Newton Isaac (1966) *La méthode des fluxions et des suites infinies,* traduction française par Buffon, rééd. A. Blanchard.

Recherche La *Pourquoi les mathématiques sont-elles efficaces ?*, janvier 1999.

Ronchi Vasco (1956) *Histoire de la lumière*, premier chapitre, A. Colin.

Rouche Nicolas (1992) *Le sens de la mesure,* Didier, Hatier, Bruxelles.

Shapin Steven (1998) *La révolution scientifique,* Flammarion.

Simon Gérard (1996) *Sciences et savoirs aux XVI^{ème} et XVII^{ème} siècles*, Septentrion.

HISTOIRE DES GÉOMETRIES NON-EUCLIDIENNES : LA THÉORIE DES PARALLÈLES D'EUCLIDE À LOBATCHEVSKI

Philippe Brin, Martine Bühler

IREM de Paris 7

Résumé

Lorsqu'on évoque les géométries non-euclidiennes, les mathématiciens de tous niveaux savent généralement que cela concerne l'*axiome des parallèles*. L'énoncé exact de ce postulat, le cinquième des *Eléments* d'Euclide, est moins connu, et encore moins les problèmes qui ont surgi dès sa rédaction.

Le but de l'atelier était de faire comprendre ce qui pose problème, de montrer les tentatives pour le résoudre et de voir comment un changement de point de vue a été nécessaire pour en venir à bout ; pour cela, nous vous proposons un parcours à travers certains des textes qui jalonnent l'histoire des géométries non euclidiennes.

Nous commencerons par des propositions fondamentales des *Eléments*. Nous étudierons une partie du travail d'Umar al-Khayyãm, trop brève incursion dans le monde arabe eu égard au travail fourni par les mathématiciens ayant écrit dans cette langue, puis nous nous attarderons sur un texte de Saccheri, moment charnière de notre histoire. Nous terminerons par un extrait d'un texte de Lobatchevski.

Il nous a semblé intéressant de proposer un modèle de géométrie non-euclidienne et nous évoquerons le lien entre mathématique et réalité : en ce mois de mai 2000, les journaux rappellent que les astrophysiciens se livrent à des mesures pour connaître la géométrie de notre monde.

L'atelier proposé n'avait évidemment pas la prétention d'être exhaustif et le parcours pourra paraître trop bref. Nous renvoyons à la bibliographie donnée en annexe pour ceux, que nous espérons nombreux, qui désireront approfondir le sujet.

1. A l'origine, les Eléments d'Euclide

Nous avons utilisé, pour notre étude, la traduction des *Eléments* de Peyrard (1819) ; dans d'autres éditions, le nombre, la numérotation des définitions, demandes (appelées postulats par la suite) et propositions sont parfois légèrement différents.

Pour lire les géomètres grecs, il faut savoir que le mot *droite* désigne ce que nous appelons un *segment*.

Le livre I des Eléments, qui comporte 13 livres, commence par 35 définitions et nous aurons besoin des définitions 10 et 35.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

35. Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

Suivent six *demandes* énonçant ce que le géomètre nous demande d'accepter pour pouvoir travailler. Dans les trois premières demandes, Euclide se donne les instruments de la géométrie : une règle et un compas.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

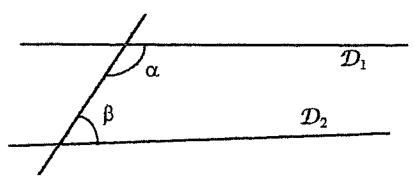
La demande 6, probablement apocryphe, spécifie l'unicité de la droite passant par deux points, dont l'existence a été fournie par la demande 1.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

La demande qui va nous occuper pendant tout l'atelier est la demande 5.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Nous reviendrons sur le caractère non évident de cette cinquième demande qui nécessite un dessin pour être comprise :



Si $\alpha + \beta < 2$ droits, alors D_1 et D_2 sont sécantes.

Ce n'est certes pas l'énoncé auquel nous avons l'habitude de nous référer comme étant l'*axiome d'Euclide*. Nous verrons le lien avec cet axiome au cours de notre étude du livre I.

Après les demandes, Euclide énonce 9 *notions communes* nous permettant de raisonner, dont voici quelques exemples :

1. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles.

2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.

3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

6. Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.

La notion commune 8 permet de connaître un cas où des grandeurs sont égales : si deux grandeurs sont superposables, alors elles sont égales.

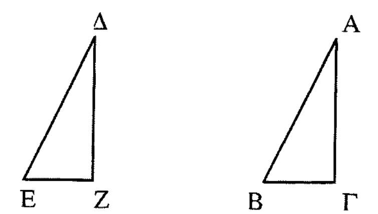
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.

9. Le tout est plus grand que la partie.

Euclide énonce alors 48 propositions, chacune étant démontrée à l'aide des demandes et/ou des propositions précédentes. En particulier, Euclide démontre ce que nous appelions dans notre jeunesse les trois cas d'égalité des triangles et qui nous revient dans les programmes de seconde sous le nom de triangles isométriques.

PROPOSITION IV

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.



Soient les deux triangles $AB\Gamma$, ΔEZ ; que ces deux triangles aient les deux côtés AB, $A\Gamma$ égaux aux deux côtés ΔE, ΔZ, chacun à chacun, le côté AB égal au côté ΔE, et le côté $A\Gamma$ au côté ΔZ, et qu'ils aient aussi l'angle $BA\Gamma$ égal à l'angle $E\Delta Z$; je dis que la *base BΓ est égale à la base EZ, que le triangle ABΓ sera égal au triangle ΔEZ, et que les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun ; l'angle ABΓ égal à l'angle ΔEZ, et l'angle AΓB égal à l'angle ΔZE.*

Car le triangle ABΓ étant appliqué sur le triangle ΔEZ, le point A étant posé sur le point Δ, et la droite AB sur la droite ΔE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à ΔE ; Mais AB étant appliqué sur ΔE, la droite AΓ s'appliquera sur ΔZ, parce que l'angle BAΓ est égal à l'angle EΔZ ; donc le point Γ s'appliquera sur le point Z, parce que AΓ est égal à ΔZ ; mais le point B s'applique sur le point E ; donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ ; car si le point B s'appliquant sur le point E et le point Γ sur le point Z, la base BΓ ne s'appliquait pas sur la base EZ, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dem. 6), donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ, et lui sera égal ; donc le triangle entier ABΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔEZ, et lui sera égal ; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ABΓ à l'angle ΔEZ, et l'angle AΓB à l'angle ΔZE.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

Nous voyons là une utilisation de la notion commune 8. Deux triangles ayant *un angle égal entre deux côtés égaux* (pour reprendre la terminologie de notre enfance) sont superposables, donc égaux. Le troisième côté est égal et les deux autres angles aussi. Cette proposition est la pierre angulaire des démonstrations euclidiennes et nous la reverrons intervenir constamment, que ce soit dans les *Eléments* ou chez les successeurs d'Euclide. Euclide démontre également les autres cas d'égalité et un certain nombre de propriétés *élémentaires*.

Voyons comment est utilisée la proposition IV dans la démonstration de la proposition XVI, dont on verra l'importance pour le problème des parallèles.

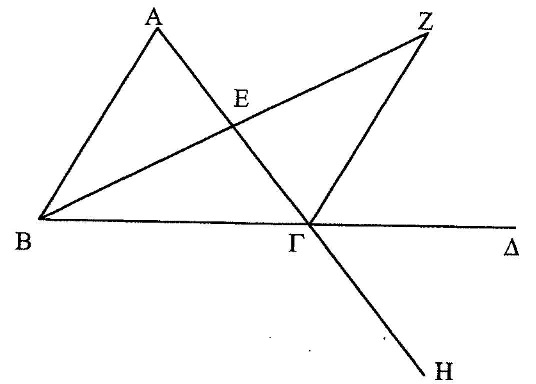
PROPOSITION XVI

Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.

Remarque

Lorsqu'un Grec écrit *plus grand que*, cela signifie *strictement plus grand que*, ce qui est d'ailleurs conforme au langage *courant* actuel.

Soit le triangle ABΓ, prolongeons le côté BΓ vers Δ ; je dis que l'angle extérieur AΓΔ est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés ΓBA, BAΓ.



Partageons la droite AΓ en deux parties égales en E (10) ; et ayant joint la droite BE, prolongeons-la vers Z, faisons EZ égal à BE (3), joignons la droite ZΓ, et prolongeons AΓ vers H.

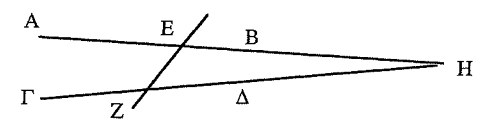
Puisque AE est égal à EΓ, et BE égal à EZ, les deux droites AE, EB sont égales aux deux droites ΓE, EZ chacune à chacune ; mais l'angle AEB est égal à l'angle ZEΓ (15), puisqu'ils sont au sommet ; donc la base AB est égale à la base ZΓ (4) ; le triangle ABE est égal au triangle ZEΓ, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, sont égaux chacun à chacun ; donc l'angle BAE est égal à l'angle EΓZ ; mais l'angle EΓΔ est plus grand que l'angle EΓZ (not. 9) ; donc l'angle AΓΔ est plus grand que l'angle BAE. Si on partage le côté BΓ en deux parties égales, on démontrera semblablement que l'angle BΓH, c'est-à-dire AΓΔ, est plus grand que l'angle ABΓ. Donc, etc.

On voit là une utilisation essentielle de la demande 2, le fait de pouvoir doubler une distance se référant à cette demande. Dans une géométrie où les droites ne seraient pas infinies, la démonstration de la proposition XVI ne serait pas valide. On arrive au problème des parallèles à la proposition XXVII.

PROPOSITION XXVII

Si une droite tombant sur deux droites fait des angles alternes égaux entr'eux, ces deux droites seront parallèles.

Que la droite EZ tombant sur les droites AB, ΓΔ fasse les angles alternes AEZ, EZΔ égaux entr'eux ; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.

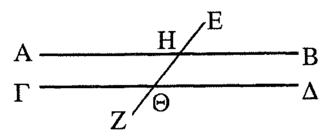


Car si elle ne lui est pas parallèle, les droites AB, ΓΔ étant prolongées se rencontreront, ou du côté BΔ, ou du côté AΓ. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté BΔ, au point H.

L'angle extérieur AEZ du triangle HEZ est égal à l'angle intérieur et opposé EZH, ce qui est impossible (16) ; donc les droites AB, ΓΔ prolongées du côté BΔ ne se rencontreront point. On démontrera de la même manière qu'elles ne se rencontreront pas non plus du côté de AΓ ; mais les droites qui ne se rencontrent d'aucun côté sont parallèles (déf. 35) ;donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXVIII

Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur, opposé, et placé du même côté, ou bien si elle fait les angles intérieurs et placés du même côté égaux à deux droits, ces deux droites seront parallèles.



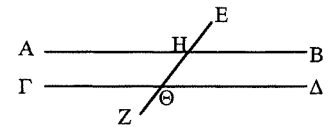
Que la droite EZ tombant sur les droites AB, ΓΔ fasse l'angle extérieur EHB égal à l'angle intérieur HΘΔ, opposé, et placé du même coté, ou bien les angles BHΘ, HΘΔ intérieurs, et placés du même côté, égaux à deux droits ; je dis que la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ.

Car puisque l'angle EHB est égal à l'angle HΘΔ, et que l'angle EHB est égal à l'angle AHΘ (15), l'angle AHΘ est égal à l'angle HΘΔ ; mais ces angles sont alternes ; donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ (27). De plus, puisque les angles BHΘ, HΘΔ sont égaux à deux droits, et que les angles AHΘ, BHΘ sont aussi égaux à deux droits (13), les angles AHΘ, BHΘ seront égaux aux angles BΘH, HΘΔ Retranchons l'angle commun BHΘ ; l'angle restant AHΘ sera égal à l'angle restant HΘΔ ; mais ces deux angles sont alternes ; donc la droite AB est parallèle à la droite ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXIX

Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits.

Que la droite EZ tombe sur les droites parallèles AB, ΓΔ ; je dis que cette droite fait les angles-alternes AHΘ, HΘΔ égaux entr'eux, l'angle extérieur EHB, égal à l'angle HΘΔ intérieur opposé et placé du même côté, et les angles BHΘ, HΘΔ intérieurs et placés du même côté, égaux à deux droits.



Car si l'angle AHΘ n'est pas égal à l'angle HΘΔ, l'un d'eux est plus grand. Que l'angle AHΘ soit plus grand que HΘΔ . Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles AHΘ, BHΘ seront plus grands que les angles BHΘ, HΘΔ ; mais les angles AHΘ, BHΘ sont égaux à deux droits (13) ; donc les angles BHΘ, HΘΔ sont moindres que deux droits. Mais si deux droites sont prolongées à l'infini du côté où les angles intérieurs sont plus petits que deux droits, ces droites se rencontrent (dem.5) ; donc les droites AB, ΓΔ prolongées à l'infini se rencontreront. Mais elles ne se rencontreront pas, puisqu'elles sont parallèles ; donc les angles AHΘ, HΘΔ ne sont point inégaux ; donc ils sont égaux. Mais l'angle AHΘ est égal à l'angle EHB (15) ; donc l'angle EHB est égal à l'angle HΘΔ.

Ajoutons l'angle commun BHΘ, les angles EHB, BHΘ seront égaux aux angles BHΘ, HΘΔ ; mais les angles EHB, BHΘ sont égaux à deux droits (13) ; donc les angles BHΘ, HΘΔ sont égaux à deux droits. Donc, etc.

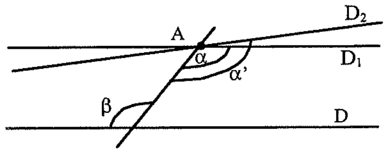
Dans le déroulement du livre I, la cinquième demande intervient de façon spécifique. Les vingt-huit premières propositions n'utilisent pas la demande 5 et, à partir de la proposition XXIX, elles l'utilisent toutes (sauf la proposition XXXI : nous expliquerons ce qu'elle fait là). Euclide donne donc l'impression d'être allé le plus loin possible sans cette demande et d'avoir repoussé son utilisation jusqu'au moment où on ne peut plus s'en passer. Cette impression est renforcée par la constatation que certaines propositions démontrées sans la cinquième demande (i.e. avant la proposition XXIX) sont des conséquences évidentes de proposition ultérieures. Par exemple, la proposition XVII, s'appuyant sur la proposition XVI, énonce que la somme de deux angles d'un triangle est strictement inférieure à deux droits, ce qui se révélera une conséquence immédiate de la proposition XXXII (la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits)

D'autre part, la proposition XXVII, démontrée sans l'aide du 5ème postulat, est la réciproque de la proposition XXIX, équivalente en fait au postulat (elle en est tout simplement la contraposée). Cette remarque sera utilisée par les commentateurs d'Euclide pour justifier leurs tentatives de démonstration de la cinquième demande, qui n'a pas le caractère d'évidence des autres demandes et ressemble finalement, plutôt à une proposition qu'il faudrait démontrer.

La proposition XXVII assure l'existence des parallèles indépendamment du cinquième postulat, qui n'est donc pas l'équivalent de l'énoncé habituel de l'axiome d'Euclide : *Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite.*

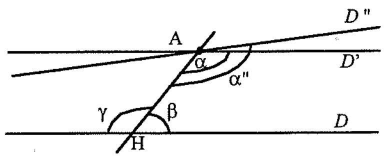
En fait, l'existence de la parallèle est assurée par la proposition XXVII, s'appuyant sur la proposition XVI et donc la demande 2 sur l'*infinitude des droites*, alors que l'unicité équivaut à la 5ème demande.

En effet, la cinquième demande entraîne la proposition XXIX (et donc les égalités d'angles alternes en cas de parallélisme) et rend impossible l'existence de deux parallèles distinctes :



Si D_1 et D_2 passant par A sont parallèles à D, alors $\alpha=\beta$ et $\alpha'=\beta$ donc $\alpha'=\alpha$ et $D_1=D_2$.

Réciproquement, l'unicité de la parallèle associée à la proposition XXVII permet de démontrer le 5ème postulat.



On trace D'' telle que $\alpha''=\gamma$; alors D'' est parallèle à D avec $\alpha''>\alpha$ (car $\alpha''+\beta=2$ droits et $\alpha+\beta<2$ droits). La parallèle à D passant par A étant unique, D' et D sont sécantes.

Les propositions suivantes sont des conséquences de la proposition XXIX.

30 : Les droites parallèles à une même droite sont parallèles entr'elles.

32 : La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux droits.

La proposition XXXI fait exception en utilisant uniquement la proposition XXVII : *Par un point donné, conduire une ligne droite parallèle à une droite donnée*, mais on peut comprendre pourquoi elle est placée là, les propositions précédentes assurant qu'il n'y a qu'une manière de le faire.

Euclide développe ensuite la méthode des aires, s'appuyant sur des propriétés de parallélogrammes (liées aux égalités d'angles dans le cas de parallélisme et donc à la cinquième demande) : il s'agit de démonstration d'égalités d'aires de figures polygonales, obtenues par des méthodes de « puzzles » abstraits, le point d'orgue étant la proposition ILVII du livre I que les collégiens français connaissent sous le nom de théorème de Pythagore.

Revenons à la spécificité de la 5ème demande. Euclide a développé le livre I le plus loin possible sans l'utilisation de cette demande. L'histoire qu'essaie de raconter notre atelier est

l'histoire des efforts des successeurs d'Euclide pour se débarrasser de cette 5ème demande ; on considère cette demande comme manifestement « vraie » et on cherche à la démontrer au même titre que les 28 premières propositions du livre I, en s'appuyant exclusivement sur ces propositions ou sur les autres demandes.

L'atelier devant être *bouclé* en 3 heures, nous n'avons pas parlé des commentateurs grecs, qui ont vu deux pistes de travail : soit admettre à la place du 5ème postulat une autre propriété paraissant plus *évidente*, soit changer la définition des parallèles. Pour ce type d'études, nous renvoyons le lecteur à [CHA86], et nous passons à la période des commentateurs arabes.

La période concernée s'étend du IXème au XIVème siècle environ. Il y a eu de nombreuses tentatives de démonstration du 5ème postulat, avec l'idée d'un traitement systématique du problème et l'élaboration de véritables « théories ». Les théorèmes démontrés à cette époque, le type de démonstrations seront repris plus tard et il est indispensable de lire quelques textes arabes pour comprendre l'évolution du problème. Il est à noter que l'occident médiéval ne semble pas s'être préoccupé de ce problème : les premières traductions latines d'Euclide datent du XIIème siècle, mais on ne trouve de tentatives de démonstrations du 5ème postulat que vers la fin du XVIème siècle.

Nous nous contenterons d'étudier un texte d'al-Khayyām, qui nous a semblé une bonne préparation à la lecture de Saccheri ; ce choix est évidemment contestable, tant sont nombreux et intéressants les textes d'auteurs arabes sur ce sujet. Nous ne pouvons que recommander vivement la lecture de l'ouvrage de K. Jaouiche : *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, qui donne la traduction de nombreux textes arabes et en fait un commentaire passionnant. C'est d'ailleurs à ce livre que nous avons emprunté la traduction du texte de al-Khayyām présenté ici. Sans doute pouvons-nous aussi expliquer notre choix par le fait que nous apprécions d'autres aspects du personnage de al-Khayyām que ses traités mathématiques, l'auteur des quatrains se révélant très moderne parfois[1].

Umar al-Khayyām (né en Iran en 1045, mort en 1130 à Naysapur, Iran) fut poète, philosophe, mathématicien, astronome ; il est surtout connu en mathématiques pour son traité d'algèbre et son étude des équations du troisième degré, qu'il échoue à résoudre algébriquement tout en faisant confiance aux mathématiciens futurs pour le faire, mais dont il propose une résolution géométrique à l'aide de coniques. Le texte étudié ici est un extrait de l'*opuscule sur l'explication des postulats problématiques du livre d'Euclide*. Le but étant la démonstration du 5ème postulat, al-Khayyām admet explicitement les vingt-huit premières propositions du livre I. Il attaque le problème par le biais de quadrilatères, s'efforçant de démontrer que, si ABDG est un quadrilatère tel que $\hat{B}=\hat{A}=1$ droit et BD = AG, alors $\hat{D}=\hat{G}=1$ droit. Nous verrons ensuite la méthode d'at-Tūsī pour déduire de cette proposition le 5ème postulat.

[1] Amin Maalouf a écrit un roman intitulé " Samarcande " dans lequel il raconte de façon romancée mais aussi très documentée quelques épisodes de la vie de Umar al-Khayyām.

Texte d'Umar al- Khayyām

Et nous devons admettre vingt-huit propositions du Livre des Éléments car elles n'ont pas besoin de cette prémisse. Mais celle qui en a besoin est la vingt-neuvième, où nous voulons exposer les principes des lignes parallèles.

Il est loisible à qui le voudra de considérer la première proposition de ce chapitre comme la vingt-neuvième du Livre 1 afin qu'elle puisse s'intégrer à l'ensemble du Livre <des Éléments> s'il plaît à Dieu.

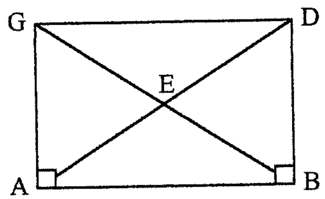
Il est temps de commencer la démonstration véritable et causale, de cette proposition avec l'aide de Dieu ; qu'il nous assure le succès car il guide et comble celui qui en fait son soutien.

Proposition I

qui est la <proposition> 29 du Livre 1

Soit la droite AB et menons AG perpendiculairement à AB et BD perpendiculairement à AB et égale à la droite AG. Elles sont parallèles comme l'a montré Euclide dans la proposition 28. Menons GD.

Je dis que l'angle AGD est égal à l'angle BDG.



La preuve de cela :

Menons GB et AD. La droite AG est comme BD et AB est commune, et les deux angles A et B sont droits. Les deux bases AD et GB sont donc égales et tous les angles sont comme tous les angles.

Par suite, les angles EAB, EBA sont égaux. Les droites AE et EB sont alors égales.

Les droites restantes DE et EG sont donc égales. Les angles EDG et EGD sont alors égaux et AGB est comme ADB.

Donc les angles AGD et GDB sont égaux.

C'est ce que nous voulions montrer.

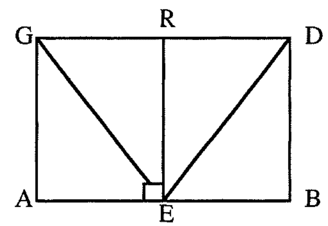
On voit par là que si les angles GAB et DBA sont égaux, quels qu'ils soient, et les droites AG et BD égales, les deux angles BDG et AGD doivent être égaux.

Proposition II

Qui est la <proposition> 30 des Éléments

Refaisons la figure ABGD, divisons AB en deux moitiés en E et menons ER perpendiculairement à AB.

Je dis que GR est comme RD et ER est perpendiculaire à DG.



La preuve de cela :

Menons GE et ED. La droite AG est comme BD, AE comme EB et les angles A et B sont droits. Les bases GE et ED sont donc égales, et les angles AEG et BED sont égaux. Les <angles> restants GER et RED sont donc égaux. La droite GE est comme ED et ER est commune et les deux angles sont égaux.

Le triangle GER est alors comme le triangle RED et tous les angles et les côtés homologues sont égaux. GR est alors comme RD et l'angle GRE comme DRE. Ils sont donc droits.

C'est ce que nous voulions montrer.

Proposition III

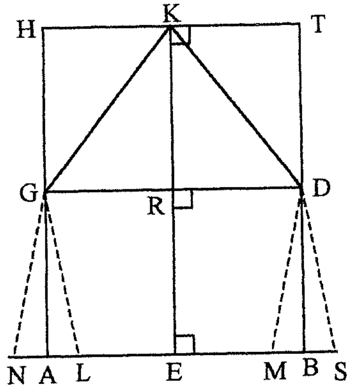
qui est la <proposition> 31 des Éléments

Refaisons la figure ABGD. Je dis que les deux angles AGD, BDG sont droits.

La preuve de cela.

Divisons AB en deux moitiés en E, élevons la perpendiculaire ER et prolongeons-la en ligne droite. Faisons RK égale à RE et menons la perpendiculaire HKT à EK.

Prolongeons AG et BD, qui couperont HKT en H et T parce que AG et EK sont parallèles. Or la distance entre deux parallèles quelconques ne varie pas. Donc AG se prolonge à l'infini parallèlement à EK, et HK se prolonge à l'infini parallèlement à RG. Elles se rencontreront donc nécessairement.



Joignons GK et DK. La droite GR est comme RD et RK est commune et elle est perpendiculaire. Les deux bases GK et KD sont alors égales et les angles RGK et RDK égaux, L'angle restant HGK est comme KDT. Et les deux angles GKR et DKR sont égaux. Les deux angles restant GKH et DKT sont donc égaux. Et la droite GK est comme DK. Donc GH est comme DT et HK comme KT.

Si les deux angles AGD et BDG sont droits alors la proposition est vraie.

S'ils ne sont pas droits, alors chacun d'eux est ou bien plus petit qu'un droit ou bien plus grand.

Supposons d'abord que <chacun d'eux> soit plus petit qu'un droit,

Le plan HD se superpose au plan GB. RK se superpose alors à RE et HT à AB. Alors la droite HT est comme la droite NS, car l'angle HGR est plus grand que l'angle AGR. La droite HT est donc plus grande que AB.

De même, si nous prolongeons les deux droites à l'infini de cette manière, chacune des droites qui <les> joint sera plus grande que l'autre et ainsi de suite.

Les deux droites AG et BD s'écartent donc <l'une de l'autre>.

De même, si nous prolongeons AG et BD en ligne droite de l'autre côté, elles s'écarteront nécessairement <l'une de l'autre, ce que l'on montre> par une démonstration semblable et vu la similitude des cas des deux côtés lors de la superposition.

Il y aurait alors deux lignes droites coupant une droite selon deux angles droits et dont la distance augmenterait ensuite des deux côtés de cette droite, ce qui est une impossibilité première lorsqu'on se représente le caractère rectiligne <d'une droite> et que l'on réalise ce qu'est la distance entre deux droites. Et c'est ce dont s'est occupé le philosophe.

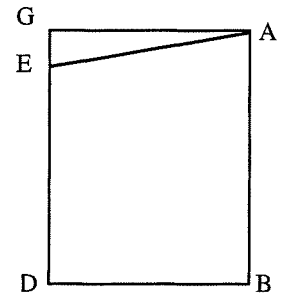
Et si chacun des deux angles était plus grand qu'un droit, alors la droite HT serait, lors de la superposition, comme LM, qui est plus petite que AB. Il en est de même de toutes les droites qui joignent BT et AH de cette manière.

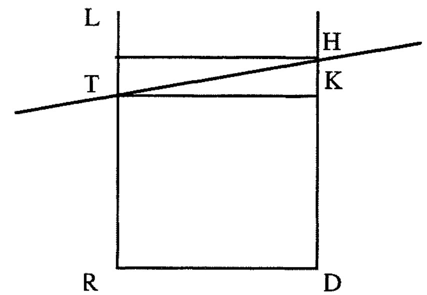
Les deux droites se rapprochent donc <l'une de l'autre>. Et si elles étaient prolongées de l'autre côté, elles se rapprocheraient également <l'une de l'autre> vu la similitude des cas des deux côtés lors de la superposition. C'est ce que vous pouvez comprendre par le moindre examen. Et cela est impossible pour <les raisons> que nous avons dites.

Mais si aucune de ces deux droites ne peut excéder l'autre, elles sont égales. Et si elles sont égales, les deux angles sont égaux. Ils sont donc droits, comme on peut le comprendre par la moindre réflexion. Nous ne le montrerons pas pour éviter des longueurs. Que celui qui veut prouver cela ici selon l'ordre mathématique le fasse, nous ne l'en empêcherons pas.

La démonstration de la proposition 3 repose entre autres sur le fait que les droites AG et TK se coupent *nécessairement* en H car *la distance entre deux parallèles quelconques ne varie pas* ; on voit là une argumentation utilisant une propriété des parallèles admise comme *évidente* ; la conclusion est acquise par un raisonnement semblable, car *il y aurait alors deux lignes droites coupant une droite selon deux angles droits et dont la distance augmenterait ensuite des deux côtés de cette droite, ce qui est une impossibilité première lorsqu'on se représente le caractère rectiligne d'une droite*.

On voit cependant apparaître là un angle d'attaque du problème qui se révélera particulièrement fécond par la suite : partant d'un quadrilatère *isocèle rectangle*, il s'agit de montrer que les deux angles *au sommet* sont droits ; en fait, on commence par démontrer leur égalité, puis il faut démontrer par l'absurde qu'ils sont droits, en éliminant les *hypothèses*





aigus et obtus. C'est ainsi également que at-Tūsī considère le problème ; après avoir relevé les *erreurs* de son prédécesseur al-Khayyām, il démontre que si les angles étaient aigus, la droite (DG) s'écarterait de BA du côté de G et du côté de D, ce qui lui paraît « évidemment » impossible. La rectitude des angles au sommet du quadrilatère permet alors de démontrer le $5^{ème}$ postulat. Résumons la méthode d'at-Tūsī pour y parvenir une fois démontrée la rectitude des angles au sommet.

Si ABDG est un quadrilatère rectangle alors ses côtés opposés sont égaux.

En effet, si DG > AB, on place E tel que DE = AB. Alors ABDE est un quadrilatère *isocèle rectangle* donc $\widehat{DEA}=\widehat{EAB}=1$ droit d'après ce qui précède. Mais l'angle $\widehat{DEA}$, extérieur au triangle AGE, est strictement supérieur à $\widehat{EFA} = 1$ droit (proposition XVI, livre I d'Euclide) d'où l'absurdité.

Donc GD = AB et de même GA = DB.

Si deux droites ont une perpendiculaire commune alors une sécante (HT) *rend égaux les angles alternes*. Si DH = TR, on est dans la situation du quadrilatère *rectangle isocèle* donc $\widehat{DHT} = \widehat{HTR} = 1$ droit ce qui donne le résultat voulu. Si HD > TR, on place K sur [DH] tel que DK = TR et L sur (RT) tel que TL = KH. La proposition sur les quadrilatères *rectangles isocèles* assure alors que $\widehat{DKT} = \widehat{KTR} = 1$ droit et $\widehat{KHL} = \widehat{HLT} = 1$ droit. La figure HKTL est donc un rectangle et HL = KT. Les triangles KHT et THL ont donc un angle égal entre deux côtés égaux ($\hat{K} = \hat{L} = 1$ droit, HL = KT, KH = TL) donc ils sont égaux (Proposition 4, livre I d'Euclide) donc $\widehat{KHT} = \widehat{HTL}$ (égalité des angles alternes).

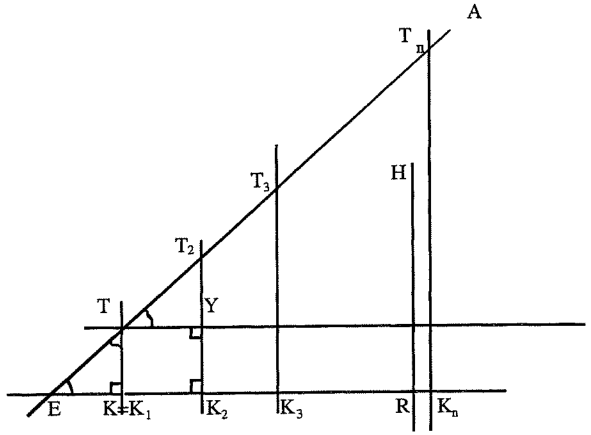
On peut alors démontrer le cinquième postulat dans un cas particulier qui permettra ensuite la démonstration générale.

Si $\widehat{AER}$ est aigu et $\widehat{ERH}$ est droit alors les droites (EA) et (RH) sont sécantes.

Soit T sur [EA) et K sa projection orthogonale sur (ER). Il existe un entier n tel que n EK > ER. On place $T_1 = T$, T_2, T_3, …, T_n sur [EA] tels que $T_iT_{i+1} = ET$ et on appelle $K_1 = K$, K_2, …, K_n les projections orthogonales respectives de T_1, T_2, …, T_n sur (ER).

Soit Y la projection orthogonale de T sur (T_2K_2). Comme (TY) et (EK_2) ont une perpendiculaire commune (YK_2), la sécante (ET) *rend les angles alternes égaux* et on a donc : $\widehat{K_1ET} = \widehat{YTT_2}$.

De plus, $ET = TT_2$ et $\widehat{EK_1T} = \widehat{TYT_2} = 1$ droit. Donc les triangles EK_1T et TYT_2 ont un côté égal et deux angles égaux donc ils sont égaux (prop. 26 livre I d'Euclide) donc TY = EK. Mais l'angle YTK_1 est droit car la sécante (TY) coupant les droites (TK_1) et (YK_2) qui ont la perpendiculaire commune (K_1K_2) rend les angles alternes égaux, d'où il découle : $\widehat{K_1TY} = \widehat{TYK_2} = 1$ droit.



La figure TKK_2Y est donc un rectangle donc $TY = KK_2$. Comme TY = EK et $TY = KK_2$ on a $EK = KK_2$ et de même, on démontre $EK = K_iK_{i+1}$. Donc $EK_n = n\,EK > ER$, donc K_n se trouve sur [EK), au-delà de R. La droite (RH) entrant dans le triangle EK_nT_n doit en ressortir. Elle ne peut pas couper (EN) car elle aurait alors deux points communs avec (EN) ni (K_nT_n) car on aurait alors un triangle avec deux angles droits (ce qui est en contradiction avec la proposition 17 du livre I d'Euclide, cf. supra).

Donc (RH) coupe (EA) ce qui démontre le 5ème postulat dans le cas où l'un des angles est droit et l'autre aigu.

At-Tūsī en tire ensuite le cas général sans trop de difficultés.

Il est difficile de savoir exactement ce que connaissaient des commentateurs arabes les mathématiciens occidentaux des XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles. Certains textes n'ont été traduits que tardivement. Une version de l'édition des *Eléments* d'Euclide par at-Tūsī a été traduite et imprimée à Rome en 1594, avec une exposition d'une théorie des parallèles de at-Tūsī probablement apocryphe. Apparemment, il s'agit du seul texte arabe sur le sujet connu des Occidentaux ; ce texte est reproduit par Wallis dans son *De Postulato Quinto* (Oxford 1693), qui a été lu (et critiqué) par Saccheri.

Le texte de Saccheri (traduction effectuée par Anne Michel-Pajus & Martine Bühler, à partir du texte en latin et de sa traduction en anglais) reprend le même type d'idées que celles que nous avons vues à l'œuvre chez les mathématiciens arabes. Mais il développe de manière remarquable les cas où les angles au sommet sont aigus et obtus : sans doute peut-on le considérer à la fois comme le dernier des *Anciens* et le précurseur des *inventeurs* des géométries non-euclidiennes. Donnons-nous le plaisir de lire son texte.

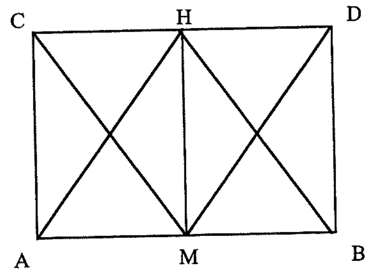
PROPOSITION I

Si deux droites égales (fig. 1) AC, BD, forment des angles égaux du même côté avec la droite AB : je dis que les angles avec la droite qui joint (la joignante) C et D seront mutuellement égaux.

Montrons-le. Joignons AD, CB. Puis considérons les triangles CAB, DBA. Il vient (de la 4 du I) que les bases CB, AD seront égales. Ensuite considérons les triangles ACD, BDC. Il vient de la VIII^{ème} du I) que les angles ACD, BCD seront égaux. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION II

ABCD demeurant un quadrilatère uniforme, divisons en deux parties (fig. 2) les côtés AB, CD aux points M, et H. Je dis que les angles à la droite qui joint MH seront alors droits.

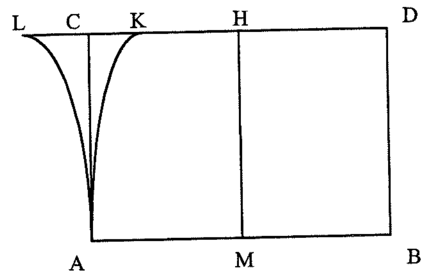


Montrons-le. Joignons AH, BH, et de même CM, DM. Puisque dans ce quadrilatère les angles A, et B sont posés égaux, et de même (par la précédente) les angles C et D sont égaux ; il vient de la quatrième du I (que l'on note par ailleurs l'égalité des côtés) que les bases CM, DM dans les triangles CAM, DBM, seront égales, et de même, les bases AH, BH dans les triangles ACH, BDH. C'est pourquoi, en rapprochant entre eux les triangles CHM et DHM, et de nouveau entre eux les triangles AMH et BMH, on constatera (par la VIII^{ème} du I) que les angles aux points M et H seront respectivement égaux et donc droits. C.Q.F.D.

On retrouve là les idées d'al-Khayyam et les mêmes démonstrations. Saccheri précise ensuite les propriétés d'un quadrilatère *rectangle isocèle*.

PROPOSITION III

Si deux droites égales (fig. 3) AC, BD, se placent perpendiculairement à une droite AB quelconque : Je dis que la joignante CD sera égale, ou inférieure, ou supérieure à AB, selon que les angles à la même CD sont droits, ou obtus, ou aigus.



Montrons la première partie. Chacun des deux angles C et D étant droits, supposons, si c'était possible, que l'une des deux droites, par exemple DC, soit plus grande que l'autre BA. Prenons dans DC une portion DK égale à BA, et joignons AK. Puisque donc les droites égales BA et DK se tiennent perpendiculairement sur BD les angles BAK et DKA seront égaux (par la Prop. I). Mais ceci est absurde, puisque l'angle BAK est supposé par construction plus petit que le droit BAC, et que l'angle DKA est supposé par construction externe, et donc plus grand que l'interne et opposé DCA, qui est supposé droit. Donc aucune des droites précitées DC et BA n'est plus grande que l'autre, tant que les angles à la joignante CD sont droits, et donc elles sont égales l'une à l'autre. Ce qu'il fallait démontrer en premier lieu.

Montrons la deuxième partie. Mais si les angles à la joignante CD étaient obtus, divisons AB et CD en deux parties (égales) aux points M et H, et joignons MH. Puisque donc les deux droites AM, CH se tiennent perpendiculairement (par la proposition précédente) sur la droite MH, et posons sur la joignante AC un angle droit en A, la droite CH ne sera pas égale à cette même AM (par la Prop. I) puisque l'angle droit fait défaut en C. Mais elle ne sera pas plus grande - autrement, en supposant que la portion KH de HC soit égale à cette même AM ; les angles à la jointe AK seraient égaux (par la Prop. 1), mais ceci est absurde, comme ci-dessus. En effet, l'angle MAK est inférieur à un droit, et l'angle HKA est (par la seizième du I) plus grand qu'un obtus, comme l'est supposé l'interne et opposé HCA. Il reste donc que CH, tant que les angles à la joignante CD sont supposés obtus, soit plus petit que cette même AM ; et par conséquent que CD, double de la première, soit plus petite que AB, double de la dernière. Ce qu'il fallait démontrer en second lieu.

Montrons la troisième partie. Toutefois enfin, si les angles à la joignante CD étaient aigus la perpendiculaire étant menée comme précédemment (par la prop. précédente), procédons ainsi. Puisque sur la droite MH se tiennent perpendiculairement les deux droites AM, CH, et prenons sur la joignante AC l'angle droit en A. La droite CH ne sera pas égale (comme ci-dessus) à cette même AM, puisque l'angle droit fait défaut en C. Mais elle ne sera pas non plus petite : autrement, si HL supposée égale à AM est prise (produite) selon HC, les angles à la joignante AL seront égaux (comme ci-dessus). Mais ceci est absurde. En effet, l'angle HLA est par construction interne et opposé, et donc plus petit (par la seizième du I) que l'externe HCA, qui est supposé aigu. Il reste donc que CH, tant que les angles à la joignante CD sont supposés aigus, est plus grande que cette même AM, et par conséquent que CD, double de la première, soit plus grande que AB, double de la dernière. Ce qu'il fallait démontrer en troisième lieu.

D'où il est établi que la joignante CD sera égale, ou inférieure, ou supérieure, à cette même AB, selon que les angles à cette même CD seront droits, ou obtus, ou aigus. CQFD.

COROLLAIRE 1

D'où, dans tout quadrilatère contenant trois angles droits et un obtus, ou aigu, les côtés adjacents à cet angle non droit sont respectivement plus petits que les côtés opposés si cet angle est obtus, mais plus grands si cet angle est aigu.

PROPOSITION IV

Mais inversement (en conservant la figure de la précédente proposition), les angles à la joignante CD seront soit droits, soit obtus, soit aigus, selon que la droite CD sera égale, ou inférieure, ou supérieure, à l'opposée AB.

Démontrons-le. Si, en effet, la droite CD était égale à son opposée AB et que néanmoins les angles à celle-ci soient obtus, ou aigus ; alors ces angles étant ainsi prouveront (par la prop. précédente) qu'elle n'est pas égale, mais inférieure, ou *supérieure, à l'opposée AB, ce qui est absurde car contraire à l'hypothèse. Le même argument est efficace uniformément pour les cas restants. Il tient donc que les angles à la joignante CD sont soit droits, soit obtus, soit aigus, pourvu que la droite CD soit égale, ou inférieure, ou supérieure à l'opposée AB. CQFD.*

Le but est maintenant de démontrer que les angles au sommet sont non seulement égaux, mais droits, et, pour cela, de rejeter les cas *aigus* et *obtus*.

DEFINITIONS

Puisque donc (par la Prop. I) la droite joignant les extrémités de perpendiculaires égales se tenant sur la même droite (que nous appellerons base), font des angles égaux avec ces mêmes perpendiculaires, il y a donc trois hypothèses à distinguer quant à l'espèce de ces angles. Et donc j'appellerai la première hypothèse de l'angle droit, la seconde toutefois, et la troisième, j'appellerai hypothèse de l'angle obtus, et hypothèse de l'angle aigu.

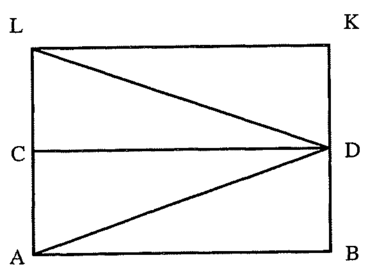
C'est maintenant que Saccheri va faire preuve d'une grande originalité et d'une intuition théorique remarquable. Il démontre en effet la proposition V suivante.

PROPOSITION V

Si l'hypothèse de l'angle droit est vraie dans un seul cas, elle est la seule vraie, toujours, dans tous les cas.

Voici les idées essentielles de sa démonstration.

Soit ABCD un quadrilatère *rectangle isocèle* (c'est-à-dire AC = BD, $\hat{A} = \hat{B} = 1$ droit) vérifiant l'hypothèse de l'angle droit (c'est-à-dire $\hat{C} = \hat{D} = 1$ droit). Il s'agit de montrer que tous les quadrilatères *rectangles isocèles* vérifient cette hypothèse (quelles que soient les dimensions de leur *base* AB et de leur *hauteur* AC).

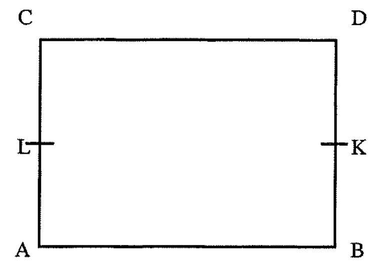


Soient L et K sur (AC) et (BD) respectivement tels que AC = CL et BD = DK. Alors le quadrilatère ABKL est isocèle rectangle ($\hat{A} = \hat{B} =$ 1 droit et AL = BK) donc on sait, par les premières propositions, que les angles au sommet sont égaux, c'est-à-dire $A\hat{L}K = L\hat{K}B$ et il

s'agit de montrer que ces angles sont droits. Or les triangles LCD et DCA ont un angle égal entre deux côtés égaux (AC = CL, CD commun, $L\hat{C}D = D\hat{C}A = 1$ droit) donc ces deux triangles sont égaux (proposition 4 du livre I des *Eléments*) ; donc LD = AD et $L\hat{D}C = C\hat{D}A$. On a donc aussi, par complémentation : $K\hat{D}L = A\hat{D}B$. Les triangles LDK et ADB ont donc un angle égal entre deux côtés égaux (LD = DA, KD = DB, $L\hat{D}K = A\hat{D}B$) donc ils sont égaux (proposition 4 du livre I des *Eléments*) donc $L\hat{K}D = D\hat{B}A = 1$ droit. Comme on sait que $C\hat{L}K = L\hat{K}D$, on obtient : $A\hat{L}K = L\hat{K}B = 1$ droit, donc le quadrilatère isocèle rectangle ALKB vérifie l'hypothèse de l'angle droit. On peut donc, en gardant la base égale à AB, doubler la longueur de la hauteur et donc obtenir une hauteur arbitrairement grande. Peut-on obtenir une hauteur quelconque ?

Considérons encore ABCD quadrilatère isocèle rectangle sur la base AB vérifiant l'hypothèse de l'angle droit. Donc $\hat{C} = \hat{D} = 1$ droit et CD = AB (proposition III).

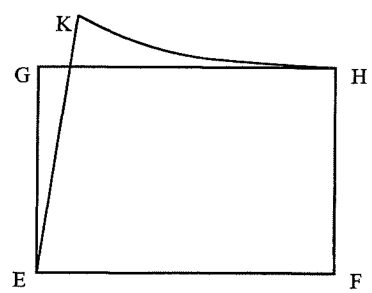
Considérons L et K sur (AC) et (BD) respectivement tels que AL = BK.



Par la première proposition, $A\hat{L}K = B\hat{K}L$. Si $A\hat{L}K = B\hat{K}L =$ un aigu, alors la joignante LK est supérieure (strictement) à AB (proposition III). Mais alors le quadrilatère CLKD est un quadrilatère isocèle rectangle (car $\hat{C} = \hat{D} =$ 1 droit et CL = DK) sur la base CD = AB, avec $C\hat{L}K = D\hat{K}L =$ un obtus (puisque $A\hat{L}K = B\hat{K}L =$ un aigu) donc d'après la proposition III, LK est inférieure (strictement) à CD = AB. D'où une contradiction.

On aboutit de même à LK inférieure (strictement) à AB et supérieure (strictement) à CD = AB si on suppose $A\hat{L}K = B\hat{K}L =$ un obtus. Donc $A\hat{L}K = B\hat{K}L = 1$ droit et le quadrilatère ABKL vérifie l'hypothèse de l'angle droit. Comme la hauteur AL a été prise quelconque inférieure à AC et que AC peut être rendue arbitrairement grande, on voit que tout quadrilatère isocèle rectangle de base égale à AB (et de hauteur quelconque) vérifie l'hypothèse de l'angle droit.

Peut-on choisir une base arbitraire ?



Soit un quadrilatère *rectangle isocèle* EFGH de base EF quelconque de hauteur EG=HF=AB. Alors $E\hat{G}H = F\hat{H}G$. Si cet angle est aigu, soit HK tel que $F\hat{H}K =$ 1 droit et KH=FE. Alors EFHK est un quadrilatère *rectangle isocèle* de base HF = AB donc il vérifie l'hypothèse de l'angle droit donc $E\hat{K}H = F\hat{E}K = 1$ droit et EK = FH donc K = G donc $E\hat{G}H = 1$ droit. Donc l'angle $E\hat{G}H = 1$ droit. Donc l'angle $E\hat{G}H$ ne peut pas être aigu.

On aboutit au même résultat s'il est obtus. Donc il est droit donc le quadrilatère EFHG *rectangle isocèle* de base EF quelconque et de hauteur égale à AB vérifie l'hypothèse de l'angle droit. On a vu qu'on pouvait alors prendre une hauteur arbitraire. Donc, si l'hypothèse de l'angle droit est vérifiée dans un seul cas, alors elle est la seule vraie, toujours, dans tous les cas.

La proposition VI établit un résultat analogue pour l'hypothèse de l'angle obtus. Saccheri obtient alors très simplement la même chose pour l'hypothèse de l'angle aigu. Si l'hypothèse de l'angle aigu est vérifiée dans un seul cas, alors aucun quadrilatère ne peut vérifier l'hypothèse de l'angle droit car celle-ci serait toujours vraie (proposition V) et ne laisserait « aucune place » pour l'hypothèse de l'angle aigu du quadrilatère de départ. Pour la même raison, aucun quadrilatère ne peut vérifier l'hypothèse de l'angle obtus. Donc l'hypothèse de l'angle aigu est la seule vraie, toujours, dans tous les cas.

Examinons les conséquences remarquables de ce travail de Saccheri : nous voici face à trois hypothèses bien distinctes, chacune excluant les deux autres. Saccheri lui-même, dont le but était exclusivement la démonstration du cinquième postulat, n'a certainement pas saisi l'entière portée de ses démonstrations. En effet, chacune de ces trois hypothèses, loin de mener à une contradiction, conduit à développer une géométrie différente : l'hypothèse de l'angle droit conduit à la démonstration de la cinquième demande (nous l'avons vu avec at-Tusi) et donc à développer la géométrie d'Euclide ; l'hypothèse de l'angle aigu mène à la géométrie hyperbolique (ou de Lobatchevsky) que nous étudierons plus loin ; l'hypothèse de l'angle obtus permet quant à elle d'élaborer la géométrie sphérique.

Ce n'est cependant absolument pas le point de vue de Saccheri qui cherche à obtenir une contradiction à partir des deux dernières hypothèses. Ce faisant, il développe des résultats intéressants sur les angles d'un triangle dans les trois hypothèses, dont voici quelques exemples :

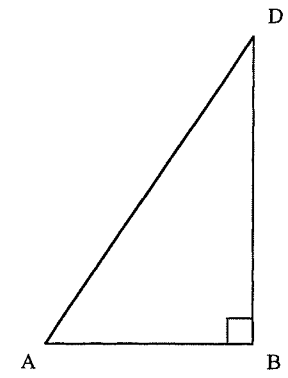
PROPOSITION IX

Si ABD est un triangle rectangle en B, alors :

$\hat{A} + \hat{D} = 1$ *droit dans l'hypothèse de l'angle droit.*

$\hat{A} + \hat{D} > 1$ *droit dans l'hypothèse de l'angle obtus.*

$\hat{A} + \hat{D} < 1$ *droit dans l'hypothèse de l'angle aigu.*



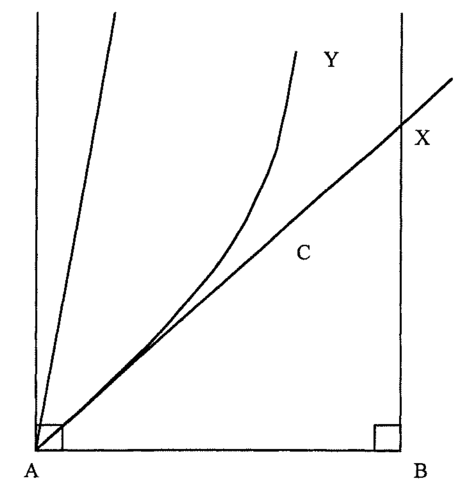
PROPOSITION XV

La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits dans l'hypothèse de l'angle droit, supérieure à deux droits dans l'hypothèse de l'angle obtus, inférieure à deux droits dans l'hypothèse de l'angle aigu.

Un angle inscrit dans un demi-cercle est droit dans l'hypothèse de l'angle droit, obtus dans l'hypothèse de l'angle obtus, aigu dans l'hypothèse de l'angle aigu.

Mais Saccheri ne perd pas de vue le cinquième postulat. Il démontre le cinquième postulat dans les cas de l'hypothèse de l'angle droit et de celle de l'angle obtus. Comme le cinquième postulat entraîne l'hypothèse de l'angle droit, il en conclut que l'hypothèse de l'angle obtus se détruit d'elle-même. Saccheri fait usage pour cela de la demande 2 des *Elements* d'Euclide, c'est-à-dire l'infinitude des droites, ce qui explique qu'il découvre une contradiction dans l'hypothèse de l'angle obtus, celle-ci ne menant à une géométrie cohérente que si les droites sont finies.

L'hypothèse de l'angle aigu lui donne plus de soucis. Il démontre un certain nombre de propriétés et finit par arriver à démontrer que, sous l'hypothèse de l'angle aigu, si la droite AB est perpendiculaire à BX, alors il existe un angle $B\hat{A}Y$ tel que si l'angle $B\hat{A}C$ est inférieur à $B\hat{A}Y$, alors la droite AC coupe la droite BX et, si l'angle $B\hat{A}C$ est compris entre $B\hat{A}Y$ et un droit, alors la droite AC ne coupe pas la droite BX. Jugeant que ce dernier résultat *répugne à la nature de la ligne droite*, il en déduit que l'hypothèse de l'angle aigu est fausse.



Nous voici arrivés au terme de la préhistoire de la géométrie non-euclidienne. D'autres mathématiciens vont encore essayer de démontrer le cinquième postulat, mais ils ne s'approcheront pas davantage de la conclusion qui sera établie par Lobatchevski et Bolyai.

Le texte de Lobatchevsky

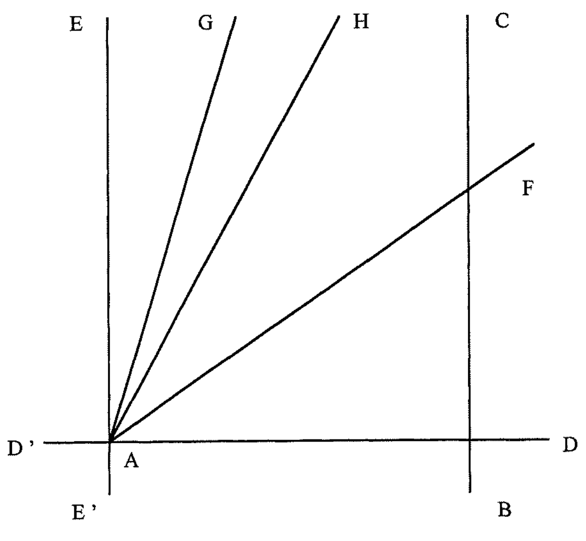
Le texte de Lobatchevsky étudié dans l'atelier est tiré d'une traduction de Houël réédité sous le titre *La théorie des parallèles* aux éditions Monom. Le livre commence par une série de propositions *dont la démonstration n'offre aucune difficulté* puis Lobatchevsky attaque le cœur du problème.

16. Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, à savoir : en droites qui coupent la droite donnée, et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite parallèle à la droite donnée.

Soit abaissée, du point A, sur la droite BC, la perpendiculaire AD, et soit élevée au point A, sur la droite AD, la perpendiculaire AE. Dans l'angle EAD, il arrivera ou que les droites partant du point A rencontreront la droite DC, comme le fait AF, par exemple ; ou bien que quelques-unes d'entre elles comme la perpendiculaire AE, ne rencontreront pas DC.

Dans l'incertitude si la perpendiculaire AE est la seule droite qui ne rencontre pas DC, nous admettrons la possibilité qu'il existe encore d'autres lignes, telles que AG, qui ne coupent pas DC, quelque loin qu'on les prolonge. En passant des lignes AF, qui coupent CD, aux lignes AG, qui ne coupent pas CD, on trouvera nécessairement une ligne AH, parallèle à CD, c'est-à-dire une ligne d'un côté de laquelle les lignes AG ne rencontrent pas la ligne CD, tandis que, de l'autre côté, toutes les lignes AF rencontrent CD.

L'angle HAD, compris entre la parallèle AH et la perpendiculaire AD, sera dit l'angle de parallélisme, et nous le désignerons par $\pi(p)$, p représentant la distance AD.



Si $\pi(p)$ est un angle droit, le prolongement AE' de la perpendiculaire AE sera également parallèle au prolongement DB de la droite DC ; et nous ferons remarquer, à ce propos, que, par rapport aux quatre angles formés au point A par les perpendiculaires AE, AD et par leurs prolongements AE', AD', toute droite partant du point A est comprise, soit par elle-même, soit par son prolongement, dans un des deux angles droits dirigés vers BC, de sorte qu'à l'exception de la seule parallèle EE', toutes ces droites, prolongées suffisamment dans les deux sens, devront couper la droite BC.

Si l'on a $\pi(p) < \frac{\pi}{2}$, alors, de l'autre côté de AD, il y aura une autre droite AK, faisant avec AD le même angle $D\hat{A}K = \pi(p)$, laquelle sera parallèle au prolongement DB de la ligne DC ; de sorte que, dans cette hypothèse, il faut distinguer encore le sens du parallélisme. Toutes les autres droites comprises dans l'intérieur des deux angles droits dirigés vers BC appartiennent aux droites sécantes, lorsqu'elles sont situées dans l'angle $H\hat{A}K = 2\pi(p)$ des deux parallèles ; elles appartiennent, au contraire, aux droites non sécantes AG, lorsqu'elles sont situées de l'autre côté des parallèles AH, AK, à l'intérieur des deux angles $E\hat{A}H = \frac{\pi}{2} - \pi(p)$, $E'\hat{A}K = \frac{\pi}{2} - \pi(p)$, entre les parallèles et la droite EE', perpendiculaire sur AD. De l'autre côté de la perpendiculaire EE', les prolongements AH', AK' des parallèles AH, AK seront également parallèles à BC. Parmi les autres droites, celles qui sont dans l'angle K'AH' appartiendront aux droites sécantes, celles qui sont dans les angles KAE, HAE', aux droites non sécantes.

D'après cela, si l'on suppose $\pi(p) = \frac{\pi}{2}$, les droites ne pourront être que sécantes ou parallèles. Mais, si l'on admet que $\pi(p) < \frac{\pi}{2}$, on devra considérer alors deux parallèles, l'une dans un sens, l'autre dans le sens opposé ; de plus, les autres droites devront se distinguer en non sécantes et en sécantes. Dans les deux hypothèses, le caractère du parallélisme est que la ligne devient sécante par la moindre déviation vers le côté où est située la parallèle ; de sorte que, si AH est parallèle à DC, toute ligne AF faisant, du côté de DC, un angle HAF aussi petit que l'on voudra avec AH, coupera nécessairement DC.

En fait, Lobatchevsky commence là où Saccheri s'est arrêté. Il développe ensuite toute une série de théorèmes conséquences de l'hypothèse $\pi(p) \leq \frac{\pi}{2}$, dont voici quelques exemples.

19 – Dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux angles droits.

22 - Si deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la somme des angles d'un triangle rectiligne quelconque sera égale à π.

25 – Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.[2]

Puis viennent des calculs de trigonométrie menant aux relations entre les côtés a, b, c et les angles opposés $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ dans un triangle rectiligne :

$$(8)\qquad \begin{aligned} &\sin\hat{A}\tan\pi(a) = \sin\hat{B}\tan\pi(b) \\ &\cos\hat{A}\cos\pi(b)\cos\pi(c) + \frac{\sin\pi(b)\sin\pi(c)}{\sin\pi(a)} = 1 \\ &\cot\hat{A}\sin\hat{C}\sin\pi(b) + \cos\hat{C} = \frac{\cos\pi(b)}{\cos\pi(a)} \\ &\cos\hat{A} + \cos\hat{B}\cos\hat{C} = \frac{\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{\sin\pi(a)}. \end{aligned}$$

Dans le cas où a, b, c sont très petits, on pourra se contenter des déterminations approchées :

$$\cot\pi(a) = a$$
$$\sin\pi(a) = 1 - \frac{1}{2}a^2$$
$$\cos\pi(a) = a.$$

et de même pour les autres côtés b, c. Pour un tel triangle, les équations (8) deviennent donc :

$$b\sin\hat{A} = a\sin\hat{B}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$a\sin(\hat{A} + \hat{C}) = b\sin\hat{A}$$
$$\cos\hat{A} + \cos(\hat{B} + \hat{C}) = 0.$$

Les deux premières de ces quatre équations sont celles que fournit la géométrie ordinaire. Les deux dernières, combinées avec les premières, conduisent à la relation : $A + B + C = \pi$.

Donc la géométrie imaginaire se change dans la géométrie ordinaire lorsqu'on suppose les côtés d'un triangle rectiligne très petits.

[...]

Les équations (8) constituent par elles-mêmes une raison suffisante pour considérer comme possible l'hypothèse de la géométrie imaginaire. Il n'existe donc pas d'autre moyen que les observations astronomiques pour s'assurer de l'exactitude des calculs auxquels conduit la géométrie ordinaire.

[2] Il s'agit du parallélisme tel qu'il a été défini plus haut par Lobatchevsky.

Ainsi Lobatchevsky estime qu'il n'est pas nécessaire de prouver la non-contradiction de sa géométrie (qu'il appelle imaginaire), les relations analytiques qu'il a démontrées lui paraissant suffisantes. C'est ce que Jean-Luc Chabert a appelé « la vraie-fausse démonstration du cinquième postulat » (Voir *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*).

Les mathématiciens ne seront cependant convaincus que lorsque certains d'entre eux exhiberont des modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes, c'est-à-dire des objets issus de la géométrie euclidienne dont on sait montrer qu'ils satisfont les axiomes de la géométrie de Lobatchvesky. Il s'agit donc de définir des objets (qu'on appellera points et droites) pour lesquels les demandes 1, 2, 3, 4 et 6 d'Euclide sont satisfaites et la demande 5 ne l'est pas.

Pour cela, on se place dans le plan euclidien habituel, avec tous ses théorèmes connus. A l'intérieur de ce plan, on va définir un ensemble d'objets qu'on appellera les *points* et un autre ensemble d'objets qu'on appellera les *droites* ; avec nos connaissances du plan euclidien, nous démontrerons alors :

* Par deux points distincts passe une droite et une seule (demande 1 et 6)

* Par un point extérieur à une droite, il passe une infinité de parallèles à cette droite.

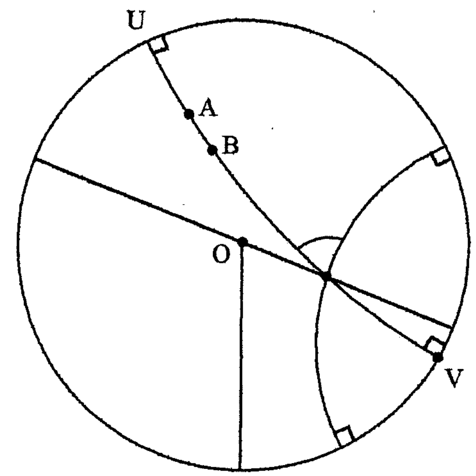
Il nous faudra être capable de définir les distances et les angles.

Divers mathématiciens ont donné des exemples de tels modèles : Beltrami (1835 -1900), Klein (1845 - 1925), Poincaré (1854 –1912), certains en ayant suggéré plus d'un.

Nous allons examiner le modèle de Klein-Poincaré.

Un exemple de modèle euclidien de géométrie non-euclidienne: le modèle de Klein-Poincaré.

Dans le plan euclidien, on fixe un cercle Γ de centre O de rayon k (k>0).



Le *plan* P est l'ensemble des points situés strictement à l'intérieur de Γ.

Les *droites* de P sont les diamètres ouverts de Γ et les arcs de cercles intérieurs à Γ orthogonaux à Γ.

L'angle de deux *droites* est leur angle euclidien (angle des tangentes dans le cas des cercles). On dit que le modèle est conforme.

La *distance* entre les points A et B est $d(A,B)=\left|\ln\left(\frac{AV}{AU}:\frac{BV}{BU}\right)\right|$ où AV, AU, BV et BU sont les distances euclidiennes.

On peut démontrer que par deux points distincts de l'intérieur strict de Γ non alignés avec le centre O de Γ, il passe un unique cercle orthogonal à Γ. La demande 1 d'Euclide (par deux points passe une unique droite) est donc, pour ce modèle de plan, un théorème de géométrie euclidienne.

Pour ce qui est de la demande 2, remarquons que si A tend vers V, B restant fixe, alors $\frac{AV}{AU}:\frac{BV}{BU}$ tend vers 0, donc son logarithme tend vers $-\infty$ donc $\lim_{A\to V} d(A,B)=+\infty$, c'est-à-dire que les droites sont infinies.

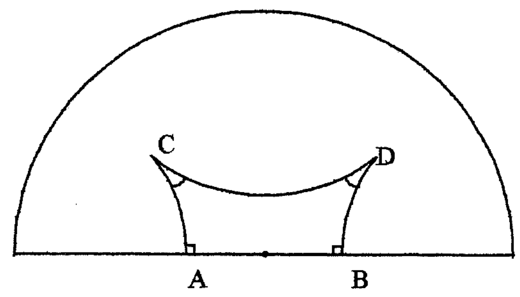
Notre distance est bien additive sur les points alignés : si A, B et C sont alignés au sens de notre modèle, dans cet ordre, alors : $d(A,B)=\ln\left(\frac{AV}{AU}:\frac{BV}{BU}\right)$ et $d(B,C)=\ln\left(\frac{BV}{BU}:\frac{CV}{CU}\right)$ (les valeurs absolues sont inutiles puisqu'on a pris la précaution d'avoir des rapports $\frac{AV}{AU}:\frac{BV}{BU}$ et $\frac{BV}{BU}:\frac{CV}{CU}$ supérieurs à 1).

On en déduit que :

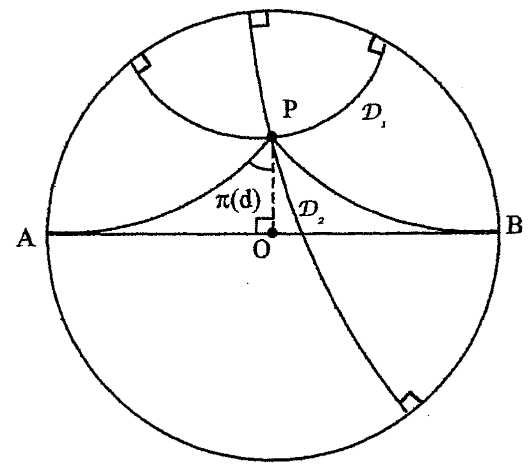
$$\begin{aligned} d(A,B)+d(B,C) &= \ln\left(\frac{AV}{AU}:\frac{BV}{BU}\right)+\ln\left(\frac{BV}{BU}:\frac{CV}{CU}\right) \\ &= \ln\left(\frac{AV}{AU}:\frac{BV}{BU}\right)\left(\frac{BV}{BU}:\frac{CV}{CU}\right) \\ &= \ln\left(\frac{AV}{AU}:\frac{CV}{CU}\right) \\ &= d(A,C). \end{aligned}$$

Remarquons qu'on a : $d(A,A)=\ln 1=0$ et

$$d(B,A)=\left|\ln\left(\frac{BV}{BU}:\frac{AV}{AU}\right)\right|=\left|-\ln\left(\frac{AV}{AU}:\frac{BV}{BU}\right)\right|=d(A,B).$$



Exemple de quadrilatère de Khayyam-Saccheri



Les *droites* passant par P sont séparées en deux types par les *droites* (PA) et (PB) :

- Type D_1 : non-sécantes à (AB)
- type D_2 : sécantes à (AB)

(PA) et (PB) sont les deux *droites* parallèles (au sens de Lobatchevsky) à (AB) passant par P.

$\pi(d)$ est l'angle de parallélisme associé à la *distance* $d = d(O,P)$.

Ainsi, à l'intérieur en quelque sorte de la géométrie euclidienne, on construit un modèle de géométrie non-euclidienne, satisfaisant les axiomes de Lobatchevsky. Si la géométrie de Lobatchevsky était contradictoire, alors la géométrie euclidienne le serait aussi. Démontrer le cinquième postulat uniquement avec les quatre autres demandes reviendrait donc à démontrer son absurdité !

Par ailleurs, Lobatchevsky a montré que la géométrie euclidienne était en fait *contenue* dans la géométrie non-euclidienne puisqu'elle correspond au cas limite de triangles infiniment petits (ce qui explique que notre feuille de papier, si petite par rapport aux dimensions de l'univers, nous donne si bien l'impression de la réalité de la géométrie euclidienne). La non contradiction de l'une est donc équivalente à la non-contradiction de l'autre. Est-on maintenant sûr de nous ? Ou risquons-nous soudain de découvrir une faille dans la géométrie euclidienne ? Par le biais des coordonnées cartésiennes des points du plan, le problème est ramené à la non-contradiction de la théorie des nombres réels, subordonnée par les différentes constructions des nombres réels (par exemple, les coupures de Dedekind) à celles de l'arithmétique des nombres entiers.

Bibliographie

[Cha86] Chabert J.L. (1986) La préhistoire des géométries non-euclidiennes, IREM de Picardie.

[Cha90] Chabert J.L. (1990) Les géométries non-euclidiennes, in Repères n° 1, Topiques éditions.

[Cha93] Chabert J.L. (1993) La vraie-fausse démonstration du 5ème postulat, in Histoires de Problèmes, Histoire des mathématiques, Ellipses.

[Jao86] Jaouiche K. (1986) La théorie des parallèles en pays d'Islam, Vrin, Paris.

[Pey66] Peyrard (1819) Les œuvres d'Euclide, Paris, 1819 ; réédition Blanchard, Paris, 1966.

[Lob80] Lobatchevski N. I. (1866) Etudes géométriques sur la théorie des parallèles, traduction française Houël J., réédition Monom, 1980.

[Ras99] Rashed R. & Vahabzadeh B. (1999) Al-Khayyām mathématicien, Blanchard, Paris.

[Sac20] Saccheri G. (1773) Euclides ab omni naero vindicatus, Milan, traduction anglaise, Halsted, Chicago, 1920.

LA LINÉARITE A TRAVERS QUELQUES SIÈCLES

Michel Ballieu & Marie-France Guissard

CREM (Nivelles, Belgique)

Résumé

Durant cette année 1999-2000, le thème de recherche retenu par le CREM est la linéarité. Une approche historique de ce sujet peut être envisagée à partir de l'étude de différents textes anciens montrant comment les méthodes de fausse position ont permis de résoudre des problèmes linéaires depuis les mathématiques égyptiennes jusqu'à celles du quinzième siècle au moins. Pour illustrer cela, nous étudierons les problèmes 24 à 28 du papyrus Rhind, un manuscrit en latin traduit d'un ouvrage arabe attribué à Abu Kamil, un texte du treizième siècle de Leonardo Fibonacci Pisano et un texte de Luca Pacioli du quinzième siècle.

D'autre part, nous montrerons aussi comment la notion de combinaison linéaire peut être dégagée du travail d'Archimède sur l'équilibre des surfaces planes pour la recherche du barycentre et comment cette même notion est directement utilisée par Fibonacci pour résoudre des équations linéaires diophantiennes indéterminées.

1. Mathématiques égyptiennes

1.1 Introduction

Notre connaissance des mathématiques égyptiennes repose sur un très petit nombre de documents et ne peut dès lors être que très incomplète. Le fait que peu de textes nous soient parvenus est évidemment une conséquence de la fragilité du support sur lequel ils ont été rédigés, à savoir le papyrus.

Parmi les documents existants, l'un des plus connus est sans doute *le Papyrus Mathématique Rhind* conservé dans la troisième salle égyptienne du *British Museum* où il est catalogué sous les numéros BM 10057 et BM 10058. Ce sont deux grands morceaux dont la largeur vaut plus ou moins 32 cm pour des longueurs respectives d'environ 206 et 319 cm. Une petite partie qui se situe juste entre les deux précédentes est la propriété de l'*Historical*