égaux (à a).

En déduire que GA' = GA cos $a = R$ cos a et GP' = GP cos $a = R$ cos a

3. Exprimer $P'A'^2$ en fonction de R, a et b (utiliser de nouveau le théorème d'Al-Kashi dans le triangle P'A'G).

4. Déduire de ce qui précède que :

$$1 - \cos c = \cos^2 a(1 - \cos b)$$

puis que :

$$\cos b = \frac{\cos c - \sin^2 a}{\cos^2 a}.$$

Calcul de l'angle *b* et de l'angle GIθ

On rappelle que $a = 49°5'$, $c = 2° 28'$ et $A''GI = 4° 55'$.

5. Calculer l'angle b.

6. Calculer enfin l'angle entre le méridien et la droite reliant le tertre de Mareuil à Clermont. Cet angle est encore égal à l'angle GIθ.

D. Où l'on finit les calculs

Picard donne les valeurs suivantes :

NV = 11 161 toises 4 pieds (*n.b.* : chaque toise vaut 6 pieds). NI = 18 907 toises.

IG = 17 564 toises. GE = 31 895 toises.

Il donne également les angles suivants :

VNβ = 18° 55'. INγ = 2° 9' 10" GIθ= 1° 9' EGε=0° 26'

1. Calculer la longueur βα.

2. Picard effectue diverses corrections et retient la valeur de mesure 78 850 toises pour la longueur βα. Il évalue enfin la différence des latitudes de Malvoisine et d'Amiens.à 1°22' 55".

a. Calculer la longueur d'un degré de méridien entre Paris et Amiens.

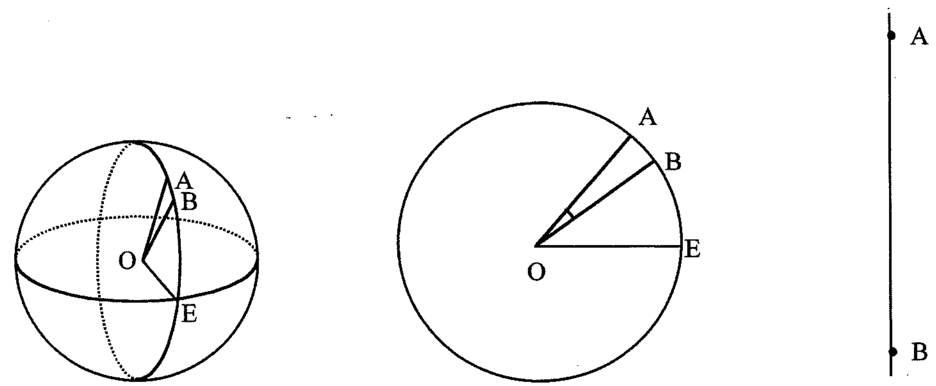
b. La toise utilisée par Picard est la *toise du grand Châtelet*. On peut l'évaluer à 1,949 m. Quelle est la mesure en km du degré du méridien selon Picard ?

c. En admettant que la terre soit sphérique, quelle valeur peut-on en déduire de la circonférence terrestre ?

3.2 Utilisation de cette activité en classe

3.2.1 Mise en place de l'activité

Cette mise en place est essentielle. Elle est destinée à faire comprendre les difficultés de l'entreprise de Picard et d'expliquer en quoi la méthode utilisée permet de lever ces difficultés. Elle peut s'appuyer sur le récit fait par Picard de certaines mesures antérieures à la sienne. On commence par confronter les trois dessins suivants :



Le deuxième dessin est une vue en coupe du premier. Le troisième dessin s'apparente à une carte. Pour mesurer la circonférence terrestre, il *suffit* de mesurer la longueur d'un arc AB d'un méridien et d'évaluer l'angle AOB, O étant le centre de la terre. Cet angle s'obtient en calculant la différence des latitudes des points A et B.

Le but de la mesure de Picard est de permettre une cartographie précise de la France. Il faut donc s'assurer, indépendamment de toute carte, du fait que les points A et B qu'on aura choisis sont effectivement sur le même méridien.

Deuxième type de problème : pour obtenir une mesure fiable de la circonférence terrestre, il est nécessaire que l'angle AOB ne soit pas trop petit. Dans ces conditions, la distance AB à mesurer sera importante (de l'ordre de 110 km, si AOB est de l'ordre de 1°). Même en admettant qu'il n'y ait aucun obstacle naturel entre A et B, il n'est pas certain qu'on puisse être sûr de mesurer la distance AB en ligne rigoureusement droite. Picard utilise donc une méthode indirecte.

On peut maintenant examiner avec les élèves la partie A de l'activité. On lit avec eux la liste des points décrits par Picard et on leur fait repérer ces points sur le schéma de Picard.

On leur fait ensuite tracer sur le dessin les segments VN, NI, IG et GE, ainsi que les méridiens qui passent par V, N, I, G. De cette façon, on fait apparaître le schéma de la page 2.

On détaille ensuite les trois étapes de la mesure de Picard (calcul des distances VN, NI, IG, GE, mesure des angles VNβ, γNI θIG et εGE, mesure des latitudes de V et de E). On fait remarquer aux élèves que les points α et β sont, par définition, sur un même méridien et qu'on obtient la longueur $\alpha\beta$ et l'angle $\alpha O\beta$ (O étant le centre de la terre), *sans avoir à situer les points α et β sur le terrain et sans avoir à mesurer en ligne droite la distance qui les sépare.*

3.2.2 Partie B de l'activité

On laisse les élèves effectuer les calculs demandés dans la partie B. Les principales difficultés rencontrées concernent les mesures d'angles en degrés, minutes et secondes. La masse des calculs à faire nécessite de la part des élèves une organisation rigoureuse des calculs. Certains élèves ont tenté de dessiner à l'échelle les triangles de Picard. On obtient les résultats numériques suivants :

Triangle ABC	AC = 11 012,89 toises	BC = 8 953,90 toises
Triangle ADC	DC = 13 121,59 toises	AD = 9922,37 toises
Triangle DEC	DE = 8 870,29 toises	CE = 12 389,22 toises
Triangle DCF	DF = 21 657,83 toises	
Triangle DFG	DG = 25 643,40 toises	FG = 12 963,59 toises
Triangle GDE	GE = 31 895,73 toises.	

3.2.3 Calcul de l'angle entre la direction de Clermont au Tertre de Mareuil et le méridien (partie C de l'activité)

3.2.3.1 Le texte de Picard

Après avoir mesuré les distances particulières entre Malvoisine, Mareuil & Sourdon, & même y avoir ajouté celle d'Amiens, il falloit examiner la position de chacune de ces lignes à l'égard de la Méridienne.

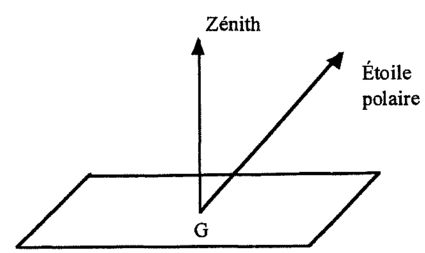
Pour cet effet, au mois de Septembre de l'année 1669, nous allames sur le Tertre de Mareuil, à l'endroit marqué G, d'où l'on voyait Malvoisine d'un côté, & Clermont de l'autre, & nous mîmes le quart de cercle garni de ses deux Lunettes à plomb sur son pied, ensorte que la lunette EF demeuroit toujours dans le niveau, pendant que le plan de l'Instrument étoit tourné verticalement, & que la lunette de l'Alilade GH étoit pointée vers l'Étoile Polaire. On suivit ainsi cette Étoile jusques à la plus grande digression, où elle demeuroit un espace de temps assez sensible sans sortir du filet vertical de la Lunette avec laquelle on l'observoit, & alors, on laissa l'Instrument fixe dans sa position le reste de la nuit jusqu'à ce que le jour étant venu on pût découvrir l'endroit du bord de l'horizon, auquel la lunette EF se trouvoit pointée, & déterminer par ce moyen le vertical de la plus grande digression de l'Étoile Polaire : car on sçavoit par expérience, que quand le quart de Cercle étoit dressé à plomb, les deux Lunettes demeuroient toujours pointées dans un même vertical. Par cette Observation que l'on réïtera plusieurs fois, on s'assura d'un point éloigné qui marquoit le vertical de la plus grande digression orientale de l'Étoile Polaire, lequel vertical faisoit avec la ligne GI un angle de 4°55' vers l'Orient : or le complément de la déclinaison de l'Étoile Polaire étoit alors de 2°28', & la hauteur du Pole au Tertre de Mareuil, ainsi qu'elle fut ensuite trouvée, est de 49°5', & par conséquent la digression de l'Etoile Polaire étoit de 3° 46' : il restoit donc encore un degré neuf minutes dont la ligne GI décline du Nord vers l'Occident ; & parce que d'ailleurs les lignes GI, GE font un angle de 178° 25' vers l'Occident, lequel angle augmenté de la déclinaison de la ligne GI ne fait que 179° 34', il s'ensuit que GE décline de 26' du Midy vers le Couchant.

3.2.3.2 Mise en place de la figure

Le problème posé est le suivant : on est en G (le Tertre de Mareuil). On voit le point I (le clocher de St Samson à Clermont). On veut évaluer l'angle entre la direction de Clermont et celle du nord.

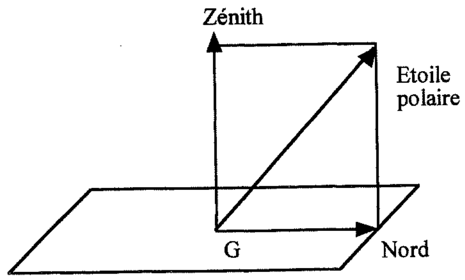
Le problème qu'on peut poser aux élèves est le suivant : vous êtes perdu la nuit et vous devez marcher vers le nord. La nuit est claire et vous voyez les étoiles.

En pratique, il y a toujours quelqu'un pour parler de l'étoile polaire. Le dessin qu'on peut mettre en place est le suivant :



On se situe en G. On a figuré le plan horizontal. La verticale en G définit ce qu'on appelle le zénith.

Bien entendu, on doit marcher vers le nord *dans le plan horizontal.* La direction du nord s'obtient donc de la façon suivante :

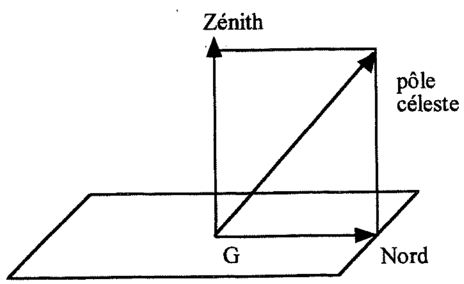


Le demi-plan défini par les deux demi-droites [GZ) et [GP) coupe le plan horizontal selon une demi-droite qui indique la direction du nord.

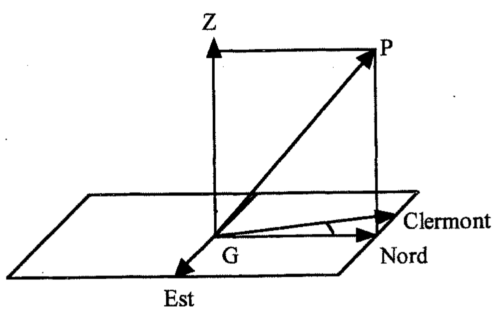
La question suivante à poser aux élèves pourrait être celle-ci : pourquoi l'étoile polaire indique-t-elle le nord ?

À partir de cette question, on peut faire prendre conscience aux élèves du mouvement apparent des étoiles. La polaire, au contraire des autres étoiles, est fixe, ou du moins presque fixe.

On peut alors définir le pôle nord céleste et rectifier le dessin de façon à obtenir ceci :



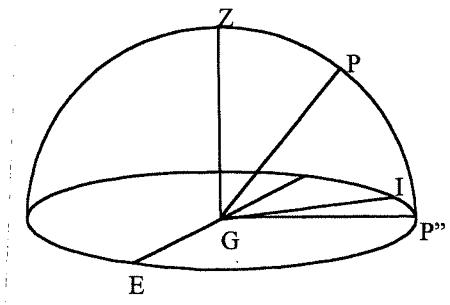
Finalement, on place sur notre dessin la direction de l'est et celle de Clermont.



Le problème de Picard est d'évaluer l'angle marqué sur la figure ci-contre.

On fait ensuite remarquer aux élèves que notre problème ne fait intervenir que des angles. Il ne s'agit que de repérer des directions de l'espace. Pour repérer des angles dans le plan, il est

fortement indiqué d'utiliser un cercle. Dans l'espace, on utilise une sphère. Il s'agit de mettre en place la figure suivante.



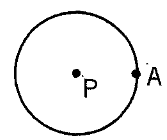
Pour repérer les directions de l'espace, à partir du point G, on considère une sphère centrée en G (n'importe laquelle). Chaque demi-droite issue de G coupe la sphère en un point unique. On obtient la figure ci-contre.

L'intersection du plan horizontal et de notre sphère est un cercle.

La demi-droite [GZ) donne la direction du zénith, [GP) celle du pôle céleste, [GP") celle du nord, [GE) celle de l'est, [GI) celle de Clermont.

L'angle α que nous cherchons est P"GI.

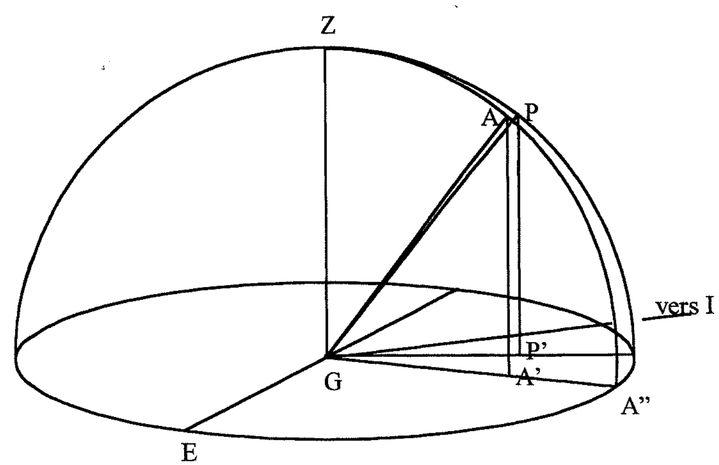
Picard explique qu'il repère la plus grande digression orientale de la polaire. Le schéma suivant contribue à éclaircir le débat :



Picard observe l'étoile polaire. Son mouvement apparent est celui d'un cercle, centré autour de l'axe (GP).

Picard repère la direction de la position la plus à l'est de la polaire.

On place maintenant sur le dessin la direction observée par Picard et on obtient ceci :



Le fait que la polaire soit située à l'est du pôle se traduit par le fait que les angles PGP" et AGA" sont égaux. On remarquera aussi que le projeté orthogonal P' de P sur le plan horizontal est sur la demi droite [GP") et que, de même, A' est sur [GA").

On explique enfin que Picard mesure en fait l'angle A"GI, qu'il a mesuré par ailleurs l'angle P"GP (c'est la hauteur du pôle). Enfin, Picard connaît l'angle PGA (quelqu'un d'autre semble-t-il a fait cette mesure).

On peut maintenant donner le texte de l'activité aux élèves. On leur fait marquer sur la figure les angles connus et l'angle à calculer. La suite de l'activité ne pose pas de gros problème : c'est un problème de géométrie classique pour des élèves de première S.

On obtient $b \approx 3°46'$ et IGP" = 4° 55' – 3° 46' = 1° 09' (ce qui est effectivement la valeur donnée par Picard).

3.2.4 Partie D

Cette partie est traitée par les élèves de façon autonome. On obtient :

$N\beta$ = 10 558,83 toises $N\gamma$=18893,66 toises

$\gamma\delta$ = 17 560,46 toises $\delta\alpha$ = 31 894,09 toises.

On en déduit que : $\alpha\beta$ = 78 907 toises.

Picard obtient ce résultat. Il effectue diverses corrections et retient la valeur de 78 850 toises. La mesure du degré de méridien est alors : $\dfrac{78\,850}{1+\dfrac{22}{60}+\dfrac{55}{3600}} = 57\,057$ toises.

Cette mesure correspond à 111, 204 km. Ce qui donne, dans l'hypothèse où la terre est assimilée à une sphère, une circonférence de 40 033 km.

Bibliographie

Segonds A., Verdet J.-P. (1993) Textes essentiels. Astronomie et Astrophysique, Larousse.

IREM de Rennes (à paraître) Faire des mathématiques à partir de leur histoire, tome 5 : la mesure de la terre.

Maupertuis Pierre Louis Moreau de (1740) Degré du méridien entre Paris et Amiens, déterminé par la mesure de M. Picard, et par les observations de Mrs de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier... d'où l'on déduit la figure de la Terre, par la comparaison de ce Degré avec celui qui a été mesuré au cercle polaire. Paris, G. Martin, J. B. Coignard & H. L. Guérin, 1740, LVI-116 p., 7 pl. Mesure de la terre de Picard : pages 1-106, observations de Le Monnier : pages 107-116.

Picard Jean (1684) Traité du nivellement... et un abbregé de la mesure de la terre... Mis en lumière par les soins de M. de La Hire... Paris, Estienne Michallet, 10-250 p. et mini pl.

ÉLOGE DU PAPIER QUADRILLÉ

Henri Lombardi

IREM de Besançon

Résumé

Nous plaidons ici en faveur d'un usage plus systématique du papier quadrillé comme source d'évidence en géométrie euclidienne. Celui-ci constitue une sorte de pré-calcul sur les coordonnées tout en donnant à voir ce qui se passe, au sens fort du mot voir. L'usage systématique du papier quadrillé pourrait constituer ainsi une réalisation visuelle directe du programme de Descartes, lequel voulait dissiper tous les mystères. Sans doute joue en sa défaveur la trop grande simplicité de cette mise en évidence : pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué, comme diraient Euclide, Bourbaki et tous les pédants.

Introduction

La géométrie de l'espace peut être conçue comme l'étude des dispositions spatiales des objets solides. La géométrie plane est alors une géométrie des puzzles. La pièce de puzzle la plus élémentaire est un triangle. Les deux premiers cas d'égalité des triangles peuvent dans ce cadre être compris comme des axiomes raisonnables que doit vérifier toute géométrie des puzzles. Et ils peuvent servir à fonder aussi bien la géométrie plane euclidienne que ses concurrentes, hyperbolique et sphérique (ou elliptique).

Pour faire le partage entre ces trois géométries, une figure fondamentale est donnée par le carré. Si les carrés ont des angles droits, on peut assembler quatre petits carrés identiques pour en faire un plus grand, deux fois par le coté, et quatre fois par la surface, ce qui n'échappa pas à Socrate ni à l'esclave admis dans la discussion, qui était donc bel et bien un être humain doué de raison. Ainsi était mise en évidence de manière prémonitoire la fabuleuse carrière à venir du papier quadrillé, assemblage indéfini de carrés tous identiques, un puzzle absolument dingue sur lequel se lit sans effort toute la géométrie euclidienne, avant de devenir le lieu où des générations d'élèves couchent leurs devoirs, leurs angoisses et parfois leurs enthousiasmes. Voir le papier quadrillé en filigrane de la feuille blanche, telle fut la conquête de Descartes, qui réduisit la géométrie à des arguments de comptage, redonnant toute sa dignité à l'esclave convoqué par Socrate.