UN PROBLÈME DE DIOPHANTE AU FIL DU TEMPS

Jean-Paul Guichard

IREM de Poitiers

Résumé

Au XVI^{ème} siècle, l'Europe redécouvre l'œuvre de Diophante : *Les Arithmétiques*. Des mathématiciens comme Bombelli et Viète vont intégrer à leur œuvre une partie des problèmes des *Arithmétiques*. En étudiant les différences de traitement d'un problème de Diophante, nous essaierons de comprendre le rôle que joue la référence à une tradition, et de questionner les traditions qui se sont installées dans l'enseignement récent pour traiter ce type de problème.

Introduction

Le problème que nous avons choisi d'étudier est le problème 27 du livre I des *Arithmétiques* de Diophante, à savoir : « Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit ». Il m'a semblé intéressant, car au fil du temps, les méthodes de résolutions ont été très diverses, ainsi que le statut du problème : simple exercice, ou exemple de référence.

Je propose 6 étapes sur 4000 ans : –2000 : Babylone ; 250 Diophante ; 1591 : Viète ; 1797 : Lacroix ; 1908 : Neveu ; 1995 : Terracher.

1. Au fil de l'histoire

1.1 Première étape : Alexandrie vers 250 de notre ère

Pour ce problème 27 du livre I (cf. texte ci-après), comme pour tous les problèmes des *Arithmétiques*, Diophante donne un énoncé général du problème. Par contre, chose rare, il formule une condition d'existence qui permet de rester dans le cadre des nombres dont s'occupe Diophante : entiers ou rationnels. Cette condition que l'on peut formuler $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = a^2$, avec a rationnel, s'explique par le fait que $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, identité connue (cf. Euclide, *Éléments*, livre II,5), que l'on peut visualiser géométriquement en utilisant la technique classique du gnomon, et que Diophante connaît l'expression de deux nombres connaissant leur somme et leur différence. C'est en effet le premier problème des *Arithmétiques*.

Regardons maintenant sa façon de résoudre le problème. La première remarque est qu'il montre sa méthode sur un exemple qui est générique. La deuxième remarque est qu'il ne traite pas le problème avec les deux nombres inconnus, mais utilise une inconnue auxiliaire, la demi-différence des nombres cherchés. Il est à noter que Diophante est le premier mathématicien à manipuler explicitement une inconnue désignée par un symbole spécifique et qu'il définit comme "le nombre qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités". A le voir manipuler et calculer avec cette inconnue, on comprend pourquoi les Arabes l'ont toujours considéré comme le père de l'Algèbre. En fait, Diophante n'utilise toujours qu'une et une seule inconnue. Par conséquent, le premier temps de sa méthode est de ramener son problème à un problème à une seule inconnue par le choix judicieux d'une inconnue auxiliaire.

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres ; chose qui est d'ailleurs figurative.

Proposons que la somme des nombres soit $\overset{\circ}{M}\ \overline{\kappa}$ (20 unités), et que leur produit soit $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varrho\varsigma}$. (96 unités)

Que la différence des nombres soit $\varsigma\ \overline{\beta}$ (2x). Dès lors, puisque la somme des nombres est $\overset{\circ}{M}\ \overline{\kappa}$ (20) si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou $\overset{\circ}{M}\ \overline{\iota}$ (10). Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de la différence des nombres, c'est-à-dire $\varsigma\,\overline{\alpha}$ (1x), il s'établit de nouveau que la somme des nombres est $\overset{\circ}{M}\ \overline{\kappa}$ (20), et que leur différence est $\varsigma\ \overline{\beta}$ (2x). En conséquence, posons que le plus grand nombre est $\varsigma\,\overline{\alpha}\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\iota}$ (1x + 10) donc le plus petit sera $\overset{\circ}{M}\ \overline{\iota} \pitchfork \varsigma\ \overline{\alpha}$ (10 – 1x), et il s'établit que la somme des nombres est $\overset{\circ}{M}\ \overline{\kappa}$ (20), et que leur différence est $\varsigma\ \overline{\beta}$ (2x). Il faut aussi que le produit des nombres fasse $\overset{\circ}{M}\,\overline{\varrho\varsigma}$ (96). Or le produit est $\overset{\circ}{M}\ \overline{\rho} \pitchfork \Delta^{Y}\overline{\alpha}$ ($100 - 1x^2$), ce que nous égalons à $\overset{\circ}{M}\ \overline{\varrho\varsigma}$ (96), et ς devient $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$ (2).

En conséquence, le plus grand nombre sera $\overset{\circ}{M}\ \overline{\iota\beta}$ (12), le plus petit sera $\overset{\circ}{M}\ \overline{\eta}$ (8) et ces nombres satisfont à la proposition.

Diophante. Arithmétiques, *livre I, problème 27. Traduction P. Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1959.*

Une fois choisie cette inconnue, Diophante exprime chacun des nombres cherchés en fonction de cette inconnue, que nous noterons s, en utilisant le fait que chacun des nombres peut s'exprimer comme somme ou différence de leur demi-somme et demi-différence : $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ et $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$, si x est le plus grand des deux nombres : ce que l'on peut visualiser facilement. L'expression du produit en fonction de l'inconnue utilise l'identité $(a+b)\ (a-b)=a^2-b^2$, qui, grâce au choix judicieux de l'inconnue donne une équation simple du second degré : $100-s^2=96$, dont la solution positive est évidente : $s=2$. L'expression précédente des deux nombres cherchés en fonction de la demi-somme donnée et de s fournit immédiatement les deux nombres cherchés.

Problème à deux inconnues ramené à une équation canonique du second degré à une inconnue, $x^2=a$, par le choix d'une inconnue auxiliaire, la demi-différence des nombres cherchés, voilà les traits principaux de la méthode de résolution de Diophante. Ce problème a, comme les autres problèmes des *Arithmétiques*, le statut d'un exercice permettant de mettre en œuvre la méthode nouvelle et générale qu'il a mise au point, et d'en montrer l'efficacité.

On pourra, au fil de la lecture du texte remarquer la notation des nombres, celle des puissances (0, 1, 2), la place du coefficient dans les monômes, inverse de la nôtre, leur juxtaposition pour leur addition, l'écriture polynomiale en puissances décroissantes, sauf lorsqu'il s'agit d'une soustraction, à cause de l'absence de la notion de nombre négatif.

Si la technique de Diophante est réellement novatrice, certains de ses ingrédients ne seraient-ils pas hérités des Babyloniens comme en font l'hypothèse Thureau Dangin et Neugebauer, célèbres traducteurs de textes mathématiques babyloniens ?

Partager un nombre proposé en deux nombres dont la différence est donnée. Que le nombre donné soit 100U et que la différence soit 40U ; trouver les nombres.

Posons que le plus petit nombre est 1S ; donc le plus grand nombre sera 1S 40U. En conséquence, la somme des deux nombres devient 2S 40U. Or, les 100U données sont cette somme ; donc, 100U sont égales à 2S 40U. Retranchons les semblables des semblables, c'est-à-dire 40U de 100U et de même 40U de 2S 40U. Les 2S restants valent 60U, et 1S devient 30U.

Revenons à ce que nous avons posé : le plus petit nombre sera 30U ; tandis que le plus grand sera 70U, et la preuve est évidente.

Diophante. Arithmétiques, *livre I, problème 1.*

Note

Diophante désigne l'inconnue par un symbole qui est transcrit ici par S, et désigne l'unité par un symbole transcrit par U.

1.2 Deuxième étape : Babylone vers 2000 avant notre ère

Ce problème de l'ancien âge babylonien n'est pas directement donné sous la forme du problème précédent, mais y est ramené, comme toute une catégorie de problèmes babyloniens du second degré. Notre problème, *Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit*, apparaît comme un problème de référence auquel le scribe nous ramène. Comment ?

Quelques explications seront peut-être nécessaires. Il s'agit ici d'un problème "concret" : trouver les dimensions d'un volume, une cave en l'occurrence, à partir de relations connues entre les trois dimensions cherchées : le flanc, le front et la profondeur. Tout d'abord, igu et igibu désignent deux nombres inverses l'un de l'autre. Donc, si nous désignons par x le flanc, et par y le front, $xy=1$. Si nous appelons z la profondeur, alors d'après le texte, nous avons $x+y=z$ et $xyz=26$, soit $z=26$ puisque $xy=1$. Donc z est connu, et nous avons en fait à chercher x et y tels que $x+y=26$ et $xy=1$: nous retrouvons bien notre problème. En fait, et le début de la solution du scribe le montre, ce n'est pas tout à fait cela, à cause d'une particularité du système d'unités de mesure utilisé par les babyloniens pour le calcul des volumes. En effet, dans le calcul des volumes, les dimensions horizontales sont exprimées en nindas, et la dimension verticale en coudées. Or 1 ninda = 12 coudées. Donc la profondeur est exprimée par deux nombres suivant que l'on calcule un volume ou que l'on calcule une longueur. Donc notre $z=26$ est exprimé en coudées. Or $x+y$ est exprimé en nindas. Donc il nous faut convertir 26 coudées en nindas, soit 26/12 ou 2+10/60. C'est, en effet, le premier calcul que fait le scribe, non pas en divisant par 12, mais en multipliant par l'inverse de 12, une tradition babylonienne que notre mathématique moderne a retrouvée. 1/12=5/60 et 5/60×26=130/60=2+10/60. Nous sommes chez les Babyloniens, et donc la numération est en base 60. Mais remarquons, en comparant la transcription de la tablette et sa traduction, que Thureau Dangin nous a facilité la tâche en indiquant unités, soixantièmes, trois mille six centièmes par nos symboles usuels pour les angles, alors qu'en l'absence de virgule et de zéro ou de symboles équivalents, seul le contexte permet de savoir si, par exemple, 5 sur la tablette signifie 5 unités, 5 soixantièmes, 5 soixantaines...

t ú l - s a g ***ma-la igim šiddum ma-la [igibîm pûtum] ma-la*** **n i g i n** ***igîm ù igibîm šuplum-ma***
26 epiriti-a assuḫ igûm igibûm ù šuplum minûm
atta igi 12 puṭur 5 ta-mar 5 a-na 26 i-ši
2.10 ta-mar mišil 2.10 ḫe-pé šu-tam<-ḫir> 1.10.25 ta-mar
25 imtaḫar a-na <1.>5 ṣib ù usuḫ 1.30 ù) 40 t[a-mar]
1.30 igûm 40 igibûm 26 šuplum
ne-pé-šum

„Une cave. Le flanc = l'*igû*. [Le front] = [l'*igibû*]. La profondeur = la somme de l'*igû* et de l'*igibû*. J'ai extrait 26 de terre. Que sont l'*igû*, l'*igibû* et la profondeur?

Toi, dénoue l'inverse de 12, tu trouveras 5'. Porte 5' à 26, tu trouveras 2°10'. Fractionne 2°10' en deux. Carre, tu trcuveras 1°10'25". <Soustrais 1 de 1°10'25", tu trouveras 10'25">. C'est le carré de 25'. Ajoute à et soustrais de <1°>5', tu tr[ouveras] 1°30' et 40'. L'*igû* est 1°30', l'*igibû* 40', la profondeur 26. C'est la façon d'opérer."

Tablette de l'Ancien Âge. British Museum 85200, problème 16.
Transcription et traduction F. Thureau-Dangin. E.J. Brill. Leiden 1938.

Comme dans tous les problèmes babyloniens, la solution se présente comme une prescription, qui est en fait la description d'un algorithme général mis en œuvre sur un exemple. Pour suivre les calculs du scribe, conservons notre symbolisme actuel.

Après la conversion, on a : $x+y=2°10'$.

Puis $\frac{x+y}{2}=1°5'$ d'où $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=1°10'25''$ puisque $\left(1+\frac{5}{60}\right)^2=1+\frac{10}{60}+\frac{25}{60^2}$.

Ensuite, $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=10'25''=(25')^2$ puisque $\frac{10}{60}+\frac{25}{60^2}=\frac{625}{60^2}=\left(\frac{25}{60}\right)^2$.

Donc les nombres cherchés sont :

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=1°30' \text{ puisque } \left(1+\frac{5}{60}\right)+\frac{25}{60}=1+\frac{30}{60},$$

$$y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=40' \text{ puisque } \left(1+\frac{5}{60}\right)-\frac{25}{60}=\frac{65}{60}-\frac{25}{60}=\frac{40}{60}.$$

Les deux points clés de la méthode babylonienne, $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ et $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$ et $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$, sont présents chez Diophante. Mais la méthode est totalement différente. Ici, le scribe traite simultanément les deux nombres inconnus en calculant, à partir des données, leur demi-différence qui, ajoutée ou retranchée à leur demi-somme donnée, permet d'obtenir les deux nombres cherchés. C'est la démarche que nous allons retrouver quelques 3500 ans plus tard chez Viète.

1.3 Troisième étape : la Renaissance en 1591

L'époque de la Renaissance est intéressante d'un double point de vue pour notre propos. D'une part, l'intérêt pour l'algèbre y est florissant. D'autre part, l'œuvre de Diophante, redécouverte, est traduite en latin par Xylander en 1575. Cette traduction marquera de nombreux mathématiciens. C'est sur un de ses exemplaires commenté par Bachet que Fermat inscrira en note son célèbre théorème, récemment démontré. Pour cette période, notre choix s'est arrêté sur Viète, car sa création de l'algèbre littérale marque une rupture et une ère nouvelle, et que, dans son ouvrage les *Zététiques* de 1591, où il met à l'épreuve son « Algèbre Nouvelle », il reprend en grande partie les *Arithmétiques* de Diophante. Notre problème devient ici une illustration de la force du calcul littéral qui, grâce aux identités remarquables, ramène tous les problèmes du second degré au premier problème de Diophante : *Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur différence*.

Le problème que nous étudions est le problème 4 du livre II des *Zététiques* ou *Recherches* reproduit ci-dessous.

L'énoncé est général, avec le langage géométrique de l'Algèbre Nouvelle de Viète. La solution, très brève, indique uniquement l'outil utilisé (une identité reliant somme, différence et produit de deux nombres), et, pour la démarche renvoie au problème précédent (voir ci-dessous). Celui-ci précise bien que Viète a établi les identités qu'il utilise (en fait dans un autre opuscule, *Les Premières Remarques*, contemporain des *Zététiques* et de *L'Art Analytique ou Algèbre Nouvelle*); et que ces identités permettent de se ramener au problème 1 du livre I des *Zététiques*, qui est aussi le problème 1 du livre I des *Arithmétiques* de Diophante.

ZETETICVM IIII.

Dato Rectangulo ſub lateribus & adgregato laterum inueniuntur latera.

Enimuerò quadratum adgregati laterum, minùs quadruplo Rectangulo ſub lateribus, æquatur quadrato differentiæ laterum.

Vt rurſus ex proximè repetitâ ordinatione licet inferre per antitheſim.

Sit 20 Rectangulum ſub duobus Lateribus quorum ſumma eſt 12. Differentia laterum eſto 1N. 1Q æquatur 64.

Traduction

Étant donnés le produit de deux nombres et leur somme, on trouvera les nombres.

En effet : Le carré de la somme des nombres, diminué de quatre fois leur produit, est égal au carré de leur différence.

Comme on peut le voir de nouveau par antithèse à partir de la même démarche que précédemment.

Soit 20 *le produit des deux nombres, dont la somme est* 12. *Leur différence est* 1*N*. 1*Q (le carré de leur différence) sera* 64.

Viète. Zététiques, *livre II, problème 4 . Méttayer. Tours, 1591.*

ZETETICVM III.

Dato Rectangulo ſub lateribus & differentia laterum inueniuntur latera.

Enimuerò quadratum differentiæ laterum adiunctum quadruplo Rectangulo ſub lateribus æquatur quadrato adgregati laterum.

Iam enim ordinatum eſt, Quadratum adgregati laterum minùs quadrato differentiæ æquari quadruplo Rectangulo ſub lateribus, adeò vt ſola fuit opus anthiteſi. Datâ porro differentia duorum laterum & eorum ſumma dantur latera.

Sit 20 Rectangulum ſub duobus Lateribus quorum differentia eſt 8. Summa laterum eſto 1N. 1Q æquatur 144.

Traduction

Étant donnés le produit de deux nombres et leur différence, on trouvera les nombres.

En effet : Le carré de la différence des nombres, ajouté à quatre fois leur produit, est égal au carré de leur somme.

En effet, on a déjà établi que le carré de la somme des nombres moins le carré de leur différence est égal à quatre fois leur produit, donc le reste en découle par le moyen de l'antithèse. La différence des deux nombres et leur somme étant données, nous avons les nombres.

Soit 20 *le produit des deux nombres, dont la différence est* 8. *Soit* 1*N la somme des côtés.* 1*Q (son carré) sera égal à* 144.

Viète. Zététiques, *livre II, problème 3. Méttayer. Tours, 1591.*

FRANCISCI VIETÆ

ZETETICORVM

LIBER PRIMVS.

ZETETICVM I.

Datâ differentiâ duorum laterum, & adgregato eorumdem inuenire latera.

Sit data B differentia duorum laterum, & datum quoque D adgregatum eorumdem. Oportet inuenire latera.

Latus minus eſto A, maius igitur erit A + B. Adgregatum ideo laterum A bis + B. At idem datum eſt D. Quare A bis + B æquatur D. Et per antitheſim, A bis æquabitur D — B, & omnibus ſubduplatis, A æquabitur D ſemiſſi, minùs B ſemiſſe.

Vel, latus maius eſto E. Minus igitur erit E — B. Adgregatum ideo laterum E bis, minùs B. At idem datum eſt D. Quare E bis minùs B æquabitur D. & per antitheſim, E bis æquabitur D + B, & omnibus ſubduplatis E æquabitur D ſemiſſi, plùs B ſemiſſe.

Datâ igitur differentiâ duorum laterum & adgregato eorumdem inueniuntur latera. Enimuero

Adgregatum dimidium laterum minùs dimidia differentia æquale eſt lateri minori, plus eâdem, maiori.

Quod ipſum eſt quod arguit Zeteſis.

Sit B 40. D 100. A fit 30. E 70.

Traduction

Note : Viète désigne les inconnues par une voyelle majuscule : A, E, I… et désigne les nombres connus par une consonne majuscule : B, C, D…

Etant données la différence de deux côtés et leur somme, trouver les côtés.

Soit B la différence donnée des deux côtés, et soit D leur somme. Il faut trouver les côtés. Soit A le côté le plus petit, donc le plus grand sera A+B. Pour cette raison la somme des côtés sera 2A+B. Ce qui est la même chose que D. C'est pourquoi 2A+B est égal à D. Et par antithèse, 2A sera égal à $D-B$, et tout étant divisé par deux, A sera égal à $D/2-B/2$.

Ou soit E le côté le plus grand. Le plus petit sera donc E-B. Pour cette raison la somme des côtés sera $2E-B$. Ce qui est la même chose que D. C'est pourquoi $2E-B$ sera égal à D, et par antithèse 2E sera égal à D+B ; et tout étant divisé par deux, E sera égal à $D/2+B/2$.

Donc la différence des deux côtés et leur somme étant données, les côtés seront trouvés. En effet :

La moitié de la somme des côtés, moins la moitié de la différence, est égal au côté le plus petit ; les mêmes quantités ajoutées donnent le plus grand côté.

C'était la recherche à faire.

Soit : B 40. D 100. A fait 30. E 70.

Viète. Zététiques, *livre I, problème 1. Méttayer. Tours, 1591.*

Sur ce problème 1, on pourra voir à l'œuvre, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques, un traitement algébrique purement littéral d'un problème.

Tous les problèmes des *Zététiques* sont présentés de la même façon : énoncé général, résolution littérale, application numérique.

On pourra remarquer que pour le problème 1, les nombres choisis par Viète pour l'application numérique sont ceux avec lesquels Diophante expose la résolution de son premier problème. Une autre remarque importante me semble pouvoir être faite : si la démarche de Viète est proche de celle de la tablette babylonienne, la force du calcul littéral peut néanmoins bien s'appréhender; en effet les identités qu'il permet d'obtenir font voir les relations entre les quantités désignées, et cela permet de s'affranchir de tout support géométrique, tant pour les obtenir que pour les mémoriser. Point n'est besoin de passer par la demi-somme et la demi-différence des nombres cherchés. Viète travaille directement sur les nombres cherchés. L'outil n'est plus l'identité $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ que nous donne la figure du gnomon, mais $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$ que nous donne l'algèbre spécieuse, nom donné par Viète à son calcul littéral.

1.4 Quatrième étape : la Révolution Française

L'extension rapide du calcul littéral va amener à privilégier peu de méthodes, mais des méthodes très générales : la *substitution* va alors se généraliser, et le problème lui-même ne va plus figurer dans les références incontournables. Il ne se trouve pas, par exemple, dans les *Élémens d'Algèbre* de Clairault. Par contre, nous le retrouvons chez Lacroix dans ses *Éléments d'Algèbre*. Lacroix fait partie avec Lagrange, Laplace, Monge et Legendre des mathématiciens qui, au moment de la Révolution, ont mis en place de nouvelles structures d'enseignement, où les sciences, et les mathématiques en particulier, avaient la part belle. Ses ouvrages, destinés à l'enseignement, seront des références et donneront lieu, tout au long du XIX$^{\text{ème}}$ siècle à de nombreuses rééditions.

Dans le traité de Lacroix, notre problème est un problème d'application de la résolution de l'équation du second degré.

113. Soit encore ce problème :

Partager le nombre p en deux parties dont le produit soit égal à q.

En désignant une de ces parties par x, l'autre sera exprimée par $p-x$, et leur produit sera $px-x^2$: on aura donc l'équation

$$px-x^2=q$$

ou, en changeant les signes,

$$x^2-px=-q\,;$$

et résolvant cette dernière

$$x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}$$

Si pour particulariser la question, on faisait

$$p=10,\quad q=21$$

on aurait

$$x=5\pm\sqrt{25-21},$$

$$x=5\pm 2,$$

ou

$$x=7,$$

$$x=3,$$

c'est-à-dire que l'une des parties serait 7, et l'autre serait par conséquent 10–7 ou 3.

Si l'on prenait au contraire 3 pour x, l'autre partie serait 10–3 ou 7 ; en sorte que par rapport à l'énoncé actuel, la question n'a à proprement parler, qu'une solution, puisque la seconde n'est qu'un changement d'ordre entre les parties.

L'inspection attentive de la valeur de x fait voir que dans la question dont il s'agit, on ne peut pas prendre tout-à-fait arbitrairement les nombres p et q ; car si q surpassait $\frac{p^2}{4}$, ou le quarré de $\frac{1}{2}p$, la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ serait négative, et on retomberait sur le caractère d'absurdité remarqué dans le n° 107.

Si l'on prenait, par exemple,

$$p=10,\quad q=30$$

il viendrait

$$x=5\pm\sqrt{25-30}=x=5\pm\sqrt{-5}\ :$$

le problème serait donc impossible avec ces données.

114. L'absurdité des questions qui conduisent à des racines imaginaires ne se manifeste que par la conclusion ; et l'on doit désirer de connaître par des caractères tenant au plus près à l'énoncé, en quoi consiste l'absurdité du problème, de laquelle résulte celle de la solution : c'est ce que fera voir d'une manière précise la considération suivante.

Soit d la différence des deux parties du nombre proposé ; la plus grande sera $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, la plus petite $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$ (3) :

or il est bien prouvé (29, 30 et 34) que

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}:$$

donc le produit des deux parties du nombre proposé, quelles qu'elles soient, est toujours moindre que $\frac{p^2}{4}$, ou que le quarré de la moitié de leur somme, tant que d n'est pas nul ; et quand cette circonstance a lieu, chacune de ces deux paries étant égale à $\frac{p}{2}$, leur produit n'est que $\frac{p^2}{4}$. Il est donc absurde de demander qu'il soit plus grand ; et c'est avec raison que l'Algèbre, répondant alors d'une manière contradictoire aux principes, prouve par là que ce qu'on cherche n'existe pas. /.../

Lacroix. Élémens d'Algèbre *(1$^{\text{ère}}$ éd.1797). 3$^{\text{ème}}$ éd., pp. 168-170.*

On choisit l'un des deux nombres cherchés pour inconnue x, on exprime l'autre nombre en fonction de x, et on substitue dans le produit. On obtient ainsi une équation du second degré, que l'on écrit sous la forme canonique donnée dans le traité. On a alors immédiatement l'expression littérale des deux valeurs de x. On pourra noter la différence avec la forme canonique actuelle : $ax^2+bx+c=0$. Une réflexion sur les différentes formes canoniques envisageables, et qui ont été à l'honneur au fil des siècles, pourrait nous amener, d'un point de vue didactique, à revoir certains de nos choix. La prégnance des nombres positifs chez nos élèves peut en effet bloquer la compréhension d'une écriture telle que $ax^2+bx+c=0$, qui apparaît avec Descartes et qui a mis du temps à s'imposer. L'application numérique bien choisie (solutions entières...) donne à Lacroix l'occasion d'interpréter les deux solutions que donne le calcul. Le calcul littéral fait gagner en généralité, et subsume souvent sous une seule forme une variété de situations non envisagées au moment de la mise en lettres. Une phase d'interprétation et de retour au problème devient alors un passage obligé.

On constate que l'on retrouve, dans la résolution de Lacroix, une discussion sur l'existence des solutions ; mais le problème n'est plus d'exclure les irrationnels, comme chez Diophante, mais les imaginaires. Dans le développement que Lacroix consacre à la compréhension de la condition d'existence des solutions, on retrouve l'expression des deux nombres comme somme ou différence de leur demi-somme et demi-différence. Il y a là un héritage fort ancien qui a disparu de notre enseignement.

La suite du texte permet à Lacroix d'expliquer, dans le cas général de l'équation du second degré, les raisons de la condition d'existence des racines, d'introduire alors la notion de quantité imaginaire et d'en justifier le rôle dans les calculs.

A la lecture du texte de Lacroix, le pédagogue sera sensible à la rédaction qui explicite, par de courtes phrases, les raisons des transformations des expressions algébriques, rédaction le plus souvent absente des écrits algébriques de nos élèves.

Résumons d'un trait la méthode de Lacroix : on se ramène, par substitution, à une équation à une inconnue, on la met sous forme canonique, et on utilise les formules de résolution.

1.5 Cinquième étape : cent ans plus tard

On aurait pu en rester là, mais la *trinômite* saisit l'enseignement et trouve pour sa justification des tas d'explications. Notre problème en fait partie et nous l'étudierons dans le Neveu, un cours d'Algèbre de référence au début du XX^{ème} siècle.

Le problème apparaît comme une application du paragraphe sur la somme et le produit des racines du trinôme du second degré. Expression littérale de la solution, application numérique à solutions entières, pas de discussion de l'existence des solutions. Neveu prend néanmoins la peine d'indiquer, en introduction, la méthode que nous venons de voir à l'œuvre chez Lacroix. Mais le passage par l'équation $X^2-sX+p=0$ va devenir une constante dans les manuels scolaires du XX^{ème} siècle. Est-ce une prise en compte, au niveau de l'enseignement, des nombreux travaux du XIX^{ème} siècle sur les liens entre les coefficients des polynômes et les fonctions symétriques de leurs racines ? Ce qui est certain, c'est que l'attention s'est focalisée sur les relations entre coefficients et racines du trinôme. On peut, à ce propos, mesurer en quoi l'apport de Viète a été sur ce point capital : c'est le calcul littéral qui a permis à Viète, le

premier, de repérer les relations entre les racines et les coefficients des équations, relations qui constituent le dernier chapitre de son traité sur *La transformation des équations*, publié en 1615, 12 ans après sa mort, par Anderson.

2° *Trouver deux nombres connaissant leur somme* s *et leur produit* p.

Soient x et y les deux nombres ; on doit avoir :

$$x+y=s, \qquad (1)$$
$$xy=p. \qquad (2)$$

Il est évident que l'on peut tirer de l'équation (1) la valeur de y ; en la portant dans l'équation (2) on aura une équation du second degré qui déterminera x et par suite y. Mais il est plus simple de former une équation du second degré dont la somme des racines soit s et le produit p ; les racines de cette équation seront alors les deux nombres cherchés. On forme cette équation en X, et l'on a :

$$X^2-sX+p=0,$$

d'où l'on tire :

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{s \pm \sqrt{s^2-4p}}{2}.$$

Exemple. — *Trouver deux nombres dont la somme soit* 12 *et le produit* 35.

Soient x et y les deux nombres, on a :

$$x+y=12,$$
$$xy=35.$$

x et y sont les racines de l'équation

$$X^2-12X+35=0.$$
$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = 6 \pm \sqrt{36-35} = 6 \pm 1.$$

Les deux nombres sont 7 et 5.

Neveu. Cours d'Algèbre (3ème éd., 1908). Masson et C^{ie}, Paris, p. 293.

1.6 Dernière étape : aujourd'hui

Depuis cent ans, une tradition s'est installée et perpétuée comme en témoigne le traitement de notre problème dans le manuel de 1ère S de chez Hachette. Son statut s'est amélioré : le problème est devenu un paragraphe de cours, et la méthode de résolution, à l'aide de l'équation $x^2-Sx+P=0$, un théorème. La condition d'existence dans l'ensemble des réels est énoncée, et le premier exemple numérique n'évite pas les irrationnels. L'unicité de la solution, que Lacroix avait bien pris soin de démontrer, est prise en compte et fournit la validation de la méthode mise en œuvre dans le deuxième exemple numérique. Mais elle n'est pas explicitée : elle relève de l'évidence due à la forme donnée aux explications.

Faut-il continuer ainsi dans notre enseignement du XXI^{ème} siècle ? Les autres traditions n'auraient-elles plus rien à nous apporter ?

A la fin de ce parcours, des questions se posent et incitent à aller voir ailleurs, à approfondir.

Qu'en est-il de ce problème dans d'autres traditions ? Par exemple, chez les Indiens ? Chez les Chinois ? Et chez les Arabes qui ont étudié et traduit Diophante ? Qu'en est-il chez d'autres auteurs de la Renaissance qui ont lu Diophante, comme Bombelli, Stevin, Girard ? En ce qui concerne les Babyloniens, trouve-t-on le problème sous sa forme brute ? La méthode de résolution est-elle toujours la même ?

Néanmoins, il me semble que les quelques étapes que nous avons parcourues permettent à un enseignant de se poser des questions quant aux mathématiques qu'il transmet.

2. Perspectives pour l'enseignement

Face à la résolution du système $\begin{cases} xy = P \\ x + y = S \end{cases}$ ou à d'autres problèmes du second degré, le parcours que nous venons de faire dessine deux grandes voies.

2.1. On se ramène à une équation du second degré

Par utilisation d'une inconnue auxiliaire (Diophante), par substitution (Lacroix), par utilisation du trinôme (Neveu), on se ramène à un problème n'ayant plus qu'une inconnue, et donc à la résolution d'une équation du second degré.

Mais alors, soit on suppose nécessaire l'étude préliminaire de l'équation du 2nd degré, et les formules de résolution, c'est-à-dire le cours de 1ère, et on n'aborde ce genre de problème qu'à ce niveau d'enseignement. C'est le point de vue qui prévaut actuellement.

Ou bien on essaie de ramener l'équation obtenue à la forme $x^2=a$, et alors les outils disponibles (identités et cette équation) existent en 3ème. Mais ce n'est pas dans l'esprit du programme : l'équation $x^2=a$ figure dans la partie calculs sur les radicaux où elle ne peut être l'outil de résolution d'aucun problème. Ce que confirment les exercices présents dans les manuels.

2.2. On se ramène à un système du premier degré

On se ramène au système $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$ avec des identités remarquables (Babylone, Viète), et on a tous les outils (identités, systèmes) disponibles en 3ème, mais il faudrait alors "institutionnaliser" cette méthode et *canoniser* le système $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$ dont on pourrait connaître par cœur la solution (cf. Babyloniens, Viète). Or cette méthode a été perdue, alors qu'elle serait une mine pour l'utilisation des identités, et qu'aujourd'hui les identités n'ont que très peu de problèmes à se mettre sous la dent. En fait, n'intervient quasiment pour $(a\pm b)^2$ que l'aspect développement, dont on pourrait se passer… Que peut être un enseignement de techniques sans problèmes ? Il y aurait à réfléchir à partir de là sur les difficultés qu'ont les élèves sur le chapitre des identités…

COURS 3 PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

6 RECHERCHE DE DEUX RÉELS DE SOMME ET PRODUIT DONNÉS

Problème *Soit S et P deux réels donnés.*
Existe-t-il ***deux réels de somme S et de produit P?***
Si oui, comment les calculer?

C'est ici que prend place une remarque intéressante issue de l'égalité :

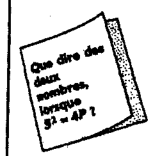
$$(x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv .$$

Les réels u et v sont les racines du trinôme $x^2 - (u+v)x + uv$. En conséquence :

— si $u+v=S$ et $uv=P$, alors u et v sont nécessairement les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$;

— si u et v sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, d'après le *théorème* 3, $u+v=S$ et $uv=P$.

Théorème 4 Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P, si et seulement si ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.



Le calcul du discriminant du trinôme $x^2 - Sx + P$, $\Delta = S^2 - 4P$, montre que :

Il existe deux réels de somme S et de produit P **si et seulement si** $S^2 \geqslant 4P$.

Exemples $\boxed{1}$ *Trouver, s'ils existent, deux nombres dont la somme est égale à* 6 *et dont le produit est égal à* 1.

Les nombres cherchés sont les solutions de l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$.
On a $\Delta = 36 - 4 = 32$ ... (donc, les nombres existent)...
L'écriture $\Delta = 16 \times 2$ mène à $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{2}$, puis aux solutions de l'équation :

$$\frac{6-4\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{6+4\sqrt{2}}{2},$$

et enfin : les nombres cherchés sont $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$.

$\boxed{2}$ *Trouver*(1) *deux nombres de somme* 5 *et de produit* 6.

Nous avons deviné de tête (en essayant les entiers divisant le produit 6) les nombres 3 et 2.
Pas d'état d'âme... les nombres cherchés sont 2 et 3.

(1) Sous-entendu : «s'ils existent»,

53

Terracher. MATH analyse 1re S, 1995. Hachette Éducation, p. 53.

Pourtant, avec cette méthode (Viète-Babylone), on pourrait traiter tous les problèmes du second degré, car l'équation $x^2+px=q$ peut s'écrire $x(x+p)=q$, et en posant $y=x+p$, on se ramène à $\begin{cases} xy = q \\ y - x = p \end{cases}$. Le problème $\begin{cases} xy = a \\ x \pm y = b \end{cases}$ pourrait devenir lui aussi un problème de référence auquel se ramener comme chez les Babyloniens (ou chez Viète, dans ses *Zététiques* livre II).

Voici pour terminer quelques idées pour explorer cette voie dans nos classes, et renouer ainsi avec d'autres traditions.

IDENTITES REMARQUABLES (3ème-2nde-1ère)

Démontrer les théorèmes suivants, énoncés et démontrés en 1591 par le mathématicien français François Viète (1540-1603), né à Fontenay-le-Comte, alors capitale du Bas Poitou.

1) Le double du produit de deux nombres, ajouté à la somme de leurs carrés est égal au carré de leur somme ; si on l'enlève à la somme de leurs carrés, on obtient le carré de leur différence.

2) Le carré de la somme de deux nombres, ajouté au carré de leur différence est égal au double de la somme de leurs carrés.

3) Le carré de la somme de deux nombres, diminué du carré de leur différence est égal à quatre fois leur produit.

4) Lorsqu'on divise la différence des carrés de deux nombres par la différence des nombres, on obtient leur somme.

5) Lorsqu'on divise la différence des carrés de deux nombres par la somme des nombres, on obtient leur différence.

Utiliser ces règles pour résoudre, comme l'a fait Viète dans le livre 2 de ses Recherches (Zététiques), les systèmes de deux équations à deux inconnues qui suivent, en les ramenant à la recherche de la somme et du produit de deux nombres.

1) $xy=20$ et $x^2+y^2=104$.	9) $x^3-y^3=316$ et $x^3+y^3=370$.
2) $xy=20$ et $x-y=8$.	10) $x^3-y^3=316$ et $xy=1$.
3) $x-y=8$ et $x^2+y^2=104$.	11) $x-y=6$ et $x^3-y^3=504$.
4) $x+y=12$ et $x^2+y^2=104$.	12) $(x-y)(x^2-y^2)=32$ et $(x+y)(x^2+y^2)=272$.
5) $x-y=8$ et $x^2-y^2=96$.	13) $x^2+y^2=20$ et $\frac{xy}{(x-y)^2}=2$.
6) $x+y=12$ et $x^2-y^2=96$.	14) $x^2+y^2=20$ et $\frac{xy}{(x-y)^2}=1$.
7) $xy=20$ et $x^2-y^2=96$.	
8) $xy+x^2+y^2=124$ et $x+y=12$.	

Dans le livre 3 de ses Recherches (Zététiques), Viète applique son calcul avec des lettres, dont il est l'inventeur, pour trouver des formules sur les triangles rectangles. Retrouver ses formules.

1) Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la différence entre l'autre côté et l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse. Application numérique : 5 et 1.

2) Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la somme de l'autre côté et de l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse. Application numérique : 5 et 25.

3) Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la différence entre les deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit. Application numérique : 13 et 7.

4) Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la somme des deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit. Application numérique : 13 et 7.

Site web sur Viète :

http://www.district-parthenay.fr/parthenay/creparth/GUICHARDJp/VIETEaccueill.html