LA TECHNIQUE DU GOUGU

Arnaud GAZAGNES

IREM de Reims

Résumé

La technique du gougu[1] est un procédé mathématique opérant sur des triangles rectangles : on cherche, à partir de données combinant les longueurs des côtés, à déterminer complètement les dimensions d'un triangle rectangle, sans revenir à la relation de Pythagore. Les exemples pris sont tirés de manuscrits chinois datant du début de notre ère.

Introduction

Le mathématicien Hardy a écrit que *les mathématiques grecques sont seules vraies*. Pour nous, héritiers de la rigueur d'Euclide mise en avant dans ses *Éléments*, il est difficile de concevoir une mathématique dépourvue de définitions, d'axiomes, de raisonnements hypothético-déductifs, de conjonctions comme *donc*, *or*, ... Contrairement aux textes mathématiques grecs que nous connaissons, les chinois ne proposent pour démonstrations que des algorithmes. D'où l'impression que leur mathématique n'est qu'un ensemble de recettes de calcul. Pourtant, comme le montreront les divers exemples, les résolutions ont abouti à des résultats parfois complexes.

Nous allons nous intéresser à la technique du gougu, qui met en scène des triangles rectangles. Du moins, pour être plus exact, dans les mathématiques chinoises, parler du triangle rectangle, c'est parler de *résolutions de triangle rectangle*. D'un triangle rectangle (présenté sous des habillages variés), il s'agit en fait de déterminer certains éléments géométriques inconnus à partir d'éléments connus. On possède deux des longueurs des côtés du triangle sui-

[1] *gougu* est la transcription pinyin (translittération de l'écriture chinoise en alphabet latin); sa traduction phonétique (donnée par l'E. F. E. O., École Française d'Extrême-Orient) est *keou kou*.

vantes : a, b, c (citées par ordre croissant), $a + b$, $b + c$, $a + c$, $b - a$, $c - a$ et $c - b$ et l'on demande de trouver les inconnues parmi a, b ou c.

Il est à noter que, au cours des siècles, les textes mathématiques étaient enseignés accompagnés des commentaires, notamment de ceux de Lui Hui (III$^{\text{ème}}$ siècle). Cela formait ainsi un tout. C'est par faute de place que ces derniers n'ont pas été toujours reproduits ici.

Volontairement, il n'a pas été placé systématiquement un dessin illustrant le problème. Le chercher et y placer les données de l'énoncé est une démarche nécessaire pour rentrer dans l'esprit de la technique...

Quatre figures et un tableau récapitulatif des méthodes rencontrées sont placés en annexe.

1. Le contexte historique

1.1 Une compilation

Les premiers textes mathématiques chinois qui nous sont parvenus datent de la dynastie des Han (– 202, 220). Celle-ci marque la première unification solide de l'empire. Un système bureaucratique se met en place. On assiste dans de nombreux domaines du savoir à un travail de synthèse, de mise en ordre des acquis antérieurs par des fonctionnaires savants de tendance confucéenne. Il y a deux traits essentiels dans les mathématiques chinoises. Le premier est qu'elles sont étroitement liées à la pratique, les travaux en mathématiques répondant aux besoins des technocrates. Le second est qu'elles relèvent de techniques de calcul et non pas de théories : leur objet principal était de dégager des méthodes pour résoudre des problèmes concrets. Cette caractéristique n'a guère changé durant les deux mille ans suivants. On trouve cette règle du gougu dans deux ouvrages, le *Zhoubi Suanjing* et le *Jiu Zhang Suan Shu*.

1.1 Le *Zhoubi Suanjing (ZS)*

Son titre se traduit par le *Canon des calculs gnomoniques des Zhou* (la dynastie des Zhou a régné sur la Chine de – 1121 à – 256). Il est surtout important pour l'histoire de l'astronomie chinoise. Les astronomes le connaissent comme étant leur plus ancien ouvrage. Il s'y trouve la description *du toit ouvrant* (la Terre est plate et l'Univers est fini) ; la théorie cosmologique repose sur des textes mathématiques. La numération décimale, les 4 opérations élémentaires sur les fractions et l'extraction de la racine carrée d'un nombre quelconque sont utilisées. Le *théorème de Pythagore* pour des triangles 3-4-5 et 6-8-10 et la similitude pour des triangles rectangles sont exposés. On prend 3 comme valeur approchée de π, même si une meilleure approximation est connue.

Cet ouvrage est à signaler pour deux raisons principales.

(1) Il contient la figure de l'*hypoténuse* (*xian tu*) qui fournit une preuve visuelle du théorème de Pythagore, sans explication, même si, à cette époque où le calcul algébrique n'existait pas, le passage de la première relation (voir ci-dessous) au théorème n'allait pas nécessairement de soi.

Zhao Shuang (fin du III$^{\text{ème}}$ siècle) a commenté ce passage du *ZS* par :

Le carré de l'hypoténuse contient 4 surfaces rouges et 1 surface jaune, soit :

$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2.$$

De plus, il est fait état des propriétés de l'*équerre*, notamment de la relation existant entre les carrés de ses côtés et celui de sa diagonale.

(2) Un des commentaires (par Zhao Shuang) contient une liste de 15 formules pour résoudre les triangles rectangles.

1.2 Le *Jiu Zhang Suan Shu* (*JZSS*)

En décomposant ce titre (*jiu* [à prononcer *kieou*] = neuf, *zhang* [*tchang*] = chapitre, *suan* [*souan*] = calcul et *shu* [*chou*] = technique), on peut le traduire par *Les neuf chapitres de techniques de calcul*. C'est à un tel processus de compilation que l'on doit sans doute cet ouvrage. Alors qu'il a exercé une influence sur la majeure partie des mathématiciens en Chine pour des siècles (on en trouve encore la marque dans des manuels d'enseignement utilisés dans les campagnes au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle), on ne sait quasiment rien des circonstances précises qui présidèrent à sa rédaction.

A la différence des *Éléments* d'Euclide, le *JZSS* présente les connaissances mathématiques dans le contexte de problèmes, sous forme de procédures de calcul, ou algorithmes, et non pas sous forme de théorèmes. Le nombre de chapitres du *JZSS* ne repose pas sur une subdivision logique mais sur une répartition des problèmes de façon mnémotechnique.

En effet, les mathématiques chinoises ne se divisent pas de la même façon interne que la nôtre (arithmétique, géométrie, algèbre, ...). Le *JZSS* est une collection de 246 problèmes qui comprennent toujours :

(1) l'énoncé du problème ;

(2) la réponse numérique ;

(3) la méthode qui doit être utilisée pour calculer la solution d'après les données. Chaque problème suit un invariable plan et ne contient ni définition ni explication logique.

D'une façon générale, chaque chapitre du *JZSS* est construit dans un ordre qui dépend du degré de complexité mathématique (par exemple, le calcul d'aires planes précède celui des aires curvilignes). De même que tous les autres classiques, le *JZSS* fut l'objet de commentaires, dont certains sélectionnés par la tradition, étaient appelés à accompagner le texte dans toutes ses rééditions. Les commentaires, rédigés tant par Liu Hui au III$^{\text{ème}}$ siècle que par l'équipe sous les ordres de Li Chunfeng au VII$^{\text{ème}}$ siècle, posent systématiquement la question de la correction des procédures données et on voit à l'œuvre une pratique de la démonstration mathématique différente dans sa modalité des preuves rencontrées dans les *Éléments*.

Le chapitre 9 du *JZSS*, comportant 24 problèmes, est appelé *gougu*, littéralement *base - hauteur*. Tous les problèmes de ce chapitre ont en commun le fait qu'ils introduisent le triangle rectangle pour appliquer le *théorème de Pythagore*, utiliser les propriétés de ce théorème pour résoudre des triangles rectangles, déterminer le côté (resp. le diamètre) d'un carré (resp.

d'un cercle) inscrit dans ce triangle ou calculer indirectement des distances. Les derniers problèmes portent sur des équations quadratiques. Il est titré ainsi car la *base* (gou) est le *petit* côté du triangle rectangle et le *coude* (gu) est le *grand* côté.

La règle du gougu

On possède deux des données suivantes, a, b, c, $a + b$, $b + c$, $a + c$, $b - a$, $c - a$, $c - b$ et l'on demande trouver les inconnues parmi a, b ou c. Il y a donc 36 possibilités[2] ; les redondantes sont toutefois éliminées pour faire apparaître 9 cas.

Six sont référencés dans le tableau suivant.

Type	Données	Inconnue (s)	Problème n°
1	a, b	c	1, 5
2	b, c	a	2, 3, 4
3	$a, c - a$ $a, c - b$([3])	b, c a, c	6, 7, 8, 9, 10
4	$c, b - a$	a, b	11
5	$c - a, c - b$	a, b, c	12
6	$a, b + c$ $b, a + c$	b a	13

Résolution de triangles rectangles (d'après *Zhao Shuang*)[4]

Type	Données	Inconnue(s)	Problème n°
7	a, $a + c = (7/3)\ b$	b, c	14
8	a, b	e	15
9	a, b	d	16

[2] Avec 2 éléments parmi 9, il y a $C_9^2 = 36$ combinaisons.

[3] A priori, si l'on sait résoudre le problème correspondant à a et $c - a$, il n'est nul besoin de refaire de nouveaux calculs pour le problème dont les données sont a et $c-b$, puisque les deux côtés de l'angle droit jouent le même rôle. Mais, pour les auteurs chinois, il n'en est pas de même : pour eux, les deux côtés de l'angle droit portent des noms différents l'un de l'autre et ne sont pas interchangeables. Cependant, il est aisé de passer de la solution qui correspond à a et $c-a$ à celle qui correspond à a et $c-b$: il suffit pour cela de remplacer, partout où cela se présente, a par b et b par a dans l'expression de la solution correspondant au premier cas (il s'agit d'un phénomène de *parallélisme*).

[4] Cette classification est légitime : Liu Hui, dans son commentaire, en utilise une semblable.

2. L'équerre

L'instrument géométrique fondamental de l'arpenteur et de l'architecte chinois sous la dynastie des Han est l'équerre (*ju* [*kiu*]). Dans le *ZS*, Zhao Shuang en explique les différents usages :

On place l'équerre horizontalement pour rendre droit ; on incline l'équerre pour viser la hauteur ; on renverse l'équerre pour mesurer la profondeur ; on couche l'équerre pour savoir l'éloignement ; on fait tourner l'équerre pour faire le cercle ; on unit les équerres pour faire le carré[5].

Engendrant le carré (*yuan*), forme de la terre, et du cercle (*fang*), forme du ciel, l'équerre permet de mesurer l'univers. Aussi l'archétype de l'équerre est-il défini par deux nombres : 3 (nombre du ciel) et 4 (nombre de la terre), mesurant respectivement le gou et le gu, les petit et grand côtés de cette équerre fondamentale. Zhao Shuang explique combien les dimensions de cette équerre sont liées à celles du carré et du cercle fondamentaux :

Le diamètre du cercle étant de 1, le tour est de 3 ; le côté du carré étant de 1, le périmètre est 4. En déroulant le tour du cercle, on fait le gou, en développant le périmètre du carré, on fait le gu, on les réunit en un angle unique, ils se joignent en diagonale par une corde (xian [hien]) *de 5.*

L'équerre est ainsi le support matériel de la règle du gougu. Un triangle rectangle est donc explicitement défini par la seule donnée des gou et gu.

3. Dans le JZSS

Les équivalents entre les unités chinoises et les nôtres ont varié d'une époque à l'autre ; celles de la fin de la période des Han ont été choisies comme référence. On rencontrera dans les divers exemples les unités suivantes (référencées alphabétiquement) .

Unité	[E.F.E.O.]	Traduction	Valeur
chi	[*tch'e*]	pied	23, 04 cm
cun	[*ts'ouen*]	pouce	2, 304 cm
zhang	[*tchang*]	toise	2, 304 m

qui sont reliées par les égalités : 1 *zhang*=10 *chi*= 100 *cun.*

Le système métrique alors en vigueur n'était pas seulement à base 10 (c'est-à-dire qu'une unité vaut dix sous-unités immédiates) : par exemple, il existe le *bu* [*pou*] (traduisible par "*pas*") tel que 1 *bu* vaut 6 *chi*, soit 1, 382 4 m. Il est à noter que l'on trouve dans les textes des

[5] Cité (et illustré !) dans l'ouvrage de R. Schrimpf.

chi au lieu de *chi carrés* : le calculateur est en effet plus intéressé par la valeur numérique que par l'unité (d'aire ou de volume) ; ayant pris le soin d'utiliser toutes les données avec la même unité, il trouve un résultat exact.

Dans la suite, a désigne la longueur du gou, b, celle du gu et c, celle de l'hypoténuse.

Il est à rappeler que toute formulation algébrique est anachronique vis-à-vis des mathématiciens chinois : cette liberté prise ici a pour but de faciliter la compréhension de la technique du gougu. De même, sauf mention contraire, la plupart des figures sont des reconstitutions actuelles fondées sur les textes de certains commentaires.

3.1 Le problème 3

Ce problème énonce le *théorème de Pythagore* : c'est une des figures clés de la technique du gougu.

Suppose que le gu mesure 4 chi et l'hypoténuse, 5, combien mesure le gou ?

L'auteur explique ici la **règle du gougu** :

Ajoute les carrés du gou et du gu, prends la racine carrée [de la somme], donnant l'hypoténuse. De plus, le carré du gu est soustrait du carré de l'hypoténuse. La racine carrée[6] *du reste est le gou. De plus, le carré du gou est soustrait du carré de l'hypoténuse. La racine carrée du reste est le gu.*

On donne $b = 4$ chi et $c = 5$ chi : on calcule $a = \sqrt{c^2 - b^2} = 3$ chi.

Liu Hui justifiait probablement cet énoncé par une figure en couleurs. Il n'a été conservé que le texte seul et, donc, la figure qui l'accompagnait est inconnue. Il n'en est pas moins clair que la démonstration de Liu Hui consiste à reconstituer matériellement le carré de l'hypoténuse en recouvrant celui-ci avec des pièces issues des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Cette démonstration repose sur le principe de *ce qui rentre vaut ce qui sort* de la figure. Dans son commentaire, Liu Hui explique comment prouver l'égalité des aires du carré de l'hypoténuse et de la somme de celles des carrés de la base et du côté.

Il existe de nombreuses façons de procéder conformes à cette idée, la figure *Bleu - Rouge* en montre une (d'après Gu Guanguang, *Jiu shu cun gu*). Elle montre un triangle rectangle et, construits sur les côtés de l'angle droit, les deux carrés. Ils sont appelés *bleu* et *rouge* sur la figure car ils correspondent aux pièces du puzzle qui ont ces couleurs.

Dans un premier temps, le carré de l'hypoténuse est partiellement recouvert par les carrés *bleu* et *rouge*. Pour montrer que ces deux surfaces carrées recouvrent complètement et exactement le carré de l'hypoténuse (d'après le théorème de Pythagore), il suffit de bouger les pièces comme indiqué sur la figure *Bleu - Rouge* : on déplace a, b et c en a', b' et c'.

---

[6] Littéralement : *ouvre le carré.*

3.2 Le problème 6

Au centre d'une mare carrée de côté 1 zhang pousse un roseau qui dépasse l'eau de 1 chi. On tire sur l'extrémité du roseau en direction de la berge, elle arrive exactement au niveau de l'eau. On demande quelles sont la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.

L'énoncé donne $a = 10 : 2 = 5$ chi et $c - b = 1$ chi. On demanderait à nos élèves une résolution semblable à la suivante :

De $c - b = 1$, on tire $c = b + 1$. Avec $a^2 + b^2 = c^2$, il suffit de remplacer les valeurs de a et c pour obtenir l'équation du second degré $25 + b^2 = (b + 1)^2$, qui donne rapidement b (et donc c).

Il y a, dans ce qui vient d'être écrit, tout un passage algébrique que les mathématiciens ne connaissaient pas. La méthode de résolution pour ce problème est la suivante (les lettres entre parenthèses appellent des commentaires que Liu Hui a écrits, ils sont placés après les résultats) :

Règle : Élève au carré la moitié du côté de la mare (a). *De cela soustrais le carré de 1 chi* (b), *la hauteur au-dessus de l'eau. Divise le reste par deux fois la hauteur au-dessus de l'eau pour obtenir la profondeur de l'eau* (c). *La somme du résultat et de la hauteur au-dessus de l'eau est la longueur du roseau* (d).

Nous pouvons donc reformuler et ainsi résoudre le problème comme tel :

$$\text{profondeur} = b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)} = \frac{5^2 - 1^2}{2 \times 1} = 12 \text{ chi ;}$$

longueur du roseau $= c = b + (c - b) = 12$ chi $+ 1$ chi $= 13$ chi.

(a) Ici prends la moitié du côté de la mare, 5 chi, comme gou, la profondeur de l'eau comme le gu et la longueur du roseau comme hypoténuse. Obtiens le gu et l'hypoténuse à partir du gou et de la différence entre le gu et l'hypoténuse. Par conséquent, élève au carré le gou pour l'aire du gnomon.

Liu Hui utilise le fait que le gnomon (c'est-à-dire le carré de côté c privé du carré de côté b) d'aire $c^2 - b^2$ ($= a^2$ d'après le théorème de Pythagore) a la même aire que le rectangle dont les côtés mesurent $c + b$ et $c - b$ (voir la figure en annexe).

(b) La hauteur au-dessus de l'eau est la différence entre le gu et l'hypoténuse. Soustrais le carré de cette différence de celle de l'aire du gnomon : prends le reste.

(c) Considère comme gu la différence entre la largeur du gnomon et la profondeur de l'eau. Par conséquent, construis [un rectangle] avec une largeur de 2 chi, le double de la hauteur au-dessus de l'eau.

(Liu Hui a prouvé géométriquement la méthode.)

(d) Le roseau dépasse l'eau de 1 chi, alors connaissant la profondeur de l'eau, on les additionne pour avoir la longueur du roseau.

Dans ce problème, il a été trouvé le triplet (5, 12, 13) : c'est un *triplet pythagoricien* ; on appelle ainsi la donnée de trois nombres entiers u, v et w vérifiant la relation $u^2 + v^2 = w^2$. On rencontre huit triplets différents dans le Chapitre 9, quitte à utiliser une sous-division métrique ou un coefficient multiplicateur commun sur un résultat fractionnaire pour les obtenir. Toutefois, il n'est mentionné nulle part dans le *JZSS* une étude générale des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire leur recherche explicite de génération.

Ce problème 6 est similaire au problème référencé BM 34568 n° 12 de la civilisation des Séleucides (dynastie hellénistique qui régna en Asie de −312 à −64), que les Chinois semblent avoir connue. En voici une traduction[7] et sa résolution :

Un roseau est placé verticalement contre un mur. S'il descend de 3 coudées, il s'écarte de 9. Combien mesure le roseau ? le mur ?

Puisque tu ne (les) sais pas, 3 fois 3 : 9 ; 9 fois 9 : 1;21. [Ajoute] 9 à 1;21 : (1;30). [Multiplie] 1;30 [par] 0;30 : 0;45. L'inverse de 3 est 0;20. [Multiplie] 0;20 [par 45] : 15, le roseau [...].

On traduit l'énoncé par les conditions $a = 9$ et $c - b = 3$, ce qui donne une longueur d'échelle c égale à 15 coudées et une profondeur b égale à 12 coudées.

3.3 Le problème 8

L'énoncé suivant donne a et $c - b$, tout comme celui du problème 6, et l'on cherche c. C'est-à-dire que l'on attend la même démarche. Sa résolution montre qu'il en est autrement : la méthode de résolution de tel problème n'est pas utilisée dans la résolution de tel autre.

Suppose un mur haut de 1 zhang. Un arbre (ou une perche en bois) s'appuie contre ce mur de telle sorte que son extrémité coïncide avec le haut du mur. Si l'on recule de 1 chi en tirant l'arbre, celui-ci touche le sol. Combien mesure l'arbre ?

Règle : Multiplie 10 chi par eux-mêmes, divise par le pas en retrait, ajoute le pas en retrait à ce qui a été obtenu et divise le résultat par 2, ce qui est la hauteur de l'arbre.

Des données $c - b = 1$ chi et $a = 1$ zhang, on peut calculer la hauteur cherchée :

$$\text{hauteur} = c = \frac{\frac{a^2}{c-b} + c - b}{2} = \frac{\frac{10^2}{1} + 1}{2} = 50 + \frac{1}{2} \text{ chi} = 5 \text{ zhang } 5 \text{ cun.}$$

3.4 Le problème 7

Une corde qui est attachée au sommet d'un arbre vertical dépasse de 3 chi la longueur de cet arbre. En tirant la corde à son maximum de manière que son extrémité touche juste le sol, on s'écarte exactement de 8 chi du pied de l'arbre.

Quelle est la longueur de la corde ?

[7] On utilise le calcul hexadécimal (base 60) : ainsi $9 \times 9 = \mathit{1} \times 60 + \mathit{21}$ et est noté 1;21.

L'énoncé donne $c - a = 3$ chi et $b = 8$ chi. A priori, si l'on sait résoudre le problème correspondant à a et $c - b$, il n'est nul besoin de refaire de nouveaux calculs pour le problème dont les données sont b et $c - a$, puisque les données sont symétriques, c'est-à-dire que les deux côtés de l'angle droit jouent le même rôle. Mais, pour les auteurs chinois, il n'en est pas de même : pour eux, les deux côtés de l'angle droit portent des noms différents, l'un et l'autre ne sont pas interchangeables. D'où une nouvelle technique résolutoire :

Élève au carré la distance depuis le pied (de l'arbre). Divise par la longueur de l'extrémité reposant à terre. Ajoute le résultat à la longueur de l'extrémité. Divise par 2 : c'est la longueur de la corde.

$$\text{longueur} = c = \frac{\frac{b^2}{c-a} + c - a}{2} = \frac{\frac{64}{3} + 3}{2} = \frac{21 + \frac{1}{3} + 3}{2} = 12 + \frac{1}{6} \text{ chi}^8.$$

3.5 Le problème 12

Soit une porte dont on ne connaît ni la hauteur ni la largeur, un bâton dont on ignore la longueur. On le place en largeur, le dépassement est de 4 chi ; on le place en hauteur, le dépassement est de 2 chi ; on le place en diagonale, le dépassement est nul. On demande combien [font] la hauteur et la largeur de la porte, ainsi que la longueur du bâton.

Règle : Multiplie [les] deux surplus ensemble ; double et extrais la racine [carrée]. Ce résultat plus le surplus par rapport à la hauteur est la largeur. Ce résultat plus le surplus par rapport à la largeur est la hauteur. Ce résultat plus les deux surplus est la diagonale de la porte.

Données: $c - a = 4$ chi et $c - b = 2$ chi ;

largeur $= a = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-b) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 2 = 6$ chi ;

hauteur $= b = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 4 = 8$ chi ;

longueur $= c = \sqrt{2(c-a)(c-b)} + (c-a) + (c-b) = \sqrt{2 \times 4 \times 2} + 4 + 2 = 10$ chi.

On remarquera que c est calculé à partir de $c - a$ et $c - b$ (donnés) et non pas à partir de $c - b$ (donné) et b (calculé) avec $c = (c - b) + b$.

3.6 Le problème 11

Suppose que la hauteur d'une porte soit 6 chi 8 cun plus grande que sa largeur et que les coins opposés soient distants de 1 zhang.

Détermine la hauteur et la largeur de la porte.

Les données sont $c = 100$ cun et $b - a = 68$ cun.

[8] Tout nombre fractionnaire était écrit comme la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1.

Ce problème se résout en *posant une figure* plutôt qu'en *posant des équations*. Yang Hui commente la résolution (vers 1261) de la façon suivante :

La figure consiste en deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit de la porte posés (physiquement) l'un sur l'autre. Sa surface totale est $a^2 + b^2$, soit c^2 d'après le théorème de Pythagore. On observe ensuite que le carré de côté b et découpé en :

(1) 4 rectangles ;

(2) 4 petits carrés ayant chacun pour côté $\frac{b-a}{2}$ des côtés des carrés et dont deux sont appelés jaunes ;

(3) un carré de côté a.

Si l'on ôte maintenant du grand carré de côté b le gnomon qui le borde sur le dessus et la droite, il reste un carré dont, d'une part, les dimensions valent à la fois[9] $a+\frac{b-a}{2}$ et $b-\frac{b-a}{2}$ et dont, d'autre part, l'aire vaut la moitié de l'aire totale des deux carrés a^2 et b^2 diminuée de l'aire des deux carrés jaunes, soit $2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

Par conséquent, $\dfrac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}$ est égal à $\left(a+\frac{b-a}{2}\right)^2$ et à $\left(b-\frac{b-a}{2}\right)^2$.

On obtient donc ainsi directement la solution du texte original sans effectuer la moindre résolution d'équation :

$$\text{largeur} = a = \sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{1}} - \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{100^2-2\left(\frac{68}{2}\right)^2}{1}} - \frac{68}{2} = 28 \text{ cun ;}$$

$$\text{hauteur} = b = \sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{1}} + \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{100^2-2\left(\frac{68}{2}\right)^2}{1}} + \frac{68}{2} = 96 \text{ cun.}$$

Dans la culture chinoise, la démonstration mathématique n'a jamais joué le même rôle normatif que dans la culture grecque et dans les apparentées. Les problèmes, comme ceux de cette époque, sont d'ambition pratique ; leur contenu n'est toutefois pas élémentaire. D'ailleurs, par leurs méthodes de calcul, ils surpassent de loin les ouvrages grecs de la même époque. Dans un cadre géométrique, une logique stricte (de type euclidien) a fait défaut en Chine.

Mais les procédures chinoises de calcul, remarquables, étaient fondées non pas algébriquement mais sur des considérations géométriques. C'est particulièrement frappant quand on observe les résolutions d'équations dans les ouvrages anciens. On pourrait arguer que les

[9] Il est tentant de simplifier en $(b + a) : 2$, mais cette réduction algébrique est contraire à l'esprit de l'époque… D'autant plus que l'on perdrait la donnée $b - a$.

techniques de dissection (ou de *puzzle*) manquent de rigueur : on sait tous *démontrer*, depuis Lewis Carroll, l'égalité 64 = 65. Toutefois, aucun exemple historique d'erreur mathématique due à un malencontreux découpage n'est connu.

Bibliographie

Kangshen S., Crossley J., Lun A. (1999) *The Nine Chapters on the Mathematical Art, Companion and Commentary*, Oxford University Press.

Kiyosi Y. (2000) *Une histoire des mathématiques chinoises*, Belin Sciences.

Martzloff J.-Cl. (1983) *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson.

Martzloff J.-Cl. (1989) Exemples de démonstrations en mathématiques chinoises, *Actes du 7ème Colloque Inter IREM, Besançon 89*, p. 346-365.

Martzloff J.-Cl. (1997) *A History of Chinese Mathematics*, Springer.

Schrimpf R. (1963) La collection mathématique Souan King Che Chou, Contribution à l'histoire des mathématiques chinoises des origines au VIIème siècle de notre ère, Thèse, Rennes.

Annexe 1 : Figures

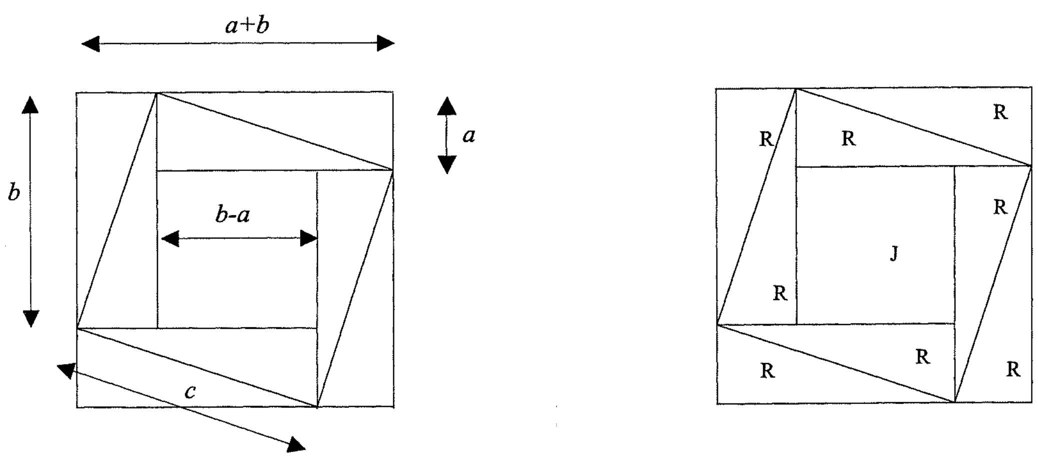

Figure xian tu.

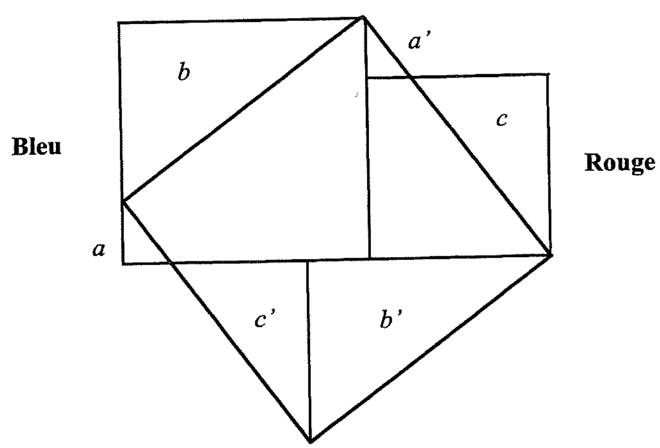

Figure Bleu - Rouge.

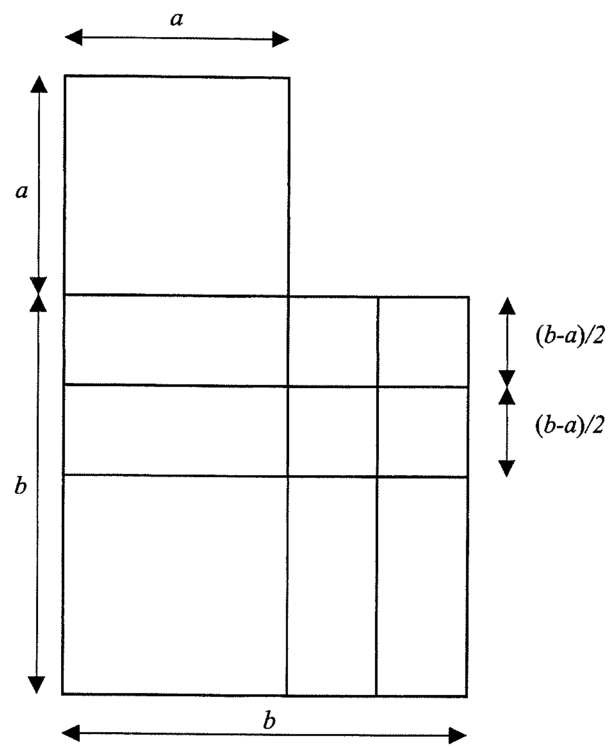

Figure de la porte.

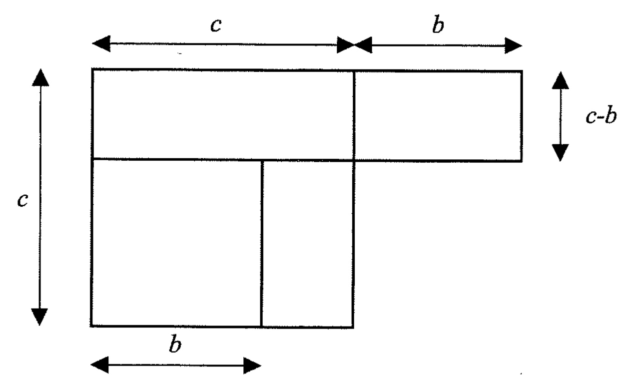

Figure Gnomon.

Annexe 2 : Tableau récapitulatif des méthodes de résolution rencontrées

Problème	Données	Résultats	Résolution
3	b, c	a	$a=\sqrt{c^2-b^2}$
6	$a, c-b$	b, c	$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=\frac{5^2-1^2}{2\times 1}$ $c=b+(c-b)$
7	$b, c-a$	c	$c=\frac{\frac{b^2}{c-a}+c-a}{2}$
8	$a, c-b$	c	$c=\frac{\frac{a^2}{c-b}+c-b}{2}$
11	$c, b-a$	a, b	$a=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{1}}-\frac{b-a}{2}$ $b=\sqrt{\frac{c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{1}}+\frac{b-a}{2}$
12	$c-a, c-b$	a, b, c	$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)$ $b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)$ $c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)$

À PROPOS DE QUELQUES PROBLÈMES D'ARITHMÉTIQUE DANS LA CULTURE MARCHANDE DE LA FRANCE MÉRIDIONALE DU XV^e SIÈCLE : UN HÉRITAGE LOINTAIN

Maryvonne Spiesser

IREM de Toulouse

Résumé

Les arithmétiques marchandes composées en langue vulgaire à la fin du Moyen Age proposent souvent, à côté des exercices directement liés à l'organisation et à la pratique du commerce, toute une gamme de problèmes qui n'ont aucune vocation professionnelle directe. La plupart d'entre eux ont une origine très lointaine. Au cours des siècles, le corpus s'est enrichi d'énoncés plus sophistiqués, les méthodes de résolution se sont diversifiées. Ces problèmes – dont certains étaient encore enseignés il n'y a pas si longtemps – constituent un terrain très riche pour l'étude de la transmission des savoirs. Nous abordons ces différents aspects à partir de quelques exemples issus des arithmétiques commerciales de la France méridionale.

Introduction

Les problèmes dont il va être question font partie de l'arithmétique dite élémentaire. C'est le type d'exercices que l'on pouvait encore trouver dans les manuels de préparation au certificat d'études primaires, il y a une soixantaine d'années. Leur histoire s'intègre tout à fait dans le thème de ce colloque, 4000 ans de mathématiques, puisqu'on peut suivre les traces de certains énoncés depuis le deuxième millénaire avant J. C. Citons en exemple cette comptine bien connue qui met en jeu les progressions géométriques, à partir d'un recueil anglais du début du XX^e siècle[1] :

[1] *Every Child's Mother Goose*, introduction by Carolyn Wells, New-York 1918, p. 111.