Par ailleurs, Lobatchevsky a montré que la géométrie euclidienne était en fait *contenue* dans la géométrie non-euclidienne puisqu'elle correspond au cas limite de triangles infiniment petits (ce qui explique que notre feuille de papier, si petite par rapport aux dimensions de l'univers, nous donne si bien l'impression de la réalité de la géométrie euclidienne). La non contradiction de l'une est donc équivalente à la non-contradiction de l'autre. Est-on maintenant sûr de nous ? Ou risquons-nous soudain de découvrir une faille dans la géométrie euclidienne ? Par le biais des coordonnées cartésiennes des points du plan, le problème est ramené à la non-contradiction de la théorie des nombres réels, subordonnée par les différentes constructions des nombres réels (par exemple, les coupures de Dedekind) à celles de l'arithmétique des nombres entiers.

Bibliographie

[Cha86] Chabert J.L. (1986) La préhistoire des géométries non-euclidiennes, IREM de Picardie.

[Cha90] Chabert J.L. (1990) Les géométries non-euclidiennes, in Repères n° 1, Topiques éditions.

[Cha93] Chabert J.L. (1993) La vraie-fausse démonstration du 5ème postulat, in Histoires de Problèmes, Histoire des mathématiques, Ellipses.

[Jao86] Jaouiche K. (1986) La théorie des parallèles en pays d'Islam, Vrin, Paris.

[Pey66] Peyrard (1819) Les œuvres d'Euclide, Paris, 1819 ; réédition Blanchard, Paris, 1966.

[Lob80] Lobatchevski N. I. (1866) Etudes géométriques sur la théorie des parallèles, traduction française Houël J., réédition Monom, 1980.

[Ras99] Rashed R. & Vahabzadeh B. (1999) Al-Khayyām mathématicien, Blanchard, Paris.

[Sac20] Saccheri G. (1773) Euclides ab omni naero vindicatus, Milan, traduction anglaise, Halsted, Chicago, 1920.

LA LINÉARITE A TRAVERS QUELQUES SIÈCLES

Michel Ballieu & Marie-France Guissard

CREM (Nivelles, Belgique)

Résumé

Durant cette année 1999-2000, le thème de recherche retenu par le CREM est la linéarité. Une approche historique de ce sujet peut être envisagée à partir de l'étude de différents textes anciens montrant comment les méthodes de fausse position ont permis de résoudre des problèmes linéaires depuis les mathématiques égyptiennes jusqu'à celles du quinzième siècle au moins. Pour illustrer cela, nous étudierons les problèmes 24 à 28 du papyrus Rhind, un manuscrit en latin traduit d'un ouvrage arabe attribué à Abu Kamil, un texte du treizième siècle de Leonardo Fibonacci Pisano et un texte de Luca Pacioli du quinzième siècle.

D'autre part, nous montrerons aussi comment la notion de combinaison linéaire peut être dégagée du travail d'Archimède sur l'équilibre des surfaces planes pour la recherche du barycentre et comment cette même notion est directement utilisée par Fibonacci pour résoudre des équations linéaires diophantiennes indéterminées.

1. Mathématiques égyptiennes

1.1 Introduction

Notre connaissance des mathématiques égyptiennes repose sur un très petit nombre de documents et ne peut dès lors être que très incomplète. Le fait que peu de textes nous soient parvenus est évidemment une conséquence de la fragilité du support sur lequel ils ont été rédigés, à savoir le papyrus.

Parmi les documents existants, l'un des plus connus est sans doute *le Papyrus Mathématique Rhind* conservé dans la troisième salle égyptienne du *British Museum* où il est catalogué sous les numéros BM 10057 et BM 10058. Ce sont deux grands morceaux dont la largeur vaut plus ou moins 32 cm pour des longueurs respectives d'environ 206 et 319 cm. Une petite partie qui se situe juste entre les deux précédentes est la propriété de l'*Historical*

Society de New York et se trouve maintenant au *Brooklyn Museum* (n° 37.1784E). À l'origine, dans son intégralité, c'était un rouleau continu formé de quatorze feuilles de 40 cm sur 32 cm.

Ce papyrus fut découvert vers le milieu du siècle dernier probablement dans les ruines d'une petite construction proche du temple mortuaire de Ramesses II à Thèbes. Il fut acheté à Louxor, avec d'autres antiquités égyptiennes dont un autre document mathématique connu sous le nom de *Leather Roll* (BM 10250), par Alexander Henry Rhind. Pour des raisons de santé, celui-ci avait été obligé de passer les deux saisons d'hiver 1855-56 et 1856-57 en Égypte. En 1863, cependant, il meurt lors du retour d'un autre voyage dans ce pays et son exécuteur testamentaire vend alors sa collection d'antiquités égyptiennes au *British Museum*.

1.2 Le papyrus Rhind

Il suscita un grand intérêt chez les égyptologues. Une première traduction commentée fut éditée en 1877 par August Adolf Eisenlohr. C'est lui qui donna aux différents problèmes les numéros sous lesquels on continue à les référencer aujourd'hui. Le fac-similé officiel du *British Museum* ne parut qu'en 1898. Le professeur Thomas Eric Peet, archéologue titulaire de la chaire d'égyptologie de l'Université de Liverpool publia en 1923 une admirable transcription avec traduction et commentaires. Mais la version qui intéresse le plus le mathématicien et le profane est celle réalisée en deux volumes par Chace, Bull, Manning et Archibald en 1927-29 et rééditée sous forme abrégée en 1979. Elle comprend des photographies, le texte en hiératique, sa transcription en hiéroglyphes et les traductions littérale et libre, le tout agrémenté d'une bibliographie complète.

Au début du document, le copiste donne son nom Ahmes et signale qu'il écrit au quatrième mois de la saison des inondations de l'année 33 du règne du roi Auserenre Apophis. Ce dernier est un souverain Hyksos de la quinzième dynastie, ce qui situe la copie vers le milieu du seizième siècle avant Jésus-Christ. Ahmes ajoute qu'il recopie un vieux texte écrit sous le règne du roi Nyamaatre, nom de trône de Ammenemes III, sixième roi de la douzième dynastie, qui régna durant la deuxième moitié du dix-neuvième siècle avant Jésus-Christ. Il donne également un titre au document, titre qui pourrait se traduire par « Méthode correcte de calcul pour comprendre la signification des choses et connaître tout, c'est-à-dire ce qui est peu clair et ... l'ensemble des secrets. »

On trouve ensuite des tables de multiplication par deux des fractions unitaires (fractions de numérateur 1) à dénominateurs impairs (de 3 à 101). Viennent enfin quelque quatre-vingt-sept problèmes d'arithmétique et de géométrie, avec les solutions. Dans les derniers problèmes, il est notamment question de la composition de la bière égyptienne. Le début de presque tous les problèmes est écrit à l'encre rouge, ce qui facilite la lecture ; le reste du texte est rédigé à l'encre noire.

1.3 Quelques caractéristiques des mathématiques égyptiennes

Le système numérique utilisé par les Égyptiens est décimal mais non positionnel.

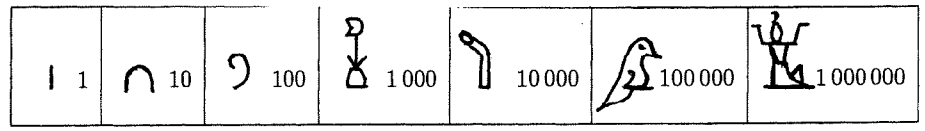
Qu'il s'agisse de n'importe quelle opération, tout est ramené à des additions. Les mathématiques égyptiennes ont ainsi un caractère nettement additif et donc linéaire.

Les Égyptiens emploient presque exclusivement les fractions de numérateur 1 (fractions unitaires). La technique qu'ils utilisent pour opérer les divisions favorise l'apparition de ce type de fractions. Il y a cependant une exception pour la fraction $^2/_3$ et le scribe semble avoir une certaine facilité à trouver sans peine les deux tiers de n'importe quel nombre.

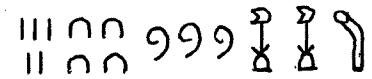
À l'appui de ce qui précède, signalons que les six premiers problèmes concernent l'égale distribution de pains entre dix personnes, ce qui donne l'occasion d'exprimer les fractions 6/10, 7/10, 8/10 et 9/10 comme sommes de fractions unitaires et éventuellement de la fraction 2/3. Quant aux tables du début du document, elles donnent la décomposition des fractions du type $2/(2n + 1)$ en sommes de fractions unitaires et éventuellement de la fraction 2/3.

1.4 Quelques hiéroglyphes

En ce qui concerne l'écriture des nombres, il existe un symbole pour toute puissance de 10, symbole qui se répète autant de fois qu'il est nécessaire lors de l'écriture du nombre.



Ainsi, par exemple, 12 345 s'écrit



Pour désigner une fraction (unitaire, rappelons-le), on utilise le symbole

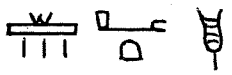
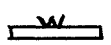
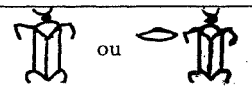
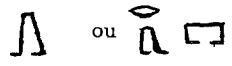
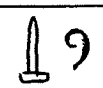
qui se prononce *rè* et signifie bouche, ouverture.

Les fractions 1/3 et 1/123 s'écrivent respectivement :

Il existe cependant deux exceptions, l'une pour 1/2 et l'autre, pour la fameuse fraction 2/3 :

$\frac{1}{2}$: $\frac{2}{3}$:

Voici encore quelques hiéroglyphes utiles.

; adjectif possessif	 ‘ḥ‘ quantité, inconnue	‘ḳ ajouter
ḏ;·t le reste	 dmd somme, total	f elle
 ḫpr devenir	ḫr donc, alors	ḥr sur
ín donc, ainsi	ír faire, prendre	ir·t calculer
m considéré comme	m y selon que, ce que	n de
pn ceci	 pr·t ou pr soustraire	 w ḏ il reste

1.5 Opérations

Le scribe égyptien décrit en détail la technique qu'il utilise pour opérer les multiplications et les divisions. Nous en verrons un exemple ci-après. Par contre, il est totalement muet en ce qui concerne les additions et soustractions. Le peu d'erreurs commises dans ces dernières opérations laisse supposer qu'il disposait de tables, mais aucune n'est arrivée jusqu'à nous et ce n'est donc là qu'une hypothèse. Peut-être apprenait-il des tables d'addition par cœur dès son plus jeune âge ?

La multiplication s'effectue par duplications successives. Par exemple, pour effectuer, le scribe procède de la façon suivante, en cochant les termes qui interviennent effectivement dans le calcul.

\	1	47
	2	94
\	4	188
	8	376
	16	752
\	32	1 504
Total	37	1 739

La division est traitée comme opération inverse de la multiplication. Ainsi, pour diviser 133 par $9\ ^1/_2$, le scribe se demande par quoi il faut multiplier $9\ ^1/_2$ pour obtenir 133.

	1	$9\ ^1/_2$
\	2	19
\	4	38
\	8	76
Total	14	133

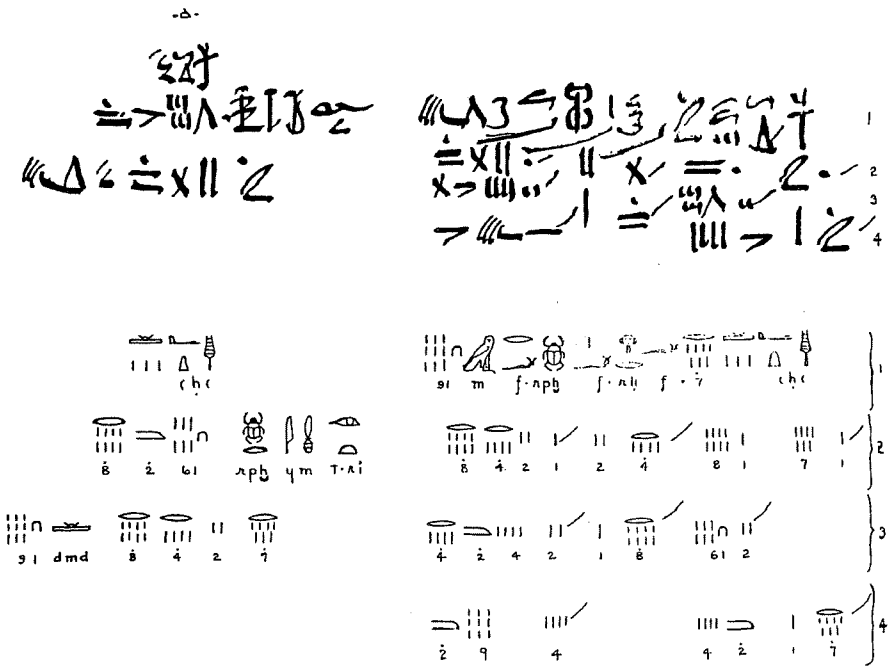
1.6 Problème 24

Une traduction littérale est :

Une quantité, un septième d'elle sur elle devenir elle en tant que 19.

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

Le scribe suppose au départ que la quantité cherchée vaut 7. Il utilise la méthode de fausse position simple. Il choisit un nombre qui permet d'éviter l'apparition trop rapide de fractions. Il calcule alors la quantité et son septième : 7 + 1 = 8 (voir lignes 2 et 4 à l'extrême droite). Ce résultat est faux puisqu'il aurait dû trouver 19. Le raisonnement qu'il tient alors est le suivant : la proportion de 19 à 8 est la même que celle de la quantité cherchée à 7, nombre qu'il avait choisi au départ pour des raisons de facilité. Il est ainsi amené à diviser 19 par 8 selon la méthode que nous avons exposée ci-dessus, c'est-à-dire qu'il recherche par combien il faut multiplier 8 pour obtenir 19. Nous lisons cela à la colonne 2 (à partir de la droite), lignes 2, 3 et 4 et à la colonne 3, lignes 2 et 3.



Il obtient 2 $^1/_4$ $^1/_8$, rapport de la proportion qu'il doit maintenant multiplier par 7 (quatrième colonne, lignes 2, 3 et 4).

Dans la partie gauche du fragment, nous trouvons à la ligne 1 le hiéroglyphe signifiant « la quantité », à la ligne 2, sa valeur, à savoir 16 $^1/_2$ $^1/_8$. À la ligne 3, le scribe ajoute son septième et vérifie que cela fait bien un total de 19.

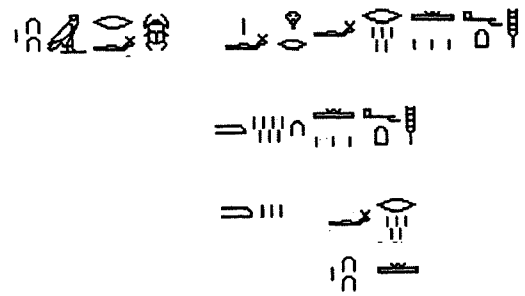
Sylvia Couchoud n'interprète pas ce procédé de résolution comme une méthode de fausse position. Selon elle, le calculateur égyptien évalue d'abord le nombre de septièmes : il y en a huit. Donc il obtient l'équation $^8/_7 x = 19$. Il divise ensuite 19 par 8, ce qui donne 2 $^1/_4$ $^1/_8$ et multiple enfin par 7 ; il trouve ainsi le résultat 16 $^1/_2$ $^1/_8$.

Le fait que le scribe multiplie 2 $^1/_4$ $^1/_8$ par 7 et non 7 par 2 $^1/_4$ $^1/_8$ est un élément qui pourrait abonder dans son sens. En effet, dans l'esprit de la méthode de fausse position, lorsqu'on a trouvé le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de 8 à 19 (dans le second membre), il serait logique de multiplier ensuite 7 (la fausse position) par ce même coefficient. On peut cependant penser que les Égyptiens avaient une connaissance intuitive de la commutativité de la multiplication et qu'ils inversaient l'ordre des opérateurs pour simplifier le calcul.

1.7 Autres problèmes

1.7.1 Problème 25

1.7.2 Problème 27



1.8 Problème 28

Traduction littérale :

$^2/_3$ considérés comme à ajouter, $^1/_3$ considéré comme à soustraire, 10 il reste pour son total.

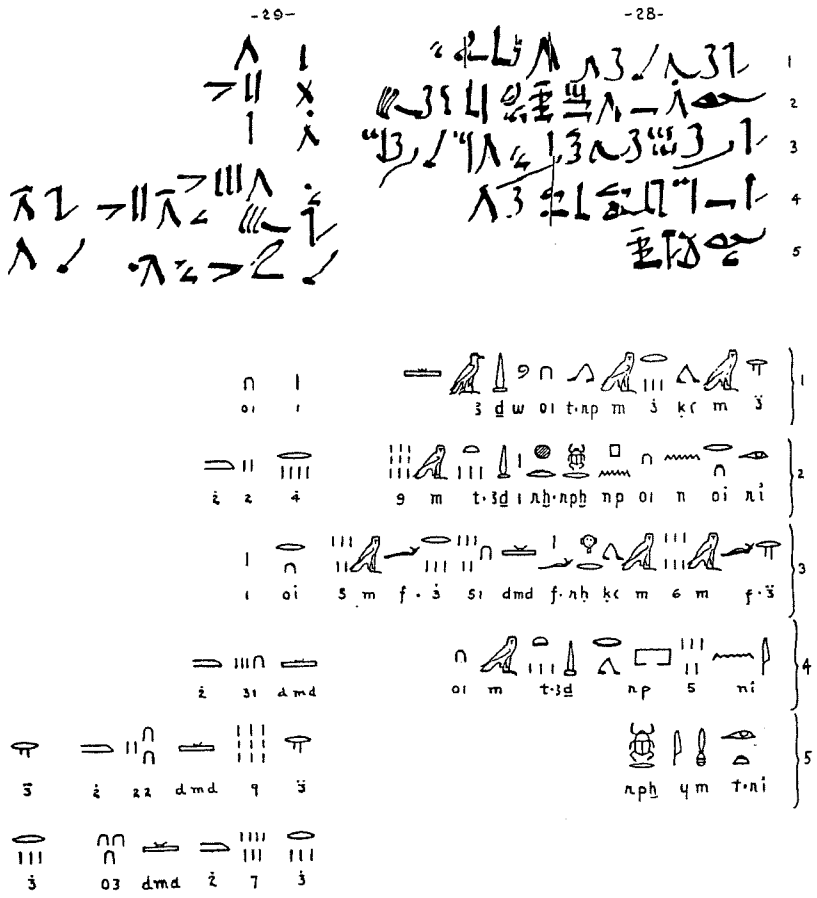
$$(x+\frac{2}{3}x)-\frac{1}{3}(x+\frac{2}{3}x)=10$$

Et voici ce que dit le scribe :

Prends 1/10 *de ce 10, ceci devient alors 1, le reste considéré comme 9. Deux tiers d'elle (la quantité) considérés comme 6 considérés à ajouter sur elle, le total est 15. Un tiers d'elle considéré comme 5. Ainsi 5 est à soustraire, le reste est 10. Calcule selon ce que c'est devenu.*

Le raisonnement du scribe est assez curieux et a donné lieu à plusieurs hypothèses. Peet, par exemple, considérait que l'Égyptien ancien connaissait le résultat et se débrouillait pour l'obtenir à partir du nombre 10 donné. Sylvia Couchoud pense que l'Égyptien savait que retirer un dixième du résultat demandé était équivalent à l'énoncé du problème. Pour elle, il n'y a rien

d'autre à trouver ici que la vérification du résultat obtenu, couronnée par la satisfaction du travail accompli !



Bibliographie

[CBMA27] Chace A.B., Bull L., Manning H.P., Archibald R.C. (1927-29) *The Rhind Mathematical Papyrus.* Mathematical Association of America, vol. 1, 1927, vol. 2, 1929, reprinted 1979.

[Cou93] Couchoud S. (1993) *Mathématiques égyptiennes. Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique*, éditions Le Léopard d'Or.

[Gil82] Gillings R.J. (1982) *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. (Dover Publ., Inc.)

[Jos94] Joseph G.G. (1994) *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*, Penguin Books.

[RS87] Robins G., Shute C. (1987) *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*, British Museum Publ.

2. Archimède et l'équilibre des figures planes

2.1 Introduction

On possède peu de détails sur la vie d'Archimède. Il a sans doute étudié tout un temps auprès des disciples d'Euclide à Alexandrie, ville qui était à cette époque le centre de l'activité mathématique en Grèce. Il a bien sûr gardé, tout au long de son existence, des contacts avec les mathématiciens qui y travaillaient. C'est cependant à Syracuse qu'il a essentiellement vécu et qu'il est mort. Chacun a entendu parler des ingénieuses machines de guerre qu'il avait mises au point lors du siège de Syracuse par les Romains. Ces machines étaient notamment destinées à bouter le feu aux navires ennemis, mais finalement, la ville fut prise et Archimède tué par un soldat romain en 212 avant Jésus-Christ, en dépit de l'ordre donné par le général Marcellus qui souhaitait que la vie du géomètre fût épargnée. Comme on rapporte qu'Archimède avait alors septante-cinq ans, cela situe sa naissance vers 287 avant Jésus-Christ.

Archimède a écrit une œuvre importante. Voici l'ordre dans lequel sa production apparaît dans l'édition de Heiberg (1880-81). Cet ordre n'est pas l'ordre chronologique. Celui que suggère Heath est indiqué entre parenthèses.

(5) *De la sphère et du cylindre* (2 volumes).

(9) *La mesure du cercle*.

(7) *Des conoïdes et des sphéroïdes*.

(6) *Des spirales*.

(1) *De l'équilibre des figures planes* (volume 1).

(3) Idem (volume 2).

(10) *L'arénaire*.

(2) *La quadrature de la parabole*.

(8) *Les corps flottants* (2 volumes).

(?) *Le Stomachion*.

(4) *La méthode relative aux théorèmes mécaniques*.

(?) *Le livre des lemmes*.

(?) *Le problème des bœufs*.

Le texte étudié ci-dessous se situe au début du livre I du traité *De l'équilibre des figures planes ou des centres de gravité des figures planes* (volume 1).

2.2 Texte extrait de l'équilibre des figures planes

ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ Α'

Ἐπιπεδων ισορροπιων η κεντρα βαρων επιπεδων α'

α'. Αιτουμεθα τα ισα βαρεα απο ισων μακεων ισορροπειν τα δε ισα βαρε α απο τωνανισων μακεων μη ισορροπειν αλλα ρεπειν επι το βαρος το απο του μειζονος μακεος.

β'. Ει κα βαρεων ισορροπεοντων απο τινων μακεων ποτι το ετερον των βαρεω ν ποτιτε–θη μη ισορροπειν αλλα ρεπειν επι το βαρος εκεινο ω ποτετεθη.

DE L'ÉQUILIBRE OU DES CENTRES
DE GRAVITÉ DES FIGURES PLANES, I

1. Nous demandons que les poids égaux s'équilibrent à des distances égales, et que les poids égaux suspendus à des distances inégales ne s'équilibrent pas, mais qu'il y ait inclinaison du côté du poids suspendu à la plus grande distance.

2. Si, des poids suspendus à certaines distances étant en équilibre, on ajoute à l'un des deux poids, les poids ne s'équilibrent plus, mais il y a inclinaison du côté du poids auquel on a ajouté.

3. De même, si on retranche quelque chose à l'un des deux poids, les poids ne s'équilibrent plus, mais il y a inclinaison du côté du poids, duquel on n'a rien retranché.

4. Dans les figures planes égales et semblables, superposables l'une à l'autre, les centres de gravité se superposent eux aussi l'un à l'autre.

5. Dans les figures planes inégales mais semblables, les centres de gravité seront situés semblablement. Nous appelons semblablement situés dans des figures semblables, des points tels que les droites qui les joignent aux sommets des angles égaux font des angles égaux avec les côtés homologues.

6. Si des grandeurs s'équilibrent à certaines distances, des grandeurs équivalentes à ces grandeurs s'équilibrent à leur tour aux mêmes distances.

7. Dans toute figure, dont le périmètre tourne sa concavité du même côté, le centre de gravité doit être à l'intérieur de la figure.

Ces principes étant admis (sous-entendu, nous démontrons les propositions).

1

Les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux entre eux.

Si, en effet, les poids étaient inégaux, l'excès du plus grand ayant été retranché, les poids restants ne s'équilibreraient plus puisqu'on aurait ôté quelque chose de l'un des deux poids en équilibre. Il s'ensuit que les poids qui s'équilibrent à des distances égales sont égaux.

2

Les poids inégaux suspendus à des distances égales ne s'équilibrent pas, mais il y a inclinaison du côté du plus grand.

3

Les poids inégaux s'équilibreront à des distances inégales, le plus grand poids se trouvant à la plus petite distance.

4

Si deux grandeurs égales n'ont pas le même centre de gravité, le centre de gravité de la grandeur composée de ces grandeurs sera le milieu du segment de droite joignant le centre de gravité des grandeurs.

5

Si les centres de gravité de trois grandeurs sont situés sur la même droite, si ces grandeurs ont le même poids, et si les segments de droite entre les centres sont égaux, le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des trois grandeurs sera le point qui est aussi le centre de gravité de la grandeur située au milieu.

COROLLAIRE I

Il est clair d'après ce qui précède que pour toute quantité impaire de grandeurs dont les centres de gravité sont alignés et dont celles qui ont la même distance de celle du milieu ont le même poids et qui, de plus, sont disposées de manière que les segments de droite entre les centres de gravité des grandeurs sont égaux, le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des grandeurs sera le point qui est aussi centre de gravité de la grandeur du milieu.

COROLLAIRE II

Même lorsque les grandeurs sont en nombre pair, si leurs centres de gravité sont alignés, si les grandeurs du milieu et celles qui sont équidistantes de celles du milieu ont le même poids, et si les segments de droite entre les centres sont égaux, le centre de gravité de la grandeur composée de la somme des grandeurs sera le milieu du segment de droite joignant les centres de gravité des grandeurs, comme le montre la figure.

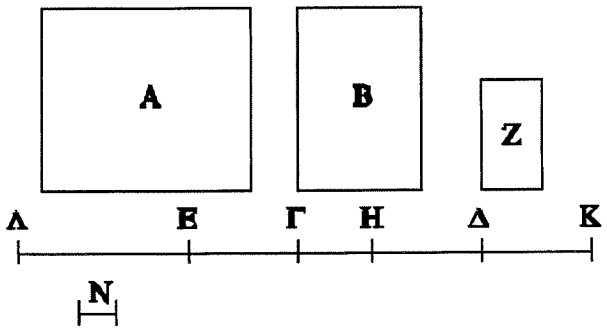
ς΄

Τα συμμετρα μεγεθεα ισορροπεοντι απο μακεων αντιπεπονθοτως τον αυτ ον λογον εχοντων τοις βαρεσιν.

6

Des grandeurs commensurables s'équilibrent à des distances inversement proportionnelles à leurs poids.

Soient les grandeurs commensurables A et B, A et B leurs centres ; soit de plus une longueur EΔ et que la longueur ΔΓ soit à la longueur ΓE comme A est à B. Il faut démontrer que le centre de gravité de la grandeur composée des deux grandeurs A et B est le point Γ.



Si ΔΓ est à ΓE comme A est à B et si A et B sont commensurables, il s'ensuit que les deux segments de droite ΓΔ et ΓE sont également commensurables. Appelons N leur commune mesure. Donnons-nous les deux segments de droite ΔH et ΔK égaux chacun à EΓ et le segment de droite EΛ égal à ΔΓ. Puisque ΔH est égal à ΓE, ΔΓ est égal à EH, de manière que ΛE est aussi égal à EH. Par conséquent, ΛH est double de ΔΓ et HK double de ΓE. Par conséquent N mesure aussi chacun des segments de droite ΛH et HK, puisque N mesure leurs moitiés. Et puisque, d'une part, ΔΓ est à ΓE comme A est à B et que, d'autre part, ΛH est à HK comme ΔΓ est à ΓE, chacun des premiers segments est en effet double de chacun des seconds - le rapport de ΛH à HK est lui aussi égal au rapport de A à B. Que A contienne autant de fois la grandeur Z que ΛH contient N. Il s'ensuit que ΛH est à N comme A est à Z. Mais KH est aussi à ΛH comme B est à A. Par identité donc, KH est à N comme B est à Z. Ainsi B est un multiple de Z autant de fois que KH est un multiple de N. Mais on a vu que A est aussi un multiple de Z, de façon que Z est ainsi une commune mesure de A et de B. Si maintenant le segment ΛH est divisé en parties égales à N, et la grandeur A en parties égales à Z, les segments égaux à N contenus dans le segment ΛH seront en même nombre que les grandeurs partielles

égales à Z contenues dans la grandeur A. Par conséquent, si on place sur chacun des segments de ΛH une grandeur égale à Z ayant son centre de gravité au milieu du segment, la somme de ces grandeurs est égale à la grandeur A et le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs partielles sera le point E ; toutes ces grandeurs sont en effet en nombre pair et il y en a le même nombre de part et d'autre de E, puisque le segment ΛE est égal au segment HE. On démontrera de la même manière que, si sur chacun des segments partiels du segment KH, on place une grandeur égale à Z ayant son centre de gravité au milieu du segment, la somme de ces grandeurs partielles sera égale à B et le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs partielles est le point Δ. La grandeur A sera donc placée au point E et la grandeur B au point Δ. On aura ainsi des grandeurs égales entre elles, dont les centres de gravité sont également distants entre eux et qui sont placées en nombre pair sur un segment de droite. Il est donc évident que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes ces grandeurs est le milieu du segment de droite qui contient les centres des grandeurs du milieu[1]. Mais puisque le segment de droite ΛE est égal au segment ΓΔ, et que le segment EΓ est égal au segment ΔK, le segment entier ΛΓ est égal au segment ΓK. Il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur qui est la somme de toutes les grandeurs partielles est le point Γ. Par conséquent, la grandeur A placée au point E et la grandeur B placée au point Δ s'équilibreront au point Γ.

Cette démonstration suscite de nombreuses remarques. Tout d'abord, au début, il n'apparaît pas clairement que les grandeurs A et B doivent avoir leur centre respectif en E et Δ, ce qui ne facilite pas la compréhension de la suite du texte. On peut regretter également que la définition de centre de gravité n'apparaisse nulle part.

La critique la plus grave a été formulée par l'historien de la mécanique Ernst Mach[2]. En effet, la démonstration est basée sur le fait que l'équilibre d'un système n'est pas perturbé lorsqu'une grandeur est remplacée par plusieurs autres dont la somme égale la grandeur de départ et dont le centre de gravité se trouve au même point que le centre de la grandeur initiale. Mach ne semble pas convaincu qu'Archimède était conscient du fait que son argumentation repose sur cette prémisse, qui n'apparaît pas clairement dans les axiomes. Dijksterhuis, lui, considère que la réponse à cette objection se trouve dans une interprétation du postulat 6 où, par *grandeurs équivalentes*, on entendrait non seulement des grandeurs de formes différentes, mais aussi le cas où l'une de ces grandeurs serait un système non connexe.

Enfin, Archimède démontre seulement le côté suffisant de la condition et non le côté nécessaire, ce qu'il aurait pu faire par l'absurde en s'appuyant sur les postulats 2 et 3. En effet, soient les poids A et B en équilibre à des distances ΓE et ΓΔ. Si on suppose que A/B n'est pas égal à ΓΔ/ΓE, alors il doit exister un poids Θ différent de B tel que A/Θ est égal à ΓΔ/ΓE et ce

[1] Proposition 5, corollaire II.

[2] *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. 7e Auflage* (Leipzig 1912). p. 14.

poids Θ est en équilibre avec A grâce à la proposition 6. Si maintenant on restaure la situation originale, l'équilibre doit être rompu en vertu des postulats 2 et 3, ce qui contredit le fait que A et B étaient en équilibre.

Bibliographie

[Arc71] Archimède *Des spirales, de l'équilibre des figures planes, l'arénaire, la quadrature de la parabole,* tome II, texte établi et traduit par Charles Mugler, Les Belles Lettres, Paris.

[BM89] Boyer C.B., Merzbach U.C. (1989) *A History of Mathematics,* John Wiley and Sons Inc.

[Dij87] Dijksterhuis E.J. (1987) *Archimedes,* Princeton University Press.

[Hea81] Heath Sir Thomas (1981) *A History of Greek Mathematics, 2 vol.,* Dover Publ. Inc.

[Ver60] Ver Eecke P. (1960) *Les œuvres complètes d'Archimède* , 2 vol., Vaillant-Carmanne S.A., Liège.

3 Les deux fausses positions

3.1. Introduction

Ying buzu (excédent et déficit), *al-hata'ayn* (l'erreur), *regula duarum falsarum positionum, regola delle doi false positioni, règle des plateaux de la balance (lanx, lancis)*. Ce sont là quelques appellations qui, toutes, désignent un même procédé permettant de résoudre des problèmes exprimables par des équations linéaires à une inconnue ou par des systèmes linéaires à deux inconnues.

Cette fameuse règle des deux fausses positions était sans doute connue à Bagdad à l'époque de l'algébriste Al-Khwarizmi dans la première moitié du neuvième siècle. Nous l'illustrerons par un extrait d'un manuscrit traduit de l'arabe en latin, intitulé *Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis ex eo quod sapientes Indi posuerunt quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit*, c'est-à-dire le *Livre sur l'agrandissement et la diminution nommé le calcul de la conjecture d'après ce que les sages de l'Inde ont établi et qu'Abraham a rassemblé et composé selon le livre appelé indien.*

L'auteur arabe de cet ouvrage est inconnu ; de nombreux historiens pensent qu'il pourrait s'agir d'Abu Kamil Suga `Ibn Aslam Ibn Muhammad Al-Hasib Al Misri, qui florissait vers les années 900. Certains attribuent le texte, ou du moins sa traduction en latin, au juif espagnol Abraham Ibn Ezra (Tolède, vers 1089 - Rome, vers 1167). Le titre pourrait laisser croire que la paternité de la règle revient aux savants indiens. Cependant la ressemblance de la terminologie avec les expressions chinoises *ying* (excédent) et *buzu* (déficit) donne à penser

que cette règle, connue bien avant en Chine - voir à ce sujet le chapitre sept du *Jiuzhang Suanshu*, titre généralement traduit par les *Neuf Chapitres sur l'Art du Calcul*, qu'on peut dater d'un peu avant le début de notre ère -, ait pénétré dans la littérature arabe par un chemin qui est passé par l'Inde ou par la « route de la soie ». Il faut en effet constater que, dans les ouvrages mathématiques indiens connus à ce jour, qui sont antérieurs au douzième siècle, on ne trouve pas trace de cette règle.

Ce procédé de résolution d'équations linéaires se perpétue chez de nombreux auteurs arabes comme Al Karagi (mort vers 1025) et en Europe, chez Leonardo Pisano au treizième siècle et chez Luca Pacioli au quinzième siècle.

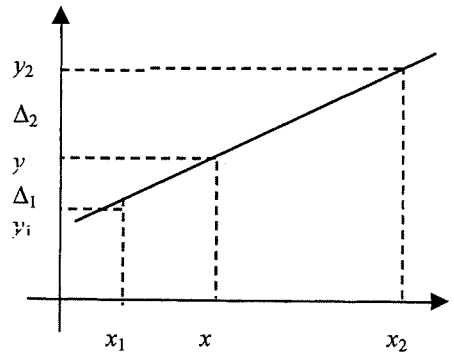
Le principe en est le suivant. On donne à l'inconnue deux valeurs « quelconques » qui se révèlent le plus souvent être de fausses valeurs et, à partir de là, il est possible de calculer la solution vraie. Trois cas évidemment se présentent :

- Les deux fausses valeurs sont plus petites que l'inconnue.
- Les deux fausses valeurs sont plus grandes que l'inconnue.
- L'inconnue se situe entre les deux fausses valeurs.

L'explication de la règle est simple. Soit l'équation :

$$ax + b = y$$

Considérons les deux fausses positions x_1 et x_2 qui produisent les deux valeurs y_1 et y_2. Il vient :



$$ax_1 + b = y_1$$
$$ax_2 + b = y_2$$
$$a(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$$
$$a(x_1 - x) = y_1 - y = \Delta_1$$
$$a(x_2 - x) = y_2 - y = \Delta_2$$

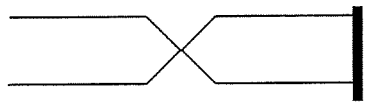
De l'expression de la proportion

$$\frac{x_1 - x}{\Delta_1} = \frac{x_2 - x}{\Delta_2}$$

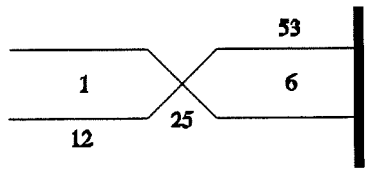
on peut tirer la valeur de x.

$$x = \frac{x_2\Delta_1 - x_1\Delta_2}{\Delta_1 - \Delta_2}$$

Chez le mathématicien Abu-L-`Abbas Ahmad Ibn Muhammad Ibn Al-Banna Al-Marraqusi (environ 1256-1321), la règle apparaît sous la dénomination *Règle des plateaux de la balance*.



Les erreurs sont écrites soit sous les plateaux, soit sur les plateaux, selon qu'elles sont en déficit ou en excès. Par exemple, si nous devons chercher la *chose* telle que le sextuple et le septuple de cette chose fassent vingt-cinq, nous écrivons :



Les deux fausses positions sont 6 et 1, les erreurs correspondantes +53 et –12. La solution, en notation moderne, est :

$$\frac{1\times 53-(-12)\times 6}{53-(-12)}=\frac{125}{65}=\frac{25}{13}=1\frac{12}{13}$$

Nous allons voir comment les différents cas énoncés sont résolus dans les exemples qui suivent.

3.2 Extrait du texte attribué à Abraham ibn Ezra

Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis, ex eo quod sapientes Indi posuerunt, quem Abraham compilavit et secundum librum qui Indorum dictus est composuit.

Hic post laudem Dei inquit. Compilavi hunc librum secundum quod sapientes Indorum adinvenerunt de numeratione divinationis, utilem in ipso consideranti et studenti, et perseveranti in eo, et intelligenti ejus intentionem. Ex eo igitur est : est census de quo ejus tertia dempta, et quarta, fuit octo quod remansit. Quantus est census ? Capitulum numerationis ejus est ut ex duodecim assumas lancem ; et tertia et quarta ex eo consurgunt, et demas ejus tertia et quarta, que sunt septem, et remanebit quinque. Per ipsum igitur oppone octo, residuum scilicet census et apparebit te jam errasse per tria diminuta : serva ea, deinde assume lancem secundam a prima divisam, que sit ex viginti quattuor, et deme ejus tertiam et quartam que sunt quattuordecim, et remanebit decem. Oppone ergo per eum octo residuum scilicet census. Apparet itaque te jam errasse per duo addita. Multiplica igitur errorem lancis postreme qui est duo in lancem primam, que est duodecim, et perveniet 24. Et multiplica errorem lancis prime, *qui est tria, in lancem postremam, que est 24, et erit 72. Aggrega ergo 24 et 72, eo quod unus error est diminutus et alter additus. Si enim utrique essent diminuti aut additi*

demeres minus ex majore. Postquam ergo aggregasti viginti quattuor et septuaginta duo, fuerit quod aggregatum est nonaginta sex, deinde aggrega duos errores qui sunt tria et duo, et perveniet quinque ; deinde igitur nonaginta sex per quinque qui est ille ex quo pervenit, et perveniet tibi decem et novem dragme et quinta dragme.

Hec propterea regula est ut ponas duodecim rem ignotam et demas ejus tertiam et quartam, et remanebit quinque donec redeat duodecim ? Ipse enim est res ignota. Illud autem est duo et due quinte : multiplica igitur duo et duas quintas in octo et erit decem et novem et quinta.

Capitulum aliud de eodem

Quod si dixerit aliquis : est census de quo dempte fuerunt ejus tertia et quattuor dragme, et quarta ejus quod remansit, et residuum fuit viginti dragme. Assume ergo lancem ex duodecim, ipse est ex quo consurgit tertia et quarta, et deme ejus tertiam et remanebunt octo dragme ; deinde perfice ex eis quattuor dragmas, et remanebunt quattuor ; post deme quartam ejus quod remanebit, et remanebunt tria. Per ea igitur oppone viginti que excensu remanserunt. Tunc jam errasti per decem et septem diminuta. Postea accipe lancem secundam divisam a prima que sit ex viginti quattuor, et perfice tertiam ejus que est octo. Remanebit sedecim ; post minue quattuor dragmas, et remanebit duodecim ; deinde deme quartam ejus quod remanet, que est tria, et remanebit novem. Oppone ergo per ipsum viginti : tunc jam errasti per undecim diminuta. Multiplica igitur erronem postreme lancis, qui est undecim, in lancem primam, que est duodecim, et erit quod perveniet centum et triginta duo. Deinde multiplica errorem lancis prime, qui est decem et septem, in lancem postremam, que est viginti quattuor, et quod perveniet erit quadringinta et octo ; deinde minue minorem duorum numerorum ex majore eorum quorum utrique errores sunt diminuti. Quod est ut minuas centum et triginta duo ex quadragintis et octo, et remanebunt ducenta et septuaginta sex ; deinde minorem duorum numerorum ex majore ipsorum minue ; quod est ut minuas undecim ex decem et septem, et remanebit sex ; divide ergo ducenta et septuaginta sex per sex, et perveniet tibi quadraginta sex, qui est numerus census quem vis scire.

Hujus quoque est regula. Que est ut accipias rem et demas ejus tertiam, et remanebunt due tertie rei exceptis quattuor dragmis. Minue ergo quartam duarum tertiarum exceptis quattuor dragmis que est sexta rei et dragma, et remanebit medietas rei exceptis tribus dragmis, que equantur viginti. Tria igitur adjunge viginti, et erunt viginti tria ; habebis ergo mediatem rei, que equatur viginti tribus. Ergo res equatur quadraginta sex.

Questio secunda. Quod si dixerit : est census ex quo dempte fuerunt quattuor dragme et quarta ejus quod remansit et quod remansit fuit duodecim. Accipe ergo rem et minue ex ea quattuor dragmas, habes ergo rem exceptis quattuor dragmis. Tunc minue quartam ejus, et remanebunt tres quarte rei exceptis tribus dragmis, que equantur duodecim. Adjunge igitur tria duodecim et erunt quindecim. Ergo habes tres quartas rei, que equantur quindecim. Ergo res equatur viginti.

Traduction

Après la louange à Dieu, voici ce qui est dit. J'ai écrit ce livre selon ce que les sages de l'Inde ont découvert à propos du calcul de la conjecture, en examinant attentivement et en étudiant ce qui est utile en soi, en persévérant dans cette direction et en en saisissant l'application pratique. De cela donc, voici ce qu'il vient : soit un census[3] duquel on ôte un tiers et un quart et il reste huit. Que vaut le census ? Pour aborder son calcul, suppose un plateau de balance de douze dont on considère un tiers et un quart ; tu ôtes ce tiers et ce quart qui font sept, il restera cinq. Compare alors à huit, à savoir le reste du census et il t'apparaîtra clairement que tu as fait une erreur de trois en déficit : mets cela de côté et suppose ensuite que tu places sur le plateau de la balance une seconde quantité distincte de la première, que ce soit vingt-quatre, et ôte le tiers et le quart qui font quatorze, il restera dix. Compare alors cela à huit, à savoir le reste du census. Et c'est ainsi qu'il t'apparaîtra clairement que tu as commis une erreur de deux en plus. Multiplie donc l'erreur du dernier plateau de la balance qui vaut deux par le premier plateau qui vaut douze et il viendra 24. Et multiplie l'erreur du premier plateau, erreur qui vaut trois, par le dernier plateau, qui vaut 24, et on obtiendra 72. Additionne donc 24 et 72, et cela car l'une des erreurs est par défaut et l'autre par excès. Mais si les deux étaient par défaut ou par excès, tu soustrairais la plus petite de la plus grande. Donc après avoir ajouté vingt-quatre et septante-deux, le résultat sera nonante-six ; ensuite ajoute les deux erreurs qui valent trois et deux, il viendra cinq ; ensuite donc nonante-six par cinq qui est ce à quoi on est arrivé, il te viendra dix-neuf drachmes et un cinquième de drachme.

Par cette règle, il s'ensuit que tu poses douze pour la chose inconnue et tu ôtes son tiers et son quart et il restera cinq ; comment récupérer douze ? La chose effectivement inconnue. Il faut en fait deux et deux cinquièmes : multiplie donc deux et deux cinquièmes par huit et il viendra dix-neuf et un cinquième.

Autre chapitre à propos de la même chose

Si quelqu'un disait : soit un census duquel on enlève son tiers et quatre drachmes et le quart de ce qu'il reste, et le résidu fait vingt drachmes. Suppose donc une balance de douze desquels on considère un tiers et un quart ; ôte son tiers et il reste huit drachmes ; ensuite continue à en retirer quatre drachmes et il reste quatre ; après cela, enlève le quart de ce qu'il reste et il restera trois. Ces trois, tu les compares alors aux vingt qui restaient du census. Ainsi tu as commis une erreur de dix-sept par défaut. Ensuite, considère un second plateau de balance différent du premier, que ce soit vingt-quatre, et ôtes-en le tiers qui vaut huit. Il restera seize ; ensuite, diminue de quatre drachmes et il restera douze ; enfin, enlève le quart de ce qu'il reste, qui vaut trois et il restera neuf. Compare-les alors aux mêmes vingt : tu as ainsi commis une erreur de onze par défaut. Multiplie donc l'erreur du dernier plateau, qui vaut onze, par le premier plateau, qui vaut douze et tu arriveras à cent trente-deux. Ensuite, multiplie l'erreur du premier plateau,

[3] Terme désignant le carré de l'inconnue recherchée.

qui vaut dix-sept, par le dernier plateau, qui vaut vingt-quatre et tu arriveras à quatre cent huit ; ensuite, soustrais le plus petit des deux nombres du plus grand d'entre eux parce que les deux erreurs étaient par défaut. Ainsi tu soustrais cent trente-deux de quatre cent huit et il restera deux cent septante-six ; ensuite soustrais le plus petit des deux nombres du plus grand d'entre eux, c'est-à-dire onze de dix-sept et il restera six ; divise alors deux cent septante-six par six et il te viendra quarante-six qui est la valeur du census que tu veux connaître.

La règle de ceci est aussi la suivante. Tu considères la chose et tu lui enlèves son tiers et quatre drachmes et il restera deux tiers de la chose moins quatre drachmes. Soustrais alors le quart des deux tiers de la chose moins quatre drachmes, ce qui fait un sixième de la chose et une drachme, et il restera la moitié de la chose moins trois drachmes, qui sont égaux à vingt. Ajoute donc trois à vingt et cela fera vingt-trois ; tu auras donc la moitié de la chose qui vaut vingt-trois. Par conséquent, la chose est égale à quarante-six.

Question deuxième. S'il est dit : soit un census duquel on ôte quatre drachmes et le quart de ce qu'il reste, et il en est resté douze. Considère donc la chose et soustrais-en quatre drachmes, tu as donc la chose moins quatre drachmes. Alors, soustrais-en le quart et il restera trois quarts de la chose moins trois drachmes qui sont égaux à douze. Ajoute donc trois et douze, cela fera quinze. Par conséquent, tu as trois quarts de la chose qui valent quinze. D'où la chose égale vingt.

Commentaire

Il semble bien que le but de l'auteur est de présenter une méthode universelle de résolution de ce type de problèmes. Le procédé est expliqué en détail mais il n'est pas réellement justifié ici.

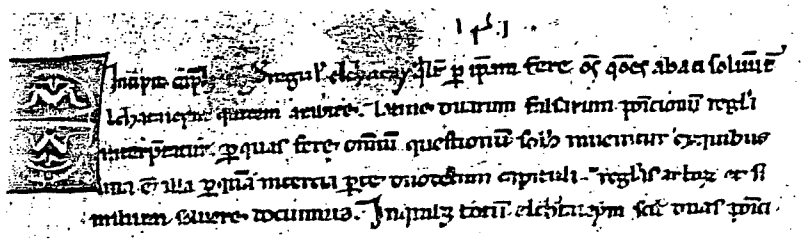
Pour convaincre le lecteur de la validité de ses calculs, l'auteur montre que la même réponse peut être obtenue par une autre méthode, qui n'est cependant pas toujours la même. Ainsi, le premier problème est résolu par une fausse position simple et le deuxième, par une méthode qui ressemble à celle que nous utilisons de nos jours. On peut dès lors s'interroger sur l'opportunité de recourir à la règle *al-khata'ayn*. Mais il faut bien savoir que les mathématiciens de l'époque ne disposaient pas d'une notation algébrique appropriée pour effectuer certains calculs, notamment ceux sur les fractions. Ici, les fractions de l'inconnue à regrouper dans le premier membre du deuxième exemple sont $^2/_3$ dont il faut retirer $^1/_6$, ce qui ne pose pas de gros problème. Mais cette méthode n'est pas considérée comme générale par l'auteur, car elle se montre inadaptée dans le cas de fractions compliquées.

3.3 Autres témoignages

3.3.1 Leonardo Pisano Fibonacci

Voici une traduction du début du chapitre treize.

Elchataieym en arabe, *duarum falsarum positionum regula* en latin. C'est grâce à elle qu'on trouve la solution de presque tous les énoncés. C'est par l'une de ces règles que nous avons appris à résoudre les problèmes d'arbres et autres dans la troisième partie du chapitre douze. ...



3.3.2 Luca Pacioli

Ostumase i la pratica d arithmetica ouer numeri soluerse molte e varie questioni per certa regola ditta El cataym. Quale (secondo alcuni) e vocabulo arabo. E in nostra lengua sona quãto che a dire regola delle doi false positioni. Per la quale quasi tutte le questioni si possono soluere; maxime quelle che a trafico apartengano: doue non se ha communamente a intromettarse radici de alcuna sorte. De la qual regola intendo qui sequẽte trattare: e apertamente chiarire el modo de suo procedere: e de sue differentie: e anche (che piu sira) di tal modo operatiuo el suo fondamento donde proceda. Qual certamẽte molto e da hauere in stima: per essere de gentile perscrutatione. E acio cõ ordine sia el nostro processo: prima diremo di tal modo ditto el cataym la sua differentia. Ponendo sempre al nostro dire. Exempli euidenti: p li quali se habi a iprẽdere.

Ce qui peut se traduire :

Il est habituel, dans la pratique de l'arithmétique ou des nombres, de résoudre des problèmes nombreux et variés au moyen d'une certaine règle dite *El cataym.* Cette appellation (selon certains) est d'origine arabe. Et dans notre langue, on l'appelle règle des deux fausses positions. Grâce à laquelle pratiquement toutes les questions peuvent trouver une solution : la plupart d'entre elles font partie des problèmes courants où d'habitude, ne viennent se mêler des radicaux d'aucune sorte. C'est de cette règle que j'entends traiter dans ce qui suit afin de rendre claire la manière de l'utiliser... (Distinctio Septima Tractatus primus, page 98 verso).

La similitude d'expression chez les deux auteurs montre bien l'influence exercée par Fibonacci sur Pacioli, qui ne manque d'ailleurs aucune occasion de citer son illustre prédécesseur.

3.4 Un système indéterminé d'équations linéaires chez Fibonacci

L'extrait qui suit se situe au chapitre treize du *Liber abbaci* de Fibonacci, folio 145 r° et v° du Manuscrit *Conversi Soppressi C.1.* n° 2616 référencé ci-dessous.

De quatuor hominibus qui invenerunt bursam

Quatuor homines denarios habentes invenerunt bursam denariorum ex quibus primus dixit quod si haberet denarios burse haberet bis tantum secundo. Secundus si haberet bursam haberet ter tantum tercio. Et tertius si eam haberet haberet quater tantum quarto. Quartus quinquies tantum primo. Queritur quot denarios habeat unusquisque. Pone quidem quod primus habeat denarios 9 et in bursa sint denarij 21. Ergo si primus habuit bursam habebit 30. Unde cum habet duplum secundo opportet quod secundus habeat dimidium ipsius scilicet 15. Cum quibus additis denarijs burse scilicet 21 faciunt 36 quorum terciam partem scilicet 12 tercius cum secundus cum bursa habeat triplum ipsius. Cum quibus 12 addita bursa faciunt 33 quorum quartam partem scilicet $^1/_4$ 8 habet quartus. Cum quibus addita bursa scilicet 21 faciunt denarios $^1/_4$ 29 qui debent esse 45 scilicet quintuplum denariorum primi hominis. Ergo quarto homini minuit $^3/_4$ 15 scilicet differentia que est a $^1/_4$ 29 usque in 45. Quare in secunda positione augebis denarios burse aut minues denarios primi hominis. Augeamus itaque denarios burse et ponamus quod inventi sunt in ea denarij 27 scilicet 6 plus quam in prima positione. Quibus additis cum denarijs primi hominis scilicet cum 9 faciunt 36 quorum medium scilicet 18 habet secundus. Cum quibus addita bursa faciunt 45 quorum terciam partem scilicet 15 habet tercius. Cum quibus addita bursa faciunt 42 quorum quartam partem habet quartus scilicet $^1/_2$ 10. Cum quibus addita bursa erunt denarij $^1/_2$ 37 quid debent esse 45 scilicet quintuplum primi hominis. Unde in hac secunda positione minuit quarto $^1/_2$ 7 scilicet differentia que est a $^1/_2$ 37 usque in 45. In prima vero positione minuunt $^3/_4$ 15. Ergo per sex quos crevimus in secunda positione burse adpropinquavimus veritati $^1/_4$ 8 scilicet differentiam que est a $^3/_4$ 15 usque in $^1/_2$ 7. Et restant ad adpropinquandum ipsi denarios $^1/_2$ 7. Quare multiplica $^1/_2$ 7 per 6 et divides per $^1/_4$ 8 ut in descriptione ostenditur, exigunt denarij 5/11 5 quibus additis cum denarijs 27 scilicet sunt secundam positionem erunt 5/11 32. Et tot sunt reperti in bursa si primus habeat 9. Nam ut habeamus in integrum denarios burse et hominum multiplica per 11 denarios burse et primi hominis et habebis pro denarijs burse 357 et pro denarijs primi hominis habebis 99. Qui 357 et 99 cum habeant ad invicem comunem regulam scilicet tercium dividatur unusquisque eorum per 3 ut habeas in minoribus numeris numerum eorum. Quod semper in omnibus similibus facere studere debes. Et sic habebis pro denarijs burse 119 et pro denarijs primi hominis 33 quibus insimul iunctis faciunt 152 quorum medium scilicet 76 est quantitas denariorum secundi hominis. Quibus additis cum denariis burse scilicet cum 119 faciunt 195 quorum tertia pars est quantitas denariorum tercij scilicet 65. Cum quibus additis iterum denarijs burse facient 184 quorum quarta pars scilicet 46 sunt quantitas quarti hominis. Cum quibus additis denarijs burse faciunt 155 qui est quintuplum denariorum primi hominis ut opportet.

Traduction

Des quatre hommes qui ont trouvé une bourse

Quatre hommes possédant des deniers ont trouvé une bourse remplie de deniers ; le premier dit que s'il avait les deniers de la bourse, il posséderait deux fois autant que le second. Le second, s'il avait la bourse, posséderait trois fois autant que le troisième et le troisième, s'il l'avait, posséderait quatre fois autant que le quatrième. Le quatrième, lui, aurait cinq fois autant que le premier. On demande combien chacun possède de deniers. Ce qui est certain, c'est que tu poses que le premier possède 9 deniers et que, dans la bourse, il y a 21 deniers. Donc, si le premier prend la bourse, il aura 30. D'où, comme il possède alors le double du second, il faut que le second en ait la moitié, à savoir 15. Ceux-ci, ajoutés aux deniers de la bourse, à savoir 21, font 36 dont le tiers, à savoir 12 sera la part du troisième puisque le deuxième, avec la bourse, aurait le triple du troisième. À ces 12, on ajoute la bourse, ce qui fait 33, dont le quart, à savoir 8 $^1/_4$ est la part du quatrième. À ceux-ci, on ajoute la bourse, à savoir 21, ce qui fait 29 $^1/_4$ deniers qui devraient être 45, à savoir le quintuple des deniers du premier homme. Donc, en ce qui concerne le quatrième homme, il y a 15 $^3/_4$ en défaut, à savoir la différence entre 29 $^1/_4$ et 45. C'est pourquoi, dans une seconde position, tu accroîtras les deniers de la bourse ou tu diminueras le nombre de deniers du premier homme. Augmentons par exemple le nombre de deniers de la bourse et posons qu'on y trouve 27 deniers, à savoir 6 de plus que dans la première position. Ceux-ci, ajoutés aux deniers du premier homme, à savoir 9 font 36 dont la moitié, à savoir 18 appartient au second homme. Ceux-ci, si on leur ajoute la bourse, font 45 dont le tiers, à savoir 15 appartient au troisième homme. Ceux-ci, si on leur ajoute la bourse, font 42 dont le quart appartient au quatrième homme ; cela lui fait 10 $^1/_2$. Ceux-ci, si on leur ajoute le contenu de la bourse, font 37 $^1/_2$ qui devraient être 45, à savoir le quintuple de ce qu'a le premier homme. D'où, dans cette seconde position, 7$^1/_2$ font défaut au quatrième homme, à savoir la différence entre 37 $^1/_2$ et 45. En fait, dans la première position, 15 $^3/_4$; donc pour 6 que nous avons ajouté à la bourse en seconde position, nous avons approché la vérité de 8 $^1/_4$, à savoir la différence entre 15 $^3/_4$ et 7 $^1/_2$ et il reste, pour y arriver 7 $^1/_2$. C'est pourquoi tu multiplies 7 $^1/_2$ par 6 puis tu diviseras par 8$^1/_4$ comme il est indiqué en marge[4], il vient 5 5/11 deniers. Ceux-ci, si on leur ajoute 27 deniers, à savoir le contenu de la bourse en seconde position, on obtiendra 32 5/11 et c'est cette quantité qu'on trouvera dans la bourse si le premier homme avait eu au départ 9 deniers. Car, pour obtenir en nombres entiers le contenu de la bourse et de l'avoir des hommes, multiplie par 11 le nombre de deniers de la bourse et ce que possède le premier homme, tu obtiendras 357 deniers pour la bourse et 99 deniers pour l'avoir du premier homme. Ces 357 et 99, puisqu'ils ont entre eux une règle commune[5], à savoir 3, nous divisons chacun d'eux par 3 pour obtenir la solution en plus petits entiers. C'est ce que tu dois toujours faire dans tous les cas semblables et ainsi, tu obtiendras 119 pour les deniers de la bourse, et pour ceux du premier homme, 33. Si on ajoute ces deux nombres, cela fait 152 dont la moitié, à savoir

[4] La plupart des calculs expliqués en détail par Léonard de Pise dans le texte sont illustrés en marge.

[5] C'est-à-dire un plus grand commun diviseur.

76, est la quantité de deniers que possède le deuxième homme. Si on les ajoute aux deniers de la bourse, à savoir 119, on obtient 195 dont le tiers, à savoir 65, est la part du troisième homme. Si on les ajoute encore aux deniers de la bourse, cela fait 184 dont le quart, à savoir 46 est ce que possède la quatrième homme. Si on y ajoute les deniers de la bourse, cela fait 165, qui représentent le quintuple de l'avoir en deniers du premier homme, comme il était demandé.

En fait, si nous notons h_i, (i = 1, …, 4) l'avoir de chacun des hommes et x le contenu de la bourse, nous écrivons le système :

$$\begin{cases} h_1 + x = 2h_1 \\ h_2 + x = 3h_2 \\ h_3 + x = 4h_4 \\ h_4 + x = 5h_1 \end{cases}$$

En le résolvant par triangulation, nous obtenons

$$119h_4 = 46x$$

qui donne, comme première solution entière :

$$\begin{cases} x = 119 \\ h_4 = 46 \\ h_3 = 65 \\ h_2 = 76 \\ h_1 = 33 \end{cases}$$

La résolution par la méthode des deux fausses positions est la suivante.

Si $x = 21$ et $h_1 = 9$ est la première fausse position, il vient

- $h_1 + x = 30$ donc $h_2 = 15$,
- $h_2 + x = 36$ donc $h_3 = 12$,
- $h_3 + x = 33$ donc $h_4 = 8\ ^1/_4$,
- $h_4 + x = 29\ ^1/_4$.

Or, il faudrait trouver 45. La différence entre la réalité (45) et ce qui vient d'être trouvé (29 $^1/_4$) est donc 15 $^3/_4$ par défaut.

Si $x = 27$ et $h_1 = 9$ est la deuxième fausse position, il vient :

- $h_1 + x = 36$ donc $h_2 = 18$,
- $h_2 + x = 45$ donc $h_3 = 15$,
- $h_3 + x = 42$ donc $h_4 = 10\ ^1/_2$,
- $h_4 + x = 37\ ^1/_2$.

Or, il faudrait trouver 45. La différence entre la réalité (45) et ce qui vient d'être trouvé ($37\ ^1/_2$) est donc $7\ ^1/_2$ par défaut.

Lorsqu'on ajoute 6 à x, on s'approche de :

$$15\frac{3}{4}-7\frac{1}{2}=8\frac{1}{4}$$

de la réalité. Une simple règle de trois nous fournit donc la quantité à ajouter à 27 pour obtenir la valeur réelle du contenu de la bourse, si l'on suppose que l'avoir du premier homme vaut 9, c'est-à-dire :

$$\frac{7\frac{1}{2}\times 6}{8\frac{1}{4}}=\frac{60}{11}=5\frac{5}{11}$$

Nous avons donc :

$$h_1=9,\ x=\frac{357}{11}$$

On obtient la première solution entière en multipliant par 11 et en divisant par 3, ce qui redonne la solution précédemment trouvée.

Bibliographie

[Bal93] Ballieu M. (1993) "Le liber abbaci de Léonard de Pise : ce qu'on y trouve effectivement... ", *Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Comité National de Logique, d'Histoire et de Philosophie des Sciences, Colloque National*, 15-16/10/92, p. 123-134, éd. Robert Halleux & Anne-Catherine Bernès, Bruxelles.

[BM89] Boyer C.B. and Merzbach U.C. (1989) *A History of Mathematics,* John Wiley and Sons, Inc.

[Cap90] Cappelli A. (1990) *Lexicon Abbreviaturarum, Dizionario di Abbreviature latine ed italiane*, Ulrico Hoepli, Milano, sesta edizione.

[FibI72] Fibonacci Leonardo Pisano (1228) *Liber abbaci*, Manuscrit I72 SUP, Biblioteca Ambrosiana, Milano.

[FibCS2616] Fibonacci Leonardo Pisano (1228) *Liber abbaci*, Manuscrit Conversi Soppressi C.1. n° 2616 codice Magliabechiano, Badia Fiorentina, Biblioteca Nazionale, Firenze.

[FibCGR] Fibonacci, Leonardo Pisano (1228) *Liber abbaci,* Codici Gaddiani Reliqui n° XXXVI, Biblioteca Laurenziana, Firenze.

[FibCR783] Fibonacci, Leonardo Pisano (1228) *Liber abbaci,* Codice *Riccardiano* n° 783, Biblioteca Riccardiana, Firenze.

[KCL99] Kangshen S., Crossley J.N., and Lun A.W.-C. (1999) *The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion & Commentary*, Oxford University Press.

[LIB67] Libri, G. (1967) *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, vol. I, Georg Olms Verlagsbuchhandlung Hildesheim.

[LOR50] Loria, G. (1950) *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX* , Ulrico Hoepli, Milano.

[PAC94] Pacioli Luca (1494) *Summa de Arithmetica*, édition fac-similé du cinq centième anniversaire, Roma.

[SMI58] Smith D.E. (1958) *History of Mathematics,* 2 vol., Dover Publ. Inc., New York.

[YOU76] Youschkevitch A.P. (1976) *Les mathématiques arabes (VIIIe - XVe siècles)*, éd. Vrin, Paris.

4. Le problème des oiseaux

Il s'agit d'un système indéterminé d'équations linéaires. On trouve, dans la littérature chinoise, des méthodes de résolution de ce type de question par diagonalisation d'un tableau du genre matrice. Le problème 13, présenté au chapitre 8 du *Jiuzhang Suanshu* déjà mentionné plus tôt, est un système indéterminé de cinq équations linéaires à six inconnues.

Dans le *Manuel de mathématiques* de Zhang Qiujian, qu'on date des environs du cinquième siècle de notre ère, le problème 38 du chapitre 3 s'énonce ainsi.

Un coq vaut cinq pièces de monnaie, une poule, trois pièces et trois poulets valent une pièce. Avec cent pièces de monnaie, on achète cent oiseaux. Combien de coqs, de poules et de poulets cela fait-il ?

Zhang donne trois ensembles de réponses en entiers, à savoir :

- quatre coqs, dix-huit poules et septante-huit poulets ;
- huit coqs, onze poules et quatre-vingt-un poulets ;
- douze coqs, quatre poules et quatre-vingt-quatre poulets.

Dans sa solution, il dit : *Augmente à chaque fois de quatre le nombre de coqs, décrois celui des poulets de sept et augmente le nombre de poulets de trois. Ce sont les réponses.*

Effectivement, le système :

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{z}{3}=100 \end{cases}$$

admet bien la solution générale

$$x=4+4t,\quad y=18-7t,\quad z=78+3t.$$

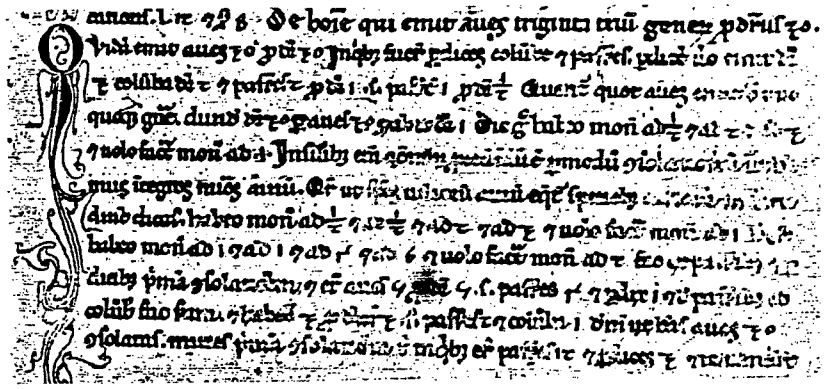
Les trois ensembles de solutions positives sont ceux cités plus haut, mais ZHANG ne dit pas comment il y est arrivé.

Chez Abu Kamil, on trouve :

Avec 100 drachmes, on veut acheter 100 volatiles de types canards, coqs et moineaux, sachant que chaque canard coûte 5 drachmes, tandis qu'on acquiert 20 moineaux pour 1 drachme et que chaque coq en vaut une.

Ce problème est sans doute plus simple que le précédent. Il admet l'unique solution en entiers positifs suivante : on achète dix-neuf canards, quatre-vingts moineaux et un coq.

Dans le chapitre onze du *Liber abbaci*, Fibonacci introduit la notion de *compensation* des monnaies ; ce sont des problèmes de proportionnalité qui montrent comment calculer le nombre de livres-monnaie qu'on peut battre à partir d'un certain nombre de livres-poids d'argent, lorsqu'on se fixe un taux d'argent dans l'alliage de la livre-monnaie. La technique de résolution qu'il expose à cette occasion lui permet, plus loin dans le chapitre, de résoudre des équations diophantiennes (dans l'ensemble des fractions positives) indéterminées. Voici le texte d'un de ces problèmes où l'auteur utilise des combinaisons linéaires pour rechercher les solutions.



De homine qui emit aves triginta trium generum pro denariis 30

Quidam emit aves 30 pro denariis 30. In quibus fuerunt perdices, columbe et passeres. Perdices vero emit denariis 3 ; columba denariis 2 et passeres 2 pro denario 1, scilicet passer 1 pro denariis 1/2. Queritur quot aves emit de unoquoque genere. Divide denarios 30 per aves 30 exibit denarius 1. Dic ergo habeo monetam ad 1/2, et ad 2, et ad 3 ; et volo facere monetam ad 1. In similibus enim questionibus procedendum est per modum consolationum, ut habeamus integros numeros avium. Quare ut species viliorum avium equetur spetiebus cariorum multitudinem dicas : habeo monetam ad 1/2, et ad 2 et ad 3 et volo facere monetam ad 1, hoc est. Habeo monetam ad 1 et ad 4 et ad 6 et volo facere monetam ad 2. Fac ex passeribus et perdicibus primam consolationem ; et erunt aves 5 pro denariis 5 scilicet passeres 4 et perdix 1 ; et de passeribus cum columbis fac secundam ; et habebis 3 aves pro denariis 3, scilicet passeres 2 et columbam 1. Deinde ut habeas aves 30 consolatas mittes primam consolationem ter in quibus erunt passeres 12 et perdices 3. Et remanebunt aves 15 consolate. Pro quibus mittes secundam consolationem quinquies et habebis passeres 10 et columbas 5. Et sic in predictis avibus 30 erunt passeres 22 et columbe 5 et perdices 3 ut in questione

ostenditur. Et scias quia de suprascriptis potes habere aves sanas quantas voluerit pro totidem denariis ultra 15 sed infra 15 non possunt haberi aves nisi 13 et 11 et 8. Nam in avibus 13 cadit prima consolatio bis et secunda semel. Et in avibus 11 cadit secunda consolatio bis et prima semel. Et in avibus 8 cadit unaqueque consolatio semel.

Traduction

De l'homme qui a acheté trente oiseaux de trois espèces pour 30 deniers.

Quelqu'un a acheté 30 oiseaux pour 30 deniers, parmi lesquels il y a des perdrix, des colombes et des moineaux. En fait, il a acheté les perdrix pour 3 deniers, les colombes pour 2 et 2 moineaux pour 1 denier, à savoir 1 moineau pour 1/2 denier. On demande combien d'oiseaux de chaque espèce a-t-il achetés. Divise 30 deniers par 30 oiseaux, il viendra 1 denier. Je dis donc que j'ai de l'argent-monnaie à 1/2 et à 2 et à 3 ; et je veux faire de l'argent-monnaie à 1. En effet, dans de semblables questions, nous devons procéder par la méthode des compensations, puisque nous avons un nombre entier d'oiseaux. C'est pourquoi, pour que l'espèce des oiseaux les moins chers soit compensée en nombre par les espèces plus chères, tu dois dire : j'ai de l'argent-monnaie à 1/2 et à 2 et à 3 et je veux faire de l'argent-monnaie à 1, c'est-à-dire j'ai de l'argent-monnaie à 1 et à 4 et à 6 et je veux faire de l'argent-monnaie à 2. Fais des moineaux et perdrix une première compensation et il y aura 5 oiseaux pour 5 deniers, à savoir 4 moineaux et 1 perdrix ; et, des moineaux avec les colombes, fais-en une seconde ; et tu auras 3 oiseaux pour 3 deniers, à savoir 2 moineaux et 1 colombe. Ensuite, pour avoir 30 oiseaux compensés, tu prendras trois fois la première compensation dans laquelle il y aura 12 moineaux et 3 perdrix. Et il restera 15 oiseaux compensés, pour lesquels tu prendras cinq fois la seconde compensation et tu auras 10 moineaux et 5 colombes. Et ainsi, en ce qui concerne les 30 oiseaux dont il a été question auparavant, il y aura 22 moineaux et 5 colombes et 3 perdrix, comme il est montré en marge. Et tu dois savoir que, de ce qui est suscrit, tu peux avoir autant d'oiseaux qu'on voudra pour la même quantité de deniers au-delà de 15, mais en deçà, ce n'est pas possible, si ce n'est pour 13 et 11 et 8.En vérité, dans le cas des 13 oiseaux, la première compensation apparaîtra deux fois et la seconde, une fois. Et pour 11 oiseaux, la seconde compensation apparaîtra deux fois et la première, une fois. Et pour 8 oiseaux, chacune des compensations apparaîtra une fois.

Le système linéaire qui traduit ce problème est :

$$\begin{cases} 3x + 2y + \frac{z}{2} = 30 \\ x + y + z = 30 \end{cases}$$

Fibonacci observe que :

$$1 \times 3 + 4 \times \frac{1}{2} = 5$$

ce qui lui fournit un ensemble de cinq oiseaux (une perdrix et quatre moineaux) pour cinq deniers.

Il observe encore que :

$$1\times 2+2\times\frac{1}{2}=3$$

ce qui lui donne cette fois un ensemble de trois oiseaux (une colombe et deux moineaux) pour trois deniers.

En considérant une combinaison linéaire convenable des deux relations qui précèdent, il obtiendra alors trente oiseaux pour trente deniers. Cette combinaison linéaire consiste à prendre trois fois le premier ensemble de volatiles et cinq fois le second.

Bibliographie

[Bal93] Ballieu M. (1993) Le liber abbaci de Léonard de Pise : ce qu'on y trouve effectivement..., *Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Comité National de Logique, d'Histoire et de Philosophie des Sciences, Colloque National*, 15-16/10/92, p. 123-134, éd. Robert Halleux & Anne-Catherine Bernès, Bruxelles.

[BM89] Boyer C.B., Merzbach U.C. (1989) *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Inc.

[Cap90] Cappelli A. (1990) *Lexicon Abbreviaturarum, Dizionario di Abbreviature latine ed italiane*, Ulrico Hoepli, Milano, sesta edizione.

[FibI72] Fibonacci Leonardo Pisano (1228) *Liber abbaci*, Manuscrit I72 SUP, Biblioteca Ambrosiana, Milano.

[FibCS2616] Fibonacci Leonardo Pisano (1228) *Liber abbaci*, Manuscrit Conversi Soppressi C.1. n° 2616 codice Magliabechiano, Badia Fiorentina, Biblioteca Nazionale, Firenze.

[FibCGR] Fibonacci Leonardo Pisano (1228) *Liber abbac*i, Codici Gaddiani Reliqui n° XXXVI, Biblioteca Laurenziana, Firenze.

[FibCR783] Fibonacci Leonardo Pisano (1228) *Liber abbaci*, Codice Riccardiano n° 783, Biblioteca Riccardiana, Firenze.

[KCL99] Kangshen S., Crossley J.N., Lun A.W.-C. (1999*) The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion & Commentary*, Oxford University Press

[LOR50] Loria G. (1950*) Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, Ulrico Hoepli, Milano.

[LUN93] Lüneburg H. (1993*) Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, Bibliographisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim.

PHYSIQUE, MATHÉMATIQUE ET MÉTAPHYSIQUE OU QUE SERAIT CENDRILLON SANS SES DEUX SŒURS ?

Maryvonne Menez-Hallez

avec la collaboration de **Marie-Françoise Jozeau**

Groupe M :A.T.H. IREM Paris VII

Introduction

Un parcours collège-lycée d'Aristote à Gilles Chatelet, d'Héraclite à Newton en passant par Einstein a été proposé dans lequel le point et le mobile ont été mis en question ; des textes courts distribués aux élèves ont été commentés durant l'exposé : textes de Héraclite, Aristote, Nicole Oresme, Galilée, Newton, Hegel, Einstein, Gilles Chatelet[1]. Ce parcours comporte des détours, des autoroutes, des passages sur abîmes ; il est particulier mais d'un particulier qui veut rejoindre l'universel.

La méthode choisie est une méthode historique inspirée de la pensée de Pierre-Jean Labarrière, philosophe contemporain, spécialiste de Hegel dans le but de faire vivre

ce qui du passé demeure signifiant pour l'engendrement du présent et de l'avenir

et ainsi, toujours en suivant son analyse du procès de la mémoire collective, faire émerger

le sens d'un événement, le mouvement qui l'anime, la charge d'avenir *dont il se trouve porteur,*

en l'explorant

dans sa dimension d'avènement, en le replaçant dans son contexte d'histoire.

[1] Tous les textes cités ont été lus avec des élèves.