INSTRUMENTS ET VIEUX OUTILS DE MATHÉMATIQUES

Henry Plane, Patrick Guyot, Frédéric Métin et Charles Deponge

IREM de Dijon

Résumé

Les progrès des mathématiques sont-ils séparables des progrès de la technique ? Quels sont les rapports qu'entretient la science avec le « terrain » ? Ces questions nous mènent à nous intéresser à ce que l'on a appelé les « instruments de mathématique» : simple corde servant à tracer des perpendiculaires, instruments de visée (astrolabe, quadrant, ...) dont l'utilisation est basée sur le théorème de Thalès, graphomètre, dont la seule construction est déjà une préoccupation, compas de proportion enfin qui, rangé dans son étui, accompagnait chaque ingénieur sur le terrain. Ces « outils » portent tous en eux une théorie, un théorème, une vision du monde à mesurer, car il s'agit bien à chaque fois de mesure. L'article qui suit, compte rendu de l'atelier du même titre, conte quatre histoires d'instruments, qui sont autant d'histoires d'hommes ou d'époques, autant de façons de mesurer le monde.

Introduction

Il est dit que le rire est le propre de l'Homme ; créer des outils, ne l'est-ce pas également ?

Le travail et les préoccupations du groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Dijon, autour de la géométrie pratique, lui ont donné l'occasion de rejoindre l'un de ses membres « historiques », aujourd'hui parisien, Henry Plane. Tous, nous sommes intéressés par les mathématiques mises en œuvre dans les questions techniques de la géométrie pratique (ce qui semble proche de problèmes concrets, problèmes de terrain), des constructions effectivement réalisées ou support de recherches, de ce qui a été *fait*, qui donc peut l'être à nouveau, de ce qui peut nous permettre de donner à notre discours un tour pratique.

Outils modestes ou de grande technicité, pour le calcul ou la géométrie, nous avons été surpris par tout ce qu'il fallait étudier et par la diversité de ce que l'homme a pu inventer pour un même problème. Par exemple, à propos de la mesure des angles sur le papier et sur le terrain, on est frappé de la variété des instruments utilisés. Plusieurs sont des appareils voisins de ceux qui sont utilisés en astronomie et dans la marine ; on citera en vrac : le quart de cercle, le cercle d'arpentage, le carré géométrique, le transporteur, le triangle géométrique, le trigomètre, l'équerre d'arpenteur, la planchette, le quadrant d'arpentage...

L'atelier proposé au colloque n'a donc été qu'un exemple de travaux à entreprendre ; d'autres ateliers viendront, si ce n'est un réseau à mettre sur pied !

1. Les outils les plus anciens, les plus simples ?

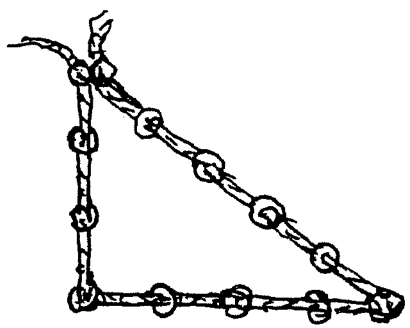
A travers le passé lointain ou proche, les doigts pour compter, la craie pour écrire ont leur place comme outils, au même titre que calculatrice ou ellipsographe, et les tables de valeurs, et les abaques, et les graphiques. Donc, quelques exemples seulement...

La corde

Peut-être au début est-ce liane, baguette, lanière de peau pour reporter une distance ou tracer un cercle en fixant une des extrémités. Sans doute pas pour tracer un segment de droite, même si elle le suggère : problème de rigidité...

Par où commencer pour la droite et le plan ? Il y a des pierres bien plates et les baguettes se tordent. On frotte l'une sur l'autre ? Des questions plus que des réponses ! Et les divisions régulières sur le cercle comme sur la droite ?

Droit ? L'angle de même nom est-il construit par une égalité répétée de longueurs (hauteurs de triangles isocèles) ou une égalité d'angles (repli d'une feuille) ? N'oublions pas la corde à treize nœuds (douze intervalles égaux) gravée sur des pierres de cathédrales et dont les maçons et charpentiers faisaient, et font encore, usage, ignorant souvent l'existence de Pythagore.



Médianes, moyennes, médiétés

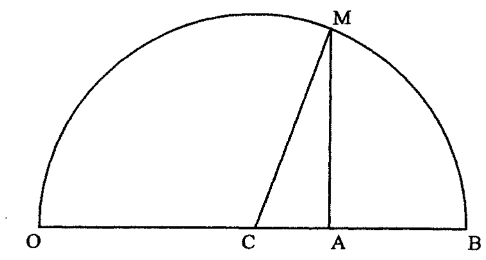
Avant que l'algèbre ne règne sur les calculs, ce que nous appelons « suite géométrique » était à la base de nombre de questions qui aboutissaient souvent aux deux problèmes suivants :

1) Deux nombres a et b étant donnés, en trouver un troisième x, tel que a, x et b soient en progression géométrique, c'est-à-dire que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, ce qui se notait $a : x :: x : b$ et se lisait : « a est à x comme x est à b ». Nous disons : « x est moyenne proportionnelle entre a et b ».

2) Toujours à partir de deux nombres donnés a et b, trouver deux nombres x et y tels que a soit à x comme x est à y et y est à b ; donc que a, x, y et b soient en progression.

Premier problème

On le trouve en particulier dans : « Construire un carré équivalent en aire à un rectangle donné de côtés a et b ». L'outil est le cercle, donc compas et règle ; il figure dans les *Éléments* d'Euclide au livre II.



On porte bout à bout les segments OA et AB de longueurs respectives a et b. Le cercle de diamètre OB recoupe la perpendiculaire en A au point M et on a $AM^2 = OA \times AB$.

Remarque importante

La démonstration ne fait pas appel à la notion de triangles équiangles (i.e. semblables). Par des propriétés des aires, la relation suivante est établie :
$(OA + AB)^2 - (OA - AB)^2 = 4OA \times AB$. Comme on a $AM^2 = CM^2 - CA^2$ et, C étant le milieu de $[OB]$, $CM = \frac{OB}{2} = \frac{a+b}{2}$ ainsi que $CA = OA - OC = \frac{a-b}{2}$, il vient $AM^2 = OA \times AB$.

Second problème

La construction à la règle et au compas est impossible. L'algèbre nous montre que le problème est du 3$^{\text{ème}}$ degré. En effet, on a $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ donc $ay = x^2$ et $bx = y^2$ d'où $a^2bx = x^4$ donc $x^3 = a^2b$. Avec $a = 1$ et $b = 2$, c'est le problème de Delos, et alors $x = \sqrt[3]{2}$.

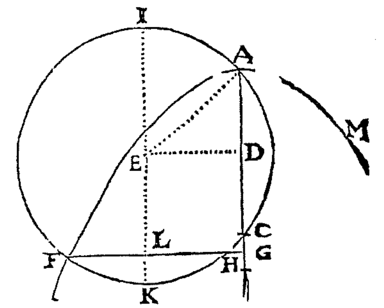
Certes, il existe une solution géométrique qu'Ozanam nous propose dans son *Traité du compas de proportion* de 1688, mais cela à condition de tracer une parabole.

Ozanam ajoute même : *Nous avons donné dans nôtre grand Traité d'Algebre, douze manieres differentes & tres-simples pour la solution de ce probleme.*

Voici une reproduction de ce texte.

Trouver géometriquement entre deux lignes données, deux moyennes proportionnelles.

Pour trouver deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes données AB, AC, diviſez l'une de ces deux, comme AC, en deux également, au point D, & lui tirez par ce point D, la perpendiculaire DE, égale à la moitié de l'autre ligne donnée AB, pour décrire du centre E, par les points A, C, une circonference de cercle AIFK. Après cela décrivez par le point A, ſur l'axe AC, la Parabole FAM, dont le Parametre ſoit AC, & par la ſection F du cercle & de la Parabole, tirez la droite FG, perpendiculaire à l'axe AC, & les deux lignes AG, FG, ſeront les deux moyennes qu'on cherche, de ſorte que les quatre



lignes AB, AG, FG, AC, ſeront dans une continuelle proportion.

Démonſtration.

Car ſi on tire le Diametre IK perpendiculaire à la Ligne FG, ou paralelle à l'axe AB, les deux Lignes LF, LH, ſeront égales entre-elles, par 3. 3. enſuite de quoi on connoîtra aiſément, que la ſomme des deux lignes FG, GH, eſt égale à la Ligne AB.

Cela étant ſuppoſé, on conſiderera que par la proprieté de la Parabole, on a cette analogie, AC, FG : : FG, AG, & que par la proprieté du Cercle, on a celle-ci, CG, GH : : FG, AG. C'eſt pourquoi on aura celle-ci, AC, CG : : FG, GH, & en compoſant on aura celle-ci, AC, AG : : FG, AB, parce que la ligne AB, eſt égale à la ſomme des deux FG, GH. De cette derniere analogie, & de la premiere il ſuit que les quatre lignes AB, AG, FG, AC, ſont dans une proportion continuë. Ce qu'il falloit démontrer.

Jacques Ozanam : Traité du compas de proportion, 1688.

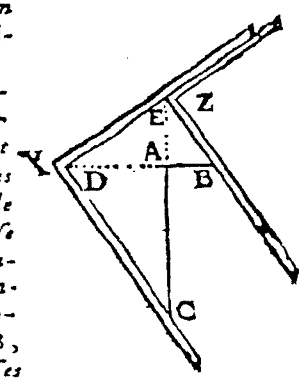
Mais revenons à nos outils : il en est un, reproduit ci-dessous, attribué à Platon (– IV^{ème} siècle) et que décrit le Père Lamy dans ses *Éléments de géométrie* de 1685.

Elemens de Geometrie

Livre IV. Section II.

31. *Juſqu'à preſent on n'a point découvert le moyen de trouver avec le compas & la ſeule regle deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données on les trouve mécaniquement.*

Les lignes données ſont AB *&* AC, *qu'on joint de ſorte qu'elles faſſent un angle droit. On diſpoſe l'équerre* X *de maniere, que ſon angle ſoit ſur le prolongement de* AB, *& qu'une de ſes regles raſe* C *extremité de* AC.



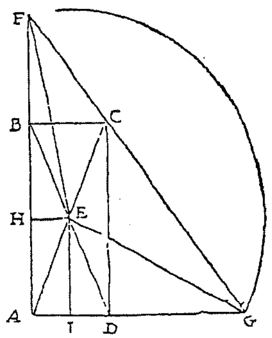
Z *eſt une ſeconde équerre qu'on diſpoſe, en ſorte qu'une de ſes regles raſe* X, *& l'autre le point* B *extremité de* AB : *ainſi les triangles* CDE *&* DEB, *ſont rectangles ; &* DA *&* EA *ſont des perpendiculaires ; ainſi* ∺ AC. AD : AE : *&* ∺ AD. AE. AB : *donc* ∺ AC. AD. AE. AB 5.25.

Cette invention eſt de Platon.

Lamy : Eléments de géométrie, 1685.

Une autre construction connue de Pappus (III^{ème} siècle) figure dans maints ouvrages. La voici dans la *Géométrie pratique* d'Henrion, parue en 1623.

Entre deux lignes droictes donnees, trouuer deux moyennes proportionnelles.



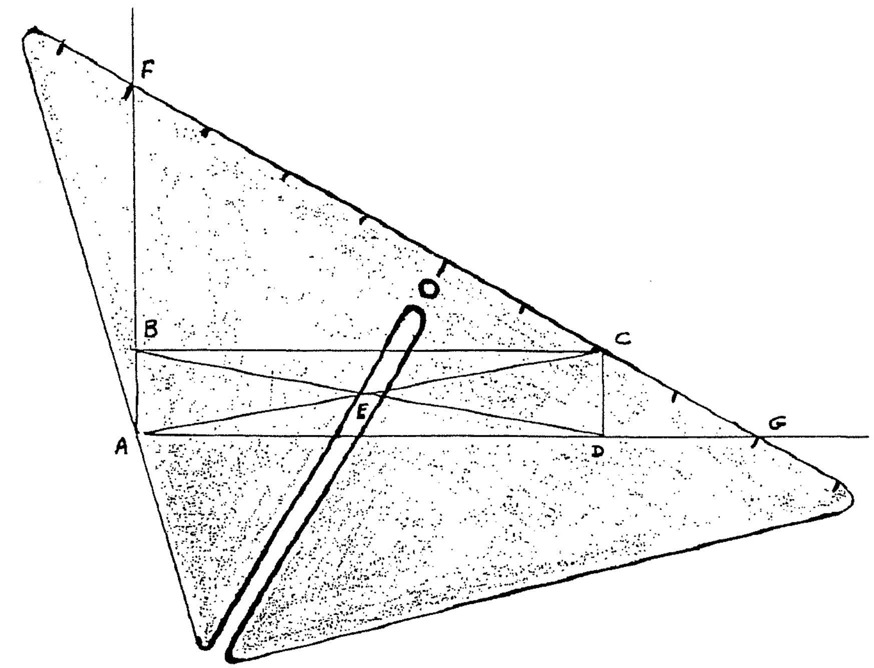
Soient données les deux lignes AB, BC, entre leſquelles il fault trouuer deux moyennes proportionelles. D'icelles AB, BC ſoit faict le rectangle ABCD, & mené les diagonales AC, BD s'entrecoupans en deux égalemeat en E; puis ayant prolongé interminément les coſtez AB, AD, ſoit deſcrit du centre E vn arc de cercle de tel interualle que FG, corde d'iceluy arc, paſſe par le poinct C, & alors les lignes DG, BF ſeront les requiſes, c'eſt à dire que comme AB, ou CD ſon egale eſt à DG, ainſi DG à BF, & BF à BC.

Car eſtant menées EF, EG, elles ſont egales, & coupé en deux egalement AB en H, & AD en I, & mené EH, EI, elles ſeront perpendiculaires à AB, AD. Mais d'autant que le rectangle de AGD, auec le quarré de ID eſt egal au quarré de IG, eſtant adiouſté le commun quarré de EI, le rectangle de AGD auec les quarrez de ID, EI, ou auec le ſeul quarré de ED ſera egal aux quarrez de IG, IE, c'eſt à dire au quarré de EG, ou EF. Par meſme raiſon ſera demonſtré que le rectangle de AFB auec le quarré de BE, c'eſt à dire de ED eſt egal au meſme quarré de EF : donc le rectágle de AGD auec le quarré de ED ſera egal au rectangle de AFB, auec le quarré de ED; & oſtant le quarré de ED commun, reſtera le rectangle de AFB egal au rectangle de AGD; & partant AF ſera à AG, comme DG à BF; mais comme AF eſt à AG, ainſi DC ou AB eſt à DG : donc comme AB eſt à DG, ainſi DG à BF, c'eſt à dire que les trois lignes AB, DG, BF ſeront continuellement proportionnelles : mais derechef, comme AF eſt à AG, ainſi BF eſt à BC : donc auſſi BF ſera à BC, comme AB à DG; & partant comme DG à BF. Les quatre lignes AB, DG, BF, BC ſeront donc continuellement proportionnelles. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Henrion: Géométrie pratique, 1623.

Mais comment trouver la corde « d'iceluy arc FG qui passe par le poinct C » ?

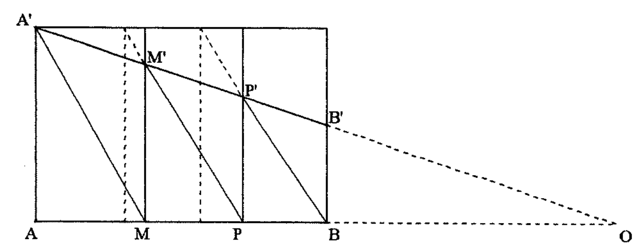
On imaginera une règle figurant la corde FG avec une double graduation de part et d'autre d'une médiatrice qui devra passer par E.



Terminons par un troisième outil, attribué à Vitruve (– I[er] siècle), à moins que ce ne soit à Eratosthène (– III[ème] siècle) : le *mésolabium.*

Il s'agit de trois feuilles rectangulaires égales glissant les unes sur les autres (voir figure ci-dessous), une même diagonale figurant sur chacune. Le côté AA' de la première est de longueur *a*. Un fil est tendu de A' jusqu'en B' sur le bord opposé de la troisième feuille où BB' est la longueur *b*.

On fait glisser les trois feuilles les unes sur les autres afin que le fil rencontre les bords des deux premières feuilles aux mêmes points M' et P' que les diagonales des feuilles suivantes.



Le mésolabium

Si l'on nomme O l'intersection des « droites » AB et $A'B'$, les jeux de parallèles permettent d'écrire : $\frac{OA'}{OM'} = \frac{OM}{OP} = \frac{OM'}{OP'} = \frac{OP}{OB}$; mais $\frac{OA'}{OM'} = \frac{AA'}{MM'}$, $\frac{OM'}{OP'} = \frac{MM'}{PP'}$ et $\frac{OP}{OB} = \frac{PP'}{BB'}$.

Donc $\frac{a}{MM'} = \frac{MM'}{PP'} = \frac{PP'}{b}$. MM' et PP' sont les longueurs cherchées.

L'outil est simple et facile à réaliser.

2. Le graphomètre dans la *Géométrie* de Rohault

Nous avons pris le parti de nous intéresser dans la suite de cet article à l'un des instruments de mesure des angles parmi les plus utilisés, le graphomètre. Mais avant de le décrire, il nous faut évoquer le besoin d'une référence pour la graduation du graphomètre, cette référence est le rapporteur. La lecture de l'ouvrage de Nicolas Bion [Bion 1752] nous permet de comprendre la construction des divisions d'un demi-cercle en 180 degrés :

De la construction & des usages du Rapporteur.

Le rapporteur est un demi-cercle divisé en 180 dégrés, d'autant que le cercle se divise en 360 dégrés, comme il a été dit dans les définitions.
Il doit être limé à plat d'un côté, pour être mieux appliqué sur le papier & de l'autre côté doit être de talu, [....]

Methode pour faire cette division.

Sur la ligne AB, & du centre O, décrivez un demi-cercle, portez le rayon ou le demi-diametre AO autour de la circonference, il la divisera en trois arcs égaux de 60 dégrés chacun aux points C & D, parce que le rayon d'un cercle est contenu six fois en sa circonference. Divisez l'arc BC en deux également au point E, l'arc BE sera de 30 dégrés, & tournant cette ouverture autour du demi-cercle, il sera divisé en six arcs égaux. Divisez les encore en trois parties égales, chacune sera de dix dégrés. Divisez chaque dixaine en deux, vous aurez des arcs de cinq dégrés chacun ; & enfin subdivisant chacun de ces derniers arcs en cinq, tout le demi-cercle sera divisé en 180 dégrés.
C'est de la même manière qu'on peut diviser tout le cercle en 360 dégrés ; nous en parlerons encore dans la suite [...]

(Bion [1752], livre I, ch. III, p. 21)

Nous remarquons deux difficultés « géométriques » dans cette description : la division d'un angle en 3 parties égales, puis plus loin en 5 parties égales. Or chacun connaît l'impossibilité de la trisection d'un angle à la règle et au compas (et que dire de la « pentasection » ?) ; Bion devait donc se contenter d'une approximation de construction qu'il ne précise pas. Dans tous

les traités sur ce sujet, nous observons la même ambiguïté : on demande de diviser un angle en 3, en 5 ou en 6, mais sans donner plus de détail, comme si cela allait de soi.

Le rapporteur utilisé pour le dessin cède la place au graphomètre (ou à un autre appareil comme nous l'avons évoqué dans l'introduction) sur le terrain. Le graphomètre, ou demi-cercle, aurait été inventé en 1597 par le Français Philippe Danfrie, « faiseur d'instruments » au service de Catherine de Médicis. Cet appareil est en fait une simplification du cercle d'arpentage du mathématicien flamand Gemma Frisius, de l'Université de Louvain, que celui-ci avait décrit dans *La Cosmographie de Pierre Apian*, Anvers, 1583.

D'après l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, « le mot graphomètre vient de deux mots grecs, *j'écris, &, mesure* ; apparemment parce que les divisions de degrés qui sont sur cet instrument donnent, pour ainsi dire, par écrit la mesure des angles qu'on observe par son moyen ». Pour comprendre son fonctionnement, nous utiliserons la *Géométrie* de Clairault ([Clairaut, 1753], page 59).

LIX.

APRE'S avoir trouvé que les angles ont les parties du cercle pour mesure, voyons comment on s'y prend pour déterminer ce qu'un angle qu'on veut mesurer contient de degrés.

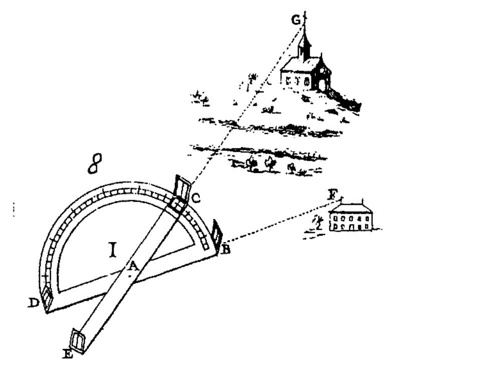
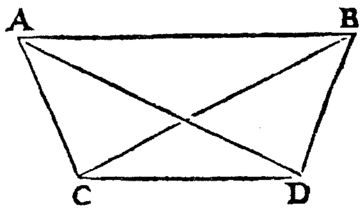


Fig. 8. Usage de l'instrument appelé demi-cercle, pour prendre la grandeur d'un angle

On se sert d'un instrument I, qu'on appelle demi-cercle: cet instrument est composé de deux régles EAC, DAB, d'égale longueur qui se croisent en A, & qui sont chargées de pinnules à leurs extrémités. L'une de ces régles EC, qu'on nomme alidade, est mobile autour de A, & l'autre DB est fixe, & sert de diamétre à un demi-cercle DCB divisé en 180 degrés, &c.

Or veut-on connoître l'angle que forment deux lignes droites, tirés du lieu où l'on est, à deux objets quelconques F, G, on place d'abord la régle fixe DAB, de maniere que l'œil placé en D, apperçoive un des deux objets F, par les deux pinnules D & B : ensuite, sans remuer l'instrument, on tourne l'alidade, jusqu'à ce que l'œil placé en E, apperçoive l'autre objet G, par les pinnules E & C ; & alors l'alidade marque sur le demi-cercle gradué, le nombre de degrés, minutes, &c. que contient l'angle proposé GAF.,

Jacques Rohault, plus connu pour ses ouvrages de physique dans lesquels il a mis en avant son soutien au Cartésianisme, a également écrit des ouvrages de géométrie, de fortification, de trigonométrie,... Dans le problème qui suit, il explique l'utilisation du graphomètre pour déterminer une longueur inaccessible (on pense naturellement à des assiégeants ayant besoin de connaître les dimensions des fortifications qu'ils veulent prendre).



<u>Mesurer la Grandeur d'un Pan de muraille, ou d'une Bresche.</u>

L'Estenduë d'un Pan de muraille s'appelle Longueur, & la grandeur ou l'ouverture d'une Bresche s'appelle Largeur. Proposons nous donc un Pan de muraille, ou une Bresche, comme AB, dont on ne peut approcher, & dont pourtant on veut sçavoir la grandeur. Pour la trouver ; Placez d'abord vostre demy-Cercle en quelqu'endroit de la Campagne, comme C, & le disposez de telle sorte que par ses Pinnules immobiles, vous apperceviez le point A ; Puis tournez son Alidade, ensorte que par ses Pinnules mobiles, vous apperceviez le point B, & marquez sur vos Tablettes la quantité de l'Angle ACB ; Apres cela ouvrez encore l'Alidade, jusqu'à ce que par ces mesmes Pinnules vous ayez rencontré quelqu'autre endroit de la Campagne, comme D, que vous jugiez commode pour y faire une seconde station ; & marquez comme devant sur vos Tablettes l'Angle ACD, & par mesme moyen l'Angle BCD, qui en fait partie ; Cela fait, transportez-vous à l'endroit D, & en vous y transportant mesurez la distance qu'il y a depuis C jusques à D ; Ensuite dequoy, placez vostre demy-Cercle au point D, & le disposez de telle sorte, que par ses Pinnules immobiles vous voyez l'endroit C de vostre premiere station, & par ses Pinnules mobiles le point A, & ensuite le point B ; Ce qui vous donnera la valeur des Angles CDA & CDB, que vous marquerez aussi sur vos Tablettes.

Cela supposé, dans le Triangle ACD, les deux Angles ACD & CDA, sont connus, avec le Costé CD, & par consequent on trouvera le Costé CA, par la 4. Prop. de nostre Trigonometrie ; De mesme, dans le Triangle BCD, les deux Angles BCD, & CDB sont aussi connus, avec le Costé CD ; par consequent on trouvera aussi le Costé CB ; Apres quoy dans le Triangle ACB, les deux Costez CA, CB estant connus, avec l'Angle qu'ils renferment, on trouvera par la 5. Prop. de nostre Trigonometrie le Costé AB, qui est ce que l'on cherchoit.

([Rohault 1682], Livre de la *Géométrie Pratique,* page 349)

Les propositions 4 et 5 dont il est question dans le texte, extraites d'une trigonométrie de l'auteur, sont en fait des relations trigonométriques dans le triangle quelconque comme on peut en utiliser de nos jours.

Les textes présentés ici permettent, bien qu'imparfaitement, de se faire une idée sur la pratique de la mesure des angles ; on observe des méthodes très diverses, nombreuses et chaque auteur avait à cœur de présenter une nouvelle technique plus rapide ou plus fiable que les autres. Rohault, en particulier, a présenté dans sa *Géométrie Pratique* un procédé de division des petits angles, qu'il pouvait appliquer à son graphomètre et qui lui permettait d'obtenir une précision suffisante pour ses mesures.

3. Le *Quarré géométrique* dans la *Practique d'Oronce*

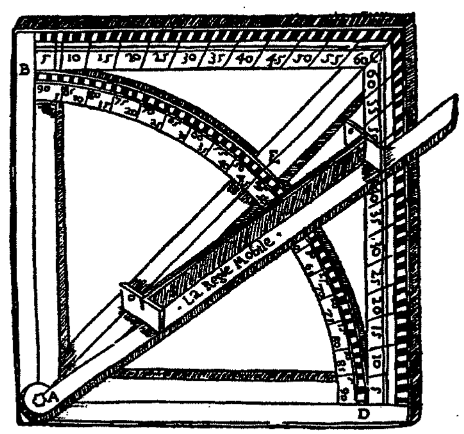
Oronce Fine n'est pas de nos jours un mathématicien reconnu. Son époque fut ingrate pour les scientifiques en France, mais il contribua à réhabiliter l'étude des mathématiques en les professant au Collège Royal. L'aspect « pratique » est omniprésent dans la *Protomathesis* de 1532, rédaction de son cours, qui contient des chapitres d'arithmétique, de géométrie, de géographie et de cosmologie. Pour son malheur, Oronce publia, dans toutes les rééditions de sa *Géométrie Pratique*, une quadrature du cercle dont il était très fier, mais dont le mathématicien portugais Pedro Nuñes avait assez vite décelé l'erreur. Pedro écrivit à Oronce pour le lui signaler, mais ce dernier prit cela de haut et ne daigna pas répondre, ce qui contraignit le premier à le poignarder par la publication, en 1546, de sa réfutation : *De Erratiis Orontii.*

L'ouvrage d'Oronce Fine, publié en 1570 n'en est pas à sa première version. Oronce meurt en 1555 sans le sou et ridiculisé par le livre de Nuñes ; Pierre Forcadel, un de ses successeurs au Collège Royal, en donne la traduction en français 15 ans plus tard.

Dans la perspective d'une étude des instruments de mathématiques qui ont été réellement utilisés, l'ouvrage est de grand intérêt, non par l'originalité des sujets traités, mais par son aspect pédagogique (un exposé qui se veut clair et des démonstrations par les *Éléments* d'Euclide), ainsi que par l'esthétique des figures, réalisées par l'auteur lui-même. La *Practique* est orientée vers la mesure, il s'agit donc naturellement de donner un fondement rigoureux à l'utilisation d'instruments comme le *bâton de Jacob*, le *quadrant* et le *quarré* géométriques.

Du « quarré géométrique »

Cet objet est très simple dans son principe et facile à utiliser ; sa construction est donnée par Oronce Fine au début de son ouvrage : ([Fine, 1570], chap.2, *De la composition du quarré Geometrique trescommode à mesurer les lignes droictes*, p. 1, r°).



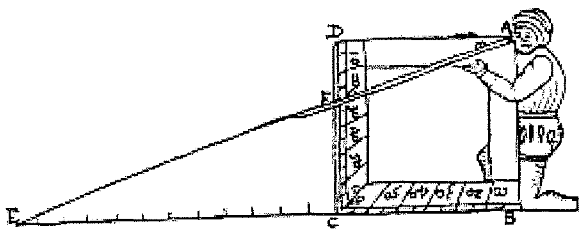
Soient premierement preparées quatre reigles faictes de quelque bois tresdur, toutesfois egalles l'une à l'autre, & semblables, & außi parallelepipedes, c'est a dire de superficies equidistantes, & se rencontrans à droicts angles : la largeur desquelles soit enuiron d'un demy pied, & la largeur soit de trois pieds...

S'ensuit la description intégrale de la fabrication du *quarré* dont on voit la représentation ci-dessus. Une règle mobile, attachée en A, à l'un des angles du carré, peut pivoter autour de cet axe ; elle est surmontée de deux pinnules, comme dans l'astrolabe, qui serviront à la visée. Le texte ne mentionne pas l'arc de cercle intérieur, qui n'apparaît que dans l'illustration de la version française de Forcadel : l'originale de la *Protomathesis* ne présente que le cadre. Il faut dire que cette même illustration se retrouve dans plusieurs autres ouvrages parus à la même époque chez Gilles Gourbin (par exemple, *l'Usage du Quarré Geometrique* de Jean de Merliers, 1573.) De même, les illustrations du *Traité de l'astrolabe* de Dominique Jacquinot, publié par Guillaume Cavellat (« à la Poulle Grasse, devant le College de Cambray », ce qui n'est pas loin de chez Gourbin, « pres le college de Cambray ») se retrouvent dans le *Traité de la Composition et fabrique de l'Astrolabe* de Stöffler, traduit en 1560. Le piratage n'est pas un problème actuel !

De l'usage du *quarré géométrique*

Oronce Fine donne quelques exemples de l'utilisation de son quarré (ou du quart de cercle) pour la mesure de lignes, qu'elles soient considérées horizontales (sur le sol, transversales ou non par rapport à l'observateur) ou élevées à la verticale, ou enfin verticales mais en dessous du niveau du sol.

Une des utilisations les plus simples, donc les plus facilement exploitables en classe, est donnée avec la figure ci-contre. Il s'agit d'évaluer la longueur d'une ligne partant du pied de l'observateur et s'étendant à l'horizontale devant lui.



La règle mobile est pointée en direction de l'extrémité E de la ligne à mesurer ; ce qui est pratique avec le carré, ce sont ses deux paires de côtés parallèles et de même longueur, qui inspirent l'utilisation du théorème de Thalès (en termes modernes, car à l'époque d'Oronce nous parlerions plutôt de triangles semblables, ou nous référerions aux théorèmes VI-2 et VI-4 des *Eléments* d'Euclide.) La formulation moderne impose deux utilisations du théorème de Thalès, l'ancienne permet une identification directe, puisque ADF et ABE sont semblables. Une simple proportion donne BE en fonction du rapport des segments découpés par la règle sur le côté gradué du quarré.

D'autres instruments (rudimentaires) sont présentés par Oronce Fine dans son ouvrage : « bâton de Jacob », miroir, simples bâtons plantés verticalement, etc. A chaque fois, la proportionnalité de figures est sous-entendue, elle permet le calcul de longueurs inconnues en partie et inaccessibles en fonction de longueurs « de base », comme on le fera ensuite avec les

triangulations lorsque les cercles répétiteurs auront remplacé les instruments hérités des temps anciens. Ce qui nous laisse donc de l'ouvrage...

4. De l'Usage du Compas de Proportion

L'objet de cette partie de l'atelier est la présentation des auteurs d'ouvrages qui ont trait au compas de proportion entre 1578 et 1874 ; c'est ainsi qu'on peut citer du plus récent au plus ancien : Hippolyte Sonnet, D'Alembert, Bion, Bélidor, Durand, Ozanam, Jacques Aleaume, Vaulezard, Denis Henrion, Marolois, Galilée, Galluci, Jacques Besson. C'est aussi l'occasion d'un début d'initiation à l'usage du compas de proportion au travers de la lecture du Traité de Nicolas Bion [Bion, 1752], dont on dit que cette édition est la meilleure et la plus complète. En effet, il a été traduit en allemand par J. Gab. Doppelmayer, (Leipsick, 1713, Nuremberg, 1721, in 4°) et en anglais par Stone, avec des augmentations utiles, (Londres, 1723, 1738, in fol.) Dans la préface de l'édition de 1725, il nomme, parmi les personnes qui l'ont aidé de leurs conseils, La Hire, Cassini et Delisle le jeune.

Dans la « Biographie Universelle » de Michaud, Bion est décrit comme

cosmographe et marchand de globes et de sphères, [...] né vers le milieu du XVII^ème^ siècle, en 1652 exactement. Joignant à la pratique la théorie de son art, il publia plusieurs ouvrages estimables et reçut le titre d'ingénieur du roi pour les instruments de mathématiques. Il mourut à Paris en 1733, âgé de plus de 80 ans, laissant un fils qui a continué son commerce.

Sa double compétence fait que son livre est d'une rare limpidité et permet aux plus humbles une bonne maîtrise des outils. Dans la préface, il en décrit le contenu.

Après avoir donné les Définitions nécessaires pour son intelligence, on le divise en neuf livres, & chacun de ces livres en plusieurs chapitres.

En particulier :

Le premier Livre contient la construction et les principaux usages des Instrumens les plus simples & les plus ordinaires, qui sont le Compas, la Règle, le Tire-ligne, le Porte-crayon, l'Equerre & le Rapporteur. On y trouvera plusieurs beaux traits de compas & la manière de tracer sur du papier toutes sortes de Figures tant régulières qu'irrégulières.

Le second Livre explique assez précisément, quoiqu'en peu de pages, la manière de construire le Compas de proportion & de pratiquer ses principaux usages. On y a joint plusieurs Méthodes pour construire différentes Jauges, & les moyens de s'en servir pour jauger les Tonneaux. Le compas de proportion avec les autres Instrumens ci-dessus énoncés, composent ce qu'on nomme étui de Mathématique.[...]

Ce Traité finit par une Description des principaux Outils qui servent à la Construction des Instruments de Mathématique.

Pour ne pas multiplier mal à propos le nombre des Planches de ce Traité, on a été obligé de les remplir presque toutes de beaucoup de figures ; cependant, elles ne *laissent pas que de donner une idée assez nette & assez distincte de toutes les choses qu'elles représentent. On les a placé dans le corps de l'Ouvrage à la suite des discours qui traitent de ce qu'elles indiquent, & on les a fait sortir en dehors du Livre, afin qu'on puisse les avoir plus facilement sous les yeux.*

Au début du second livre, Nicolas Bion définit le compas de proportion.

Le Compas de proportion est un Instrument de Mathématique, ainsi nommé, parce qu'il sert à connaître les Proportions entre les quantités de même espèce, comme entre une ligne & une autre ligne, entre une surface & une autre surface, entre un solide & un autre , &c.

Puis, il le décrit et donne la méthode pour le construire.

Il est fait de deux Règles égales de cuivre, d'argent ou d'une autre matière solide, jointes ensemble par un clou & une charnière, tellement travaillées, que le mouvement en soit égal & uniforme; ce qui se fait en fendant avec une scie la règle où est la tête, environ un pouce de long, pour y ajuster une lame de laiton qu'on rive fortement par le moyen du clou. On arrondit ensuite la tête, en limant tout ce qui déborde; en sorte que le simple & la tête soient à l'uni l'un de l'autre. Il s'agit présentement de trouver le centre du clou. Il faut pour cela mettre une pointe de compas au bas de la lame qui sert de charnière; puis marquer quatre sections avec l'autre pointe du compas au milieu du clou en tournant le simple de la charnière à quatre côtés opposés. Le point milieu sera le centre du clou, & par conséquent celui du compas de proportion. On tire ensuite une ligne du centre au long de la règle, pour limer juste l'excédent, & dresser bien droite ladite règle; & c'est ainsi qu'on met le compas de proportion au centre. L'autre règle étant aussi dressée en dedans, & fendue pour recevoir le simple de la charnière, on creuse le bout en demi-cercle concave, de manière qu'il joigne bien autour de la tête; puis on rive le simple à cette règle avec trois ou quatre petits clous, afin que ces deux règles que l'on nomme les jambes du compas de proportion, se puissent ouvrir & fermer facilement, & rester à telle ouverture que l'on peut en avoir besoin pour mettre les usages en pratique. Mais il faut avoir bien soin, en le construisant, que les jambes soient limées bien plates, & ne fassent pas ce qu'on appelle l'aîle de moulin. Il faut aussi prendre garde que le compas soit bien au centre, c'est-à-dire qu'étant ouvert entièrement, il ne fasse qu'une ligne droite en dedans comme en dehors, & que les jambes soient bien égales d'épaisseur & de largeur; en un mot qu'il soit bien droit en tout sens. La longueur et largeur desdites règles n'est pas déterminée, mais on donne pour l'ordinaire six pouces de long, six à sept lignes de large, & environ deux lignes d'épaisseur à chaque jambe de compas de proportion que l'on destine pour travailler dans le cabinet. On en fait de plus petits, pour être commodément portés dans la poche, comme aussi de plus grands, pour travailler sur le terrein, dont on proportionne la largeur & épaisseur.

On a coutume d'y tracer six sortes de lignes; sçavoir la ligne des parties égales, celles des plans & des polygones, d'un côté; la ligne des cordes, celles des solides, & celle des métaux, & de l'autre côté des jambes dudit compas, en la manière que nous allons expliquer.

On met encore ordinairement sur le bord du compas de proportion d'un côté une ligne divisée, qui sert à connaître le calibre des canons, & de l'autre côté une ligne qui sert à connaître le diamètre, & le poids des boulets de fer, depuis un quart jusqu'à soixante quatre livres, dont nous donnerons la construction et les usages, en parlant des instruments pour l'artillerie.

Des bandes de carton de vingt-cinq centimètres de long articulées par un *bouton-pression* sont distribuées aux participants ; ceux-ci les graduent selon les recommandations du paragraphe suivant.

De la ligne des parties égales.

Cette ligne est ainsi nommée, parce qu'elle est divisée en parties égales, dont le nombre est ordinairement 200, lorsqu'elle est de six pouces de long.

Ayant tiré sur une des surfaces de chaque jambe les lignes égales AB depuis le point A, qui est le centre de la charnière du compas, & par conséquent le centre de son mouvement, qui a été trouvé de la manière que nous avons dit ci-devant, excepté qu'on fait les sections sur la tête, en posant le compas au bout de la branche du simple ; pour la construire, divisez premièrement les lignes AB en deux parties égales, qui feront par conséquent de 100 parties chacune. Divisez encore chacune de ces deux parties égales en deux autres, dont chacune fera 50. Divisez ensuite chacune de ces parties en cinq, dont chacune vaudra dix, & chacune de ces nouvelles parties en deux ; & enfin chacune de ces dernières en cinq parties égales, que vous distinguerez de cinq en cinq par des petites lignes, & y mettrez les chiffres de dix en dix seulement, en commençant du centre A, jusqu'à l'autre extrémité, où vous mettrez le nombre 200.

Comme les deux autres lignes, qui sont à tracer sur les mêmes surfaces de chaque jambe, doivent toutes aboutir au même centre A, il faut que l'extrémité B de la ligne des parties égales, soit tirée le plus près que l'on pourra des bords extérieurs de chaque jambe, y laissant pourtant une petite distance pour placer les chiffres, afin d'avoir place pour tirer la ligne des plans au milieu de la largeur desdites jambes, & la ligne des polygones vers leurs bords intérieurs; mais il faut bien prendre garde, en tirant ces lignes, que chacune des correspondantes soit également distants des bords intérieurs de chaque jambe : le tout, comme il est aisé de voir sur la planche sixième.

Non content de donner le mode de fabrication, le Sieur Bion justifie :

Preuve de la ligne des parties égales.

La division de cette ligne est si facile, qu'elle n'a besoin d'aucune preuve, que celle d'examiner avec un compas commun si les deux lignes correspondantes, tracées sur les jambes du compas de proportion, sont bien égales & divisées également: ce que l'on connaitra en prenant un compas ordinaire, dont les pointes soient fixes et déliées, tel nombre que l'on voudra de ces parties égales, commençant par où l'on jugera à propos. Car si cette ligne des parties égales est bien divisée en partant sur la dite ligne l'ouverture du compas ainsi ouvert, ses deux pointes comprendrons toujours le même *nombre de parties égales sur une jambe ou sur l'autre en comptant du centre, ou de tel point de division que l'on voudra.*

Il est alors possible d'apprendre à se servir du compas de proportion. Le texte de Bion prévoit dans cette section première du chapitre deux, sept usages ; il ne sera possible d'aborder que les usages un, trois et quatre.

Des usages de la ligne des parties égales.
USAGE PREMIER
Diviser une ligne donnée en tant de parties égales qu'on voudra comme, par exemple, en sept.

Prenez avec un compas ordinaire l'étendue de toute la ligne proposée comme AB, & la portez sur la ligne des parties égales (VII planche, fig. I) à un nombre de part & d'autre, qui se puisse facilement diviser par 7, comme pourrait être en cet exemple 70, dont la septième partie est 10, ou bien au nombre 140 dont la septième partie est 20. Ensuite laissant le compas ainsi ouvert, resserez le compas commun jusqu'à ce que les deux pointes rencontrent les deux nombres 10, si l'on s'est servi du nombre 70, ou bien les deux nombres 20, si l'on a pris 140 pour l'étendue de toute la ligne, cette ouverture du compas marquée par la figure 2, sera la septième partie de la ligne proposée. VII Planche Fig 1

Si la ligne proposée à diviser était trop longue pour être appliquée sur les jambes du compas de proportion, portez en seulement une partie, comme la moitié ou le quart, que vous diviserez comme il vient d'être dit en 7, le double ou le quadruple de cette septième partie divisera en 7 la grande ligne proposée.

Le texte est clair et il est facile de reconnaître la situation utilisée ; tous reconnaissent la configuration dite de Thalès ; mais il est préférable d'y voir l'usage d'une homothétie de centre l'axe du compas et de rapport 1/7, parce que les droites parallèles ne sont pas matérialisées.

USAGE III
Etant donnée une ligne droite, & le nombre des parties égales qu'elle contient, en retrancher une moindre ligne contenant tel nombre de ses parties qu'on voudra.

Soit pour exemple la ligne proposée de 120 toises, dont on en veut retrancher une ligne de 25. Prenez avec le compas commun la longueur de la ligne proposée; ouvrez le compas de proportion de telle sorte que cette longueur convienne de 120 en 120 marqués sur les deux lignes des parties égales; & ledit compas de proportion demeurant ainsi ouvert, prenez sur la même ligne la distance de 25 à 25, que vous retrancherez de ladite de 120 toises.

Il suffit de se laisser guider par le texte.

USAGE IV
A deux lignes droites données trouver une troisième proportionnelle & à trois une quatrième.

Si l'on ne propose que deux lignes, prenez avec un compas commun la longueur de la première, & la transportez sur une des jambes du compas de proportion depuis le centre le long de la ligne des parties égales; pour en connaître la valeur, & du nombre où elle se terminera, ouvrez le compas de proportion, en sorte que la longueur de la seconde ligne convienne à son ouverture; ledit compas demeurant ainsi ouvert, portez la longueur de ladite seconde ligne sur une des jambes depuis le centre, & remarquez le nombre des parties égales où elle se termine, l'ouverture de ce nombre donnera la troisième ligne requise. De la VII Planche Fig 3

Soit pour exemple la première ligne proposée AB, de 40 parties égales, & la seconde CD, de 20. Portez la longueur des 20 parties égales à l'ouverture de 40; & le compas restant ainsi ouvert, prenez l'ouverture de 20 à 20, cette ouverture sera la longueur de la troisième ligne proportionnelle que l'on cherche; & si vous la mesurez sur la ligne des parties égales depuis le centre, elle en contiendra 10 : car 40 sont à 20, comme 20 sont à 10.

Que si à trois lignes données vous cherchez une quatrième proportionnelle, portez, comme nous venons de dire, la seconde à l'ouverture de la première; & le compas de proportion demeurant ainsi ouvert, portez la troisième ligne sur une de ses jambes depuis le centre; l'ouverture du nombre où elle se terminera, donnera la quatrième requise. Fig 3

Soit pour exemple la première de ces trois lignes de 60 parties égales, la seconde de 30, & la troisième de 50; portez la longueur de 30 parties égales à l'ouverture de 60, et le compas demeurant ainsi ouvert, prenez l'ouverture de 50, cette ouverture, qui contiendra 25, sera la quatrième proportionnelle : car 60 sont à 30, comme 50 à 25.

Il n'y a rien à ajouter, ce serait de la paraphrase. Le compas de proportion est un instrument de calcul qui s'est diffusé entre les années 1500 et 1600 ; sa précision est satisfaisante, surtout si on lui adjoint une règle des dixmes. Son usage a cessé avec l'apparition des logarithmes. Le plus célèbre d'entre eux est celui qui a été construit et utilisé par Galilée ; un exemplaire en est d'ailleurs conservé au musée de l'Histoire de la Science à Florence. Sa manipulation est aisée, et il a l'avantage de permettre l'illustration de propriétés aussi bien numériques que géométriques.

Bibliographie

[Bion 1752] Bion Nicolas (1752) *Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques*. Quatrième édition, Paris, in 8°.

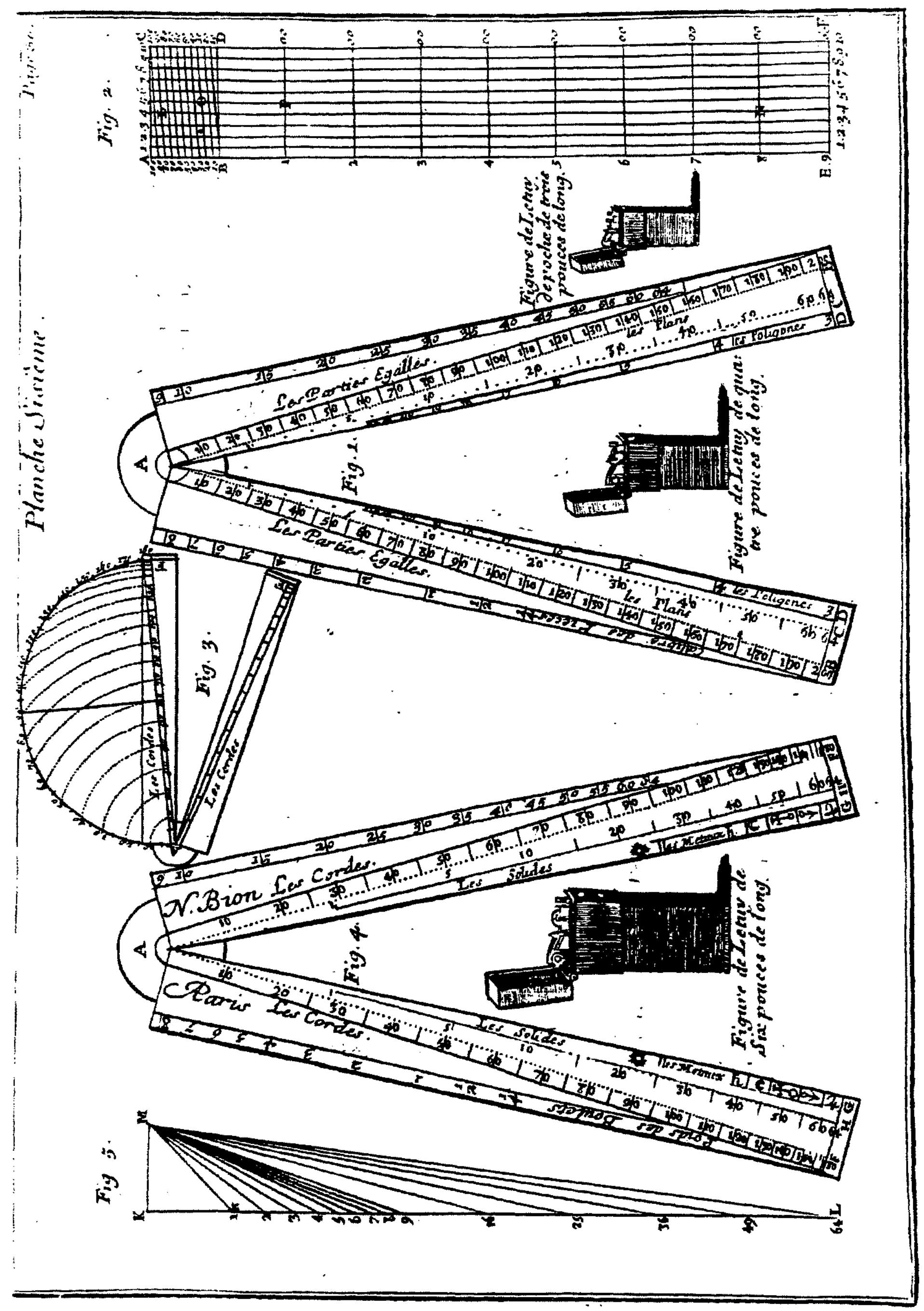
[Clairaut 1753] Clairaut Alexis-Claude (1753) *Élémens de Géométrie*, Paris ; rééd. Siloë, Laval, 1987.

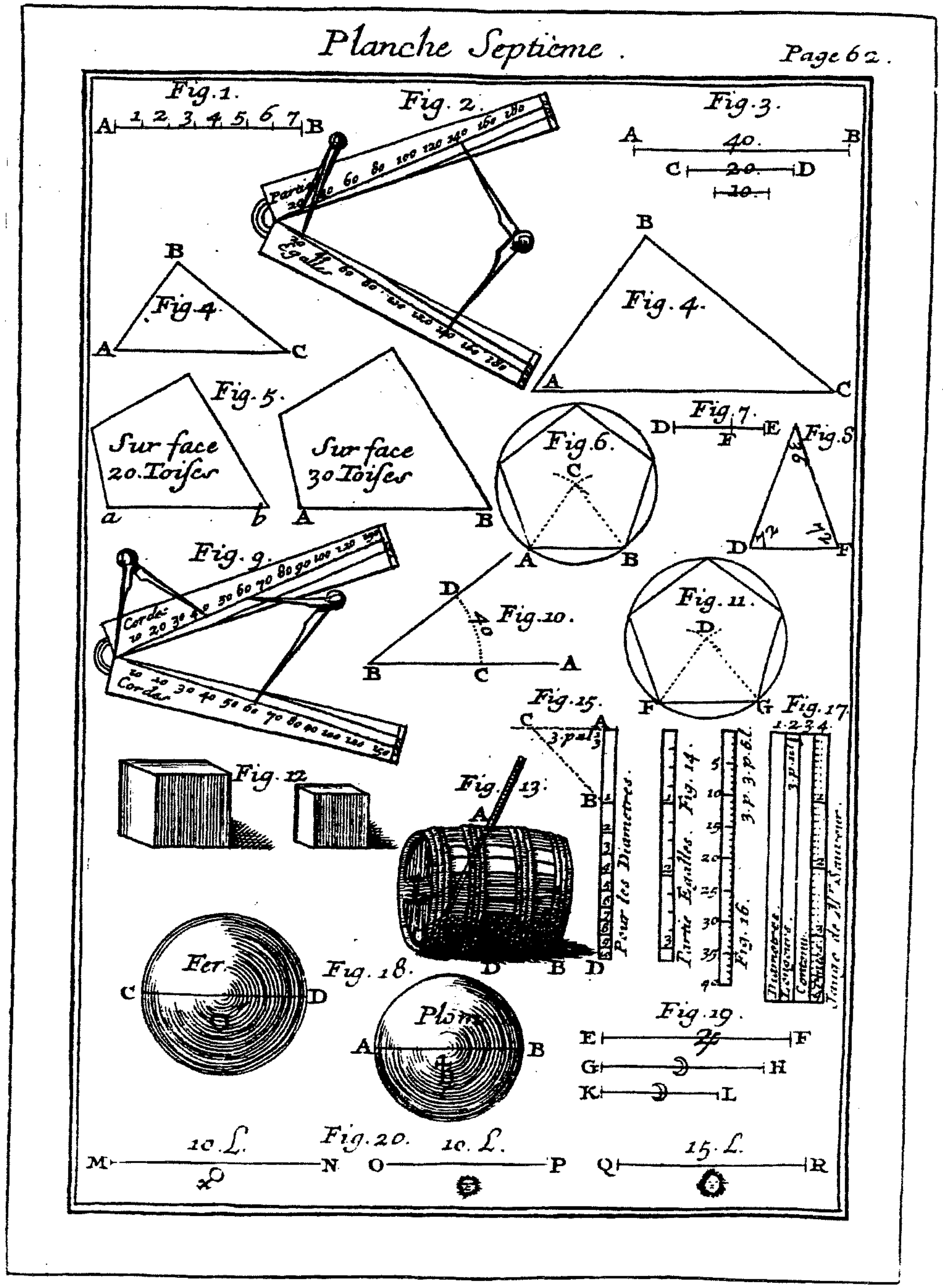
[Fine 1570] Fine Oronce. (1570) *La Practique de la géométrie d'Oronce Professeur du Roy ès mathématiques, en laquelle est comprins l'usage du Quarré Géométrique, etc. Reveüe & traduicte par Pierre Forcadel, Lecteur du Roy és Mathématiques.* A Paris, chez Gilles Gourbin.

[Henrion 1623] Henrion Denis (1623) *Géométrie pratique*.

[Rohault 1682] Rohault Jacques (1682) *Œuvres posthumes*, Paris.

Pages suivantes : planches 6 et 7 du *Traité* de Nicolas Bion [Bion, 1752]





LE RÔLE DES INSTRUMENTS DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'HISTOIRE DES SCIENCES

Carlos Mederos Martin

Fondation Orotava des Canaries de l'Histoire des Sciences

Traduit de l'espagnol par Roseline Cases (IREM de Toulouse)

1. Introduction

En 1630, Galilée publie *son Dialogue sur les deux plus grands systèmes du monde ptoléméen et copernicien*. Le Troisième Jour, il dit, se référant à la Théorie Héliocentrique :

> *Je ne peux pas manquer d'admirer le trait de génie de ceux qui l'ont reçue et acceptée comme vérité... Je ne peux trouver de limites à mon admiration en voyant comment, chez Aristarque et chez Copernic, la raison a pu faire autant violence contre les sens, pour que, au désavantage de ceux-ci, elle se soit rendue maîtresse de leurs crédulités.*

En effet, Aristarque de Samos fut un astronome de l'École d'Alexandrie qui, au III^{ème} siècle avant J. C., se proposa de mesurer la distance entre la Terre et le Soleil. Pour cela, il profita du fait que, dans les quarts lunaires, le Soleil, la Terre, et la Lune se trouvent aux sommets d'un triangle rectangle avec la Lune au sommet de l'angle droit, telle que le segment Terre-Lune soit le plus petit côté et le segment Terre-Soleil l'hypoténuse. Aristarque mesura dans cette position l'angle Soleil-Terre-Lune (avec pour sommet la Terre), obtenant une valeur de 87° (cet angle est en réalité de 89°50'). Ensuite il observa un triangle rectangle tel que l'un de ses angles aigus mesure 87°, semblable au précédent, vérifiant que l'hypoténuse est vingt fois plus grande que le plus petit coté, et c'est pourquoi, étant donné que les triangles semblables ont leurs cotés proportionnels, Aristarque conclut que la distance Terre-Soleil est