Annexe 2 : Tableau récapitulatif des méthodes de résolution rencontrées

Problème	Données	Résultats	Résolution
3	b, c	a	$a=\sqrt{c^2-b^2}$
6	$a, c-b$	b, c	$b=\dfrac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=\dfrac{5^2-1^2}{2\times 1}$ $c=b+(c-b)$
7	$b, c-a$	c	$c=\dfrac{\dfrac{b^2}{c-a}+c-a}{2}$
8	$a, c-b$	c	$c=\dfrac{\dfrac{a^2}{c-b}+c-b}{2}$
11	$c, b-a$	a, b	$a=\sqrt{\dfrac{c^2-2\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2}{1}}-\dfrac{b-a}{2}$ $b=\sqrt{\dfrac{c^2-2\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2}{1}}+\dfrac{b-a}{2}$
12	$c-a, c-b$	a, b, c	$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)$ $b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)$ $c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)$

À PROPOS DE QUELQUES PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE DANS LA CULTURE MARCHANDE DE LA FRANCE MÉRIDIONALE DU XV^e SIÈCLE : UN HÉRITAGE LOINTAIN

Maryvonne Spiesser

IREM de Toulouse

Résumé

Les arithmétiques marchandes composées en langue vulgaire à la fin du Moyen Age proposent souvent, à côté des exercices directement liés à l'organisation et à la pratique du commerce, toute une gamme de problèmes qui n'ont aucune vocation professionnelle directe. La plupart d'entre eux ont une origine très lointaine. Au cours des siècles, le corpus s'est enrichi d'énoncés plus sophistiqués, les méthodes de résolution se sont diversifiées. Ces problèmes – dont certains étaient encore enseignés il n'y a pas si longtemps – constituent un terrain très riche pour l'étude de la transmission des savoirs. Nous abordons ces différents aspects à partir de quelques exemples issus des arithmétiques commerciales de la France méridionale.

Introduction

Les problèmes dont il va être question font partie de l'arithmétique dite élémentaire. C'est le type d'exercices que l'on pouvait encore trouver dans les manuels de préparation au certificat d'études primaires, il y a une soixantaine d'années. Leur histoire s'intègre tout à fait dans le thème de ce colloque, 4000 ans de mathématiques, puisqu'on peut suivre les traces de certains énoncés depuis le deuxième millénaire avant J. C. Citons en exemple cette comptine bien connue qui met en jeu les progressions géométriques, à partir d'un recueil anglais du début du XX^e siècle[1] :

[1] *Every Child's Mother Goose*, introduction by Carolyn Wells, New-York 1918, p. 111.

As I was going to Saint Yves / I met a man with seven wifes / Every wife had seven sacks / Every sack had seven cats / Every cat had seven kids / Kids, cats, sacks and wifes / How many were they going to Saint Yves ?

Des siècles auparavant, vers 1650 avant notre ère, la même question est posée dans le problème 79 du Papyrus Rhind[2] :

Inventaire d'une maison		Maisons	7
1	2801	Chats	49
2	5602	Souris	343
4	11204	orge	2301 (erreur : 2401)
		Boisseau	16807
total	19607	Total	19607

D'après Johannes Tropfke[3], le même problème est rapporté au III^{e} siècle après J. C. par le mathématicien chinois Sun Tzu. Nous le retrouvons dix siècles plus tard dans le *Liber abbaci* de Léonard de Pise, sous la forme de sept vieilles femmes en chemin pour Rome[4].

L'histoire des problèmes d'arithmétique ou de géométrie élémentaire n'a jamais été achevée, et pour cause : c'est une tâche immense qui nécessite la maîtrise de nombreuses langues ; elle ne pourrait être que le fruit d'un travail collectif[5]. Les études partielles qui ont été entreprises montrent d'ores et déjà l'intérêt d'un tel travail, que ce soit du point de vue de l'histoire sociale et culturelle[6], de l'histoire de l'éducation, de l'étude des méthodes mathématiques de résolution et de la recherche des voies de transmission.

Dans l'Europe du XV^{e} siècle, les traités d'arithmétique destinés au milieu marchand sont des sources particulièrement riches lorsqu'on s'intéresse aux problèmes d'arithmétique et de géométrie élémentaires. La gamme des exercices traités est très variée ; elle va des applications commerciales immédiates aux devinettes où seule la logique est monopolisée. Pour la France, ces ouvrages ont un intérêt dans l'histoire de l'enseignement : ce sont les premiers représentants d'un genre dont les manuels d'arithmétique élémentaire du début du XX^{e} siècle sont les héritiers directs. Parmi les textes écrits dans notre pays, les plus riches en exercices sont souvent ceux qui proviennent du pays d'Oc. C'est sur ces ouvrages que je m'appuierai. Ils ont été écrits entre 1420 environ et la fin du siècle.

---

[2] D'après la transcription de A. Chace, *The Rhind mathematical Papyrus*, p. 136-37. Dans la colonne de droite, les différentes puissances de 7 sont calculées et ajoutées. Dans la colonne de gauche, on multiplie 2801, somme des quatre premiers termes de la suite (7^n), par 7. Cela correspond peut-être à la formule récurrente donnant la somme s_{n+1} en fonction de s_n lorsque le premier terme est égal à la raison q : $s_{n+1} = q\,(s_n + 1)$.

[3] J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, p. 629-630. [Tro80]

[4] Léonard de Pise, *Liber abbaci*, Edition Boncompagni, p. 311.

[5] A ce sujet, voir W. Van Egmond, Types and Traditions of Mathematical Problems. [Veg96]

[6] Voir Lamassé S., Les exercices de compagnie, entre commerce et mathématiques, *Actes du colloque international de Beaumont-de-Lomagne : Commerce et mathématiques du Moyen Age à la Renaissance autour de la Méditerranée*, 13-16 Mai 1999, éd. CIHSO, Toulouse, 2001, p. 285-300.

Bien sûr, les arithmétiques destinées aux marchands ne sont pas la source exclusive des problèmes qui ont circulé à la fin du Moyen Age. Avant d'entrer dans le vif du sujet, il me paraît nécessaire de situer les arithmétiques marchandes dans le contexte plus général de l'arithmétique médiévale. Je replacerai également dans la tradition commerciale le corpus de textes sélectionnés et je préciserai la place et la raison d'être des problèmes dans les textes.

1. Qu'est-ce que l'arithmétique en France au Moyen Age ?

Les auteurs médiévaux opposent la *spéculative* et la pratique, autrement dit la théorie et la pratique. Deux sortes d'ouvrages d'arithmétique répondent à cette distinction : ceux qui divulguent l'enseignement du néopythagoricien Nicomaque de Gérase (I^{er}-II^{e} siècle) et ceux qui enseignent l'art du calcul.

1.1 L'arithmétique spéculative

Le contenu est celui de *l'Institution arithmétique*, ouvrage écrit par Boèce au VI^{e} siècle, qui reprend *l'Introduction arithmétique* de Nicomaque. Boèce étudie d'abord les propriétés intrinsèques des entiers (en opposant des couples comme pair-impair, premier-composé, ...), puis les relations entre les nombres (nombres premiers entre eux, par exemple). L'opposition égalité-inégalité guide ensuite les classifications. Ainsi, de l'inégalité dérivent les diverses sortes de rapports, multiples, superparticuliers, superpartients[7], et leurs composés. La majeure partie du deuxième livre est consacrée à l'étude des nombres figurés et des différentes moyennes, en relation avec la théorie des intervalles musicaux.

Ces connaissances font partie du programme du *quadrivium* à l'Université, mais on ne sait pas dans quelle mesure elles étaient véritablement enseignées.

1.2 L'arithmétique pratique

Deux sortes d'ouvrages enseignent la pratique du calcul. Dans les traités d'abaque, on apprend à manipuler des jetons sur une table à calculer. Les algorismes, quant à eux, enseignent le système de numération indo-arabe et les pratiques opératoires fondées sur ce système. Les premiers textes sont des adaptations latines du *Calcul indien* d'al-Khwārizmī, d'où leur nom de baptême. Dans les facultés des arts, l'algorisme fait partie de l'arithmétique du *quadrivium*. Mais, même à l'Université de Paris, on sait que les matières scientifiques sont délaissées au profit de l'enseignement de la grammaire ou de la logique, soit des matières du *trivium*. Ainsi, les sources dont on dispose laissent entrevoir que les maîtres enseignaient souvent les sciences durant les congés et jours fériés[8].

---

[7] Un rapport superparticulier (resp. superpartient) est de la forme $1 + \frac{1}{n}$ (resp. $1 + \frac{p}{n}$, $1<p<n$).

[8] Voir O. Weijers et L. Holtz (éds), *L'enseignement des disciplines à la Faculté des arts*... [Wei97] et plus particulièrement l'article de Guy Beaujouan dans le même recueil : Le *quadrivium* et la Faculté des arts, p. 185-194.

L'apprentissage de l'algorisme se fait essentiellement à partir de deux textes qui datent du début du XIII^e siècle : le *Carmen de algorismo* (composition en vers) d'Alexandre de Villedieu (1202) et l'*Algorismus vulgaris* de Sacrobosco, vers 1220-1230. Ces deux traités enseignent la pratique de la numération indo-arabe, ainsi que les opérations sur les entiers, qui portent les noms latins suivants : *additio* ; *subtractio* ; *mediatio* ; *duplatio* ; *multiplicatio* ; *divisio* ; *progressio* ; *radicum extractio* (*in cubicis et quadratis*). Ils ont été très copiés[9], puis adaptés dans les langues vernaculaires ; cependant les copies sont surtout nombreuses dans le Nord de l'Europe (Nord de la France ou Angleterre par exemple).

Pour entraîner au calcul[10], les algorismes étaient associés à des recueils de problèmes, qui reprenaient entre autres les *Propositiones ad acuendos juvenes* attribuées à Alcuin[11] (York c. 735, Tours 804). Ces recueils portent le titre de *subtilitates, cautele, enigmata*, ... Etant donnée leur ressemblance, il semble qu'ils dérivent d'un unique modèle, peut-être compilé par Sacrobosco lui-même[12]. Les problèmes sont déconnectés de la vie courante et les solutions sont exposées de manière sommaire. Bon nombre d'entre eux se retrouvent dans les arithmétiques commerciales.

Dans la catégorie des algorismes, il existe également un riche corpus de traités non universitaires, écrits en langue vernaculaire, dont l'objectif est de fournir au marchand les techniques mathématiques indispensables à la pratique de son métier. Ces traités ont fleuris nombreux en Italie, dès le XIV^e siècle. Leur modèle est le *Liber abbaci*, dont la première version fut composée par Léonard de Pise en 1202. Ce texte encyclopédique d'arithmétique et d'algèbre a beaucoup contribué à diffuser le système de numération indo-arabe.

C'est à cette dernière catégorie que se rattachent les ouvrages dont je vais parler maintenant.

2. Les arithmétiques marchandes de la France méridionale

Les traités marchands originaires de la France méridionale sont dans l'ensemble plus fournis en exercices que leurs équivalents septentrionaux ; ils sont moins imprégnés de l'algorisme de Sacrobosco, et davantage influencés par la production italienne. Le domaine géographique à l'intérieur duquel ont été composés les textes que j'ai pris en référence comprend la vallée du Rhône au Nord, la Provence, le Languedoc, et se prolonge à l'ouest jusqu'aux Pyrénées. Nous possédons actuellement une dizaine de textes d'arithmétique

[9] Des centaines de copies de ces deux textes sont répertoriées (W. Van Egmond, How Algebra..., p. 132. [Veg88])

[10] Les calculs étaient initialement inscrits sur une surface recouverte de sable ou de poussière, les résultats intermédiaires étant effacés. Voir G. Beaujouan, The Transformation of the Quadrivium, p. 468-469 [Bea91].

[11] Alcuin est né à York vers 735 et mort à Tours en 804. Il fut appelé par Charlemagne pour superviser l'organisation de l'éducation. Il n'est pas absolument certain que la paternité de ce texte lui revienne. Cependant, selon M. Folkerts et H. Gericke, [Die Alkuin Zugeschriebenen Propositiones ad acuendos iuvenes, p. 313 ; voir Alcuin dans la bibliographie], plusieurs indications permettent de situer avec certitude le recueil à l'époque où vécut le moine de York. Cela fait des *Propositiones* le plus ancien recueil de problèmes en langue latine.

[12] D'après G. Beaujouan, L'enseignement de l'arithmétique élémentaire à l'Université de Paris aux XIII^e-XIV^e siècles, p. 116. [Bea91b]

marchande (ou affiliés) originaires de cette région, pour une période qui va de 1420 à la fin du siècle[13]. La langue d'écriture est le français ou l'occitan (avec ses variantes).

2.1 Influences

Dans les bibliothèques italiennes sont conservés environ 300 manuscrits sur l'arithmétique et l'algèbre, écrits aux XIV^e et XV^e siècles[14]. Le contraste est fort et reflète le décalage entre le grand commerce italien et le commerce français. Dès le XIV^e siècle – en Toscane tout particulièrement – la complexification croissante des échanges et des tractations a impulsé la création d'*écoles d'abbaque* destinées à la formation de futurs marchands. Les maîtres d'abbaque, qui dirigent ces écoles laïques, sont le plus souvent les auteurs des arithmétiques pratiques à l'usage des marchands, les *Traités d'abbaque*[15], ainsi nommés en référence à leur source principale d'inspiration, le *Liber abbaci* de Fibonacci (1202).

Il ne faut pas s'y tromper. Dans les traités d'abbaque, on enseigne le calcul écrit sur papier à l'aide de la numération indo-arabe. Les genres sont très diversifiés ; certains livres sont des recueils de problèmes, d'autres décrivent auparavant les pratiques opératoires. On trouve de beaux ouvrages enluminés, réalisés dans des ateliers de copistes, et, à l'opposé, des textes nettement plus négligés, des brouillons en quelque sorte. Enfin, le niveau mathématique varie beaucoup. Certains maîtres d'abbaque ont acquis une culture mathématique solide : culture classique avec des références aux auteurs grecs, ou à Boèce, culture moderne aussi avec le développement de chapitres consacrés à l'algèbre, telle que Fibonacci l'a transmise à l'Italie au début du XIII^e siècle.

Le modèle italien a certainement influencé la composition des traités méridionaux français. On connaît d'ailleurs deux maîtres d'abbaque venus enseigner à Montpellier au XIV^e siècle (Jacopo da Firenze, vers 1307 et Paolo Gherardi, vers 1327) ; en outre, une arithmétique anonyme, conservée à la bibliothèque Riccardiana de Florence, *l'Arte dell'abbaco*, a été écrite en toscan dans la région d'Avignon vers 1330[16]. En 1466, la ville de Lyon, dont le commerce est très actif, compte 15 succursales de maisons florentines[17]. A la charnière entre les XV^e et XVI^e siècles, plusieurs algoristes connus ont vécu dans cette cité.

Si le savoir des Italiens en matière d'arithmétique commerciale a profité au milieu commercial français, d'autres sources d'influence sont présumables, venues d'Espagne cette fois. La première arithmétique marchande du corpus que je considère est le traité anonyme dit *de Pamiers*, qui intègre des pratiques étrangères aux traités d'abbaque italiens. La ville de

[13] La liste de ces traités figure en annexe.

[14] W. Van Egmond les a répertoriés dans *Practical Mathematics in the Italian Renaissance.* [Veg80]

[15] L'orthographe avec deux *b* est celle qui est adoptée par W. Van Egmond, en référence au *Liber abbaci.* Elle permet de distinguer ces textes des traités dont le calcul est fondé sur l'utilisation des tables d'abaque.

[16] La présence de la papauté à Avignon durant une bonne partie du XIV^e siècle avait accru la circulation des hommes et les communications entre l'Italie et la France. A cette époque, 25% environ de la population d'Avignon, 10 à 15% de celle de Montpellier, est toscane (voir Y. Renouard, *Les hommes d'affaires italiens au Moyen Age*, A. Colin, Paris, 1972, 3^e éd. (1^e éd. 1949).

[17] A. C. Gelé Seautereau, L'appendice au Triparty de N. Chuquet et les traditions mathématiques du Sud de la France, *Actes du colloque international « Commerce et mathématiques du Moyen Age à la Renaissance autour de la Méditerranée occidentale », Beaumont de Lomagne 13-16 Mai 1999*, CIHSO, Toulouse, 2001, p. 271-283.

Pamiers est située sur l'axe Barcelone-Toulouse, voie de passage fréquentée entre la France et l'Espagne : des textes d'archives montrent que beaucoup de voyageurs venant d'Espagne passent par le comté de Foix[18]. Il existe d'ailleurs une arithmétique en catalan, imprimée à Barcelone en 1482, qui a beaucoup de points communs, même dans le détail, avec son aînée l'arithmétique de Pamiers et que l'on associera au corpus français et occitan considéré.

2.2 La composition des traités

Contrairement aux traités d'abbaque italiens, dont la composition est très diversifiée, les arithmétiques commerciales de notre corpus ont un caractère homogène. Leur structure générale est celle du premier texte connu du genre, le *Compendi del art del algorisme* de Pamiers. Cette homogénéité de construction fait des arithmétiques marchandes du Sud une famille distincte et bien typée.

Les trois premières parties du *Compendi* de Pamiers répondent aux besoins immédiats des marchands : savoir compter et manier la *règle d'or*, c'est-à-dire la règle de trois. La première partie expose d'abord la numération décimale de position, avec utilisation des chiffres indo-arabes, puis la pratique écrite des opérations (addition, soustraction, multiplication, division, extraction des racines carrées et cubiques). Sont intégrées des applications aux calculs sur les monnaies, les poids et mesures.

Dans la seconde partie, le lecteur apprend à réduire les fractions au même dénominateur ; les opérations sont ensuite présentées dans le même ordre que pour les entiers ; elles sont suivies de méthodes de simplification des fractions, puis de calculs approchés de racines carrées (ou cubiques) par des rationnels.

Les problèmes utiles au marchand utilisent tous la règle de trois, de manière directe ou détournée. C'est l'objet de la troisième partie. Etant donné la multiplicité des monnaies de l'époque, le marchand doit connaître les rudiments du change, il pratique le troc, il doit savoir calculer des intérêts, etc. Deux modèles d'organisation sont la source de nombreux exercices, qui les reproduisent de manière simplifiée :

– Les compagnies et la règle du même nom qui en découle, issue de la règle de trois. Le commerce s'effectue de plus en plus par l'intermédiaire de sociétés (les Italiens sont pionniers dans ce domaine) qui regroupent des hommes ou des associations pour un temps. Le partage des gains et pertes se fait proportionnellement à la fraction de capital apportée par chacun (et éventuellement du temps de mise à disposition du capital).

– Les contrats entre *bailleurs* et *facteurs*. Un homme d'affaires, voulant faire fructifier son capital, s'en remet à un intermédiaire. Celui-ci apporte ou non un capital personnel ; il met surtout son travail, *sa personne*, à disposition. Les bénéfices sont alors répartis suivant un contrat préétabli.

Tous les problèmes d'application au métier forment le premier volet des *exercices*. Dans les traités considérés ici, trois chapitres suivent, qui portent chacun le nom d'une règle : règle

[18] Dans des documents comme les leudaires, on obtient des renseignements sur le type de marchandises qui circulent (donc sur la provenance), sur les monnaies, sur les personnes (les taxes sont différentes selon la religion).

d'une fausse position, de deux fausses positions[19], règle d'apposition et rémotion. Cette dernière règle n'en est pas vraiment une ; il s'agit davantage de tâtonnements pour résoudre des problèmes linéaires indéterminés[20]. Elle est inconnue dans les arithmétiques italiennes.

Les problèmes proposés à l'intérieur de ces trois règles sont presque exclusivement de type linéaire. Ici ne dominent plus les questions à vocation pratique. Le prétexte est souvent une situation commerciale, mais celle-ci n'est pas forcément réaliste. Le contenu varie cependant d'un traité à l'autre, selon qu'il est ou non exclusivement tourné vers l'apprentissage du commerce, donc selon le lectorat visé.

Une différence primordiale avec les traités d'abbaque italiens est l'ignorance de l'algèbre : pas une seule ligne sur la résolution des équations du second degré ; aucun problème résolu par la *règle de la chose*. Exception faite de Chuquet et de sa *rigle des premiers*, dont l'origine reste une énigme, aucune résolution algébrique n'apparaît dans le corpus que j'ai décrit[21]. Les raisonnements sont de nature arithmétique, fondés sur le modèle de la proportionnalité. Des auteurs toscans, on l'a vu, sont venus enseigner en France, et leurs traités contenaient un chapitre d'algèbre. Ils sont même reconnus parmi les premiers maîtres à avoir inscrit l'algèbre dans un traité en langue vernaculaire. Pourtant, très peu de témoignages de la circulation de l'algèbre en France sont conservés[22]. Pourquoi le milieu marchand français – et le milieu méridional tout particulièrement – ignore-t-il complètement les méthodes algébriques ? C'est une question à laquelle il est encore difficile de répondre actuellement et un sujet qui mériterait d'être approfondi.

3. Les problèmes non mercantiles : essai de classification

Alors que les problèmes d'application au commerce reflètent directement une époque et sont adaptés aux pratiques commerciales du temps, les exercices non mercantiles ont souvent des origines très lointaines. Un certain nombre d'entre eux ont perduré jusqu'à nos jours.

[19] Le principe de la règle de simple fausse position est le suivant. Pour résoudre un problème du type $ax = b$, on suppose que le résultat est x_1, qui conduit à b_1. La valeur cherchée est alors obtenue par proportionnalité. La règle de double fausse position permet de résoudre des équations ou des systèmes linéaires, lorsqu'on ne sait pas procéder par un calcul direct. Prenons le cas le plus simple d'une seule équation d'inconnue x. On octroie successivement à x deux valeurs x_1 et x_2 (deux fausses positions). Les calculs font en général apparaître des erreurs e_1 et e_2. La valeur cherchée est alors $x = \frac{x_1 e_2 - x_2 e_1}{e_2 - e_1}$.

[20] *Appositio* et *remotio* : action d'ajouter et d'enlever. Exemple de problème classique résolu de cette façon : on considère 12 personnes comprenant des hommes, des femmes et des enfants, qui doivent se partager 12 deniers. Chaque homme en reçoit 2, chaque femme 1 et chaque enfant 1/2. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfants ?

[21] W. Van Egmond a posé le problème en 1984 dans une intervention faite au colloque organisé à Oxford à l'occasion du cinq centième anniversaire de la parution du *Triparty en la science des nombres* de Chuquet (Van Egmond W., How algebra came to France, p. 127-144). [Veg88]

[22] Voir W. Van Egmond, How algebra came to France. [Veg88]

La question de la classification des problèmes circulant dans les traités médiévaux a été souvent débattue, car elle n'est pas simple[23]. En dehors des exercices de géométrie pratique, qu'on ne considère pas ici, on pourrait distinguer trois genres : problèmes pratiques – qui se posent réellement dans la vie –, pseudo réels, et récréatifs (énigmes, recherche de nombres, etc.). Sachant la part d'arbitraire qu'implique le plus souvent le choix entre problème pseudo réel et problème récréatif, je distinguerai seulement les problèmes de la vie quotidienne, qui débattent de situations auxquelles est confronté le marchand, telles que le change, le troc, les intérêts, etc., des autres que je qualifierai de *non mercantiles* ou *récréatifs* à défaut d'une meilleure appellation. Ce sont ces problèmes-là qui nous intéresseront dorénavant[24]. Parmi eux, et bien que les frontières ne soient pas hermétiques –un même problème changera de catégorie selon la façon dont il est énoncé–, on peut tenter les distinctions suivantes.

3.1 Recherche de nombres

Exemples

Partiz 30 en deux parties que la premiere soit double meins 6 de la seconde.

(Barthélemy de Romans, *Compendy de la praticque des nombres*, f. 172r).

Partiz 12 en deux parties inegales que si la meindre partist la plus grand le quotient sera 17.

(idem, f. 216v).

3.2 Vrais problèmes récréatifs, jeux de l'esprit, comptines

Simple recherche de nombres, énigmes, récits et comptines, ils sont repris sous des formes variées d'un traité à l'autre. La comptine sur les progressions géométriques de raison 7, citée en introduction, est un exemple. On peut aussi mentionner le célèbre problème traditionnellement baptisé *Le loup, la chèvre et le chou*, mais dont l'énoncé a connu de multiples variantes. Dans les *Propositiones ad acuendos juvenes*, Alcuin en propose trois versions. La seconde est la *Propositio de lupo et capra et fasciculo cauli*[25].

Un homme devait transporter un loup, une chèvre et un chou sur l'autre rive d'un fleuve. Il ne put trouver un bateau qui fût suffisamment robuste pour supporter plus de deux d'entre eux. Il devait les faire passer tous entièrement indemnes de l'autre côté. Dit, qui le peut, comment il peut les faire traverser sains et saufs.

La première version (proposition 17) met en scène trois frères accompagnés chacun d'une sœur. Le bateau ne peut transporter que deux personnes à la fois et les sœurs ne doivent pas s'égarer avec un autre homme que leur frère (*erat enim unicuique illorum concupiscentia in*

[23] Voir M. Spiesser, *Entre théorie et pratique, le* Compendy de la praticque des nombres..., tome 1, p. 51-54. [Spi99]

[24] La classification binaire qui vient d'être faite, Léonard de Pise l'a lui-même opérée : il a regroupé les applications au commerce dans les chapitres VIII à XI du *Liber abbaci* et les autres problèmes dans les deux chapitres suivants, XII et XIII (le chapitre XIII étant réservé à la méthode de double fausse position).

[25] Proposition 18, traduction libre du latin, d'après l'édition de M. Folkerts et H. Gericke, Die Alkuin Zugeschriebenen ..., p. 317. (voir Alcuin en bibliographie)

sorore proximi sui[26]). Ce thème est souvent repris par la suite, avec des accents plus ou moins grivois. On retrouve le problème dans l'appendice au *Triparty* de Chuquet (f. 209), avec le souci du détail et du romanesque, et par la suite dans les *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*[27] de Bachet de Méziriac.

Quant au troisième énoncé d'Alcuin (proposition 19), il change de registre. Il met en scène une femme, son mari et leurs deux enfants. Pris séparément, la femme, le mari, les deux enfants pèsent *le poids d'une charrette pleine.* Le bateau qui les fait traverser la rivière ne peut supporter plus que cette charge. Comment faire ?

3.3 Pseudo-problèmes de la vie quotidienne

Même si le sujet initial provient d'expériences vécues, les énoncés évoluent souvent dans un sens tel que la situation devient une fiction pure. Par exemple, on demande de trouver le poids d'un poisson avec les données suivantes :

Posons que la teste d'un poysson poyse le $\frac{1}{3}$ *de tout le poysson et la queue poyse le* $\frac{1}{4}$ *de tout le poysson, et le corps, qui est oultre la teste et la queue, poyse* 8 *onces. Assavoir que poyse tout le poysson.*[28]

Parmi ces exercices, beaucoup sont de type linéaire. Mais ce n'est pas toujours le cas. Citons, par exemple, ce problème classique de congruences : une marchande est désemparée car on lui a cassé ses œufs dont elle ignore le nombre. Elle possède heureusement des clefs qui vont permettre de la dédommager : si elle compte ses œufs par 2, 3, 4, 5 ou 6, il lui en reste 1 et si elle les compte par 7, il ne lui en reste aucun. Ce problème court depuis les mathématiques chinoises, se retrouve dans des textes arabes, puis chez Léonard de Pise et dans les traités occidentaux du Moyen Age.

J'en viens maintenant à deux exemples particuliers. Ils ont été choisis pour illustrer l'évolution dans la présentation des énoncés et en même temps la créativité, la fantaisie dans l'imagination de situations nouvelles, pour montrer la diversité des méthodes de résolution et pour dire enfin tout l'intérêt d'une étude comparative des problèmes dans la recherche des voies de transmission des connaissances. Le premier exemple est très répandu : il s'agit du remplissage (ou du vidage) d'un réservoir muni de plusieurs conduits ; le second parle de l'achat d'une marchandise entre plusieurs personnes. Apparemment donc, des situations axées sur la pratique.

[26] *Chacun d'eux montrait en effet de la concupiscence envers la sœur de son proche.*

[27] Le chapitre est intitulé : *S'ensuivent quelques petites subtilités des nombres que l'on propose ordinairement.* (*Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, paragraphe IV, p. 148-153 de l'édition Blanchard, Paris, 1959).

[28] Anonyme, ms Nantes, médiathèque, 456, f. 67r. Les apostrophes, certains accents, ainsi que la ponctuation moderne seront désormais rétablis dans toutes les transcriptions du Français ancien.

4. A propos de deux problèmes

4.1 Enoncés et méthodes : le problème de la citerne

Ung vaisseau de vin plain a troys broches l'une plus grande que l'autre. Et tellement que qui osteroit l'une des broches, tout le vin s'en sailliroit en 3 heures. Qui lieveroit la moyenne, il se vuyderoit en 4 heures. Et qui tireroit la plus petite broche, tout le vin seroit vuydé en 6 heures. L'on demande qui tireroit toutes les troys broches ensemble en combien de temps seroit vuydé le vin d'icelluy vaisseau.

(Mathieu Préhoude, *Traicté de la praticque d'algorisme*, f. 81r.)

Le vaisseau est une cuve, un tonneau rempli de vin, qui possède trois bondes de débit différent, par lesquelles le liquide peut s'écouler. Sachant en combien de temps chacune permet, à elle seule, de vider le tonneau, il s'agit de trouver en combien de temps il sera vide si les trois bondes sont ouvertes.

Des premiers textes chinois connus aux arithmétiques élémentaires françaises du début du XX^e^ siècle, en passant par les textes indiens, byzantins, arabes, et les traités de l'Europe médiévale, ce problème est l'un des plus répandus dans la littérature mathématique. *No problem had a longer and more continuous history*, écrit David Eugen Smith dans un article intitulé *On the origin of certain typical problems* et, ajoute-t-il, *the traveller who is familiar with the Mediterranean lands cannot fail to recognize that here is its probable origin*[29]. Smith fait ici allusion aux nombreuses fontaines méditerranéennes. Si c'est là l'origine de ces problèmes, les énoncés ont pris des formes si variées au cours des siècles qu'il serait vain de rechercher le côté réaliste de certains ! Au lieu d'alimenter ou de vider une citerne ou une fontaine, on cherche à faire construire une maison par plusieurs maçons, à faire moudre du grain par plusieurs moulins, à calculer la durée du trajet d'un navire qui possède plusieurs voiles[30], à faire dévorer un animal par plusieurs bêtes... ou encore à trouver en combien de temps une femme et son mari auront bu une quantité donnée de vin[31] !

Certaines formulations sont très personnalisées ; on est alors loin de la sécheresse du banal réservoir à remplir ou à vider. Un bon exemple figure dans l'*Anthologie grecque.* Ce recueil est un ensemble d'épigrammes, d'énigmes et d'oracles, rassemblés par un compilateur inconnu autour de 980. Certains énoncés datent des troisième et quatrième siècles, d'autres remontent au moins à l'époque de Platon. Le Livre XIV renferme 45 problèmes mathématiques, parmi d'autres propos. C'est le plus vaste recueil que l'on possède de tels problèmes écrits en langue grecque. Ils sont dus en grande partie à Métrodore, grammairien et arithméticien byzantin qui vivait probablement au temps de Constantin le Grand (III-IV^e^ s.).

[29] D. E. Smith, On the origin of certain typical problems, p. 65. [Smi17]

[30] Exemple dans le manuscrit 456 de la Médiathèque de Nantes (f. 66v) : *Posons que une gallee qui a troys voilles parte de Honnefleu pour aller en Alixandrie ou Marceille ; et avec le grand voille y va en troys moys, avec le moyen en 4 moys et avec le mendre en 6 moys. Ores qui desplaieroit toutz les troys voylles, je demande en quel temps elle seroit au lieu proposé.*

[31] Arithmétique de Gemma Frisius, 1540 ; cité par D. E. Smith in « On the origin of certain typical problems », p. 66. [Smi17]

Cinq d'entre eux sont des variations autour du thème de remplissage d'un réservoir. Le troisième énoncé se présente ainsi[32] :

Voici Polyphème le Cyclope d'airain. On lui a fait un œil, une bouche et une main qui sont reliés à des conduits. On dirait qu'il ruisselle d'eau et il semble aussi qu'il la fasse jaillir de la bouche. Aucun des jets n'est irrégulier. Celui qui sort de sa main remplira la citerne en seulement trois jours, celui de l'œil en un jour et sa bouche en deux cinquièmes de jour. Qui me dira le temps nécessaire quand tous trois sont en action ?

Avant de présenter quelques textes et d'en comparer les solutions, j'ai choisi d'exposer le problème sous sa formulation actuelle. Il ne s'agit pas de masquer les différentes démarches par une présentation algébrique préalable et anachronique. Le but est de faciliter les commentaires à venir.

4.1.1 La résolution mathématique du problème

Soit t_k le temps (entier ou fractionnaire) mis à vider un tonneau de capacité V à l'aide du k-ième trou ($1 \le k \le p$). Soit t le temps mis à le vider lorsque tous les bouchons sont enlevés.

En une unité de temps, chaque conduit remplit une partie du tonneau égale à $\frac{1}{t_k}$ (soit un volume valant $\frac{1}{t_k}V$) et tous les conduits, une partie égale à $\sum\limits_{1\le k\le p}\frac{1}{t_k}$. Le temps t nécessaire au remplissage du tonneau à l'aide de tous les conduits vérifie donc $t\sum\limits_{1\le k\le p}\frac{1}{t_k}V=V$ ou encore $t\sum\limits_{1\le k\le p}\frac{1}{t_k}=1$.

On peut aussi raisonner en disant qu'en t unités de temps, chaque conduit remplit les $\frac{t}{t_k}$ du tonneau, d'où :

$$\sum_{1\le k\le p}\frac{t}{t_k}V=V,\text{ soit }\sum_{1\le k\le p}\frac{t}{t_k}=1.$$

On obtient finalement :

$$t=\frac{V}{\sum\limits_{1\le k\le p}\frac{1}{t_k}V}\quad\text{ou}\quad t=\frac{1}{\sum\limits_{1\le k\le p}\frac{1}{t_k}}.$$

Les textes nous livrent des solutions étayées par des raisonnements variés, ou bien des règles sans aucune argumentation. Lorsqu'on décrypte mathématiquement ces solutions, l'une des formules précédentes apparaît. Cependant, la démarche de l'auteur n'est pas toujours clairement décodable, comme nous le verrons.

[32] *Anthologie grecque*, éd. W. R. Paton, pb. n° 132, p. 97.

4.1.2 Regards sur quelques solutions

Au XII^e siècle, le mathématicien et astronome indien Bhāskara II (1114- c. 1185), dans son arithmétique *Līlávatí*, propose une règle de calcul, suivie d'un exemple, sans autre commentaire[33] :

Règle : divise les dénominateurs par les numérateurs ; divise alors l'unité par la somme de ces quotients. Le résultat sera le temps nécessaire.

Exemple : dis-moi rapidement, ami, en quelle fraction d'un jour 4 fontaines, ouvertes en même temps, remplissent une citerne qui, si chacune était ouverte séparément, la remplirait respectivement en un jour, un demi-jour, la troisième et la sixième partie [d'un jour].

Données : $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}$

Réponse : $\frac{1}{12}$ *de jour.*

La règle est l'expression de la dernière formule mathématique : $t = \dfrac{1}{\sum\limits_{1\le k\le p} \frac{1}{t_k}}$. Dans l'exemple, la division des dénominateurs par les numérateurs donne les entiers 1, 2, 3 et 6 dont la somme est 12 et l'inverse $\frac{1}{12}$.

Le problème se situe au chapitre 4, dont le titre, selon la traduction de Colebrooke, est *Investigation of mixture*[34]. La première section de ce chapitre contient des problèmes d'intérêt simple et un exemple d'association de marchands (exercice dit *de compagnie* dans les arithmétiques marchandes du Moyen Age). Le problème de la citerne forme à lui seul la seconde section, intitulée *fractions*. Nous sommes donc à la fois dans un contexte de calcul proportionnel et de pratique calculatoire sur les fractions. Les divers commentateurs du *Līlávatí* notent d'ailleurs ces deux aspects[35].

Le *Chiu Chang Suan Chu* (*Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*), ouvrage compilé au premier siècle, expose une règle identique à celle de Bhāskara II, accompagnée d'une amorce de raisonnement, à savoir : il faut rechercher ce que chaque conduit menant à la citerne remplit en un jour.

Le problème est le vingt-sixième du sixième chapitre, dont le titre (*junshu*) se rapporte, selon Jean-Claude Martzloff, *à un système de distribution des marchandises créé sous l'empereur Wu des Han en –110*[36].

[33] Voir Bhāskara dans la bibliographie : traduction d'après l'édition anglaise de H. T. Colebrooke, section 2 sur les fractions, p. 42.
[34] *Līlávatí*, éd. H. T. Colebrooke, p. 39-41.
[35] *Līlávatí*, éd. H. T. Colebrooke, notes 1 et 2, p. 42.
[36] Jean-Claude Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris, 1988, p. 118.

L'exemple est celui d'une pièce d'eau alimentée par cinq conduits. Le premier la remplit en $\frac{1}{3}$ de jour, le second en 1 jour, le troisième en 2 jours $\frac{1}{2}$, le quatrième en 3 jours et le cinquième en 5 jours. On demande en combien de temps la pièce d'eau sera remplie si tous les conduits sont ouverts[37]. La réponse est : en $\frac{15}{74}$ jour. La règle dit : il faut voir ce que chaque conduit remplit en 1 jour, ajouter et prendre la somme comme diviseur, prendre 1 jour comme dividende et diviser le dividende par le diviseur. On obtient ici 3, 1, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ pour chaque conduit respectif, qui ajoutés donnent $\frac{74}{15}$, d'où le résultat[38].

La résolution proposée dans l'arithmétique de Delfaut et Millet (1928), sous le titre de paragraphe *Actions simultanées*, est très voisine. Cependant, les explications ne sont pas du même type : la solution chinoise décrit un algorithme, celle qui suit justifie mathématiquement la réponse à l'aide de la règle de trois[39] :

Une pompe peut emplir un réservoir à pétrole en 5 heures et une autre, en 4 heures. Le réservoir étant vide, on fait fonctionner les deux pompes.

En combien de temps le réservoir sera-t-il plein ?

Solution

En 1 heure, la première pompe emplit $\frac{1}{5}$ *du réservoir ; la deuxième pompe en emplit* $\frac{1}{4}$*. Les deux pompes fonctionnant ensemble emplissent en 1 heure :* $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$ *du réservoir.*

Pour emplir les $\frac{20}{20}$ *du réservoir, elles mettront :* $1^h \times \frac{20}{9} = \frac{20^h}{9} = 2^h\ 13^m\ 20^s$.

Ces exemples intègrent tous un entraînement au calcul sur les fractions. Pour supprimer l'obstacle que représente la manipulation des fractions, l'aspect positionnel peut intervenir efficacement. En effet, l'écriture

$$\sum_{1\le k\le p} \frac{t}{t_k} V = V$$

montre bien qu'une *bonne* position sur t ou V (multiple des t_k) facilite la tâche. Il faut toutefois noter que la solution étant indépendante de la capacité du réservoir, une position sur V n'est pas une *vraie fausse position*. De telles méthodes apparaissent dans les traités médiévaux.

[37] *Chiu Chang Suan Shu*, éd. K. Vogel, p. 68.
[38] Une seconde règle suit, différente en ce qu'elle décrit le stade du calcul postérieur à la réduction des fractions au même dénominateur (produit des cinq dénominateurs).
[39] M. Delfaut et A. Millet, *Arithmétique*, Hachette, Paris, 1928, p. 132.

Dans le *Liber abbaci*, dont la première version paraît en 1202, Léonard de Pise consacre le douzième chapitre aux problèmes non commerciaux. Il traite celui de la citerne sous plusieurs des habillages cités plus haut. Voici la version intitulée *Le lion, le léopard et l'ours*[40].

Un lion mange un mouton en 4 heures, un léopard le mange en 5 heures et un ours en 6 heures. On demande en combien de temps ils le dévoreront à eux trois.

Fais ainsi : pour quatre heures, en lesquelles le lion mange le mouton, pose $\frac{1}{4}$*; pour 5 heures nécessaires au léopard, pose* $\frac{1}{5}$*; et pour 6 heures nécessaires à l'ours, pose* $\frac{1}{6}$*. Puisque* $\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{6}$ *se trouvent en 60, pose qu'en 60 heures, ils ont dévoré ce mouton. Considère alors combien de moutons le lion mangerait durant ces 60 heures : comme en 4 heures, il dévore un mouton, il est manifeste qu'il dévore 15 moutons en 60 heures. Et le léopard en dévorerait un cinquième de 60, qui fait 12. De même, l'ours dévorerait 10 moutons, puisque 10 sont le* $\frac{1}{6}$ *de 60. Donc, en 60 heures, ils mangeraient 15, 12 et 10 moutons, soit 37. C'est pourquoi tu dis : pour 60 heures que j'ai posées, ils mangent 37 moutons. Que poserai-je pour qu'ils mangent un seul mouton ? Multiplie 1 par 60 et divise par 37, il vient* $1\frac{23}{37}$*. Et c'est le temps qu'il leur a fallu pour manger le mouton.*

La formulation : *Pose qu'en 60 heures, ils ont dévoré ce mouton*, place-t-elle la résolution sous le signe de la méthode de fausse position ? Oui, sans aucun doute. En effet, quelques feuilles en amont, au début de la troisième section du chapitre 12, à laquelle appartient cet exemple, Fibonacci explicite de manière détaillée le mécanisme de la méthode de simple fausse position[41]. Le procédé, le vocabulaire et les tournures syntaxiques que l'on trouve dans *Le lion, le léopard et l'ours* illustrent précisément cet enseignement.

L'équation à résoudre étant :

$$\frac{t}{4}+\frac{t}{5}+\frac{t}{6}=1,$$

il est évidemment opportun de supposer $t = 60$. Chacun des rapports du premier membre de l'équation précédente représente respectivement le nombre de moutons dévorés par le lion, le léopard et l'ours en 60 heures. Le nombre 60 a l'avantage sur 1 (si on raisonnait sur un jour) de conduire à des résultats entiers. Il suffit de terminer en disant : si 60 heures donnent 37 moutons, combien d'heures donnent 1 mouton ?

Dans les arithmétiques commerciales du Sud de la France, en fonction du discours qui accompagne la résolution, le problème de la citerne est classé soit sous la règle de compagnie, soit, et c'est le plus fréquent, sous celle d'une fausse position. En voici deux exemples.

[40] *Liber abbaci*, éd. B. Boncompagni, p. 182.
[41] *Liber abbaci*, éd. B. Boncompagni, p. 173.

Le premier exemple est tiré du *Compendion de lo abaco* de Frances Pellos, *noble citadin de Nice*. Cet ouvrage a été imprimé à Turin en 1492, mais composé une trentaine d'années auparavant. Dans le chapitre 12, intitulé *La regula de companhia*, à l'exemple 22, un homme veut se faire construire un *castel*. Il a trouvé trois maîtres : le premier le lui fera en un mois, le second en 2 mois et le troisième en 3 mois. Le seigneur veut que les artisans travaillent tous les trois ensemble pour que le chantier avance le plus vite possible. En combien de temps la demeure sera-t-elle achevée ?

Fais ainsi : ajoute[42] *1, 2, 3, cela fait 6 et dis ainsi avec ce 6 ; celui qui la fera en 1 mois la fera 6 fois en 6 mois. Celui qui la fera en 2 mois la fera 3 fois en 6 mois et celui qui la fera en 3 mois la fera 2 fois en 6 mois. Ajoute donc 6, 3, 2, cela fait 11, et 11 est le diviseur. Tu dois donc diviser 6 par 11 et tu trouveras que la demeure est faite en six onzième de mois, que tu réduis en jours ; tu trouveras 16 jours et quatre onzième à raison de 30 jours par mois. Et ton problème est fait.*

(f. 51v, traduction de l'occitan)

On reconnaît un procédé identique à celui de Léonard de Pise. Mais Pellos ne parle pas de position ; c'est un travail en commun et c'est pourquoi le problème prend place sous la règle de compagnie, comme d'autres questions traitant de mélanges.

Au contraire, Mathieu Préhoude reprend le langage des positions et range le problème cité en introduction dans le chapitre du même nom de son *Traicté de la praticque des nombres* (1471). L'auteur du traité de Pamiers procédait de même une cinquantaine d'années plus tôt (f. 103v). Entre les deux, Jehan Certain, dans le *Kadran aux marchans*, se conforme à ce choix, tout en disant : *Il y a une autre maniere de faire une fausse posicion qui se fait par la reigle de troys renversant la question* (f. 54r). Et il n'emploie que le langage de la règle de trois.

Dans le *Traicté de la praticque d'algorisme*, Mathieu Préhoude propose deux résolutions différentes pour le vidage du vaisseau à trois broches, qui utilisent les deux possibilités de position dont il a été question plus haut. Dans la seconde méthode (f. 81v), Préhoude fait sa position sur le temps, comme Léonard de Pise : *Pose à ta demande que les troys broches fussent ouvertes 6 heures* (pour éviter les fractions, il eût d'ailleurs été plus confortable de choisir 12). La première méthode de Préhoude est celle que l'on peut lire aussi dans le manuscrit de Pamiers. La position concerne la contenance V du tonneau, choisie égale au PPCM de 3, 4 et 6, soit 12. L'auteur calcule combien de sestiers chaque broche permet de vider en une heure, l'unité de temps, puis la quantité vidée si les trois broches sont ouvertes ; et il termine sur la règle de trois (f. 81r-v) :

Ung vaisseau de vin plain a troys broches l'une plus grande que l'autre. Et tellement que qui osteroit l'une des broches, tout le vin s'en sailliroit en 3 heures. Qui lieveroit la moyenne, il se vuyderoit en 4 heures. Et qui tireroit la plus petite broche, tout le vin

[42] Ce n'est pas la somme mais le produit qui doit être calculé pour avoir un multiple commun aux trois nombres. Le résultat est heureusement le même dans ce cas. L'erreur provient sans doute de l'analogie que fait Pellos avec les véritables problèmes de compagnie, dans lesquels on ajoute les capitaux apportés par les sociétaires.

seroit vuydé en 6 heures. L'on demande qui tireroit toutes les troys broches ensemble en combien de temps seroit vuydé le vin d'icelluy vaisseau.

Response : pose 12 en quoy tu trouveras 3, 4, 6 entierement, qui sont 12 sestiers de vin que tiend le vaysseau. Qui tire la plus grosse broche il s'en saillira 4 sestiers en une heure. Qui ouvre la moyenne, il s'en saillira 3 sestiers en une heure et qui ouvre la meindre il s'en vuydera 2 sestiers en une heure. Maintenant, adiouste icelles troys sommes, c'est assavoir 4, 3, 2, et montent 9. Ores dy, si 9 sestiers me sont venus en 1 heure, en combien de temps me en viendront 12 ? multiplie 12 que veulz savoir par 1 heure, en monte 12. Partiz par 9 ; et auras 1 heure et $\frac{3}{9}$ *de heure que abreviez font* $\frac{1}{3}$. *Et en 1 heure et* $\frac{1}{3}$ *sera tout vuyde celluy vaisseau quant toutes les troys broches sont ouvertes ensemble.*

Léonard de Pise, dans les différents exemples qu'il traite, problèmes de tonneaux ou autres, fait toujours sa position sur le temps. S'il avait procédé comme précédemment dans la version *Le lion, le léopard et l'ours*, il lui aurait fallu choisir comme *capacité* le poids du mouton.

Les exemples cités montrent deux voies différentes, liées à l'emplacement du problème dans le traité, liées aussi aux traditions calculatoires, au choix ou au refus d'une manipulation parfois pénible des fractions. Sans tirer de conclusions abusives, on peut remarquer que les arithmétiques méridionales françaises suivent la voie de Léonard de Pise qui, par le truchement de la fausse position, opte pour un calcul qui évite au mieux les fractions.

4.2 Méthodes de résolution et questions de transmissions : le problème de l'*achat d'un cheval*

Le problème de l'achat d'un cheval désigne de manière générique l'ensemble des problèmes linéaires à plusieurs inconnues dont le modèle de base est le suivant : plusieurs personnes désirent acheter une marchandise mais aucune n'a la somme suffisante pour effectuer l'achat seule. Chaque partenaire demande successivement à tous les autres une certaine fraction de leur bien et se trouve alors exactement en possession de la somme requise. Ce problème apparaît dans l'algorisme de Pamiers, dans le chapitre qui traite de la règle d'une position[43]. Il est ensuite repris par la plupart des arithmétiques du corpus que j'ai cité, dans le même chapitre, avec la même méthode.

Parmi ces arithmétiques, le *Compendy de la praticque des nombres* tient une place à part car, tout en utilisant la même matière, il se démarque radicalement des autres traités. En effet, dans les chapitres réservés aux problèmes non mercantiles, le *Compendy* sélectionne seulement quelques thèmes (quatre exactement) que Barthélemy de Romans traite de manière générale et approfondie. La matière proposée dans les traités précédents, surtout dans l'algorisme de Pamiers – référence directe ou non pour les ouvrages ultérieurs –, n'est pas suffisante, et Barthélemy de Romans va chercher ailleurs ses sources complémentaires, ce qui

[43] Trois exemples sont donnés par l'auteur du manuscrit de Pamiers (ff. 100r-101v) ; le dernier compte cinq inconnues et conduit à une solution négative, que l'auteur accepte sans aucune interprétation. C'est un moment marquant dans l'histoire de l'acceptation des résultats négatifs.

nous donne des informations nouvelles sur les voies de transmissions de ces problèmes, comme nous le verrons.

Jusqu'ici, les historiens des mathématiques médiévales mettaient en avant deux textes : l'arithmétique de Pamiers d'une part, le *Triparty en la science des nombres* de Chuquet d'autre part. Pour ce dernier, on a longtemps avancé des sources italiennes directes. Or, Chuquet connaissait le *Compendy de la praticque des nombres* (il en cite des passages et nomme l'auteur). La confrontation des deux textes montre que le mathématicien lyonnais y a beaucoup puisé, notamment pour les problèmes de l'appendice qui suit le *Triparty.* Reste à savoir d'où proviennent les nombreux énoncés de Barthélemy, pour les quatre thèmes qu'il a développés. Des regards antérieurs dans l'histoire des problèmes d'*achat d'un cheval* permettent d'émettre des hypothèses.

4.2.1 Le problème

Voici le premier exemple résolu dans le manuscrit de Pamiers, tel que Mathieu Préhoude le décrit dans le *Traité de la praticque d'algorisme* (f. 77).

Troys hommes veulent acheter ung cheval lequel couste ung tant et ung chacun d'eulx porte tant d'argent que nul d'iceulx ne le peut acheter ny poyer de soy[44]*. Mais le premier dit aux autres deux, prestez moy la moitié de tout votre argent et avec le mien je poyeroy le cheval. Le second dit aux autres deux, prestez moy le tiers de tout votre argent et avec le mien je poyeroy le cheval Et le tiers dit aux autres deux, mais prestez moy, vous autres, le quart de votre argent et avec le mien je poyeroy celluy cheval. L'on demande que couste celluy cheval et aussi combien d'argent a chacun d'iceux.*

Appelons x_k le bien du k-ième partenaire et a étant le prix du cheval. Algébriquement, le problème s'écrit :

$$x_1+\frac{1}{2}(x_2+x_3)=a,\quad x_2+\frac{1}{3}(x_3+x_1)=a\quad \text{et}\quad x_3+\frac{1}{4}(x_1+x_2)=a.$$

De façon plus générale, une partie du groupe des sociétaires peut remplacer l'unique personne qui emprunte aux autres une fraction $\frac{p_i}{q_i}$ $(0 < p_i < q_i)$ de leurs deniers. Le problème se traduit alors algébriquement par le système :

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_p+\dfrac{p_1}{q_1}(x_{p+1}+\ldots+x_n)=a \\ x_2+\ldots+x_{p+1}+\dfrac{p_2}{q_2}(x_{p+2}+\ldots+x_n+x_1)=a \\ \ldots \\ x_n+x_1+\ldots+x_{p-1}+\dfrac{p_n}{q_n}(x_p+\ldots+x_{n-1})=a \end{cases}$$

[44] La somme apportée par chaque partenaire est insuffisante pour qu'un seul d'entre eux paie le cheval.

Cette version plus générale, mais aussi plus difficile à résoudre (le système n'est pas toujours régulier) est beaucoup plus rare que le cas particulier présenté en introduction ($p = 1$).

Le problème est résolu de différentes manières suivant les époques et les auteurs : certaines méthodes sont arithmétiques et jouent sur les déterminations de proportions, d'autres sont algébriques, utilisant le choix d'une ou de plusieurs inconnues ; enfin, certains exemples sont résolus grâce à la règle de double fausse position[45] .

On trouve le problème à trois inconnues cité plus haut chez Diophante, au premier Livre des *Arithmétiques*, sous la forme dépouillée d'une recherche de nombres. Les mathématiciens arabes traitent couramment ces types d'exercices depuis le X^e siècle, exercices que l'on rencontre aussi dans des traités byzantins du XIV^e siècle. Léonard de Pise y consacre toute une partie du Chapitre XII du *Liber abbaci.* Enfin, le sujet revient très souvent dans les arithmétiques médiévales et particulièrement dans les traités d'abbaque italiens.

4.2.2 La méthode du manuscrit de Pamiers

Reprenons l'exemple initial, avec les mêmes notations. La méthode consiste à revenir à la somme totale S des inconnues moins le prix a du cheval. En effet :

– il reste toujours aux deux *donneurs* une somme égale : c'est $S - a$.

– le second et le troisième partenaire donnent au premier la moitié de leurs deniers : s'ils en ont deux, ils en donnent un. Ils en donnent donc autant qu'ils en gardent. S'il leur reste par exemple 6 deniers, ils en avaient donc 12.

– de même, le second et le troisième sociétaire conservent le double de ce qu'ils ont donné. S'il leur reste 6 deniers, ils en ont donné 3 et en avaient donc 9 : $(1+\frac{1}{2})\times 6 = \frac{3}{2}\times 6 = 9$.

– enfin le troisième et le premier ont donné le tiers de ce qui leur reste. Ils possédaient donc $\frac{4}{3}$ du reste, ici 6, soit 8 deniers.

[45] Il faudrait ajouter les méthodes “matricielles” spécifiques aux mathématiques chinoises. On rencontre un problème mathématiquement identique, bien qu'exprimé différemment, dans le *Chiu Chang Suan Shu.* Deux personnes ont un nombre inconnu de sapèques. Si le premier obtient la moitié de l'argent du second, il en aura autant que si le second prend les $\frac{2}{3}$ de l'argent du premier, soit 50 sapèques. Autrement dit, algébriquement :

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_1 = 50$$

Les méthodes de résolution sont aujourd'hui qualifiées de matricielles, donc très différentes de tout ce qui va se faire ailleurs. Voir J.-C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris, 1988, p. 232-241.

Pour l'exemple cité, les étapes de la résolution correspondent aux transformations :

$\begin{bmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 1/2 \\ 50 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 150 & 100 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}$. De la première colonne, on déduit alors $x_2 = 50 : 2 = 25$.

C'est ce qu'explique très bien Léonard de Pise dans le *Liber abbaci* ; c'est ce que fait sans vraiment l'expliquer Barthélemy de Romans, qui présente davantage les choses sous forme de règle brute.

Dit algébriquement, on obtient le système équivalent[46] :

$$x_2 + x_3 = 2(S-a) \qquad x_3 + x_1 = \frac{3}{2}(S-a) \qquad \text{et} \qquad x_1 + x_2 = \frac{4}{3}(S-a)$$

Comme a n'est pas fixé dans l'énoncé, on peut donner une valeur arbitraire à $S - a$, appelée la *position*, ce qui justifie le classement de ces problèmes sous le chapitre de la *règle d'une position*. Une fois les x_i trouvés – quand il y a des solutions –, on en déduit S puis a.

4.2.3 Méthodes algébriques

Il serait fastidieux de suivre dans le détail les multiples techniques algébriques. Elles commencent avec Diophante, puis sont pratique courante chez les mathématiciens arabes. Les procédés de résolution sont différents, dans le sens où le choix (ou les choix) d'inconnue(s) et les transformations qui s'ensuivent ne sont pas les mêmes. Prenons un exemple identique à celui qui vient d'être décrit, à la différence que les dénominateurs des fractions commencent à 3 et non à 2. Il est résolu par Diophante au problème XXIV du Livre I et au X^e-XI^e siècle par al-Karajī dans le *Livre suffisant en calcul* (*al-Kāfī fī l-hisāb*). La présentation n'est pas la même : achat d'une bête chez al-Karajī, c'est pour Diophante la recherche de *trois nombres tels que chacun d'eux, empruntant une fraction proposée à la somme des deux nombres restants, ils deviennent égaux*[47]. Al-Karajī pose la question en ces termes, au chapitre 68 du *Livre suffisant en calcul*[48] :

Si l'on dit : trois personnes se rencontrent pour acheter une bête. Le premier dit à ses deux compagnons, donnez-moi le tiers de ce que vous avez afin que j'aie cent dirhams, le prix de cette bête ; et le second dit à ses deux compagnons, donnez-moi le quart de ce que vous avez afin que j'aie les cent dirhams ; et le troisième dit à ses deux compagnons, donnez-moi le cinquième de ce que vous avez afin que j'aie les cent évoqués.

Le prix de la bête étant fixé, le problème est déterminé. Il est représenté par le système :

$$x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3) = x_2 + \frac{1}{4}(x_3 + x_1) = x_3 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2) = 100$$

Voici les deux méthodes de résolution :

[46] De manière générale, on passe du système initial (avec la convention : $x_j = x_{j-n}$ si $j > n$) :

$$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + \frac{p_i}{q_i}\Big(\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k\Big) = a$$

au système équivalent suivant (on ajoute aux deux membres de chaque équation la somme adéquate) :

$$\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k = \frac{q_i}{q_i - p_i}(S-a), \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

[47] Diophante, *Les livres arithmétiques*, Traduction P. Ver Eecke, p. 33.

[48] Traduction de A. Djebbar d'après l'éd. Chaloub. Voir A. Djebbar, Les transactions dans les mathématiques arabes : classification, résolution et circulation, p. 341. [Dje01]

Diophante d'Alexandrie : problème I – XXIV[49]

Trouver trois nombres tels que chacun d'eux empruntant une fraction proposée à la somme des deux nombres restants, ils deviennent égaux.

Proposons donc que le premier nombre emprunte[50] le tiers à la somme des deux nombres restants ; que le second nombre emprunte le quart à la somme des deux nombres restants, que le troisième nombre emprunte le cinquième à la somme des deux nombres restants, et que l'on obtienne des nombres égaux.

$$x_1+\frac{1}{3}(x_2+x_3)$$
$$=x_2+\frac{1}{4}(x_3+x_1)$$
$$=x_3+\frac{1}{5}(x_1+x_2)$$

Posons que le premier nombre est 1 arithme, et, puisque la somme des deux nombres restants lui cède son tiers, que cette somme soit, pour la facilité, une quantité d'unités ayant une troisième partie, notamment 3 unités. Dès lors, la somme des trois nombres sera 1 arithme plus 3 unités, et il s'établit que le premier nombre, empruntant le tiers à la somme des deux nombres restants, est 1 arithme plus 1 unité.

Soit $\alpha=x_1$. Le problème, à l'origine indéterminé, devient déterminé par le choix de la valeur 3 accordée à la somme des deux dernières inconnues. La somme S des trois nombres vaut alors $\alpha+3$ et chaque expression précédente est égale à $\alpha+1$.

Il faudra aussi que le second nombre, empruntant le quart à la somme des deux nombres [restants], devienne 1 arithme plus 1 unité. Prenons le tout quatre fois. En conséquence, quatre fois le second nombre, accru des deux autres, constitue trois fois le second nombre, accru des trois nombres ; donc, trois fois le second nombre, accru des trois nombres, devient 4 arithmes plus 4 unités. Dès lors, si nous retranchons de part et d'autre la somme des trois nombres, les trois arithmes plus 1 unité qui restent sont trois fois le second nombre, et le second nombre même sera 1 arithme plus 1/3 d'unité.

$$x_2+\frac{1}{4}(x_3+x_1)=\alpha+1$$
$$4x_2+x_3+x_1=4\alpha+4$$
$$3x_2+S=S+3\alpha+1$$

En retranchant S de part et d'autre, puis en divisant par 3, on trouve alors : $x_2=\alpha+\frac{1}{3}$.

Il faudra donc encore que le troisième nombre, empruntant le cinquième à la somme des deux nombres restants devienne 1 arithme plus 1 unité. Prenons pareillement le tout cinq fois, et nous conclurons, pour les mêmes raisons, que le troisième nombre est 1 arithme plus la 1/2 unité.

En procédant de même, on obtient : $x_3=\alpha+\frac{1}{2}$.

Il faut enfin que les trois nombres additionnés deviennent 1 arithme plus 3 unités, et l'arithme devient $\frac{13}{12}$. Dès lors, élimination faite de la fraction, le premier nombre sera 13 unités, le second 17 unités, le troisième 19 unités, et ces nombres satisfont à la proposition.

Connaissant S et les trois inconnues en fonction de l'arithme, on obtient la valeur de celle-ci : $\alpha=\frac{13}{12}$, qui permettrait d'obtenir la solution en nombres rationnels. Mais, comme celle-ci est définie à un coefficient multiplicatif près, en *éliminant la fraction*, on obtient pour les trois nombres cherchés, dans l'ordre, 13, 17 et 19 unités.

[49] *Les livres arithmétiques,* traduction P. Ver Eecke, p. 33-34.

[50] On remarquera dans le texte de Diophante l'emploi des verbes emprunter, recevoir et céder, peu courants lorsqu'il s'agit d'énoncés qui ne sortent pas du domaine mathématique. Cela peut poser la question de la nature des sources de Diophante pour ces problèmes.

Il n'est dit nulle part explicitement qu'il y a une infinité de solutions proportionnelles. Remarquons aussi que l'introduction de la somme des trois inconnues n'est pas nécessaire : les équations

$$4x_2+x_3+x_1=4\alpha+4\ ;\ x_2+x_3=3\ ;\ x_1=\alpha$$

permettent, sans parler de la somme totale, de trouver $x_2=\alpha+\frac{1}{3}$.

Al-Karajī *al-Kāfī fī l-hisāb* (le <livre> suffisant en calcul) [51]

L'inconnue choisie, la *chose*, est aussi le premier nombre x_1. La démarche calculatoire varie ensuite. La manipulation des deux premières équations permet d'obtenir les deux autres inconnues en fonction de la chose. On achève la résolution en substituant leurs valeurs dans la troisième équation.

Le procédé pour cela est que tu considères la somme du premier, une chose, et tu l'ôtes de cent. Il reste cent dirhams moins une chose et c'est le tiers de la somme du second et le tiers de la somme du troisième. Multiplie-le par trois, ce sera trois cents dirhams moins trois choses et ceci est égal à la somme du second et du troisième.

La chose : x_1

La première équation donne alors :

(1) $300-3x_1=x_2+x_3$

Conserve-le puis ôte le quart d'une chose de cent. Il reste cent moins un quart d'une chose et c'est la somme du second et le quart de la somme du troisième. Si tu la multiplies par quatre, elle devient quatre cents moins une chose et c'est quatre fois la somme du second et une seule fois <celle> du troisième.

La deuxième équation donne :

(2) $400-x_1=4x_2+x_3$

Si tu en ôtes trois cents moins trois choses, il reste cent et deux choses et c'est trois fois le deuxième. Donc le deuxième est trente-trois dirhams et un tiers et deux tiers d'une chose et il reste le troisième <égal à> deux cents et soixante-six dirhams et deux tiers moins trois choses et deux tiers d'une chose. Ajoute-lui le cinquième du premier -je veux dire un

En retranchant membre à membre (2) et (1), on en déduit la deuxième inconnue en fonction de la chose :

[51] Traduction de A. Djebbar, d'après l'éd. Chaloub, in A. Djebbar, Les transactions dans les mathématiques arabes..., p. 341. [Dje01]

cinquième d'une chose- avec le cinquième du second et c'est six dirhams et deux tiers de dirhams et deux tiers d'un cinquième d'une chose. Il devient après cela deux cents et soixante-treize dirhams et un tiers moins trois choses et un tiers d'une chose. Et cela égale cent dirhams. Si tu restaures et que tu ôtes les quantités communes, il reste trois choses et un tiers d'une chose et cela égale cent soixante-treize dirhams et le tiers d'un dirham. La chose est donc cinquante-deux dirhams et c'est la somme du premier. Et la somme du second <est> soixante-huit dirhams parce qu'il a résulté trente-trois dirhams et un tiers et deux tiers d'une chose, et la somme du troisième sera soixante-seize dirhams parce qu'elle était <égale à> deux cent soixante-six dirhams et deux tiers de dirhams moins trois choses et deux tiers d'une chose.

$$100 + 2x_1 = 3x_2$$

$$x_2 = 33 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1$$

d'où :

$$x_3 = 266 + \frac{2}{3} - 3x_1 - \frac{2}{3}x_1$$

Il suffit de reporter ces valeurs dans la dernière équation pour en déduire, après réduction :

$$3x_1 + \frac{1}{3}x_1 = 173 + \frac{1}{3},$$

puis :

$x_1 = 52, x_2 = 68$ et $x_3 = 76$.

Franz Woepcke note le même problème, avec 20 au lieu de 100, dans la troisième section d'un autre ouvrage d'al-Karajī, *al-Fakhrī* (problème 26). Il est résolu de manière identique. Al-Karajī ajoute à la fin, selon ce que rapporte Woepcke : *si les seconds membres des équations proposées ne sont pas donnés, on peut leur assigner une valeur arbitraire et l'on procèdera ensuite comme auparavant ; on peut aussi leur donner une valeur inconnue et poser x + z égal à 4, parce qu'on doit prendre le quart de cette somme, ou bien égal à un autre nombre quelconque*[52]. Remarquons que Diophante procède de cette dernière façon dans la résolution du problème I-24.

Les deux résolutions précédentes sont fondées sur le choix d'une seule inconnue. En 1235, le philosophe et mathématicien al-Samarqandī (Sharaf al-Dīn tāj al-Zamān al Husayn ibn Hassan), qui fut le père du savant connu sous le même nom et contemporain de Nasīr al-Dīn al-Tūsī, écrit l'*Epître sur les méthodes < de résolution > des problèmes numériques.* Le but de l'ouvrage est de montrer que l'utilisation de la méthode d'analyse et de synthèse permet de résoudre la majorité des problèmes d'arithmétique et d'algèbre. Le bagage mathématique nécessaire est limité à la connaissance des proportions, aux règles de l'« al-jabr wa'l muqābala » d'al-Khwārizmī et à la *règle des deux erreurs* ou de *double fausse position.* Ces connaissances sont rappelées au début, suivies par des exemples illustrant la thèse de l'auteur. Le problème qui nous intéresse vient en neuvième position. Mathématiquement, il est identique au troisième problème d'achat d'une marchandise que propose l'auteur de l'algorisme de Pamiers, problème dans lequel la première inconnue prend une valeur négative. Nous donnons la traduction française faite par Farhad Rahmati[53], à partir de la copie du manuscrit « orientali 118 » de la Bibliothèque laurentienne de Florence.

[52] F. Woepcke, Extrait du Fakhrī, p. 369-370. [Woe86]

[53] *Sharaf al-Dīn tāj al-Zamān al-Husayn ibn Hassan al-Samarqandī, Traité sur les méthodes numériques, 1235.* Traduction de F. Rahmati et commentaires de J. Cassinet (non publié).

Al- Samarqandī : Epitre sur les méthodes < de résolution > des problèmes numériques. Question impossible

Un homme vend un bijou.

Cinq personnes disent : le premier dit aux quatre autres, si j'avais la moitié de ce que vous avez en plus de ce que j'ai, cela ferait le prix du bijou. Le second dit aux quatre autres, si j'avais le tiers de ce que vous avez en plus de ce que j'ai, cela ferait le prix du bijou. Le troisième dit aux quatre autres, si j'avais le quart de ce que vous avez en plus de ce que j'ai, cela ferait le prix du bijou. Le quatrième dit aux quatre autres, si j'avais le cinquième de ce que vous avez en plus de ce que j'ai, cela ferait le prix du bijou. Le cinquième dit aux quatre autres, si j'avais le sixième de ce que vous avez en plus de ce que j'ai, cela ferait le prix du bijou.

Combien a chacun ?

Le système à résoudre est, avec les notations du texte :

$$A + \frac{1}{2}(B + C + D + H) = B + \frac{1}{3}(C + D + H + A) = C + \frac{1}{4}(D + H + A + B)$$

$$= D + \frac{1}{5}(H + A + B + C) = H + \frac{1}{6}(A + B + C + D) = a$$

Aucune solution négative n'est admise dans ce traité, comme c'est le cas dans la tradition arabe de façon générale. Le but de l'auteur est de démontrer que le problème est impossible. Il pose effectivement cinq inconnues. En faisant des transformations sur les équations et des comparaisons, valables uniquement si toutes les quantités en cause sont positives, il parvient aux conditions contradictoires : $5a < 2\frac{1}{2}S < 5a$.

Analyse. Posons les quantités de chaque personne : A, B, C, D, H, dans l'ordre de la question. Donc A, avec la moitié de la totalité B, C, D, H, fait le prix du bijou. Et si on multiplie par cinq, cela fait cinq A avec deux fois et demie la totalité B, C, D, H égal à cinq fois le prix du bijou. Mais cela fait encore deux fois et demie de A avec deux fois et demie la totalité A, B, C, D, H égal à cinq fois le prix du bijou. Donc, deux fois et demie la totalité A, B, C, D, H sera inférieure à cinq fois le prix du bijou.

$$5A + 2\frac{1}{2}(B + C + D + H) = 5a$$

$$2\frac{1}{2}A + 2\frac{1}{2}(A + B + C + D + H) = 5a$$

donc (en notant S la totalité des biens) :

$$2\frac{1}{2}S < 5a.$$

Mais cinq fois le prix du bijou est la moitié de A plus la moitié de la totalité A, B, C, D, H, [plus les deux tiers de B plus le tiers de la totalité A, B, C, D, H, plus les trois quarts de C plus le quart de la totalité A, B, C, D, H][54], plus les quatre cinquièmes

En ajoutant membre à membre les cinq équations, transformées pour faire apparaître la somme totale, on obtient :

[54] Ce qui est entre crochets est omis dans la copie de la Bibliothèque Laurentienne.

de D plus le cinquième de la totalité A, B, C, D, H, plus les cinq sixièmes de H plus le sixième de la totalité A, B, C, D, H.

$$5a = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}S + \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}S + \frac{3}{4}C + \frac{1}{4}S + \frac{4}{5}D + \frac{1}{5}S + \frac{5}{6}H + \frac{1}{6}S$$

Mais tous les cinq ensemble font la moitié de A et les deux tiers de B et les trois quarts de C et les quatre cinquièmes de D et les cinq sixièmes de H plus un demi et un tiers et un quart et un cinquième et un sixième de la totalité A, B, C, D, H. En outre, un demi et un tiers et un quart et un cinquième et un sixième de la totalité A, B, C, D, H est inférieur à une fois et demi la totalité A, B, C, D, H. Le tout ensemble, qui est cinq fois le prix du bijou, est donc inférieur à deux fois et demie la A, B, C, D, H. Or, deux fois et demie la totalité A, B, C, D, H est inférieur à ce même <cinq fois le prix du bijou>. Ceci est impossible. Donc cette question ne peut jamais être résolue.

$$5a = \frac{1}{2}A + \frac{2}{3}B + \frac{3}{4}C + \frac{4}{5}D + \frac{5}{6}H + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)S$$

comme

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)S < 1\frac{1}{2}S$$

(et que le premier terme est inférieur à S), alors : $5a < 2\frac{1}{2}S$

donc $5a < 2\frac{1}{2}S < 5a$.

Ainsi, l'analyse d'un problème permet, le cas échéant, de mettre en évidence son impossibilité. Ce qui précède en est une preuve. Par rapport à ce texte, celui de l'algorisme de Pamiers et des arithmétiques marchandes postérieures qui l'ont repris ont donc fait un pas supplémentaire en acceptant, sans broncher pourrait-on dire, une valeur négative pour A. En revanche, la traduction algébrique à l'aide des cinq inconnues est remarquable.

Dans tous ces textes que j'ai pu consulter, où la méthode passe par le choix d'une ou de plusieurs inconnues, je n'ai jamais retrouvé les transformations des systèmes que l'on peut déduire des résolutions du *Compendy.* Il faut lire Léonard de Pise pour les voir apparaître.

4.2.4 Le *Liber abbaci*

Léonard de Pise consacre la partie 5 du chapitre 12 du *Liber abbaci* à traiter des problèmes d'achat d'une marchandise en commun. En examinant les cas différents qu'il résout, apparaissent pour la première fois des analogies profondes et des points de comparaison précis avec le *Compendy de la praticque des nombres*, dont j'ai déjà souligné l'originalité, tant au niveau de l'approche des problèmes que des méthodes de résolution.

Les deux ouvrages accordent une importance sans précédent à ces problèmes. Le *liber abbaci* est d'une part le premier texte où l'on retrouve les règles générales décrites dans le *Compendy*, appuyées par les mêmes arguments mathématiques. La transformation des données est identique, qui met en évidence la somme des inconnues privée du prix de la marchandise (notée ci-dessus $S - a$). D'autre part, les deux traités offrent une grande diversité d'énoncés qui élargissent ceux que l'on rencontre couramment : en effet, ce sont les seuls qui généralisent le problème au cas où les personnes qui empruntent de l'argent sont en nombre quelconque. Il semble presque certain, non seulement à la lumière de cet exemple, mais de tous les types de problèmes sélectionnés dans le *Compendy*, que Barthélemy de Romans avait à sa disposition un ouvrage proche du *Liber abbaci* tel qu'il nous est parvenu. L'œuvre de

Léonard de Pise aurait donc circulé plus largement qu'on ne le soupçonne dans la France du XV^e siècle[55]. Reste à savoir si les méthodes préconisées par Léonard de Pise pour résoudre certains types de problèmes sont originales ou si elles proviennent d'une tradition antérieure. Concernant le problème précédent de l'achat d'un cheval, les textes arabes antérieurs au XIII^e siècle que j'ai étudiés ne permettent pas d'établir de filiations. Il est évidemment impossible, en l'état actuel des recherches, d'apporter de réponse catégorique.

5. Conclusion

A l'instar des *traités d'abbaque* italiens, les arithmétiques marchandes du Sud de la France offrent un terrain très riche pour l'étude des problèmes. Les applications directes au négoce sont la mémoire des pratiques mercantiles de l'époque et, en conséquence, du niveau de développement du commerce. Quant aux autres problèmes, le plus souvent de type *pseudo concret*, ils ont circulé dans la plupart des traditions mathématiques antérieures. La diversité des énoncés, pour un même sujet mathématique, reflète des formes de pensée, des cultures et des coutumes sociales différentes.

L'étude diachronique d'un problème est intéressante à plusieurs titres. En dehors de l'aspect socio-culturel qui vient d'être mentionné, elle permet de confronter diverses méthodes et de s'interroger sur leur choix. Le lieu, l'époque, le milieu sont des facteurs évidents de la diversité des procédés de résolution. Dans le cas de l'arithmétique élémentaire, les habitudes calculatoires, tout comme la connaissance ou l'ignorance des techniques algébriques, ont une incidence directe sur la méthode. Et il en va de même de l'objectif dans lequel est présenté le problème : veut-on entraîner à la pratique des opérations sur les fractions, ou illustrer la méthode de fausse position, la règle de trois, et la résolution est menée différemment. Enfin, l'étude des problèmes a déjà permis et permettra encore de mieux percer la connaissance des voies de transmission.

Bibliographie

SOURCES PRIMAIRES MANUSCRITES

Traités anonymes

Compendi del art del algorisme, dit *manuscrit de Pamiers*, ms Paris, Bibliothèque nationale de France, fds fr. , nouv. acq. 4140.

L'art d'arismetique, ms. Paris, Bibliothèque nationale de France, fds fr. 2050.

[55] W. Van Egmond écrit, à propos du *Quadripartitum numerorum* de Jean de Murs, écrit à Paris en 1343, *this is the only evidence I have yet found that Leonardo's work was read outside of Italy* (W. Van Egmond, How Algebra came to France, p. 131). [Veg88]

Traités non anonymes

Certain (Jehan), *Le Kadran aux marchans*, Bilbault en Bisquaye (Bilbao), ms. Paris, Bibliothèque de l'Arsenal, 2904.

Chuquet (Nicolas), Appendice au *Triparty en la science des nombres* (première partie), ms. Paris, Bibliothèque nationale de France, fds fr. 1346, ff. 148r-210r.

Chuquet (Nicolas), *Comment la science des nombres peut se appliquer au fait de marchandise*, ms. Paris, Bibliothèque nationale de France, fds fr. 1346, ff. 264r-324r.

Prehoude (Mathieu), *Traicté de la praticque d'algorisme*, ms. Cesena, Bibliothèque Malatestiana, S-XXVI-6, ff. 7r-140v.

SOURCES PRIMAIRES IMPRIMÉES

Traités anonymes

Anthologie grecque éd. Paton W. R. (1918) *The Greek Anthology*, traduction anglaise, W. Heinemann, Londres/G. P. Putnam's sons, New York.

Arithmeticque (1996) ms. Nantes, médiathèque, 456, éd. Duhil R. : *Etude d'un traité d'arithmétique du XVe siècle : le manuscrit 456 de Nantes*, mémoire de maîtrise, Université Paris XIII.

Chiu Chang Suan Shu, éd. Vogel K. (1968) *Neun Bücher arithmetischer Technik*, traduction et commentaires, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

Papyrus Rhind, éd. Chace A. (1979) *The Rhind mathematical Papyrus*, The National Council of Teachers of mathematics, Reston, Virginia (1e éd. 1927-1929).

Traités non anonymes

Alcuin, *Propositiones ad acuendos juvenes*, éd. Folkerts M. et Gericke H. (1993) Die Alkuin Zugeschriebenen Propositiones ad acuendos juvenes (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jugend, in Butzer P. L. et Lohrmann D. (éds.) *Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times*, Birkhäuser, Bâle, p. 283-362.

Barthélemy De Romans et Mathieu Préhoude (1999) *Compendy de la praticque des nombres*, ms. S-XXVI-6, Bibliothèque Malatestiana, Cesena, ff. 149r-268v, éd. par Spiesser M. : *Entre théorie et pratique : le* Compendy de la praticque des nombres *de Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude (1471). Aspects mathématiques, linguistiques et culturels*, thèse de doctorat, EHESS, Paris, tome 2.

Bhāskara II, *Lílávatí*, éd. Colebrooke, H. T. (1973) *Algebra from the Sanscrit of Bramagupta and Bhascara*, M. Sändig, Walluf bei Wiesbaden, p. 1-127 (1e éd., Londres, 1817).

Chuquet (Nicolas) (1880) *Triparty en la science des nombres*, éd. Marre, A. : Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet parisien, d'après le manuscrit fonds français, n° 1346 de la Bibliothèque Nationale, *Bullettino di bibliografia et di storia delle scienze matematiche e Fisiche* 13 : I, 593-659 ; II et III, 693-814.

Diophante d'Alexandrie (1959) *Les livres arithmétiques*, éd. Ver Eecke, P. : *Diophante d'Alexandrie, les six livres arithmétiques et le livre sur les nombres polygones*, traduction, introduction et notes, Blanchard, Paris.

Léonard de Pise ou Léonard Fibonacci (1857) *Liber Abbaci*, ms Magl. C. I, 2616, Badia Fiorentina, n° 73, éd. Boncompagni, B. : *Scritti di Leonardo Pisano, matematico del secolo decimoterzo, vol. 1 : Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano, pubblicato secondo la lezione del codice Magliabechiano C. I, 2616, Badia Fiorentina, n° 73*, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Rome.

Pellos (Frances) (1967) *Compendion de lo abaco*, éd. Lafont, R. et Tournerie, G. : *Frances Pellos, Compendion de l'Abaco*, Edition de la Revue des Langues romanes, Montpellier.

Sacrobosco (Jean de) (1977) *Algorismus*, éd. Halliwell, J. O. : *Rara Mathematica. A Collection of Treatises on the Mathematics and Subjects connected with them from ancient inedited Manuscripts*, G. Olms Verlag, Hildesheim/New York (1ère éd., Londres, 1841), p. 1-26.

Sanct Climent (Francesch) (1999) *Suma de la art de arismetica*, éd. Malet, A. : *Summa de l'art d'aritmetica, Francesc Santcliment*, Eumo Editorial, Vic, 1988. Trad. française par Labarthe, M. H., *La Suma de la art de arismetica de Francesch Sanct Climent*, D.E.A. d'histoire des sciences, Université Paris 1.

Villedieu (Alexandre de) (1977) *Carmen de Algorismo*, éd. Halliwell, J. O. : *Rara Mathematica. A Collection of Treatises on the Mathematics and Subjects connected with them from ancient inedited Manuscripts*, G. Olms Verlag, Hildesheim/New York (1ère éd., Londres, 1841), p. 73-83.

PRINCIPALES AUTRES SOURCES

[Bea91] Beaujouan, G. (1991) The Transformation of the Quadrivium, in Benson R. L. et Constable G. (éds), *Renaissance and Renewal in the twelfth century*, Cambridge Mass., 1982 : 463-487. Rééd. in Beaujouan G., *Par raison de nombres*, Variorum, Adelshot.

[Bea91b] Beaujouan, G. (1991) L'enseignement de l'arithmétique élémentaire à l'Université à Paris aux XIII^e et XIV^e siècles, in *Homenaje a Millás Vallicrosa*, vol. 1, Barcelone C. S. I. C., 1954 : 93-124. Rééd. in Beaujouan G., *Par raison de nombres*, Variorum, Adelshot.

[Dje01] Djebbar, A. (2001) Les transactions commerciales dans les écrits mathématiques arabes : classification, résolution et circulation, in *Actes du colloque international de Beaumont-de-Lomagne : Commerce et mathématiques du Moyen Age à la Renaissance autour de la Méditerranée,* éd. CIHSO, Toulouse, p. 327-344.

[Smi17] Smith, D. E. (1917) On the Origin of some typical Problems, *The American Mathematical Monthly* 24 : 64-7.

[Spi99] Spiesser, M. (1999) *Entre théorie et pratique : le* Compendy de la praticque des nombres *de Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude (1471). Aspects mathématiques, linguistiques et culturels*, thèse de doctorat, E.H.E.S.S., Paris.

[Tro80] Tropfke, J. (1980) *Geschichte der Elementar Mathematik, I - Arithmetik und Algebra*, 4^e édition revue par K. Vogel, K. Reich et H. Gericke, Berlin/New-York.

[Veg80] Van Egmond, W. (1980) *Practical Mathematics in the Italian Renaissance. A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600*, Istituto e Museo di storia della scienza, Firenze.

[Veg88] Van Egmond, W. (1988) How algebra came to France, in Hay C. (éd.), *Mathematics from Manuscript to Print : 1300-1600*, Clarendon Press, Oxford, p. 127-144.

[Veg96] Van Egmond, W. (1996) Types and Traditions of Mathematical Problems : A Challenge for Historians of Mathematic, in Folkerts M. (éd.), *Mathematische Probleme im Mittelalter*, Harrassowitz Verlag, Wiesbaden, p. 379-428.

[Wei97] Weijers, O. et Holtz, L. (eds) (1997) *L'enseignement des disciplines à la Faculté des arts (Paris et Oxford, XIII^e-XV^e siècles)*, Brepols, Turnhout.

[Woe86] Woepcke, F. (1986) Extrait du Fakhrī, traité d'algèbre par Aboū Bekr Mohhammed Ben Alhaçan Alkarkhī, précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminée chez les Arabes, Imprimerie nationale, Paris, 1853, in Sezgin F. (éd.), *Franz Woepcke. Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques* (2 vol.), Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, Goethe Universität, Francfort, p. 267-426.

Annexe : Liste des arithmétiques commerciales méridionales considérées (entre 1420 et 1492)

1 - Anonyme, *Compendi del art del algorisme*, (dit *Manuscrit de Pamiers*), c. 1420
Occitan - Paris, Bibliothèque nationale de France, fds fr. 4140.

2 - Anonyme, *L'art d'arismetique*, c. 1460
Français - Paris, Bibliothèque nationale de France, fds fr. 2050.

3 – Mathieu Préhoude, *Traicté de la praticque d'algorisme*, Lyon, avant 1471
Français - Cesena, Italie Bibliothèque Malatestiana, S-XXVI-6.

4 – Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude, *Compendy de la praticque des nombres*, Lyon, 1471
Français - Cesena, Italie Bibliothèque Malatestiana, S-XXVI-6.

5 - Francesc Sanct Climent, *Suma de la art de aresmetica*, Barcelone, 1482
Catalan - Imprimé à Barcelone

6 - Nicolas Chuquet, Triparty en la science des nombres, Lyon, 1484

- Le *Triparty*, f. 2r à f. 147r
- Appendice au *Triparty* :
- Application de la règle des premiers à des problèmes divers, f. 148r à f. 210r
- Commant la science des nombres peut se appliquer au fait de marchandise, f.264r à f.324r

Français – Paris, Bibliothèque nationale de France, fds fr. 1346.

7 - Jehan Certain, *Le Kadran aux marchans*, Bilbao et Marseille, 1485
Français – Paris, Bibliothèque de l'Arsenal, 2904.

[8 - Anonyme, *Arithmeticque*, 1488
Français – Nantes, médiathèque, ms 456.]*

9 - Frances Pellos, *Compendion de lo abaco*, Nice, 1492
Occitan - Imprimé à Turin.

*texte transcrit dans la région parisienne, influencé par les manuscrits méridionaux.