[Fou69] Foucault M. (1969) *L'archéologie du savoir*, Gallimard, Paris.

[Gee83] Geertz C. (1983) *Savoir local, savoir global : les lieux du savoir*, trad. PUF, Paris, 1986.

[Kuh70] Kuhn T.S. (1970) *La structure des révolutions scientifiques*, 2ème éd., trad. Flammarion, Paris, 1983.

[Mar59] Marrou H.-I. (1959) *De la connaissance historique*, Seuil, Paris, rééd. 1975.

[Mer73] Merton R.-K. (1973) *The Sociology of Science*, The University of Chicago Press, Chicago.

[Ste93] Stengers I. (1993) *L'invention des sciences modernes*, La découverte, Paris.

[Str52] Strauss L.(1952) *La persécution et l'art d'écrire*, MacMillan Publishing Co., trad. Presses Pocket, Paris, 1989.

[Vey71] Veyne P. (1971) *Comment on écrit l'histoire. Essai d'épistémologie*, Le Seuil, Paris.

[Whi62] Whiteside D.T. (1962) "Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century", *Archive for History of exact Sciences*, 1, p. 179-388.

UNE ÉCOLE DE L'AN –2000

Christine Proust

IREM de Paris 7

Résumé

On essaiera ici de reconstituer les méthodes d'enseignement de l'arithmétique dans les écoles de scribes mésopotamiennes à partir d'une sélection de tablettes d'argile. Il s'agit de textes scolaires, exercices d'élèves ou modèles du maître, retrouvés lors des fouilles de la « Colline des tablettes » de Nippur et datant de l'époque paléo-babylonienne (début du deuxième millénaire avant Jésus-Christ). L'entraînement mathématique porte, dans ces archives, principalement sur le calcul numérique (tables et algorithmes). De nombreuses copies de tablettes accompagnées de leur transcription et de leur traduction devraient inciter le lecteur à essayer de faire lui-même le déchiffrement des textes. Une brève présentation du contexte particulier du milieu des scribes de Nippur, la grande ville sacrée de la Mésopotamie antique, ainsi que des témoignages écrits d'écoliers, permettra de mieux situer le rôle de l'éducation et de la formation mathématique dans un grand centre culturel de l'ancien Pays de Sumer.

Introduction

Les premiers mathématiciens sont des maîtres d'école. Anonymes mais prolifiques, les maîtres et les élèves de la prestigieuse école de Nippur se laissent imaginer à travers une abondante production de tablettes d'argile, en partie parvenue jusqu'à nous. Les textes rassemblés ici proviennent principalement de Nippur et datent de la fin du troisième millénaire et du début du deuxième avant Jésus-Christ (périodes néo-sumérienne, de 2150 à 2000 ; paléo-babylonienne de 2000 à 1600). Les textes métrologiques et mathématiques de Nippur forment un corpus de plusieurs centaines de tablettes relativement homogène, portant principalement sur le calcul numérique. C'est à partir de ces archives que le présent article s'efforce de reconstituer une sorte de « cours » de mathématiques, ou plutôt un enchaînement d'idées depuis la source originelle d'inspiration, la métrologie, jusqu'aux développements les plus raffinés du calcul, la méthode d'inversion par factorisation. Le lecteur s'étonnera sans doute de l'absence de ce qui fait la célébrité des mathématiques babyloniennes, les problèmes du second degré. La raison en est simple : ce type de texte est très rare à Nippur. Les tablettes actuellement connues donnent aux activités mathématiques à Nippur une image particulière caractérisée par la prépondérance des spéculations numériques.

La Ville Sacrée

Nippur se situe au bord de l'Euphrate, dans la partie nord de ce qui fut le Pays de Sumer (à mi-chemin entre la Bagdad actuelle et le Golfe Persique). Nippur est la grande ville sacrée de la Mésopotamie antique, « La Mecque » des Sumériens et des Akkadiens. Sous la protection tutélaire d'Enlil, le plus éminent des dieux du panthéon suméro-akkadien, Nippur est vouée au culte et à l'administration d'un énorme complexe de temples. La gestion d'un flux considérable d'offrandes au dieu des dieux provenant de toute la Mésopotamie mobilise une importante couche de fonctionnaires. Nippur est la clé du pouvoir en Mésopotamie du sud : mériter le titre de « roi des quatre régions, roi de Sumer et d'Akkad », c'est posséder Nippur. La Ville Sacrée est l'enjeu permanent de convoitises entre souverains locaux, et Nippur passera dans son histoire sous la férule d'un grand nombre de capitales royales (Ur, Lagash, Uruk, Umma, Akkad, Isin, Larsa, Babylone). Au début du deuxième millénaire, les rois de Larsa et d'Isin se disputent Nippur avec un tel acharnement que la ville change de mains six fois en 20 ans. Aucune dynastie royale n'a jamais siégé à Nippur même. Le gouvernement de la ville et de ses environs est assuré par les fonctionnaires des temples et une assemblée de sages. Centre religieux, Nippur est aussi un centre culturel. Ses temples et ses écoles protègent l'héritage savant sumérien, et bien longtemps encore après la disparition du sumérien comme langue vivante, Nippur reste la capitale de la « sumérité ». Un texte bilingue (à gauche, le sumérien, à droite, l'akkadien) témoigne du rayonnement culturel de Nippur à l'époque paléo-babylonienne. Ce texte est dénommé joliment par Dominique Charpin, assyriologue à la Sorbonne, *Les malheurs d'un scribe, ou de l'inutilité du sumérien loin de Nippur*. Voici ce que raconte ce malheureux scribe banni de Nippur, exilé dans le nord, à Mari, et qui supplie le roi de l'aider (extraits de la traduction de D. Charpin) :

Comme un (vagabond), errant dans la steppe, je ne connais pas d'endroit où me reposer ;
Comme un serviteur sans maître, je n'ai pas de protecteur ;
Je traîne dans les rues comme un vagabond, le désespoir m'a fait baisser la tête.
Une maison étrangère est devenue ma demeure ; insultes et malheur m'ont brisé.
Sans raison mon maître me poursuit sans cesse, et dans une errance mauvaise je frissonne de froid.
Je vais sans cesse les mains vides, et je suis affligé de la maladie des yeux propre aux scribes. [...]
Je ne puis m'enfuir : je suis si faible que mes genoux ne peuvent plus me porter. [...]
Un simple apprenti de ma ville et de la maison de mon seigneur m'a discrédité.
Je suis un scribe, [...]
Que mon seigneur examine mon cas et me rende ma situation !

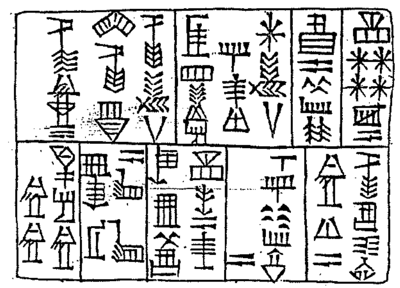
On a retrouvé à Nippur une riche collection de textes couvrant toutes les disciplines savantes des époques sumériennes et paléo-babyloniennes (musique, médecine, divination,

mathématiques) et tous les genres littéraires (hymnes, contes, lamentations, épopées, dialogues, énigmes, poèmes, proverbes, fables animalières, tensons, prières). L'art de la controverse se déploie dans les tensons, dialogues argumentés entre deux éléments opposés d'un couple (l'argent contre le bronze, le bétail contre le grain, l'été contre l'hiver...). Ces éléments personnifiés se livrent à un jeu de joutes oratoires, chacun vantant ses mérites avec emphase. Le goût de la discussion semble faire partie de la culture de Nippur, aussi bien dans les institutions politiques (assemblées), que judiciaires (Nippur est le siège du plus important tribunal de la Mésopotamie du sud, où se traitent les affaires les plus graves).

Nisaba des nombres, Dame des étoiles

Comme tous les scribes, les mathématiciens de Nippur sont placés sous la protection spéciale de la Déesse Nisaba. Nisaba est à l'origine la divinité de la végétation sauvage, devenue par associations d'idées successives déesse des roseaux, du calame (outil en roseau pour écrire sur l'argile), de l'écriture, des savants, des nombres, de l'astronomie. François Thureau-Dangin a relevé en 1909 quelques unes des métaphores qui la décrivent dans la littérature cunéiforme : *« Elle tient à la main le calame pur »* (Gudea, Cylindre A, IV, 25 ; V, 22) ; *« elle connaît le cœur des nombres »* (Gudea, Cylindre A, XIX, 21) ; *« Nisaba des nombres », « Dame des Etoiles »*, elle consulte *« la tablette de la bonne étoile des cieux »*. Une tablette provenant de Tello, conservée à Istanbul, en donne un portrait poétique :

Ô dame de l'étoile,
qui tiens à la main la tablette de Lapis [...]
Ô roseau-Nisaba, roseau pur,
déesse nourrie du lait sacré,
qui tiens le roseau des sept nombres,
qui accomplis les cinquante grands décrets...



Sans verser dans une spéculation ésotérique hasardeuse, on peut néanmoins relever dans ces extraits le rôle symbolique de certains nombres. Chaque dieu est associé à un nombre, 50 est celui d'Enlil, leur chef.

Les écoles de scribes

Les écoles de scribes sont nées avec l'écriture et la nécessité d'un long apprentissage dès l'enfance. Mais c'est à l'époque d'Ur III, dite de la « renaissance sumérienne » ou « néo-sumérienne », que les écoles se sont développées dans les grands centres urbains sous l'effet de la politique éclairée des rois sumériens Ur-Nammu et son fils Şulgi (fin du 3$^{\text{ième}}$ millénaire). Les textes mathématiques sumériens et akkadiens aujourd'hui connus ont tous été rédigés dans un contexte scolaire (écoles de scribes ou maisons des maîtres). Les apprentis scribes sont recrutés dans des milieux privilégiés, ce savoir se transmettant souvent de père en fils naturel ou adoptif. Le terme « adoptif » a ici un sens très large, puisque le maître se considère comme une sorte de père spirituel de son élève, comme en témoigne le texte ci-dessous. A Nippur, les écoles occupent un quartier réservé, que les archéologues ont appelé la « colline des tablettes », en raison du nombre considérable de tablettes retrouvées en ce lieu. Ce quartier des scribes est situé à proximité du quartier religieux, colline en haut de laquelle dominent la Ziggurat et le temple d'Enlil. Quoique proches, les quartiers des scribes et des religieux sont séparés et les scribes ne font pas nécessairement partie du milieu sacerdotal.

La discipline des écoles est rude, et déjà les élèves s'en plaignent. Ce témoignage d'un écolier de l'an –2000, traduit du sumérien par Samuel Noah Kramer à partir d'une vingtaine de fragments trouvés à Nippur (*schooldays : a sumerian composition relating to the education of a scribe*, University Museum, Philadelphia 1949) est un des très rares exemples de texte mésopotamien qui décrit des détails de la vie quotidienne. Voici quelques extraits d'après la traduction en anglais de Kramer :

(l'écolier parle à son père)

« Réveille-moi tôt le matin,
je ne dois pas être en retard, sinon mon maître me battra. »
Quand je me suis réveillé le matin,
j'ai vu ma mère et je lui ai dit : « donne-moi mon déjeuner, je veux aller à l'école ».
Ma mère m'a donné deux gâteaux et je l'ai laissée.
Ma mère m'a donné deux gâteaux et je suis allé à l'école.
Dans la maison des tablettes, le moniteur m'a dit : « pourquoi es-tu en retard ? » J'étais effrayé, mon cœur battait vite.
Je suis entré avant mon maître et j'ai pris ma place.
Mon « père d'école » m'a lu ma tablette,
et il a dit : « la [tablette] est cassée », il m'a battu. [...]
Le maître qui dirige les études de l'école
a regardé dans la maison et dans la rue pour interpeller quelqu'un [...], il m'a battu
Mon « père d'école » m'a apporté ma tablette.
Celui qui est responsable de la cour m'a dit : « écris ». [...]
Celui qui est responsable de [la surveillance] m'a dit : « pourquoi as-tu parlé quand je n'étais pas là ? », il m'a battu.
Celui qui est responsable de [l'écriture] m'a dit : « pourquoi n'as-tu pas tenu la tête droite quand je n'étais pas là ? », il m'a battu.
Celui qui est responsable du dessin m'a dit : « pourquoi t'es-tu levé quand je n'étais pas là ? », il m'a battu.
Celui qui est responsable de la porte m'a dit : « pourquoi es-tu sorti quand je n'étais pas là ? », il m'a battu.

Celui qui est responsable de [...] m'a dit : « pourquoi as-tu pris [...] quand je n'étais pas là ? », il m'a battu.
Celui qui est responsable du sumérien m'a dit : « tu as bavardé », il m'a battu.
Mon maître m'a dit : « ta main n'est pas correcte », il m'a battu.
J'ai négligé l'art du scribe, j'ai abandonné l'art du scribe. [...]
Le père a prêté une grande attention à ce qu'a dit l'écolier.
On est allé chercher le maître à l'école.
Quand il est entré dans la maison, on l'a assis à la place d'honneur.
L'écolier a pris place en face de lui. [...]
Le père a servi au maître [...]un bon vin de datte,
il a fait couler de la bonne huile [...] comme de l'eau,
il l'a habillé d'un nouveau vêtement, il lui a fait un cadeau, il lui a mis un ruban autour de sa main.
Le maître, de bon cœur, a fait un discours :
« Jeune homme, puisque tu n'as pas négligé mes paroles, que tu ne les a pas ignorées, puisses-tu atteindre les sommets de l'art du scribe, le terminer complètement.
Parce que tu m'as donné ce que tu n'étais pas obligé de me donner,
que tu m'as donné un cadeau en plus de mon salaire, que tu m'as manifesté un grand respect,
puisse Nisaba, la reine des déesses gardiennes, être ta divinité protectrice, qu'elle te donne sa faveur pour ta méthode de lecture,
qu'elle éloigne tous les démons de tes copies à la main. [...]
Jeune homme, tu as un père, je suis un second père pour toi. [...]
Tu as réussi tes études, tu es devenu un homme d'étude.
Nisaba, la reine de l'étude, tu as élevé [le savoir de ce jeune homme].
O Nisaba, louange à toi !

Et voilà comment, moyennant des égards envers le professeur, le cancre devient un futur érudit, un protégé de Nisaba. C'est ce que Samuel Noah Kramer appelle « le premier exemple de lèche »...

Les disciplines enseignées sont la langue (sumérien et akkadien), l'écriture, la métrologie, le calcul, la comptabilité, la rédaction des contrats. Miguel Civil (Université de Chicago, 1985) a reconstitué un récit d'écolier à partir de 11 tablettes et fragments trouvés à Nippur, une tablette retrouvée à Ur et un fragment d'origine inconnue. Le texte est écrit en sumérien : dans la rédaction de ce dialogue, l'écolier s'exerce à manier le sumérien qui n'est pas sa langue maternelle. Le dialogue oppose deux écoliers qui vantent leurs talents scolaires au moyen de tirades d'insultes. Dans le premier quart du texte, dont voici quelques extraits, l'écolier décrit l'apprentissage de la langue et de l'écriture.

Si tu es un écolier,
connais-tu le sumérien ?
Oui, je peux parler le sumérien.
Tu es si jeune, comment peux-tu t'exprimer si bien ?

J'ai écouté maintes fois les explications du maître. [...]
J'ai récité et écrit
les mots sumériens et akkadien, depuis a-a me-me jusqu'à [...]
J'ai écrit les lignes (de la liste de noms propres) [...],
même les formes désuètes.
Je peux montrer les signes [...]
Je peux donner 600 lignes avec lú. [...]
Le bilan des jours que je passe à l'école est le suivant :
mes jours de vacance sont 3 par mois ;
les différentes fêtes sont 3 jours par mois ;
avec ça, ce sont 24 jours par mois
que je passe à l'école. Le temps n'est pas long. [...]
Désormais, je peux m'appliquer aux tablettes, aux multiplications et aux bilans,
à l'art de l'écriture, au placement des lignes, à éviter les coupures. [...]
J'ai de la facilité pour tout.
Mon maître montre un signe,
j'en ajoute plus d'un de mémoire.
Après avoir été à l'école aussi longtemps que prévu,
je suis à la hauteur du sumérien, de l'art de l'écriture, de la lecture des tablettes, du calcul des bilans.
Je peux parler sumérien ! [...]
Je peux écrire des tablettes :
la tablette des capacités de 1 à 600 gur d'orge ;
la tablette des poids de 1 sicle à 20 mines d'argent ;
les contrats de mariage ;
les contrats de société [...] ;
la vente de maisons, de champs, d'esclaves ;
les contrats de culture des palmeraies ;
même les contrats d'adoption, je sais écrire tout cela. [...]
Nous hurlerons insulte pour insulte,
nous échangerons des imprécations...

Ces deux textes révèlent plusieurs détails intéressants. Le sumérien n'est pas la langue maternelle des écoliers, mais une langue morte scolaire. Le travail de mémorisation semble occuper une place importante. Il est distingué dans le vocabulaire les « comptes », qui renvoient à de l'arithmétique appliquée, et le « calcul », qui renvoie à des opérations numériques plus abstraites. Ces deux niveaux de la formation mathématique se retrouvent dans la nature des textes qui vont être présentés dans ce qui suit, le premier groupe relevant de « mathématiques appliquées », le second de « mathématiques pures », si on veut bien se permettre cette classification anachronique mais non totalement dépourvue de sens concernant les activités mathématiques à Nippur.

L'arpentage

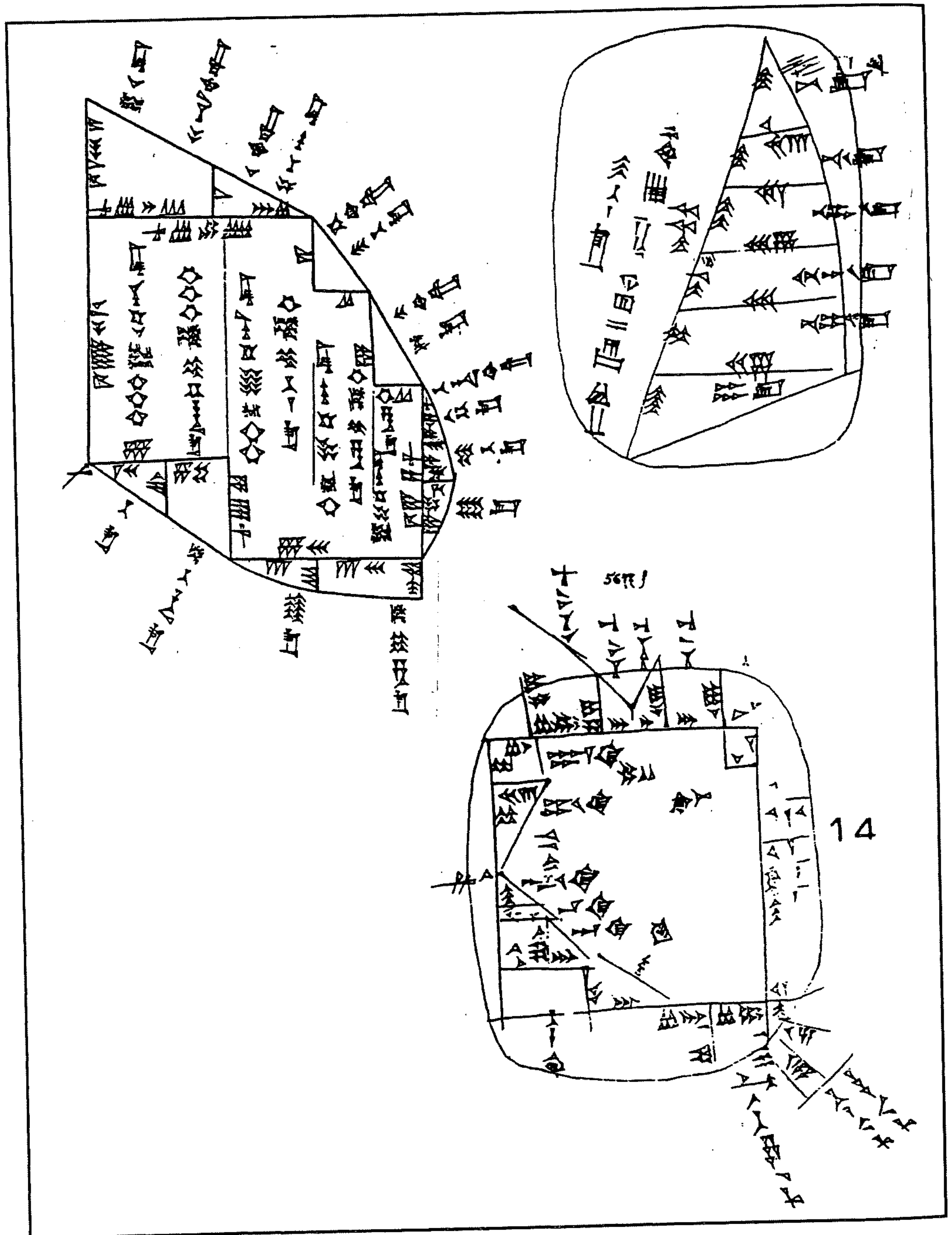
L'arpentage et tout ce qui relève des transactions commerciales constituent le domaine privilégié des mathématiques appliquées. L'arpentage revêt une grande importance sociale : les mesures précises de terrains permettent d'établir des cadastres et de fixer la valeur des biens immobiliers et agricoles. Cette valeur est prise en compte dans les contrats d'achat et de vente, les héritages, les litiges portés devant les tribunaux, la reconstitution des parcelles agricoles périodiquement effacées par les nombreux caprices de la trajectoire des grands fleuves (Tigre et Euphrate). L'aire d'une parcelle est en général obtenue par découpage en bandes rectangulaires, complétées par des petits triangles ou trapèzes sur les bords. L'arpenteur mesure les dimensions de ces rectangles, triangles et trapèzes. Ces mesures figurent sur le plan de la parcelle. Puis il calcule l'aire et l'inscrit dans la figure. Les formules d'aires sont exactes pour les triangles rectangles et les rectangles, ce qui est suffisant pour l'arpentage usuel. Elles sont approchées pour les autres quadrilatères : en gros, l'arpenteur calcule la moyenne arithmétique des longueurs des côtés opposés, puis multiplie ces deux moyennes. Le résultat est d'autant meilleur que la forme du quadrilatère s'approche de celle d'un rectangle.

La métrologie

La réforme d'Agade

Le système métrologique suméro-babylonien est remarquable par sa cohérence, son homogénéité et sa stabilité dans le temps et dans l'espace. Il résulte de la double influence de « ceux d'en bas » (les pratiques agricoles et commerciales) et de « ceux d'en haut » (les pratiques savantes et les politiques menées par les souverains). Le seul jeu spontané des pratiques locales donne des systèmes disparates, évolutifs et régionaux[1]. Face à cette situation regrettable pour l'efficacité du commerce et de l'administration, il y a eu intervention du pouvoir central appuyé sur une réflexion consciente des scribes. La plus décisive de ces interventions est probablement « la Réforme d'Agade », politique délibérée du premier grand empire de Mésopotamie pour normaliser les poids et mesures. Datée du règne de Naram-Sin (vers –2250), cette « réforme » s'efforce de redéfinir de façon rationnelle un système cohérent à partir d'éléments de systèmes locaux existants (principalement, celui d'Akkad) et du travail d'unification déjà réalisé dans les écoles de scribes. Cette intervention d'état dans la métrologie est perceptible dans le vocabulaire : les unités issues de la Réforme d'Agade sont dénommées « mesures du roi », «mesures normales », « mesures éminentes ». La normalisation des systèmes métrologiques est contemporaine de l'invention de l'horloge à eau et des efforts de précision de la valeur de π ($\pi \approx 3\ 1/8$)[2]. Elle s'inscrit dans un mouvement plus

[1] Il est tentant de faire l'analogie avec la situation en Europe jusqu'à l'intervention des gouvernements pour imposer le système métrique conçu par les savants de la Révolution Française.
[2] Powel 1990, p. 509.



Quelques exemples de cadastres publiés par Mario Liverani en 1990 (provenant de Lagash et Tello, et datant de la période néo-sumérienne). La tablette numérotée 14 par Liverani est exposée aux Antiquités Orientales du Louvre (salle 2, vitrine 9, tablette AO 5677). Dans les tablettes, les échelles ne sont pas respectées.

général de développement conjoint d'innovations techniques et intellectuelles dans le domaine de la mesure.

Mais la réalité des usages en matière de métrologie est beaucoup plus complexe que son unification théorique ne le laisse espérer. Des décisions administratives n'effacent pas à 100% des habitudes souvent très anciennes[3]. Il en résulte un cadre général commun dans lequel s'inscrivent des variantes géographiques et chronologiques nombreuses. Une description simplifiée de quelques aspects importants de ce cadre général, issu pour l'essentiel de la « réforme d'Agade », est proposée ici. C'est pour l'essentiel le système utilisé à Nippur.

Les surfaces

Les unités de longueurs et de surface sont les plus anciennes, probablement pour certaines antérieures à l'invention de l'écriture. Les unités de surfaces sont en général des carrés d'unités de longueur[4].

1 gín-tur = (6 su-si)^2

1 šar = 1 nindan^2

1 ú-za-lag = 1 ṣubban^2

1 iku = 1 eš^2

En revanche, le bùr (environ 6 hectares) est un rectangle, une étroite bande de 1 gar (6 m) sur 1 danna (10,5 km). Son origine est peut-être à chercher dans les habitudes d'arpentage décrites ci-dessus.

Les volumes et les capacités

Le système d'unités de volumes est un décalque de celui des surfaces : chaque unité de volume est égale à la surface correspondante affectée d'une épaisseur de 1 kùš (30 cm). Les rapports entre unités de surfaces et de volumes sont donc les mêmes, ainsi que leurs noms[5].

1 gin-tur$_v$ = 1 gin-tur$_s$ x 1 kùš

1 gin$_v$ = 1 gin$_s$ × 1 kùš

1 šar$_v$ = 1 šar$_s$ × 1 kùš

1 gan$_v$ = 1 gan$_s$ × 1 kùš

---

[3] La perte de la sonde sur Mars « Orbiter » par la NASA est une illustration moderne de ce phénomène ancien et banal : « La cause fondamentale à l'origine de la perte du vaisseau spatial réside dans l'absence de conversion d'une unité du système anglo-saxon en unités métriques dans un segment du logiciel de navigation » a déclaré A. Stephenson, président d'une commission d'enquête de la NASA (AFP 11/11/99).

[4] Je désigne systématiquement les unités par leur nom sumérien. Cela évite d'ajouter à la confusion induite par les variations locales du vocabulaire ancien celle qui est induite par une terminologie instable dans les traductions et commentaires modernes, changeante selon les langues, les auteurs, les époques. La cacophonie de la terminologie reste néanmoins irréductible, car un signe sumérien peut avoir plusieurs transcriptions phonétiques ; les variantes les plus usitées sont :

1 ú = 1 kùš ; 1 nindan = 1 GAR ; 1 šar = 1 sar 1 iku = 1 gán

[5] Pour distinguer les unités de surface et de volume de même nom, je place un S ou un V en indice.

1 ubu_v = 1 $ubu_s \times$ 1 kùš

1 iku_v = 1 $iku_s \times$ 1 kùš

Le vocabulaire garde la trace de ces constructions : un « champ » (kùš) peut être une unité de volume ; un « récipient » (gín) peut être une unité de surface ; une « charge d'homme » (ma-na) peut être une unité de volume ou de surface.

La représentation d'un volume comme le cube géométrique d'une longueur, quoique marginale, n'est pas absente dans la définition des unités de volume : 1 sìla (0,970 litre) est un cube de 6 šu-si (99 mm) d'arête.

Le système des volumes, attesté principalement dans les textes mathématiques, entièrement fabriqué par les artisans de la « réforme d'Agade », est une pure construction savante : les volumes sont des piles de surfaces, par extension du principe des bandes appliqué à la construction de certaines unités de surfaces. C'est la notion même de volume qui se dégage dans cette redéfinition du système de mesure. Dans la conception ancienne, c'est la quantité de matière qui est mesurée, les unités étant fortement attachées à la nature de cette matière (liquide, grain, brique, entrepôt...). La notion archaïque de « volume », du reste désignée habituellement par « capacité », est concrète, physique, liée à la matière. La conception nouvelle issue de la « réforme » est plus abstraite, géométrique, liée à l'espace. La conception ancienne reste néanmoins présente par l'existence d'un système spécial de « capacités » pour les quantités de grain et d'huile.

Les poids

Le système des poids est lui aussi relativement récent. Il est le seul qui soit purement sexagésimal et donc en cohérence parfaite avec la base de numération[6]. L'unité de poids est la « mine », ma-na, c'est une fabrication artificielle du système d'Agade.

La mine est ensuite subdivisée selon les mêmes facteurs que la subdivision du šar, unité de volume, les sous-unités obtenues recevant le même nom que leur homologue du système des volumes. La mine a un multiple, le gún : 1 gún = 60 ma-na. Le rapport est là encore sexagésimal. Cette unité semble être la seule unité de poids d'origine ancienne, correspondant à la charge d'un homme (≈30 kg).

> *C'est dans le système pondéral que le caractère sexagésimal est le plus nettement marqué et même tout à fait dominant. La genèse de ce système peut être reconstituée avec une certaine vraisemblance. La mesure pondérale naturelle paraît avoir été celle que constitue la charge normale d'un homme. Longtemps on a dû compter exclusivement par « charges ». Le besoin d'une unité pondérale plus petite et plus précise ne s'est sans doute fait sentir qu'à partir du moment où se généralisèrent le commerce et l'emploi des métaux. C'est alors qu'on a dû construire les premières balances, user ces premiers poids et établir un rapport fixe entre l'ancienne « charge » et la nouvelle unité, purement conventionnelle, à laquelle on donna le nom de* mana, *« mine ». Si entre la « charge » (c'est-à-dire le talent) et la mine on a conçu un rapport*

[6] Dans le cas précis de la métrologie des poids, on peut dire que les unités de mesure découlent de la base de numération et non l'inverse.

> *sexagésimal, c'est, sans aucun doute, parce que le nombre 60 était déjà la base de la numération. Par la suite, on sentit la nécessité de fractionner la mine. [...]. Ces subunités reproduisaient dans l'ordre des fractions l'échelle qui, dans la numération, était appliquée aux entiers.* [Thureau-Dangin 1932, p. 39]

Le lien entre volumes et poids fait intervenir la densité, notion qui ne semble pas intervenir ici. Le fait que 1 mine (ma-na) est le poids de 1/2 sìla d'eau (1/2 litre) me paraît être fortuit, d'autant que la notion de poids semble attachée exclusivement aux métaux (et non aux liquides). Le système des poids est donc indépendant de celui des grandeurs spatiales (longueurs, surfaces, volumes, capacités). Par exemple, le gín unité de poids n'a rien à voir avec le gín unité de volume :

1 gín (volume) = 300 litres ; 1 gín (poids) = 8,3 g

Le gín des unités spatiales est réutilisé dans le système des poids pour sa fonction de rapport numérique, c'est-à-dire en tant que « soixantième ».

Les systèmes de numération

Plusieurs systèmes de numération interviennent dans les tables et textes métrologiques. En première analyse, on peut distinguer deux types de nombres, que j'appellerai « nombres concrets » et « nombres abstraits ».

Les « nombres concrets » sont ceux qui servent à la mesure et sont suivis d'une unité. Ils sont de bases variables, mais toujours de principe additif. Les fractions de l'unité sont à ranger dans cette catégorie.

- **fractions** : les fractions usuelles (1/3, 1/2, 2/3, 5/6) ont des signes spécifiques. Cette notation des fractions est corrélée avec un principe de numération additif. Les fractions non usuelles sont notées « igi N gál » pour 1/N.

- **système G**, pour les iku (gán), mesure de surface ou de volume. Système additif de bases multiples (6; 3; 10; 6; 10; 60).

- **système S**, pour les gur (mesures de capacité) et les gú (mesures de poids). Système additif de bases alternées 10 et 6.

- **système standard** pour les autres unités, ne nécessitant que des nombres inférieurs à 60 (des 1 et des 10 répétés autant que nécessaire).

La mesure est composée de deux parties : le nombre concret + l'unité. Ces deux parties sont fusionnées dans le cas des pi et des bán (unités de capacité).

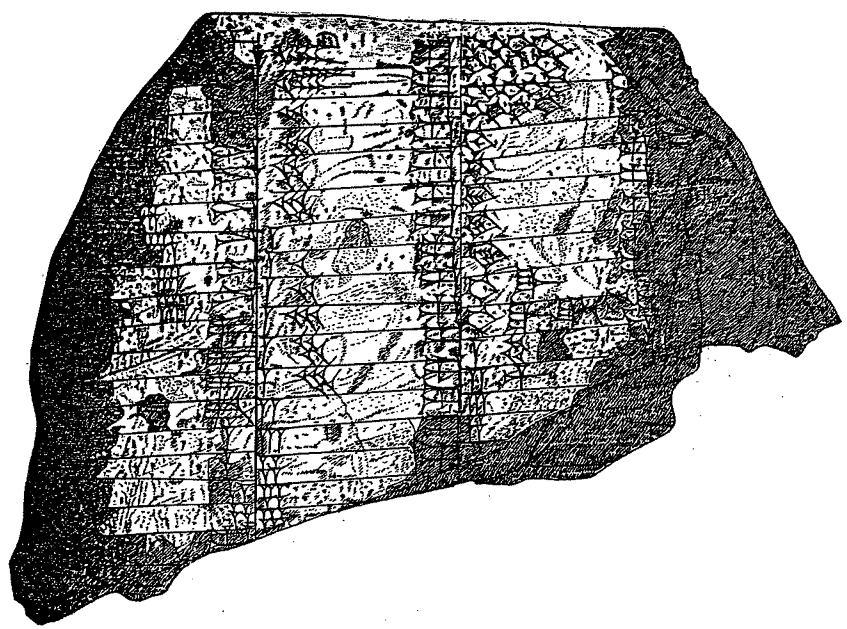
Les « nombres abstraits » interviennent dans les tables comme équivalents numériques des mesures, jamais dans la mesure elle-même. Dans les textes métrologiques (calculs de surface et de volumes), ils interviennent à l'étape du calcul, mais pas dans les données ni dans la réponse. Ce sont les nombres des textes purement mathématiques, sexagésimaux de position, sans indication de la position des unités, donc sans grandeur.

Une question mathématique fondamentale se dégage dans la nécessité de conversions permanentes soit au sein même du système, soit dans le passage d'un système à l'autre : la question des opérations réciproques de multiplication et de division, c'est-à-dire de **l'inversion.**

Les textes métrologiques de Nippur

Ils se divisent en deux catégories, les listes et les tables. La première est celle des listes de mesures de longueur, surfaces, volumes, capacités, poids. C'est ce que l'écolier cité au début appelle « *la tablette des capacités de 1 à 600 gur d'orge ; la tablette des poids de 1 sicle à 20 mines d'argent* ». La deuxième catégorie est celle des correspondances entre mesures et nombres abstraits, en notation sexagésimale de position sans spécification de l'ordre de grandeur (de la position du chiffre des unités).

La tablette CBM 10 990 est un exemple assez complet de liste métrologique, et peut aisément être reconstituée dans ses parties détruites (dans la transcription, les parties grises sont des reconstitutions).



Un fragment de CBM 10 990 (haut de la face), copie de Hilprecht, Babylonian Expedition volume 20, Philadelphie 1906.

col. I	col. II	col. III	col. IV	col. V	col. VI
[détruite]	1 sila	18 gur	8x60^2 gur		[3 ma-na
	2 sila	19 gur	9x60^2 gur		4 ma-na
	3 sila	20 gur	10x60^2 gur		5 ma-na
	4 sila	30 gur	20x60^2 gur		6 ma-na
	5 sila	50 gur	30x60^2 gur	[1 gín	7 ma-na
	6 sila	60 gur	40x60^2 gur	1 1/2 gín	8 ma-na
	7 sila	70 gur	50x60^2 gur	1 1/3 gín	9 ma-na
	8 sila	80 gur	60^3 gur	1 5/6 gín	10 ma-na
	9 sila	90 gur	60^4 gur	2 gín]	20 ma-na
	2 bán	100 gur	1 še	3 gín	30 ma-na
	3 bán	110 gur	2 1/2	4 gín	40 ma-na
	4 bán	2x60 gur	3	5 gín	50 ma-na]
	5 bán	3x60 gur	4	6 gín	1 gú
	1 pi	4x60 gur		7 gín	1 1/2 gú
	2 pi	5x60 gur		8 gín	2 gú
	3 pi	6x60 gur		9 gín	3 gú
	4 pi	[7 x60 gur		10 gín	4 gú
	[1 gur	8 x60 gur		11 gín	5 gú
	2 gur	9 x60 gur		12 gín	6 gú
	3 gur	10x60 gur		13 gín	7 gú
	4 gur	20x60 gur		14 gín	8 gú
	5 gur	30x60 gur		15 gín	9 gú
	6 gur	40x60 gur		16 gín	10 gú
	7 gur	50x60 gur		17 gín	11 gú
	8 gur	60^2 gur		18 gín	12 gú
	9 gur	2x60^2 gur		19 gín	13 gú
	10 gur	3x60^2 gur		1/3 ma-na	14 gú
	11 gur	4x60^2 gur		1/2 ma-na	15 gú
	12 gur	5x60^2 gur		2/3 ma-na	16 gú
	13 gur	6x60^2 gur		5/6 ma-na	17 gú
	14 gur	7x60^2 gur]		1 ma-na	18 gú
	15 gur			1 1/3 ma-na	[19] gú
	16 gur			1 1/2 ma-na	20 gú
	17 gur]			1 5/6 ma-na	30 gú
				2 ma-na	40 gú
	Capacités	Capacités	Capacités/ Poids	Poids	Poids

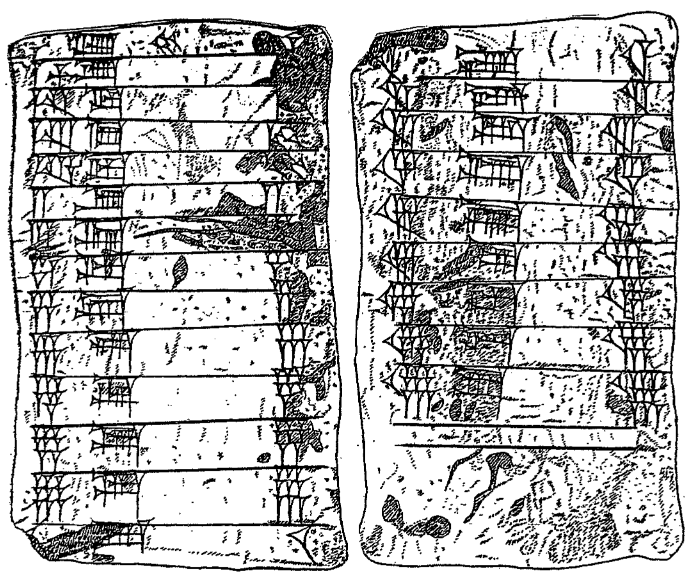
CBM 10 990 : reconstitution de la face.

Les exemples suivants sont des tables métrologiques, qui donnent des correspondances entre des mesures et des nombres abstraits. Ces tables permettent de passer des mesures aux nombres pour le calcul et inversement des résultats du calcul aux mesures. Elle sont utilisées dans les problèmes scolaires de métrologie (calcul d'aire de carré et de quadrilatère, de volume de cube connaissant le côté ou l'inverse).

face	revers
20 še 6.40	1/3 gín 20
21 še 7	1/2 gín 30
22 še 7.20	2/3 gín 40
23 še 7.40	5/6 gín 50
24 še 8	1 gín 1
25 še 8.20	
26 še 8.40	
27 še 9	
28 še 9.20	
29 še 9.40	

Hilprecht n°32 (extrait)

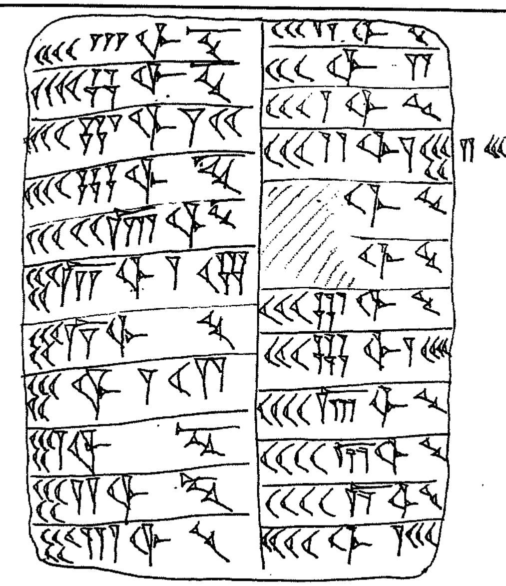
face	revers
1 gín še 1	11 gín 11
1 1/2 gín 1.30	12 gín 12
1 1/3 gín 1.20	13 gín 13
1 2/3 gín 1.40	14 gín 14
1 5/6 gín 1.50	15 gín 15
2 gín 2	16 gín 16
3 gín 3	17 gín 17
4 gín 4	18 gín 18
5 gín 5	19 gín 19
6 gín 6	
7 gín 7	
8 gín 8	
9 gín 9	
10 gín 10	



CBM 4505 (Hilprecht n°33)

Calcul pur

Peut-être en raison des ses racines dans la métrologie, le calcul numérique babylonien s'organise autour du couple multiplication-division. La division par un nombre est la multiplication par l'inverse de ce nombre : la question centrale est celle de l'inversion, intimement liée à la nature du nombre abstrait savant, sexagésimal de position sans spécification écrite de la position des unités, donc des ordres de grandeur. Un nombre se lit toujours à un facteur 60^n près (n entier relatif). La spécification de n, c'est-à-dire de la position du chiffre des unités, n'est pas toujours nécessaire, en particulier dans les multiplications et les divisions. Les tables d'inversion et de multiplication y gagnent une grande efficacité par leur généralité. Dans les problèmes où interviennent des additions, des racines carrées ou cubiques, ou des mesures, l'ordre de grandeur est rétabli mentalement par le scribe, qui fait très rarement des erreurs (la dimension importante de la base limite les risques de confusions). Il y a donc deux sortes de nombres : ceux qui ont un inverse exact en écriture sexagésimale (les nombres réguliers en base 60), et les autres. Du fait de la richesse en diviseurs de 60, l'ensemble des nombres réguliers est beaucoup plus fourni en base 60 qu'en base 10. Pour le calculateur babylonien, l'inverse d'un nombre irrégulier *n'existe pas*. Ces nombres ont tendance à disparaître des tables d'inverses, et d'une façon générale du calcul numérique. Une tablette archaïque de Nippur (HS 201) de la période néo-sumérienne mentionne, en face des nombres non réguliers : « igi nu », c'est-à-dire : *n'a pas d'inverse*. Voici une tablette du même type et de la même époque provenant de Tello (L 7375)[7].

43 igi nu	30-1 igi nu	
44 igi nu	30 igi 2	
45 igi 1.20	31 igi nu	
46 igi nu	32 igi 1.52.30	
50-3 igi nu	33 igi nu	
50-2 igi 1.15	34 igi nu	
50-1 igi nu	35 igi nu	
50 igi 1.12	36 igi 1.40	
51 igi nu	40-3 igi nu	
52 igi nu	40-2 igi nu	
53 igi nu	40-1 igi nu	
	40 igi 1.30	

[7] Dans les traductions qui suivent, ainsi que dans le texte, j'écris les nombres en base 60. La conversion en écriture décimale, quoique sans intérêt, est facile. Par exemple : 6.40 (en base 60) = 6x60 + 40 = 400 (en base 10) ; 44.26.40 (en base 60) = 44 x 60^2 + 26 x 60 + 40. Cette conversion en écriture décimale a un inconvénient majeur : elle oblige à fixer la position des unités, ce que le texte ancien ne fait en général pas.

Mais dans sa forme classique de l'époque paléo-babylonienne, la table d'inverses ignore les nombres irréguliers. Ces nombres dont l'inverse « n'existe pas » sont exclus de l'univers numérique. La question de l'approximation sexagésimale des inverses non réguliers est néanmoins abordée par quelques tablettes paléo-babylonienne (mais pas à Nippur), et développée de façon spectaculaire par les mathématiciens de l'époque séleucide (-300) pour les besoins du calcul astronomique.

Les inverses usuels sont ceux des nombres réguliers de 2 à 1.21 (à un facteur 60^n près). Ils figurent dans les tables d'inverses (voir CBS 8536 colonne 1).

n	*1/n*	*n*	*1/n*	*n*	*1/n*
2	30	16	3.45	45	1.20
3	20	18	3.20	48	1.15
4	15	20	3	50	1.12
5	12	24	2.30	54	1.6.40
6	10	25	2.24	1	1
8	7.30	27	2.13.20	1.4	56.15
9	6.40	30	2	1.12	50
10	6	32	1.52.30	1.15	48
12	5	36	1.40	1.20	45
15	4	40	1.30	1.21	44.26.40

Les multiplications sont effectuées par recours aux tables.

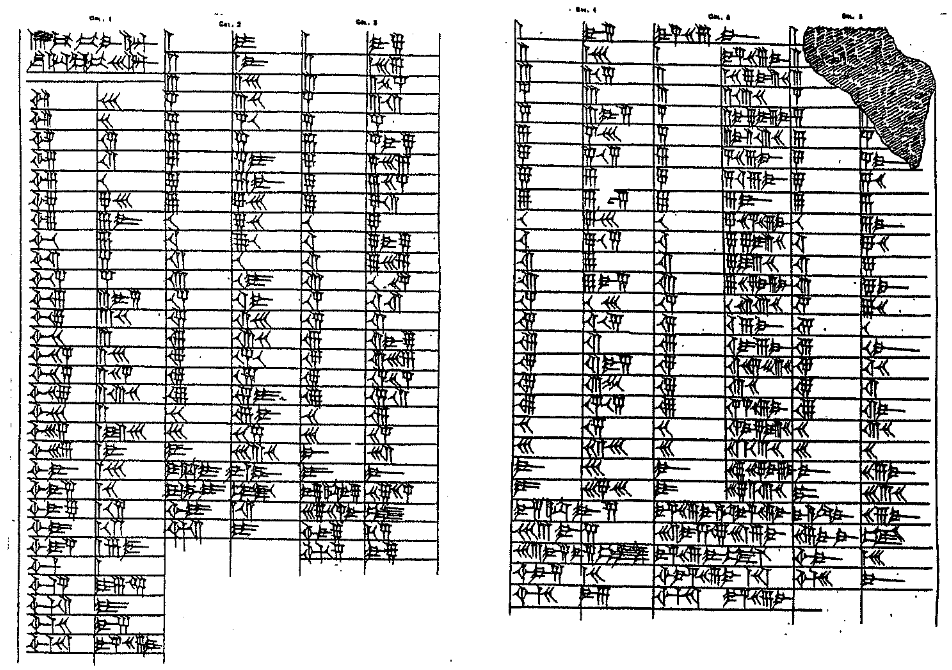
CBS 8536 donne les tables de multiplication par :

50, 48, 45, 44.26.40, 40, 36, 30, 25, 24, 22.30, 20.

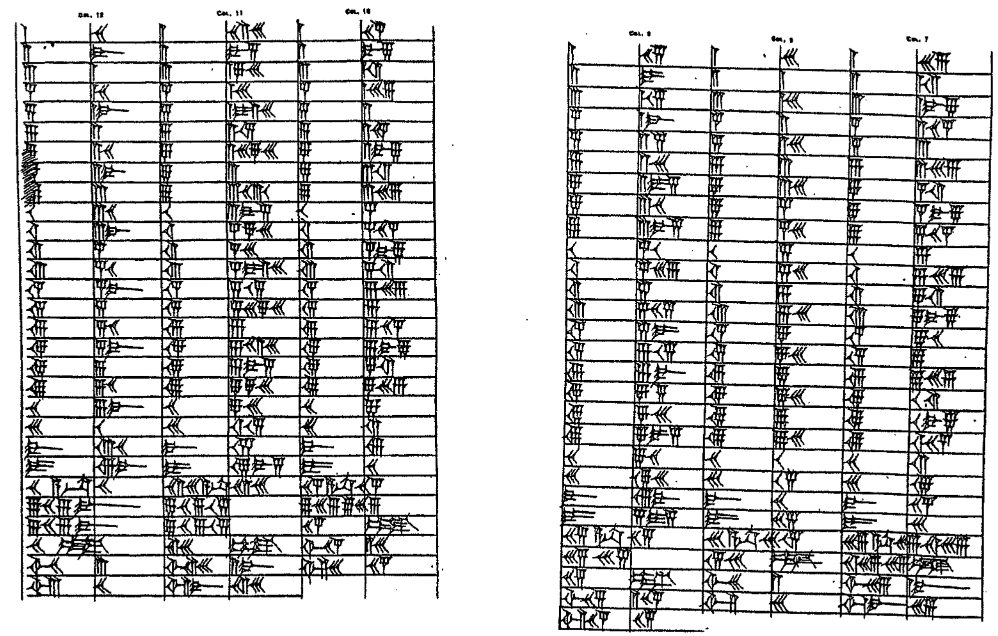
D'autres tablettes donnent les tables par :

18, 16.40, 16, 15, 12.30, 12, 10, 9, 8.20, 8, 7.30, 7.12, 7, 6.40, 6, 5, 4.30, 4, 3.45, 3.20, 3, 2.30, 2.24, 2, 1.40, 1.30, 1.20, 1.15 (dans cet ordre lorsque plusieurs tables figurent sur une même tablette).

On reconnaît dans cette liste presque toutes les valeurs rencontrées dans la table d'inverses, colonne de gauche ou de droite (à l'exception notable de 7 qui est le seul nombre irrégulier usuel). Cela signifie que toute table de multiplication est aussi une table de division et vice-versa. Par exemple, la table de multiplication par 44.26.40 est aussi la table de division par 1.21 (81 en écriture décimale).



CBS 8536, face, colonnes 1 à 6, copie de Lutz 1920.



CBS 8536, revers, colonnes 7 à 12 (de droite à gauche), copie de Lutz 1920.

Chaque table de multiplication par n est complétée à la fin par le carré de n, la racine carrée de n^2, l'inverse de n, l'inverse de $1/n$. On verra par la suite à quel point le calculateur ne craint pas la redondance…

Que faire pour inverser un nombre régulier qui ne figure pas dans les tables ? Deux tactiques sont attestées à Nippur : le doublement / dédoublement et la factorisation.

CBS 29 13 21 est une suite d'inverses obtenus par exploitation de la règle suivante : si n double, $1/n$ est divisé par 2. Les doublements réalisés sont :

de 2.5 à 2.5×2^{29} (col I et II, face) ;

de 2.40 à 2.40×2^{5} (col I, revers)

de 1.40 à 1.40×2^{9} (col I et II, revers) ;

de 1.04 à 1.04×2^{7} (col II, revers)

de 4.3 à 4.3×2^{8}, etc. (col II, revers, la fin est détruite)

Le procédé est appliqué aux paires de démarrage n et $1/n$ suivantes :

2.5 et 28.48 (face, colonnes I et II)

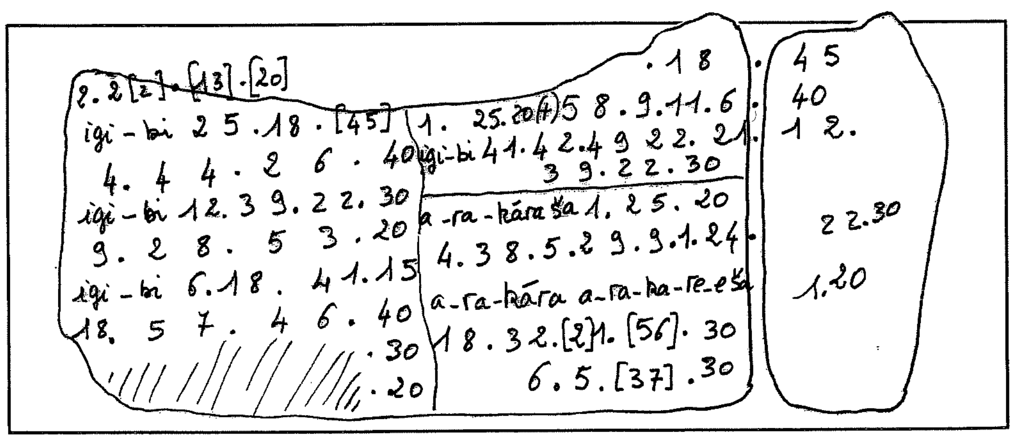
2.40 et 22.30 (revers, colonne I)

1.40 et 36 (revers, colonnes I et II)

1.4 et 56.15 (revers, colonne II)

4.3 et 14.48.53.20 (revers, colonnes II et III).

La tablette, à la fin de la colonne I (face), donne le « arakârum » de 1.25.20, c'est-à-dire l'inverse de $1.25.20 \times 2^{15}$ et le « arakârum du arakârum » de 1.20, c'est-à-dire l'inverse de 1.20×2^{19}. « L'arakârum » d'un nombre est son inverse après plusieurs doublements. D'une certaine façon, CBS 29 13 21 est une table d'arakârum de 2.5, 2.40, 1.40, 1.4 et 4.3.



CBS 29 13 21 : face.

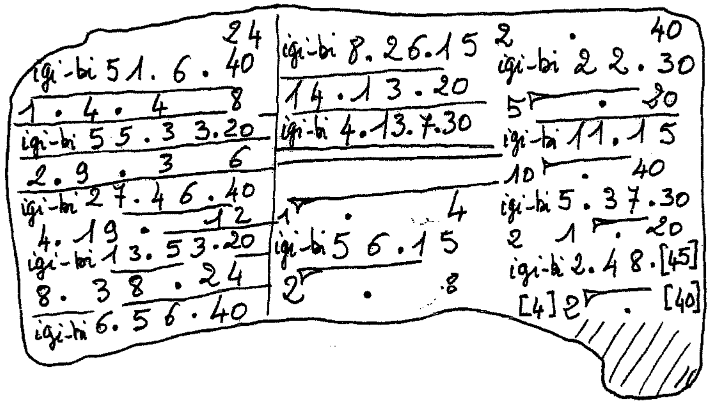
Copie d'après la photo publiée par Otto Neugebauer, Mathematical Cuneiform Texts, 1945.

D'après la photo et la transcription de Neugebauer (*Mathematical Cuneiform Texts* p. 13 et 14), on peut reconstituer ainsi le texte intégral.

Colonne I	Colonne II
2.5	1.15.51.6.40
igi-bi 28.48	igi-bi 47.2739.22.30
4.10	2.31.42.13.20
igi-bi 14.24	igi-bi 23.43.49.41.15
8.20	5.3.24.26.40
igi-bi 7.12	igi-bi 11.51.54.50.37.30
16.40	10.6.48.53.20
igi-bi 3.36	igi-bi 5.55.57.25.18.45
33.20	20.13.37.46.40
igi-bi 1.48	igi-bi 2.57.58.42.39.22.30
1.6.40	40.27.15.33.20
igi-bi 54	igi-bi 1.28.59.21.19.41.15
2.13.20	1.20.54.31.6.40
igi-bi 27	igi-bi 44.29.40.39.50.37.30
4.26.40	2.41.49.2.13.20
igi-bi 13.30	igi-bi 22.14.50.19.55.18.45
8.53.20	5.23.38.4.26.40
igi-bi 6.45	igi-bi 11.7.25.9.57.39.22.30
17.46.40	10.47.16.8.53.20
igi-bi 3.22.30	igi-bi 5.33.42.34.58.49.41.15
35.33.20	21.34.32.17.46.40
igi-bi 1.41.15	igi-bi 2.46.51.17.29.24.50.37.30
1.11.6.40	43.9.4.35.33.20
igi-bi 50.37.30	igi-bi 1.23.25.38.44.42.25.18.45
2.22.13.20	1.26.18.9.11.6.40*
igi-bi 25.18.45	igi-bi 41.42.49.22.21.12.
4.44.26.40	39.22.30
igi-bi 12.39.22.30	
9.28.53.20	a-ra-kára ša 1.25.20
igi-bi 6.19.41.15	4.38.5.29.9.1.24.22.30
18.57.46.40	a-ra-kára a-ra-ka-re-e ša 1.20
igi-bi 3.9.50.37.30	18.32.21.56.30
37.55.33.20	6.5.37.30
igi-bi 1.34.55.18.45	

CBS 29 13 21 : face

**1.26.18.9.11.6.40 est écrit dans la tablette 1.25.20 (+) 58.9.11.6.40. Son inverse en revanche est donné en un seul morceau.*



CBS 29 13 21 : revers.

Copie d'après la photo publiée par Otto Neugebauer, Mathematical Cuneiform Texts.

Colonne III	Colonne II	Colonne I
32.24	7.6.40	2.40
igi-bi 1.51.6.40	igi-bi 8.26.15	igi-bi 22.30
1.4.48	14.13.20	5.20
igi-bi 55.33.20	igi-bi 4.13.7.30	igi-bi 11.15
2.9.36		10.40
igi-bi 27.46.40	1.4	igi-bi 5.37.30
4.19.12	igi-bi 56.15	21.20
igi-bi 13.53.20	2.8	igi-bi 2.48.45
8.38.24	igi-bi 28.7.30	42.40
igi-bi 6.56.40	4.16	igi-bi 1.24.22.30
17.16.48	igi-bi 14.3.45	1.25.20
igi-bi 3.28.20	8.32	igi-bi 42.11.15
	igi-bi 7.1.52.30	1.40
	17.4	igi-bi 36
	igi-bi 3.30.56.15	3.20
	34.8	igi-bi 18
	igi-bi 1.45.28.7.30	6.40
	1.8.16	igi-bi 9
	igi-bi 52.44.3.45	13.20
	2.16.32	igi-bi 4.30
	igi-bi 26.22.1.52.30	26.40
		igi-bi 2.15
	4.3	53.20
	igi-bi 14.48.53.20	igi-bi 1.7.30

	8.6	1.46.40
	igi-bi 7.24.26.40	igi-bi 33.45
	16.12	3.33.20
	igi-bi 3.42.13.20	igi-bi 16.52.30

CBS 29 13 21 : revers.

L'inversion de 2.5 et de ses doubles est omniprésente dans les algorithmes d'inversion, comme on va le voir dans les textes suivants.

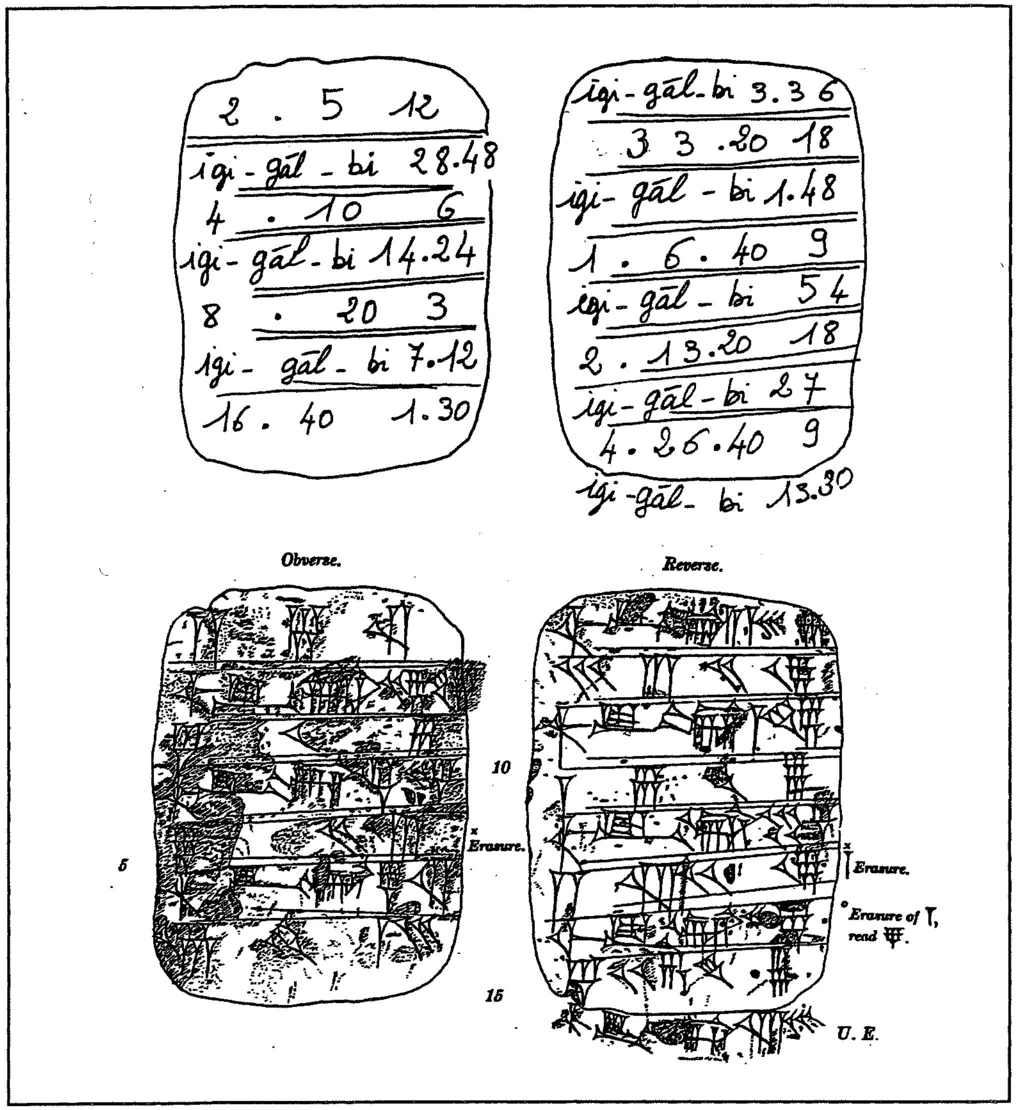
Mais comment le scribe a-t-il obtenu l'inverse de 2.5, qui n'est pas donné par les tables ? La tablette CBM 10 201, quoique énigmatique, fournit un début de réponse.

§	face		§	revers	
1	2.5	12		igi-gál-bi	3.36
	igi-gál-bi	28.48	5	33.20	18
2	4.10	6		igi-gál-bi	1.48
	igi-gál-bi	14.24	6	1.6.40	9
3	8.20	3		igi-gál-bi	54
	igi-gál-bi	7.12	7	2.13.20	18
4	16.40	1.30		igi-gál-bi	27
			8	4.26.40	9
				igi-gál-bi	13.30

*CBS 10 201, transcription de Sachs (*Babylonian Mathematical Texts, *1947).*

On reconnaît la même liste que dans CBS 29 13 21, mais le nombre à inverser est accompagné d'une valeur (par exemple, 2.5 est accompagné de la valeur 12). Le rôle de ces valeurs reste à expliquer. C'est dans VAT 6505 que se trouve la réponse, bien que cette tablette ne soit pas attestée comme provenant de Nippur.

Contrairement aux textes de Nippur, purement numériques et sans commentaire autre que quelques mots en sumérien, VAT 6505 est rédigée entièrement en akkadien. Toutes les étapes du calcul sont décrites minutieusement, ce qui apporte un éclairage précieux sur les algorithmes numériques de Nippur.



CBM 10 201, copie de Hilprecht, Babylonian Expedition *volume 20, 1906.*

Transcription, reconstitution et traduction de Thureau-Dangin (*Textes Mathématiques Babyloniens*)

	Transcription	Traduction
1	détruit	
2	*4.10 igûm igi-bu-šu minûm* *atta ina epêšika* *igi* 10 *puṭur* 6 *ta-mar* 6 *a-na* 4 *bil* 24 *ta-mar* 1 *ṣib* 25 *ta-mar* *igi* 25 *puṭur* 2.24 *ta-mar* 2.24 *ana* 6 *bil* 14.24 *ta-mar* 14.24 *igi-bu-um ki-a-am ne-pé-šum*	L'igû est 4.10. Qu'est son igibû ? Toi en opérant, dénoue l'inverse de 10, tu trouveras 6. Porte 6 à 4, tu trouveras 24. Ajoute 1, tu trouveras 25. Dénoue l'inverse de 25, tu trouveras 2.24. Porte 2.24 à 6, tu trouveras 14.24. 14.24 est l'igibûm, telle est la façon d'opérer
3	8.20 *igûm igi-bu-šu minûm* *atta ina epêšika* *igi* 20 *puṭur* 3 *ta-mar* 3 *a-na* 8 *bil* 24 *ta-mar* 1 *ṣib* 25 *ta-mar* *igi* 25 *puṭur* 2.24 *ta-mar* 2.24 *ana* 3 *bil* 7.12 *ta-mar* 7.12 *igi-bu-um ki-a-am ne-pé-šum*	L'igû est 8.20. Qu'est son igibû ? Toi en opérant, dénoue l'inverse de 20, tu trouveras 3. Porte 3 à 8, tu trouveras 24. Ajoute 1, tu trouveras 25. Dénoue l'inverse de 25, tu trouveras 2.24. Porte 2.24 à 3, tu trouveras 7.12. 7.12 est l'igibûm, telle est la façon d'opérer.
4	16.40 *igûm igi-bu-šu minûm* *atta ina epêšika* *igi* 6.40 *puṭur* 9 *ta-mar* 9 *a-na* 10 *bil* 1.30 *ta-mar* 1 *ṣib* 2.30 *ta-mar* *igi* 2.30 *puṭur* 24 *ta-mar* 24 *ana 9* bil 3.36 *ta-mar* 3.36 *igi-bu-um* *ki-a-am ne-pé-šum*	L'igû est 16.40. Qu'est son igibû ? Toi en opérant, dénoue l'inverse de 6.40, tu trouveras 9. Porte 9 à 10, tu trouveras 1.30. Ajoute 1, tu trouveras 2.30. Dénoue l'inverse de 2.30, tu trouveras 24. Porte 24 à 9, tu trouveras 3.36. 3.36 est l'igibûm, telle est la façon d'opérer.
5	détruit	
6	1.6.40 *igûm igi-bu-šu minûm* *atta ina epêšika* *igi* 6.40 *puṭur* 9 *ta-mar* 9 *a-na 1 bil* 9 *ta-mar* 1 *ṣib* 10 *ta-mar* *igi* 10 *puṭur* 6 *ta-mar* 6 *ana* 9 *bil* 54 *ta-mar* 49 *igi-bu ki-a-am ne-pé-šum*	L'igû est 1.6.40. Qu'est son igibû ? Toi en opérant, dénoue l'inverse de 6.40, tu trouveras 9. Porte 9 à 1, tu trouveras 9. Ajoute 1, tu trouveras 10. Dénoue l'inverse de 10, tu trouveras 6. Porte 6 à 9, tu trouveras 54. 49 (lire 54) est l'igibûm, telle est la façon d'opérer.

7	2.13.20 *igûm igi-bu-šu minûm* *atta ina epêšika* *igi* 3.20 *puṭur* 18 *ta-mar* 18 *a-na* 2.10 *bil* 39 *ta-mar* 1 *ṣib* 40 *ta-mar* *igi* 40 *puṭur* 1.30 *ta-mar* 1.30 *ana i bil* 27 *ta-mar* 27 *igi-bu-um* *ki-a-am ne-pé-šum*	L'igû est 2.13.20. Qu'est son igibû ? Toi en opérant, dénoue l'inverse de 3.20, tu trouveras 18. Porte 18 à 2.10, tu trouveras 39. Ajoute 1, tu trouveras 40. Dénoue l'inverse de 40, tu trouveras 1.30. Porte 1.30 à 18, tu trouveras 27. 27 est l'igibûm, telle est la façon d'opérer.
8 à 12	détruits	
13	*naphar* 12 *ki-ib-su* *qât warad*	Il y a en tout 12 exemples. (Ecrit) de la main de Warad (le serviteur).

La tablette réalise l'inversion de 2.5 à 2.5 x 2^{11}, le nombre à inverser étant à chaque fois doublé, sous forme de 12 algorithmes détaillés, rédigés de façon exactement identique. La méthode consiste à décomposer le nombre à inverser en somme, à transformer cette somme en produit par factorisation selon la « formule »

$n = a + b = a\,(1 + b/a)$ (a régulier à 1 ou 2 chiffres)

puis à utiliser la propriété « l'inverse d'un produit est le produit des inverses ». Cela revient en fait à décomposer l'inverse du nombre n en produit de facteurs réguliers à faible nombre de chiffres (méthode de factorisation de l'inverse) :

$$1/n = 1/a \times 1/(1 + b/a)$$

Expliquons par exemple le calcul du §2 :

La première phase du calcul met en jeu des additions. Je fixe donc une position arbitraire des unités :

Quel est l'inverse de 4;10 ?

4;10 = 4 + 0;10

a = 0;10

b = 4

L'inverse de 0;10 est 6

$1/a = 6$

$6 \times 4 = 24$

$b \times 1/a = 24$

$24 + 1 = 25$

$1 + b/a = 25$

La deuxième phase est une suite d'inversions et de multiplications. La position des unités n'a plus d'importance :

L'inverse de 25 est 2.24

$1/(1 + b/a) = 2.24$

$2.25 \times 6 = 14.24$

$1/a \times 1/(1 + b/a) = 14.24$

14.24 est l'inverse de 4.10

Retour sur CBS 10201

La valeur qui accompagne le nombre à inverser s'explique maintenant, c'est l'inverse de a dans la décomposition de $n = a + b$ en produit de facteurs standards. Cette décomposition n'étant pas unique, il existe des variantes possibles. On note que seule la décomposition de 16.40 diffère dans CBS 10 201 et VAT 6505.

La tablette CBS 1215

Avec la tablette CBS 1215, on atteint le sommet du raffinement dans l'art de l'inversion. En 21 paragraphes de complexité croissante, le scribe réalise l'inversion de 2.5 et de ses doubles (2.5, 2.5×2 ;…, 2.5×2^{20}) par la méthode de factorisation, en réitérant l'algorithme lorsque les facteurs obtenus ne figurent pas eux-mêmes dans les tables. Les derniers paragraphes vont jusqu'à 5 itérations (ce qui revient à décomposer $1/n$ en produit de 5 facteurs réguliers). Dans chaque paragraphe, après avoir inversé le nombre, le scribe s'emploie à inverser l'inverse obtenu, ce qui le ramène au nombre initial !

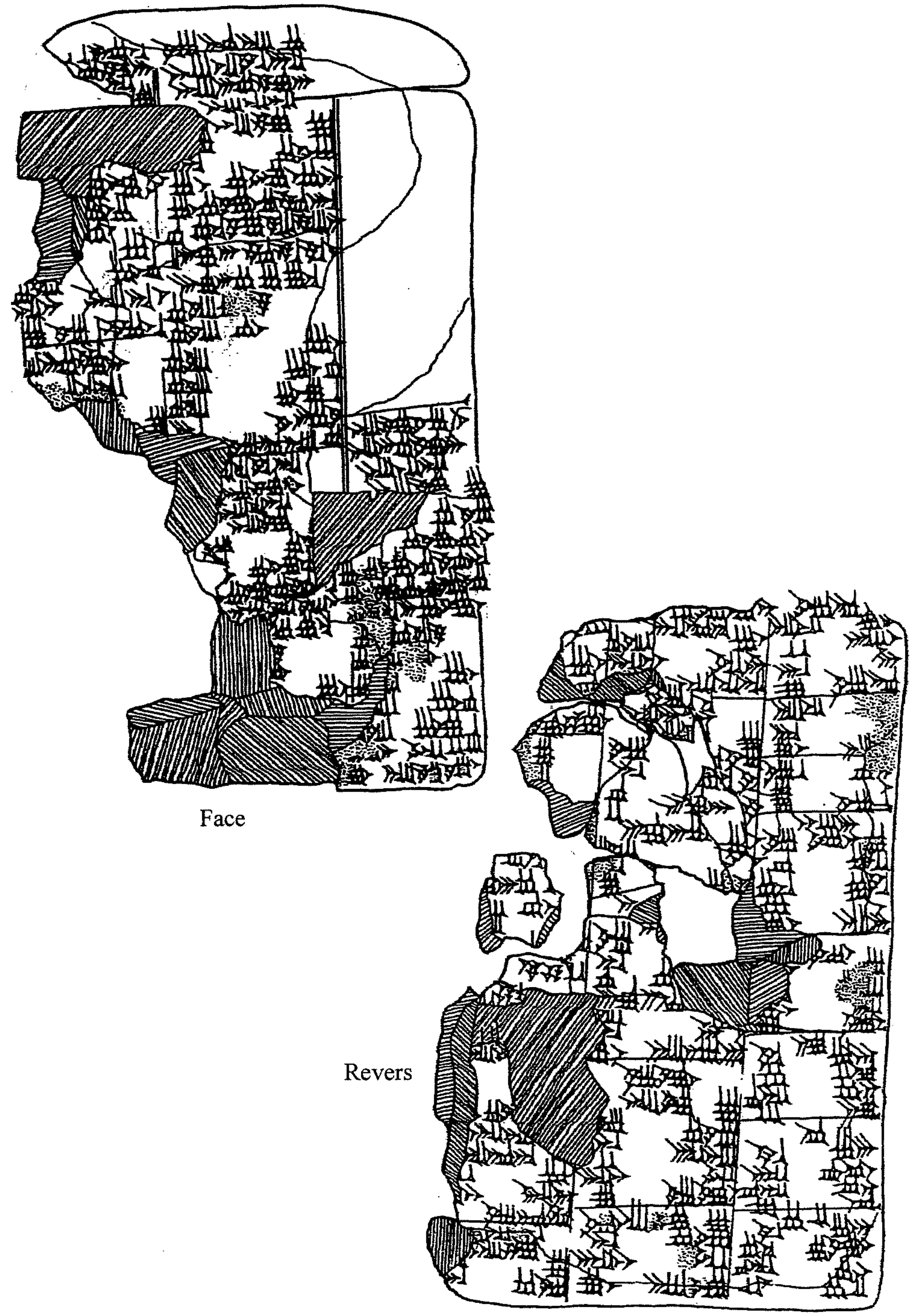
Je donne l'explication détaillée du §1 pour montrer le modèle de l'ensemble des paragraphes, puis le §20 qui met en œuvre la réitération de l'algorithme de factorisation.

TRANSCRIPTION OF CBS 1215

	Obv., I		Obv., II		Obv., III		Rev., I		Rev., II		Rev., III	
1)	¶1) 2,5	12	¶9) 8,53,20	18	6,45	1,20	[25,18,45	16]	¶19) [2,31,42,13,20	18]	¶21) [10,]6,48,53,20	1[8]
2)	25	2,24	2,40	22,30	9	6,[40]	[6,45	1,20]	[45,30,40	1,30]	3,2,2,40	22,[30]
3)	28,48	1,15	6,45	1,20	8,53,20		[9	6,40]	[1,8,16	3,45]	1,8,16	3,4[5]
4)	36	1,40	9	6,40	2,22,13,[20]		[8,53,20]		[4,16	3,45]	4,16	3,[45]
5)	2,5		8,53,20		¶14) 4,44,26,40	[9]	[2,22,13,20]		16 [	3,45]	16	3,45
6)	¶2) 4,10	6	¶10) 17,46,40	9	42,40	22,[30]	[9,28,53,20]		14,[3,45]		14,3,[4]5	
7)	25	2,24	2,40	22,30	16	3,[45]	[18,57,46,40]		52,44,3,45]		52,44,[3,4]5	
8)	14,24	2,30	3,22,30	2	1,24,22,3[0]		¶17) [37,55,33,20	18]	1,19,6,[5,37,30]		19,46,31,24,22,30	
9)	36	1,40	6,45	1,20	[12,3]9,22,30	[2]	[11,22,40	22,30]	23,43,49,4[1,15	4]	5,55,57,25,18,45	16
10)	4,10		9	6,40	[25,18,]45	[16]	[4,16	3,45]	[1,3]4,55,18,45	1[6]	1,34,55,18,45	16
11)	¶3) 8,20	3	8,53,20		[6,45]	[1,20]	[16	3,45]	[2]5,18,45	1[6]	25,18,45	1[6]
12)	25	2,24	17,46,40		[9]	[6,40]	[14,3,45]		[6,]45	1,20	6,45[	1,20]
13)	7,12	5	¶11) 35,33,20	18	[8,]53,20[ ]		[5,16,24,22,30]		9	6,40	9 [	6,40]
14)	36	1,40	10,40	1,30	[ ]2,22,[13,20]		[1,34,55,18,45	16]	8,53,20		8,53,20	
15)	8,20		[1]6	3,45	[4,44,]2[6,40]		[25,18,45	16]	2,22,13,20		2,22,13,20	
16)	¶4) 16,40	9	[5]37,30		¶15) [9,2]8,5[3,20	18]	[6,45	1,20]	37,55,33,[20]		37,55,33,20	
17)	2,30	24	[1,41,15	4]	[2,50,40	1,30]	9[	6,40]	2,31,42,13,[20]		10,6,48,53,20	
18)	3,36	1[40]	[6,45	1,20]	[4,16	3,45]	[8,53,20]		¶20) 5,3,24,26,40	[9]		
19)	6	10	[9	6,40]	[16	3,45]	2,22,13,[20]		45,30,40	1,30		
20)	16,40		[8,53,20]		[14,3,45]		37,55,33,2[0]		1,8,16	3,45		
21)	¶5) 33,20	18	[35,33,20]		[21,5,37,30]		¶18) 1,15,51,6,40	9	4,16	3,45	(Remainder	
22)	10	6	¶12) [1,11,6,40	9]	[6,19,41,15	4]	11,22,40	22,3[0]	16	3,45	of column	
23)	1,48	1,15	10[40	1,30]	[25,18,45	16]	4,16	3,45	14,3,45		uninscribed)	
24)	2,15	4	1[6	3,45]	[6,45	1,20]	16	[3,45]	52,[44,]3,45			
25)	9	6,40	[5,37,30]		[9	6,40]	14,[3,45]		1,19,6,5,37,30			
26)	26,40		50,3[7,30	2]	[8,53,20]		5,16,[24,22,30]		11,51,54,50,37,30	2		
27)	33,20		1,41,1[5	4]	[2,22,13,20]		47,27,[31,22,30	2]	23,43,49,41,15	4		
28)	¶6) 1,6,40	9	6,45[	1,20]	[9,28,53,20]		[1,34,55,18,45	16]	1,34,55,18,45	16		
29)	10	6	9 [	6,40]	¶16) [18,57,46,40	9]	[25,18,45	16]	25,18,45	16		
30)	54	1,6,40	8[53,20]		[2,50,40	1,30]	[6,45	1,20]	6,45	1,20		
31)	¶7) [2,]13,20	18	35,[33,20]		4,1[6	3,45]	[9	6,40]	9	6,[40]		
32)	40	1,30	1,11,[6,40]		16[	3,45]	8,[53,20]		8,53,20			
33)	27	2,13,20	¶13) 2,22,13,20[	18]	1[4,3,45]		2,2[2,13,20]		2,22,13,20			
34)	¶8) 4,26,40	9	42,40	22,30	3,[9,50,37,30	2]	37,55,3[3,20]		37,55,33,20			
35)	40	1,30	16	3,45	[6,19,41,15	4]	1,15,51,[6,40]		2,31,42,13,20			
36)	13,30	2	1,24,22,30						5,3,24,26,40			
37)	27	2,13,20	25,18,45	[16]								
38)	4,26,40											

Critical Apparatus: Obv. I 4: erasure in middle of line. I 24: 2,15 written 2,[illegible]. III 4: text has 1[sic],22,.....
Rev. II 19: erasure preceding 1,30. II 30: erasure preceding 1,20.

CBS 1215, transcription de Sachs, Babylonian Mathematical Texts, 1947.



CBS 1215, copie de Eleanor Robson, « Mathematical cuneiform tables, in Philadelphia », SCIAMVS 1, 2000.

Paragraphe 1

	Structure	
2.5 12	$n = a + b$	$1/a$
25 2.24	$1 + b/a$	$1/(1 + b/a)$
28.48 1.15	$1/n = a' + b'$	$1/a'$
36 1.40	$1 + b'/a'$	$1/(1 + b'/a')$
2.5	n	

Explication du calcul

Les résultats en caractères gras sont ceux qui sont dans la tablette ; je n'introduis de « virgule » que dans le début du calcul.

Inversion de 2.5

2.5=2.0 + 5 b = 2.0 ; a = 5 $1/a$ = 0 ;**12**
1 + b/a = 1 + 2.0 × 0 ;12 = **25** $1/(1 + b/a)$ = 1/25 = **2.24**
$1/a \times 1/(1 + b/a)$ = 12 × 2.24 = **28.48**
l'inverse de 2.5 est 28.48

Inversion de 28.48

28.48 = 28.0 + 48 b =28.0 a = 48 $1/a$ = 0 ;**1.15**
1 + b/a = 1 + 28.0 × 0 ;1.15 = **36** $1/(1 + b/a)$ = 1/36 = **1.40**
$1/a \times 1/(1 + b/a)$ = 1.15 × 1.40 = **2.5**
l'inverse de 28.48 est 2.5.

Paragraphe 20

Inversion de 5.3.24.26.40 (2.5×2^{19}) et de son inverse.

5.3.24.26.40	9
45.30.40	1.30
1.8.16	3.45
4.16	3.45
16	3.45
14.3.45	
52.44.3.45	
1.19.6.5.37.30	
11.51.54.50.37.30	2
23.43.49.41.15	4
1.34.55.18.45	16
25.18.45	16
6.45	1.20
9	6.40
8.53.20	
2.22.13.20	
37.55.33.20	
2.31.42.13.20	
5.3.24.26.40	

La structure du paragraphe est la même que celle du paragraphe 1, mais avec 3 réitérations de la factorisation pour l'inversion de 5.3.24.26.40 et 4 réitérations pour l'inversion de son inverse.

Explication du calcul

Les nombres présents dans la tablette sont en caractères gras.

5.3.24.26.40 = 5.3.24.20.0 + 6.40 b = 5.3.20.0 a = 6.40 $1/a$ = 0 ;0.9
1 + b x $1/a$ =
1 + 5.3.24.20.0 x 0 ;0.9 = **45.30.40** b = 45.30.0 a = 40 $1/a$ = 0 ;**1.30**
1 + 45.30.0 × 0 ;1.30 = **1.8.16** b = 1.8.0 a = 16 $1/a$ = 0 ;**3.45**
1 + 1.8.0 × 0 ;3.45 = **4.16** b = 4.0 a = 16 $1/a$ = 0 ;**3.45**
1 + 4.0 × 0 ;3.45 = **16** 1/16 = 0 ;**3.45**

1/(4.16) = 3.45 × 3.45 = **14.3.45**
1/(1.8.16) = 3.45 × 14.3.45 = **52.44.3.45**
1/(45.30.40) = 1.30 × 52.44.3.45 = **1.19.6.5.37.30**
1/(5.3.24.26.40) = 9 × 1.19.6.5.37.30 = **11.51.54.50.37.30**

11.51.54.50.37.30 b = 11.51.54.50.37.0 a = 30 $1/a$ = 0 ;**2**
1 + $b \times 1/a$ =
1 + 11.51.54.50.37.0 × 0 ;2 = **23.43.49.41.15** b = 23.43.49.41.0 a = 15 $1/a$ = 0 ;**4**
1 + 23.43.49.41.0 × 0 ;4 = **1.34.55.18.45** b = 1.34.55.15.0 a = 3.45
$1/a$ = 0 ;0.**16**
1 + 1.34.55.15.0 × 0 ;0.16 = **25.18.45** b= 25.15.0 a = 3.45 $1/a$ = 0 ;0.**16**
1 + 25.15.0 × 0 ;016 = **6.45** b = 6.0 a = 45 $1/a$ = 0 ;**1.20**
1 + 6.0 × 0 ;1.20 = **9** 1/9 = 0 ;**6.40**

1/(6.45) =1.20 × 6.40 = **8.53.20**
1/(25.18.45) = 16 × 8.53.20 = **2.22.13.20**
1/(1.34.55.18.45) = 16 × 2.22.13.20 = **37.55.33.20**
1/(23.43.49.41.15) = 4 × 37.55.33.20 = **2.31.42.13.20**
1/(11.51.54.50.37.30) = 2 × 2.31.42.13.20 = **5.3.24.26.40**

On ne peut qu'être impressionné par le décalage entre la complexité du calcul et le renseignement obtenu, à savoir que l'inverse de l'inverse de n est n lui-même, ce que le scribe sait de toute évidence. L'objet du calcul n'est pas le résultat de l'inversion, mais la méthode, qui revient à réaliser la décomposition d'un nombre en produit de facteurs réguliers à un ou deux chiffres. **Le but de cet algorithme est de trouver les facteurs standards de l'inverse d'un nombre.**

Par exemple, le scribe a trouvé :

$$1/(5.3.24.26.40) = 9 \times 1.30 \times 3.45 \times 3.45 \times 3.45$$
$$1/(11.51.54.50.37.30) = 2 \times 4 \times 16 \times 16 \times 1.20 \times 6.40$$

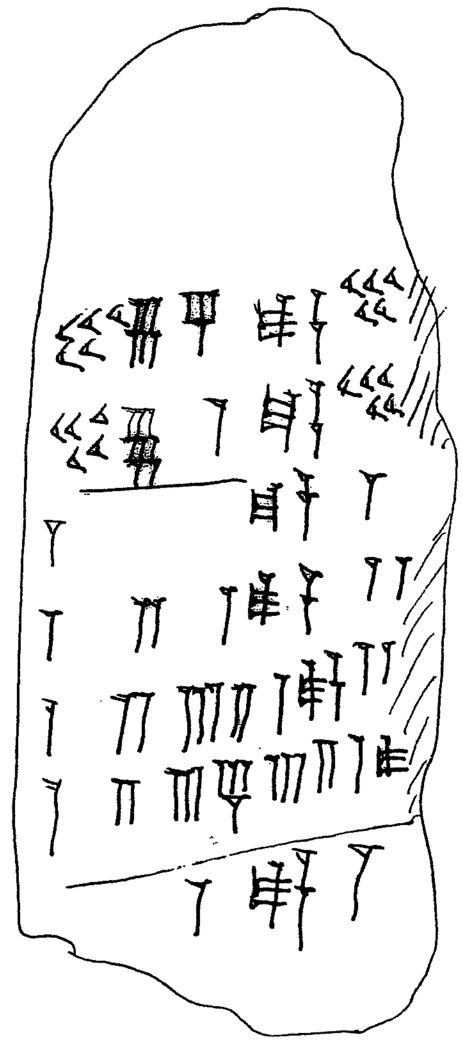
La disposition des calculs est indéniablement chargée d'un sens mathématique : elle permet au lecteur d'en suivre facilement le déroulement malgré l'absence de toute explication rédigée analogue à celle de VAT 6505 ; elle permet au scribe d'effectuer la procédure avec un certain automatisme. La colonne de gauche est la liste des facteurs de n (le nombre à inverser) ; la colonne de droite est la liste des facteurs de $1/n$; et la colonne du milieu est la liste des produits de facteurs de $1/n$, effectuée par multiplications successives de deux facteurs.

Ce type de tablette est révélateur de l'état d'esprit du scribe calculateur de l'époque paléo-babylonienne : la performance des outils de calcul est remarquable, mais ne donne accès à aucun résultat nouveau. Un peu comme si le scribe était sensible à l'élégance de sa ritournelle, répétée 21 fois avec des variations de plus en plus complexes, et peu soucieux de son intérêt pratique.

La méthode pourrait pourtant engendrer tous les inverses de nombres réguliers non fournis par les tables, mais son utilisation est limitée ici à des inverses déjà connus.

Terminons par un dernier exemple de ces spéculations numériques esthétiques et sans application pratique visible : Dans Ist Ni 2739, on trouve (revers, §2) une liste de palindromes numériques dont la racine carrée est un « nombre drôle », c'est-à-dire composé de chiffres identiques.

56.4	e	5[8]
58.1	e	5[9]
1	e	1
1.2.1	e	1.1
1.2.3.2.1	e	1.1.1
1.2.3.4.3.2.1	e	1.1.1.1
1	e	1



Ist Ni 2739

Bibliographie

1- Histoire

Bottéro J. (1987) *Mésopotamie, l'écriture, la raison et les dieux,* Gallimard.

Bottéro J. (1993) *Il était une fois la Mésopotamie,* Découvertes Gallimard.

Bottéro J. (1994) *Babylone,* Découvertes Gallimard.

Kramer S. N. (1986) *L'histoire commence à Sumer,* Arthaud.

Pichot A. (1991) *La naissance de la science, Mésopotamie, Egypte*, Folio.

Roux G. (1985) *La Mésopotamie*, Seuil.

2- Mathématiques

Caveing M. (1994) *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Egypte anciennes,* Presses Universitaires de Lille.

Friberg J. (1990) *Mathematik,* Reallexikon der Assyriologie VII.

Høyrup J. (1990) Algebra and naive geometry, *Altorientalische Forschungen* 17.

Høyrup J. (1999) *Lengths, Widhts, Surfaces,* sous presse, Roskilde University Center.

Liverani M. (1990) The shape of neo-sumerian fields, *Bulletin on Sumerian Agriculture*, Cambridge.

Lutz H. F. (1920) A mathematical cuneiform tablet, *American Journal of semitic languages and literatures* 36.

Neugebauer O. (1935-1937) *Mathematische Keilschrifttexte I-III*, Berlin.

Neugebauer O. (1990) *Les sciences exactes dans l'antiquité*, Actes Sud.

Neugebauer O. (1984) Mathematical and metrological texts, *Journal of Cuneiform Studies* 36.

Neugebauer O. et Sachs A. (1945) *Mathematical cuneiform texts,* American Oriental Series 29.

Powel M. A. (1990) Masse und Gewichte, *Reallexikon der Assyriologie* 7.

Ritter J. (1989) *Babylone –1800 ; Chacun sa vérité* dans *Eléments d'histoire des sciences*, dir. M. Serres, Bordas.

Robson E. (1999) *Mesopotamian Mathematics, 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education,* Oxford Editions of Cuneiform texts vol. XIV.

Robson E. *Bibliography of mesopotamian mathematics* :

http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath/erbiblio.html

Sachs A. J. (1947) *Babylonian mathematical texts I :reciprocals of regular sexagesimal numbers,* Journal of Cuneiform Studies 1.

Sachs A. J. (1952) *Babylonian mathematical texts II, III : The problem of finding the cube root of a number,* Journal of Cuneiform Studies 6.

Thureau-Dangin F. (1938) *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal,* Geuthner, Paris 1932 ; *Textes mathématiques babyloniens*, Ex Oriente Lux 1, Leiden.