TRANSMISSION ET INNOVATION : L'EXEMPLE DU MIROIR PARABOLIQUE

Roshdi Rashed

CNRS

Parmi les objets de science, il est une classe particulière où se mêlent intimement une *theoria* et une *technè*. Il ne suffit donc pas, si l'on veut décrire l'un ou l'autre de ces objets, d'évoquer les concepts et leurs connexions réglées, mais il faut en même temps rappeler les procédés techniques nécessaires à leur fabrication.

La tâche de l'historien des sciences se double à l'évidence du métier d'historien des techniques. Mais cette tâche se complique encore dès lors que ces objets appartiennent à un passé lointain. Il y en a en effet qui viennent de si loin que personne n'oserait en fixer les origines. Celles-ci se perdent souvent à l'aube de l'astronomie, de la géométrie et de la statique. C'est le cas de beaucoup d'instruments : les cadrans solaires, les astrolabes, les leviers, les balances, les mésolabes, les miroirs ardents, et bien d'autres instruments mathématiques. Tous ces objets sont l'œuvre des anciens géomètres et ingénieurs. Tous pourraient relever de ce que d'aucuns nommeraient aujourd'hui les mathématiques appliquées. Tous se présentent comme objets techniques, orientés vers un but pratique et doués d'une utilité sociale. Que cette utilité soit effective ou simplement l'effet de l'imaginaire social, cela importe relativement peu ; elle assigne en tous les cas à cet objet géométrico-technique une finalité qui dépasse la simple connaissance qu'il exprime. L'astrolabe, par exemple, ne se réduit ni à la connaissance en astronomie exigée par sa fabrication, ni aux procédés de l'artisan qui l'a réalisé ; il évoque aussi l'utilité précieuse qu'il offre à l'astronome, et celle que l'imagination de l'astrologue et du médecin lui attribue. C'est cette utilité multiple qui a suscité une demande sociale responsable de l'institution d'une profession, celle des « astrolabistes », reconnue comme telle par les historiens et les biobibliographes des IX^{e}-X^{e} siècles tout au moins.

Mais astrolabes, miroirs ardents, etc. furent non seulement objets de transmission, mais aussi vecteurs de la propagation du savoir scientifique. Il y a donc toute une réflexion à mener sur cette transmission, ses formes particulières, et sur l'intégration successive de ces instruments aux différentes traditions. C'est cette réflexion que je vais entamer ici, pour les miroirs ardents et notamment le miroir parabolique.

Commençons par nous interroger sur ce que pouvait signifier aux yeux d'un ancien grec un miroir ardent. Ce n'est rien d'autre qu'un *organon*, une machine de construction délicate destinée à un usage pratique. Ce but pratique, qu'il soit spéculatif ou effectif, attribué au miroir, a joué un rôle important dans l'incitation à la recherche depuis le second siècle avant l'ère chrétienne au moins, et jusqu'au XVIII^e^ siècle, en attirant non seulement les géomètres de premier rang, mais aussi toute une foule de mathématiciens de moindre prestige. D'autre part, au cours de cette recherche, le miroir ardent, objet apparemment simple, ne tarde pas à révéler une complexité dont l'élucidation renvoie à plusieurs traditions : géométrique, catoptrique, technique et, parfois, astronomique. Examinons tout cela dans le cas du miroir ardent parabolique, en passant d'Alexandrie à Byzance, avant de nous rendre à Bagdad, au Caire, en Europe du Sud…, c'est-à-dire dans les plus fameux centres scientifiques, jusqu'au XVII^e^ siècle environ.

Revenons au début de cette recherche à l'époque hellénistique. Plusieurs savants de l'entourage de Conon d'Alexandrie, d'autres ayant vécu au second siècle avant notre ère, avaient déjà engagé une recherche active sur ces miroirs. Cette recherche, ainsi que les objets qui étaient les siens, semble sortir tout droit d'un livre de catoptrique, si toutefois on donne à ce terme un sens autre que celui qu'il revêt dans le livre du même titre attribué à Euclide. Dans l'étude des miroirs ardents, contrairement à ce qui a lieu pour l'optique et la catoptrique anciennes, il n'est pas question du « regard ». Cette recherche semble aussi appartenir à un livre de géométrie, mais nullement au sens où Euclide et ses successeurs entendent ce mot. En effet, on n'examine pas les propriétés géométriques pour elles-mêmes, et on ne cherche pas à démontrer à leur propos de nouveaux théorèmes. Les miroirs ardents ont représenté, à partir du troisième siècle avant notre ère tout au moins, un champ d'étude d'un statut particulier, puisque « mixte » ; et c'est ce caractère qui fut une source de fécondité à la fois mathématique et optique. Et, de fait, le mathématicien et l'ingénieur de l'Antiquité se sont trouvés engagés dans deux tâches à la fois : étudier les propriétés optiques de certaines courbes – cercle, ellipse, parabole – et les établir rigoureusement à l'aide de véritables démonstrations ; concevoir les gabarits qui permettent de fabriquer les miroirs, sphériques, paraboliques, ellipsoïdaux, coniques. On mesure donc combien est féconde une démarche où les techniques se mêlent à la géométrie et à l'optique. On comprend également quel put être l'impact de ce nouveau style scientifique sur les positions épistémiques et philosophiques traditionnelles. Il s'agit, au moins, d'admettre la possibilité d'appliquer les mathématiques aux objets, de procéder à cette application et de reconnaître qu'un savoir *théorique* peut avoir un but en dehors de lui-même. Mais prenons-y garde : ce n'est pas aux phénomènes naturels qu'il s'agit d'appliquer les mathématiques, pour en expliquer le fonctionnement idéal, mais, comme nous l'avons dit ailleurs[1], aux seuls *organons* au sens ancien du terme, pour atteindre une utilité présumée. D'aucuns diraient aujourd'hui que l'on procède par construction de modèles

[1] R. Rashed, « Conic Sections and Burning Mirrors : An Example of the Application of Ancient and Classical Mathematics », dans K. Gavroglu *et al.* (éd.), *Physics, Philosophy and the Scientific Community*, Boston Studies in the Philosophy of Science (Dordrecht, 1995), pp. 357-376.

dominés par la géométrie. C'est de ce point de vue que la recherche sur les miroirs ardents, aussi loin que l'on remonte dans son histoire, s'est trouvée liée à l'optique et à la géométrie.

Pour la géométrie, et en particulier pour la géométrie des coniques, les miroirs ardents tenaient lieu de domaine d'exercice. Si on ignore ce domaine, on laisse échapper une tradition importante dans l'histoire des coniques, tradition différente de celle qui a mené d'Euclide et Aristée l'Ancien à Apollonius, même si elle n'est pas sans liens avec cette dernière. D'autre part, si on écarte l'étude des miroirs ardents, on ne comprendra rien à l'histoire de la catoptrique ; et on sera aussi désarmé devant celle de l'anaclastique et de la dioptrique à partir du X^e^ siècle, avec Ibn Sahl et Ibn al-Haytham : nous savons en effet à présent que la première théorie géométrique des lentilles a vu le jour comme une extension de la recherche sur les miroirs ardents[2].

Enfin l'utilité présumée – effective ou spéculative – des miroirs ardents, semble avoir été une incitation à ces travaux deux fois millénaires. Deux siècles avant notre ère, Dioclès invoquait l'efficacité de certains miroirs pour illuminer les temples et pour marquer les heures. Quatre siècles plus tard, Porphyre en souligne encore l'importance[3]. Et toute une tradition, au moins aussi vieille qu'Anthémius de Tralles, invoquant l'autorité d'Archimède, attribuait aux miroirs ardents les vertus d'une arme efficace. Thème récurrent, donc, qui, on le comprend, pouvait séduire les Rois et les Princes[4]. Quant à l'histoire de cette recherche, les documents récemment découverts – comme le traité d'Ibn Sahl – permettent d'en repérer les principales étapes. Cette recherche sera poursuivie par beaucoup d'autres, et non des moindres, Newton, Buffon, etc.[5]

Sur la première période, Dioclès nous fournit les informations les plus importantes. Deux miroirs ont été étudiés par ses prédécesseurs et par ses contemporains : le miroir sphérique et

[2] R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e^ siècle : Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris, 1993) et « A Pioneer in Anaclastics. Ibn Sahl on Burning Mirrors and Lenses », *Isis*, 81 (1990), pp. 464-491.

[3] Porphyre, *Περὶ ψυχῆς προς Βόηθον* (ap. Euseb. *Praep. Evang.* XI 28, 13 sqq.) = Fr. 245F Smith (p. 263) : « Or il est bien naturel que l'âme apparaisse à la fois divine en raison de son assimilation à l'indivisible et mortelle par tout son commerce avec la nature mortelle. Elle chute tout comme elle s'exhausse, elle a forme mortelle tout comme elle ressemble aux immortels. Oui : l'homme a beau être la créature qui se remplit l'estomac, la créature qui court après sa satiété comme le bétail – ce n'en est pas moins la créature capable de sauver son navire en mer, par sa science, au milieu des dangers, de se sauver elle-même des maladies, la créature qui découvre la vérité, la créature qui, ayant progressé méthodiquement vers la saisie intellective, a machiné la découverte des miroirs ardents (πυρείων τε εὑρέσεις … μηχανησάμενος),l'interprétation des horoscopes et l'imitation des créations du Démiurge ».

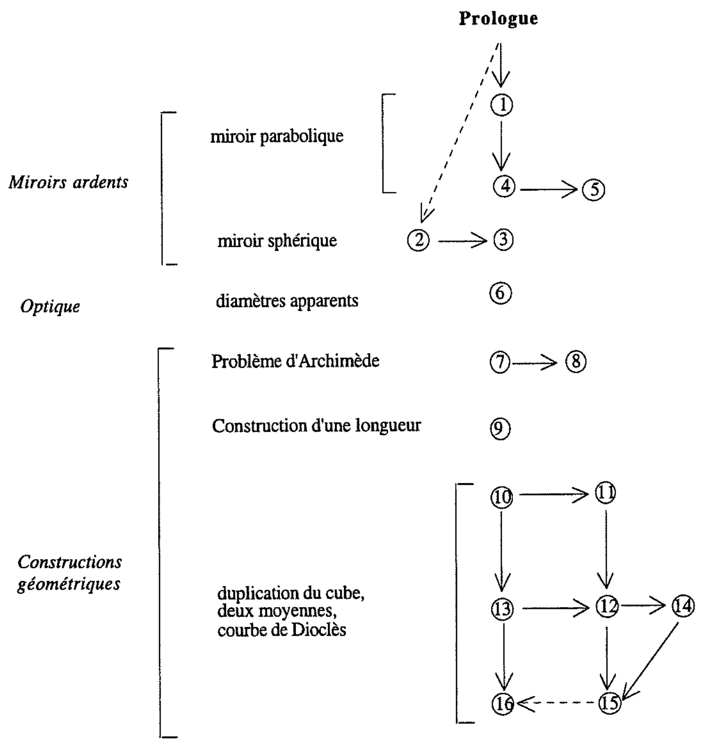
[4] Kh. Samir, « Une correspondance islamo-chrétienne entre Ibn al-Munağğim, Ḥunayn ibn Isḥāq et Qusṭā ibn Lūqā », dans F. Graffin, *Patrologia Orientalis*, t. 40, fasc. 4, n° 185 (Turnhout, 1981). Les livres littéraires (*adab*) destinés aux hommes cultivés ne manquent pas de rappeler d'une manière ou d'une autre les miroirs ardents et leur utilité. Ainsi al-Nuwayrī dans *Nihāyat al-arab* écrit à propos d'Archimède « spécialiste en mécanique, en géométrie et miroirs ardents, construction de catapultes et bombardement des fortifications, procédés pour manœuvrer les armées et les soldats sur la terre et sur la mer » (vol. I, p. 352).

Le prestige des miroirs ardents comme arme efficace est couramment invoqué. Les auteurs latins comme les auteurs grecs et arabes y font référence à leur tour. Ainsi Roger Bacon écrit : « C'est le point extrême que le pouvoir de la géométrie puisse atteindre. Car ce miroir brûlerait sauvagement tout ce sur quoi il serait concentré. Nous avons toutes les raisons de croire que l'Antéchrist utilisera ces miroirs pour brûler les villes, les camps et les armées » (Roger Bacon, *Opus Majus*, vol. I, pp. 134-135).

[5] Voir D.L. Simms, « Buffon's Burning Mirrors », p. 2, à paraître.

le miroir parabolique. Certains prédécesseurs ont traité le premier d'une manière erronée, et la trace de cette étude a survécu dans un texte du Pseudo-Euclide[6]. C'est toutefois au miroir parabolique qu'était consacrée la majorité des travaux. Au cours de l'étude de ce miroir, les mathématiciens ont dégagé la propriété foyer-directrice de la parabole et construit, à l'aide de la géométrie, le gabarit du miroir parabolique. Si l'on veut cependant bien aller au-delà des résultats nus, pour pénétrer l'esprit de cette recherche, on note que celle-ci fait partie de la géométrie des coniques : ce sont les propriétés anaclastiques des courbes qui intéressent le mathématicien ; les retombées optiques ne sont certes pas abandonnées, mais on peut dire qu'elles sont là de surcroît.

Arrêtons-nous quelque peu sur le livre de Dioclès :



Le livre de Dioclès se présente, au premier abord, de manière paradoxale : à la diversité des sujets abordés et à leur hétérogénéité s'oppose une unité d'intention manifeste. La diversité des thèmes transparaît directement du schéma qui reflète la structure de l'œuvre ; quant à l'unité d'intention, elle se manifeste à la lecture de chacun des groupes séparés qui composent

[6] Cf. Les Catoptriciens grecs. I : Les miroirs ardents, édition, traduction et commentaire par R. Rashed, Collection des Universités de France, publiée sous le patronage de l'Association Guillaume Budé (Paris : Les Belles Lettres, 2000), p. 144.

l'œuvre. Dioclès procède en effet dans la grande majorité des propositions en appliquant des résultats obtenus en théorie des coniques aux problèmes catoptriques et aux constructions géométriques notamment. Sa démarche est, pourrait-on dire, délibérément appliquée. Dans les écrits qui nous sont parvenus, à aucun moment Dioclès n'est tenté par la recherche des propriétés géométriques des sections coniques pour elles-mêmes. Cet aspect insuffisamment souligné de l'œuvre de Dioclès nous permet désormais d'en saisir certains traits et, en particulier, de comprendre pourquoi l'auteur ne dit rien de la démonstration de certains résultats de la théorie des coniques auxquels il fait appel[7] ; et pourquoi coexistent dans ses écrits des traditions différentes intégrant les notions de cette théorie[8]. Même les deux propositions dans lesquelles il n'est pas fait usage des sections coniques – la sixième et la neuvième – sont destinées, comme on peut le constater, à l'application. Or c'est précisément cette visée d'application qui distingue les écrits de Dioclès en catoptrique et en géométrie de bien d'autres travaux hellénistiques.

Nous allons reprendre l'analyse et le commentaire des écrits de Dioclès, en considérant successivement les différents groupes que nous avons pu distinguer, à commencer par sa propre introduction ; nous y trouvons d'abord quelques renseignements historiques. Dioclès nous informe, en effet, qu'un certain géomètre de Thasos, sur lequel nous ne savons rien par ailleurs[9], cherchait un miroir qui réfléchisse les rayons solaires suivant la circonférence d'un cercle. Il nous dit également qu'un certain astronome, nommé, selon toute vraisemblance, Hippodamos, et dont nous ignorons tout, cherchait quant à lui un miroir tel que les rayons du soleil se réfléchissent en un seul point et embrasent en ce point. Dioclès reconnaît en outre que Dosithée a résolu ce problème, et rappelle d'autre part qu'on avait tenté de construire un miroir qui embrase sans être dirigé vers le soleil, fixe et indiquant l'heure sans gnomon. Il invoque enfin la tentative de certains qui ont étudié le miroir sphérique, et se sont trompés en pensant que les rayons du soleil se réfléchissent au centre.

À l'évidence Dioclès n'est donc pas le premier à avoir étudié ces miroirs, et sa tâche est alors de reprendre les questions posées par ses prédécesseurs et laissées en suspens, pour en achever l'étude. Les questions soulevées par les miroirs paraboliques sont reprises dans la première proposition, complétée par la quatrième et la cinquième ; celles que suscitent les miroirs sphériques sont également examinées dans la première proposition, complétée cette fois par la seconde et par la troisième.

L'explication de Dioclès à propos de Dosithée, que nous avons rappelée plus haut, est quelque peu obscure. Nous ne savons pas avec certitude si Dosithée a seulement construit un miroir parabolique, ou s'il a également démontré la propriété de son foyer. Dioclès s'attribue seulement « la composition des démonstrations… et leur éclaircissement », expression qui autorise, selon la connotation du mot « composition (*ta'līf*) », deux réponses différentes, voire

[7] Par exemple, la propriété de la sous-normale et de la sous-tangente pour la parabole.

[8] Il ne s'agit pas seulement d'une terminologie différente, composée d'éléments archimédiens et d'un vocabulaire plus tard utilisé par Apollonius pour nommer les sections coniques ; mais des notions mêmes, comme celle de « foyer ». Nous montrons plus loin qu'elle relève chez Dioclès de deux traditions : catoptrique et géométrique.

[9] Sur les noms cités par Dioclès, voir R. Rashed, Les Catoptriciens grecs, p. 143.

contradictoires[10]. Il serait cependant bien peu vraisemblable que le compagnon de Conon d'Alexandrie et le correspondant d'Archimède eût négligé la démonstration. Comment aurait-il du reste pu construire un tel miroir, construction bien difficile de surcroît, sans auparavant connaître la propriété optique de la parabole et sans l'avoir démontrée – c'est-à-dire la propriété selon laquelle il existe un point remarquable sur l'axe, sur lequel se rencontrent, après réflexion, tous les rayons parallèles à l'axe ? Quoi qu'il en soit, cette notion de « foyer de la parabole », sans être désignée d'un nom particulier[11], surgit à deux reprises dans le livre de Dioclès ; une première fois dans l'introduction et dans la première et la quatrième proposition, pour l'étude de cette proposition optique ; une seconde fois (proposition dix) pour résoudre un problème de construction géométrique. Les deux démarches sont suffisamment différentes pour que nous devions les examiner.

Commençons par nous arrêter, avant toute chose, à cette notion centrale de foyer.

Depuis un siècle au moins, on ne cesse d'invoquer un texte de Pappus (voir plus loin) pour montrer qu'Euclide était déjà familier avec cette notion, ainsi qu'avec celle de directrice, pour les trois sections coniques. On vient d'autre part de rappeler que Dosithée connaissait la notion de foyer. Mais une première différence apparaît dès que l'on confronte le texte de Pappus à celui de Dioclès : alors qu'Euclide considérait le foyer et la directrice pour la détermination des lieux de points, Dosithée et Dioclès, dans la première proposition, n'envisagent que la notion de foyer, en raison de ses propriétés optiques.

On comprend dès lors l'étonnement des historiens devant l'absence de cette notion de directrice des *Coniques* d'Apollonius, ainsi que devant le silence du mathématicien lorsqu'il s'agit du foyer de la parabole : notions toutes deux mentionnées par ses prédécesseurs. Si l'on s'en tient au foyer, on remarquera qu'Apollonius, toujours sans le nommer[12], le détermine au cours de ses démonstrations de quelques propositions relatives à l'ellipse et à l'hyperbole, mais ne dit rien sur le foyer de la parabole[13]. Dans les propositions III. 45-52 des *Coniques*, Apollonius détermine en effet indirectement les foyers comme deux points de l'axe d'une conique à centre ; c'est-à-dire que les foyers apparaissent au cours de la démonstration des

[10] On pourrait comprendre par ce terme ou bien que Dioclès a conçu la démonstration ainsi que sa rédaction, ou bien qu'il a seulement réécrit une démonstration due à l'un de ses prédécesseurs d'une manière plus explicite.

[11] Le terme « foyer » est attesté déjà chez Kepler dans *Ad Vitellionem paralipomena quibus Astronomiae pars optica traditur* (Frankfurt, 1604), pp. 92-96, qui précisément appelle ce point « focus ». Sur l'histoire de ce terme voir Ch. Taylor, *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics* (Cambridge, 1881), pp. lvii-lviii ; et M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. IV (Philadelphia, 1980), p. 335 n. 37.

[12] Apollonius parle seulement de ... τὰ ἐ τῆς παραβολῆς γενηθέντα σημεῖα, « les points issus de l'application » ou comme le rend Heath « the points arising out of the application » (Heath, *Apollonius of Perga* (Cambridge, 1896 ; repr. 1961), p. 113 ; *Apollonius Pergaeus*, éd. J.L. Heiberg (Stuttgart, 1974), vol. I, p. 424, 10-12).

[13] Voici ce qu'écrit en 1886 H.G. Zeuthen à ce propos « Er (Apollonius) macht also keinen Satz über den Brennpunkt der Parabel namhaft, und daraus haben moderne Schriftsteller, die über diese Sache geschrieben haben, geschlossen, dass man damals garnichts über diesen Punkt gewusst habe » [*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum* (Copenhagen, 1886 ; repr. Hildesheim, 1966), p. 367]. Il est possible que Zeuthen sous-entende par ces écrivains M. Cantor qui avait précisément affirmé qu'on ne connaissait pas encore à l'époque le foyer de la parabole. Cf. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, vol. I (Stuttgart, 1907 ; repr. New York, 1965), p. 339. Tous ceux qui ont ensuite écrit sur ce sujet n'ont pas manqué de rappeler cette absence. Voir par exemple Th. Heath, *Apollonius of Perga*, p. 114 ; O. Neugebauer, « Apollonius-Studien », *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*, Abteilung B, Band 2 (1933), pp. 215-253, à la p. 236.

propositions sur les rapports entre la position de la tangente à l'une de ces deux courbes et les rayons menés du foyer jusqu'au point de contact[14]. La notion de foyer se présente ainsi dans le troisième livre des *Coniques*, lorsqu'Apollonius considère la question des lieux des points dont les distances à deux points donnés ont une somme ou une différence donnée[15].

Comment expliquer que, dans ces conditions, la notion de foyer de la parabole soit absente des *Coniques* d'Apollonius ? À cette question, on a donné les réponses les plus diverses. On a par exemple invoqué la méthode même que suit Apollonius pour déterminer les foyers, c'est-à-dire l'application des aires. Soit l'exemple de l'ellipse : on procède en appliquant suivant le grand axe, à partir de l'une de ses extrémités, un rectangle qui, diminué d'un carré, est équivalent au quart du rectangle ayant pour côtés le diamètre et le côté droit correspondant[16]. Le cas de l'autre conique à centre, l'hyperbole, est semblable : on applique suivant l'axe transverse un rectangle auquel on ajoute un carré. Cette méthode d'application des aires éclaire sans aucun doute la raison qui a conduit Apollonius à considérer les foyers des coniques à centre. Mais il faut avouer qu'elle ne prouve aucunement qu'Apollonius ignorait vraiment le foyer de la parabole[17]. On a également expliqué l'absence de cette notion en soulignant son caractère immédiat : tout se passe dans ce cas comme si Apollonius n'avait pas jugé nécessaire de rappeler une telle notion dans les *Coniques*. C'est ainsi qu'O. Neugebauer affirme, dans une étude rigoureuse, un principe qui, selon lui, a été suivi par Apollonius dans son livre. Selon ce principe, la démarche d'Apollonius consiste à obtenir les propositions relatives à l'hyperbole au moyen des généralisations des propositions sur la parabole[18]. Si on essaie de ramener les propositions relatives à l'hyperbole à celles qui ont trait à la parabole, il s'ensuit « directement et trivialement l'existence d'un foyer de la parabole (mais non pas de la directrice), et qu'il est pratiquement exclu qu'Apollonius eût manqué justement ici cette implication »[19].

Sans insister davantage sur les commentaires apportés, depuis Zeuthen, par les historiens aux *Coniques* d'Apollonius, on peut cependant dégager une position sur laquelle tous s'accordent : ils admettent en effet unanimement qu'Apollonius, presque sûrement, n'ignorait pas la notion de foyer de la parabole. Zeuthen lui-même conjecturait qu'Apollonius faisait appel à cette notion, ainsi qu'à celle de directrice, pour construire les sections coniques. Mais cet accord, qui semble fondé, ne parvient pas à faire taire l'étonnement devant l'absence de la

[14] Ainsi par exemple, dans les propositions 45 et 46, Apollonius mène deux perpendiculaires des extrémités d'une conique à centre, qui rencontrent la tangente en un point quelconque de la courbe, et montre que cette tangente est vue de chacun des foyers sous un angle droit ; il prouve ensuite certaines égalités angulaires. Sur l'analyse du texte d'Apollonius, voir Zeuthen *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, pp. 367 sqq. et notamment p. 374.

[15] Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, p. 370.

[16] *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Nouveau tirage (Paris, 1959), Livre III, prop. 65, pp. 263-264.

[17] *Ibid.*, p. xviii.

[18] O. Neugebauer, « Apollonius-Studien », pp. 237 sqq.

[19] *Ibid.*, p. 237.

directrice pour les trois sections, et celle du foyer, pour la parabole, dans un ouvrage qui entendait présenter au lecteur le corps de l'enseignement des sections coniques[20].

En bref, si l'on peut aisément admettre qu'Apollonius n'ignorait pas la notion de foyer de la parabole, c'est à condition de préciser aussitôt qu'il n'a jamais considéré cette notion pour elle-même, non seulement dans le cas possible de la parabole, mais aussi là où il l'a effectivement dégagée, c'est-à-dire dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole. C'est ce que Zeuthen avait déjà remarqué lorsqu'il affirmait que quelques-unes des plus importantes propriétés des foyers de l'ellipse et de l'hyperbole ont été dégagées comme étapes de démonstration des lieux des points dont les distances à ces foyers ont une somme ou une différence donnée. Dans un tel contexte, aucune nécessité interne n'avait imposé à Apollonius de reconsidérer la parabole comme une conique dont le centre et le second foyer sont à l'infini.

Outre cette tradition de recherche sur les lieux des points, qui remonte à Euclide et qui recourait, selon les uns, aux deux foyers ou à un foyer et à une directrice, on rencontre une seconde tradition catoptrique où l'on s'intéresse aux foyers pour leurs propriétés optiques. Dans ce contexte catoptrique, on comprend, *a posteriori* tout au moins, l'intérêt que l'on a pu porter au foyer de la parabole[21]. Cette tradition est déjà attestée, selon le témoignage de Dioclès, chez Dosithée.

Dans les écrits de Dioclès, ces deux traditions se présentent successivement. Alors que dans la première proposition de son livre, il part de la définition de la parabole au moyen de l'abscisse et de l'ordonnée pour ensuite étudier la propriété focale, dans les propositions 4 et 5, et ensuite dans la proposition 10, il épouse la première tradition pour tracer la courbe par points, ou pour résoudre un problème de construction géométrique. Tout indique du reste que l'originalité de Dioclès ne tient pas à la découverte de la notion, mais à la réunion de deux traditions jusque-là séparées.

Dioclès démontre, dans la première proposition, la propriété focale de la parabole, et utilise pour cela les propriétés de la sous-tangente et de la sous-normale. Il passe ensuite au paraboloïde de révolution. Dans la quatrième proposition, Dioclès passe à la détermination de la parabole génératrice d'un miroir parabolique de révolution, de sorte que les rayons réfléchis se rencontrent en un point situé à une distance donnée du centre du miroir.

Dans cette proposition, on voit donc surgir, sans toutefois qu'elle soit nommée, la propriété foyer-directrice la parabole. Et le texte considéré jusqu'ici comme le premier, encore existant, où l'on rencontre cette propriété, le fragment d'Anthémius de Tralles, cède sa priorité au livre de Dioclès[22]. Dans ce livre en effet la propriété apparaît à deux reprises : d'abord dans le

---

[20] Voici comment Apollonius décrit dans la préface au quatrième livre le but des huit livres qui composent les *Coniques* : « ... les trois premiers des huit livres dans lesquels je rassemble méthodiquement ce qui a trait aux coniques » (trad. Ver Eecke, p. 281).

[21] Peut-être les auteurs avaient-ils remarqué, intuitivement au moins, que le miroir parabolique ne subit pas l'aberration sphérique suivant l'axe, quand le point-objet est dans une certaine position vis-à-vis de la face du miroir.

[22] Voici ce qu'écrit Th. Heath dans un article de 1907 à propos de ce fragment d'Anthémius : «Most important of all, we have here the *first instance on record of the principal use of the directrix*, though the property of conics with reference to the focus and directrix was known to Pappus (lemma on Euclid's Surface loci) and

groupe de propositions consacré au miroir parabolique ; ensuite dans la dixième proposition, à l'occasion de l'étude de la duplication du cube. Il s'agit donc de deux contextes différents – l'un optique-géométrique, l'autre purement géométrique – dont seule la confrontation permettrait de saisir les idées que pouvait formuler Dioclès à ce propos, et de décrire le statut de cette propriété dans son œuvre.

On a déjà noté que Dioclès traite, dans la première proposition, de quelques propriétés géométriques et optiques de la parabole. Mais c'est seulement dans la proposition 4 qu'il tente de construire un miroir parabolique destiné à embraser à une distance donnée du sommet de la parabole. Il procède alors par des étapes dont il faut souligner la succession. Il commence par tracer par points une courbe définie par son sommet et par son foyer. Il justifie ensuite ce tracé, en construisant la droite *RS*, et montre que chaque point obtenu est équidistant du foyer et de cette droite. On observera que Dioclès, au cours de cette construction, ne représente pas la propriété foyer-directrice explicitement pour *caractériser* la parabole comme lieu des points dont la distance au foyer est égale à la distance d'une droite fixe. C'est dire, par conséquent, qu'il sait intuitivement que la parabole constitue un tel lieu de points, sans la définir comme un lieu de points[23]. La propriété foyer-directrice est donc, semble-t-il, destinée à tracer ce lieu ; c'est un moyen pour construire par points cette courbe. La caractérisation de la courbe devait s'opérer par *la propriété fondamentale*, c'est-à-dire le *symptoma*, comme on le voit chez des mathématiciens même antérieurs à Apollonius, qui permet de repérer les points de la courbe dans un système d'axes constitué par le diamètre et la tangente au sommet de la parabole, ou, dans un autre langage, d'établir l'équation. On comprend dès lors que Dioclès devait démontrer que la courbe tracée, et dont la construction a été ensuite justifiée, est bien une parabole : il lui fallait déduire le *symptoma* de la propriété foyer-directrice. C'est précisément à quoi il s'emploie dans la proposition suivante, la cinquième. À elle seule, la présence de cette proposition prouve que Dioclès n'a pas considéré la propriété foyer-directrice comme caractérisation de la parabole. Quoi qu'il en soit, cette démonstration lui permet de se ramener à la proposition 1, puisqu'il a montré maintenant qu'il s'agit bien d'une parabole.

Revenons maintenant à la dixième proposition, où apparaît de nouveau cette propriété. Dioclès procède, ici aussi, successivement par les mêmes étapes : il commence par construire par points deux courbes, de même sommet et de foyers différents ; il justifie ensuite cette construction en montrant que tout point de chacune des deux courbes est à égale distance du foyer et de la directrice correspondants, pour enfin déduire le *symptoma* de chacune de ces deux courbes ; et c'est là seulement qu'il écrit : « il est clair également que les deux lignes... sont deux sections d'un cône à angle droit »[24].

---

possibly to Euclid himself» [« The Fragment of Anthemius on Burning Mirrors and the *Fragmentum mathematicum Bobiense* », *Bibliotheca Mathematica*, III.7 (1907), pp. 225-233, à la p. 230]. On comprend que cette opinion ait pu s'imposer avant la connaissance du texte arabe attribué à Dioclès. Cf. également G.L. Huxley, *Anthemius of Tralles, A Study in Later Greek Geometry* (Cambridge, Mass., 1959), p. 19.

[23] W. Knorr a justement perçu la difficulté quand il écrit : « In fact, the role of the line SR is so submerged in the construction that one strains to view Diocles as working toward the solution of a problem of locus as such» [« The Geometry of Burning-Mirrors in Antiquity», *Isis*, 74 (1983), pp. 53-73, à la p. 59]. Voir aussi *The Ancient Tradition of Geometric Problems* (Boston, Basel, Stuttgart, 1986), p. 237.

[24] Voir R. Rashed, Les Catoptriciens grecs, p. 130-131.

Dans les deux groupes de propositions, la démarche de Dioclès est donc identique. A-t-on alors le droit de considérer qu'il est le premier à avoir dégagé la propriété foyer-directrice? Pour tenter une réponse à cette question difficile, rappelons d'abord que, selon Pappus, cette propriété était connue d'Euclide. Nul n'ignore en effet que dans VII.238 de la *Collection mathématique*, Pappus donne – pour le livre d'Euclide sur *Les lieux à la surface* – un lemme que l'on peut ainsi réécrire : le lieu des points dont la distance à un point donné est dans un rapport donné à la distance à une droite fixe, est une section conique ; c'est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon que ce rapport donné est inférieur, égal ou supérieur à l'unité[25]. Cette affirmation de Pappus – à moins que l'on soit en mesure de prouver qu'il se trompait ou voulait abuser – montre bien qu'Euclide a utilisé cette proposition. Mais pourquoi ne l'a-t-il pas démontrée ? Il y a un siècle, H.G. Zeuthen proposait, en réponse à cette question, la conjecture selon laquelle « Euclide a utilisé une proposition connue auparavant »[26]. Th. Heath pousse plus loin la même conjecture, et, partant du fait qu'elle ne pouvait se trouver dans les quatre livres sur les *Coniques* d'Euclide – puisque les *Coniques* d'Apollonius, qui les reprennent, ne contiennent précisément pas cette propriété – affirme : « If, then, Euclid did not take it from his own *Conics*, what more likely than that it was contained in Aristaeus's *Solid Loci* ? »[27].

Que l'on accepte ou conteste la conjecture de Th. Heath, peu importe ici ; on sait en revanche que, selon toute vraisemblance, Euclide connaissait cette propriété.

Le couple foyer-directrice détermine bien une parabole ou, comme l'écrit Pappus, la parabole « constitue le lieu ».

Notre analyse, si elle est exacte, permet de montrer que Pappus, après avoir supposé l'existence des points qui vérifient la propriété foyer-directrice – sans les construire – montre que ces points vérifient la propriété fondamentale de la parabole. Cette étape correspond à celle où Dioclès construit des points qui vérifient la propriété foyer-directrice et montre qu'ils vérifient également la propriété fondamentale de la parabole. Une différence importante demeure néanmoins entre les deux mathématiciens : alors que Dioclès utilise la propriété foyer-directrice pour construire effectivement des points de la courbe, Pappus suppose leur existence et montre que, s'ils existent, alors ils appartiennent à une parabole. On comprend dès lors que Pappus soit amené à démontrer une réciproque, c'est-à-dire que tout point de cette parabole vérifie la propriété foyer-directrice, et, par conséquent, à montrer l'existence des points cherchés et à déterminer leur lieu.

Cet écart entre Dioclès et Pappus n'est pas de pure forme ; il ne tient pas au seul procédé de la démonstration, mais indique la différence des buts cherchés. Le problème de Dioclès n'est pas, comme pour Pappus, de déterminer le lieu des points, mais de construire les points

[25] Cf. *Pappi Alexandrini Collectionis*, éd. F. Hultsch, 3 vol. (Berlin, 1876-1878), vol. II, pp. 1004-1006 et 1012-1014 ; Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, Œuvre traduite pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Tome second, Nouveau tirage (Paris, 1982), pp. 793-794 et 801.

[26] H.G. Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, p. 213. Voici ce qu'il écrit notamment : « der Umstand indessen, dass Pappus diese Bedingungen mit anführt, macht die Annahme wahrscheinlicher, dass Euklid einen Satz benutzt hat, der schon im voraus bekannt war ».

[27] Th. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, p. 119.

indépendamment des coniques, pour ensuite démontrer que ces points appartiennent à une parabole caractérisée selon la tradition des mathématiciens des coniques, c'est-à-dire définie par le *symptoma*. Cette démonstration ne fait intervenir aucun concept inconnu des prédécesseurs de Dioclès, mais il reste que ce dernier, pour autant que nous le sachions, est le premier à l'avoir formulée. Une différence analogue marque du reste l'évolution de la conception de la parabole comme ensemble de points. Pour Pappus en effet, la parabole est désormais donnée, en vertu de la réciproque, comme le lieu des points qui vérifient la propriété foyer-directrice. Cette conception reste cependant enfouie dans un ensemble d'études sur les lieux des points ; ce n'est que bien plus tard qu'elle sera considérée pour elle-même et explicitement employée à la définition de la parabole, comme on peut le voir dans les travaux d'un La Hire par exemple.

Concluons sur la démarche de Dioclès dans les propositions 4 et 5. Dans la proposition 4, il se donne deux points fixes A et B et construit la droite RS perpendiculaire à AB au point R, tel que $AB = BR$. Il construit à la règle et au compas des points équidistants de A et de la droite RS. Il montre que sur toute parallèle à RS dans le demi-plan (RS, A), il existe deux points répondant au problème. Mais l'idée de tangente, soulignons-le, n'apparaît à aucun moment dans sa construction. Dans la proposition 5, il montre que les points ainsi définis sont sur la parabole de foyer A et de sommet B, laquelle est caractérisée par la propriété fondamentale.

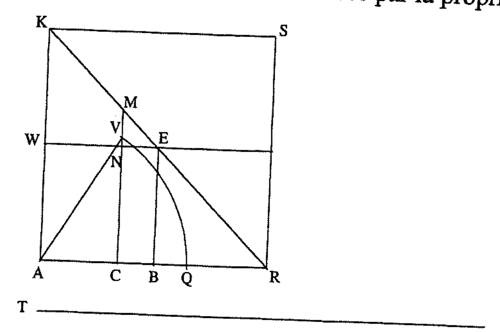


Figure 1

Si Dioclès avait pensé définir une parabole par la propriété foyer-directrice, il lui aurait encore fallu montrer que tout point d'une parabole définie par son sommet et par la propriété fondamentale est équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe, qui sont définis à partir du sommet et du paramètre. Or s'il n'a pas entrepris cette démonstration, c'est qu'il ne recherchait pas une telle caractérisation.

Mais, cela ne fait aucun doute, le problème de Dioclès n'est nullement le problème général de réduire la construction d'une courbe ayant la propriété de réfléchir les rayons parallèles à une direction donnée vers un point fixe donné, à celle d'une courbe définie par la propriété foyer-directrice. Un telle question, qui n'est donc pas celle que se pose Dioclès, conduirait en effet à la résolution d'une équation différentielle, qui donnerait une famille de courbes. Seul Anthémius de Tralles[28], huit siècles plus tard, traitera un cas particulier de ce problème

[28] Voir R. Rashed, Les Catoptriciens grecs, troisième partie.

général. Il suppose connus deux points A et B de la courbe, et le point fixe D sur la médiatrice de AB, la direction des rayons étant celle de la médiatrice. Dans ce cas, une seule parabole répond au problème.

Quel fut l'impact de l'étude de Dioclès ? Nous n'en avons aucune trace. Perdu assez tôt, le texte n'est connu que dans sa version arabe. Le cas n'est pas unique et se retrouve pour d'autres traités consacrés aux miroirs ardents : ainsi le texte attribué à un certain Dtrūms, tout aussi important, et qui traite également des miroirs sphériques et paraboliques dans le même esprit : la géométrie des coniques. Dtrūms commence – pour le miroir parabolique – par montrer la propriété focale de la parabole, puis il établit que la distance du sommet de la parabole au foyer est égale au quart du côté droit ; il construit alors la parabole par points, et montre pour finir comment façonner le gabarit du miroir. C'est encore Dtrūms qui mène le plus loin, dans ce mémoire, l'étude du miroir sphérique[29].

À la fin de cette première période se dessine une tradition différente, dont le meilleur représentant est Anthémius de Tralles. Le savant byzantin prend comme point de départ la célèbre légende d'Archimède, dont il veut établir la plausibilité. Il se propose de répondre à la question suivante : comment faire parvenir un rayon solaire à un point éloigné de nous d'une distance donnée. Il examine plusieurs miroirs, et conclut sur l'étude du miroir parabolique. Il procède donc à la construction par points et tangentes d'une parabole dont on connaît le foyer et la directrice. À tout prendre, le traité d'Anthémius se situe davantage dans une perspective catoptrique que dans celle de la géométrie des coniques. Incomplet en grec, cet écrit nous est parvenu dans sa version arabe. Également traduit dans cette langue, un court traité d'un certain Didyme.

En fait, tout laisse penser qu'au IXe siècle se développait une recherche active en arabe sur les miroirs ardents et la catoptrique, menée principalement par al-Kindī (mort en 866 environ) et par son contemporain Qusṭā ibn Lūqā, initiatrice d'un mouvement massif de traduction des écrits grecs traitant de ce sujet. L'horizon catoptrique déjà perceptible en filigrane dans l'écrit d'Anthémius et dans celui de Didyme s'imposera dans les études consacrées par al-Kindī aux miroirs ardents. C'est en tout cas cette perspective qui l'emportera à l'heure de la transmission des textes grecs en arabe, assurant du coup au livre d'Anthémius une pérennité dont les autres ont été privés. En effet, à la différence des autres textes traduits du grec, l'ouvrage d'Anthémius a été généreusement consulté ; il fut même l'objet d'un commentaire critique d'al-Kindī ; Aḥmad ibn ʿĪsā l'a fréquemment cité ; ʿUṭārid, au Xe siècle, l'a repris intégralement dans sa compilation.

Or, un tel changement d'horizon au moment de la transmission est indissociable de l'émergence d'un nouveau caractère dans la recherche sur les miroirs ardents au IXe siècle : celle-ci fait désormais partie de la catoptrique, le fait doit être souligné. C'est donc un seul et même savant qui s'occupe d'optique ou de catoptrique, en même temps que des miroirs ardents – ainsi al-Kindī et Qusṭā ibn Lūqā. Tels sont les traits qui distinguent la seconde période de l'histoire des miroirs ardents : ni Dioclès, ni Dtrūms, ni l'auteur du fragment de

[29] Sur l'histoire des miroirs ardents sphériques, cf. R. Rashed : *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī*, pp. 117-125.

Bobbio, ni d'ailleurs Anthémius lui-même, en dépit de tout ce qui peut les séparer, n'ont poursuivi en même temps une recherche optique. C'est à al-Kindī le premier, semble-t-il, que revient d'avoir unifié des champs disparates, modifiant ainsi la physionomie d'ensemble du domaine. Il a écrit sa fameuse *Optique*, connue sous le titre *De aspectibus* dans la traduction latine de son texte arabe perdu, ainsi que *La Rectification des erreurs et des difficultés dues à Euclide dans son livre appelé l'*Optique ; on lui doit aussi plusieurs traités en catoptrique. Il consacre un traité aux miroirs ardents, intitulé *Sur les rayons solaires*, où il déclare vouloir remédier aux insuffisances de l'étude d'Anthémius de Tralles, et la compléter. Ce traité s'achève sur une étude du miroir parabolique. Qusṭā ibn Lūqā écrit quant à lui une catoptrique, et, aux dires des biobibliographes, un traité sur les miroirs ardents. Leur successeur du Xe siècle, qui est aussi le compilateur d'al-Kindī, Ibn ʿĪsā, regroupe dans un même livre optique, catoptrique, optique météorologique et miroirs ardents. Il est donc clair que la transmission par la recherche, celle qui s'opère au IXe siècle, n'est nullement une livraison de résultats nus : elle s'accompagne, à l'évidence, d'une rénovation. Déjà présente chez les savants du IXe siècle, elle apparaîtra plus tard dans tout son éclat. Avec Ibn Sahl à la fin du siècle suivant, l'unification opérée par al-Kindī et par ses contemporains connaîtra toute son ampleur, et s'achèvera dans la naissance d'un nouveau chapitre de l'optique : l'anaclastique ou la dioptrique.

Ibn Sahl, rappelons-le, est le premier mathématicien connu qui ait élaboré une théorie géométrique des lentilles, et formulé la loi dite de Snell. En fait, il a conçu un chapitre de l'optique, qui porte sur les instruments ardents, miroirs et lentilles. Son point de départ est plus général que celui de ses prédécesseurs : non seulement Ibn Sahl connaissait l'*Optique* de Ptolémée, et donc le cinquième chapitre consacré à la réfraction – ce qu'al-Kindī et Ibn Lūqā ignoraient ; mais il a infléchi la théorie transmise – en donnant de l'importance au concept de milieu réfringent, certes, mais aussi en définissant ce milieu par un certain rapport constant. Ibn Sahl considère l'embrasement non seulement comme l'effet de la réflexion, mais aussi de la réfraction, relatif à la distance, finie ou infinie, de la source. Le miroir parabolique, par exemple, n'apparaît pas pour lui-même ; ce n'est pas non plus un miroir parmi les autres : il se place à l'intersection de la réflexion et de la distance infinie, c'est-à-dire là où l'embrasement se fait par réflexion, la source étant à l'infini. Le miroir parabolique, tout comme le miroir ellipsoïdal, ont chacun une place particulière dans une étude plus générale qui porte sur les miroirs et les lentilles. Dans son étude du miroir parabolique, par exemple, Ibn Sahl commence par examiner les propriétés anaclastiques de la parabole avant de procéder au tracé continu de la courbe à l'aide du foyer et de la directrice. Il fabrique à cette fin un appareil mécanique conçu pour le tracé continu de trois courbes coniques.

Au cours de son étude des deux miroirs, parabolique et ellipsoïdal, Ibn Sahl s'attache tout particulièrement à la détermination du plan tangent au point d'impact de la lumière incidente à la surface réfléchissante, ainsi qu'à l'unicité de ce plan. Pourquoi cet intérêt ? Certes, on y retrouve bien la connaissance qu'Ibn Sahl avait de la théorie des coniques, mais aussi sa conception de la réflexion de la lumière. Ibn Sahl veut non seulement s'assurer de l'égalité de l'angle d'incidence et de l'angle de réflexion, mais aussi vérifier que la droite suivant laquelle la lumière parvient au point d'une surface, la droite suivant laquelle cette lumière est réfléchie, et, enfin, la normale menée au plan tangent à la surface en ce point, sont dans un même plan. En fait, pour Ibn Sahl, ce n'est pas la surface réfléchissante qui importe, mais bien ce plan tangent. C'est d'une manière analogue qu'il étudie le miroir ellipsoïdal, la lentille plan-convexe et la lentille biconvexe.

Avec Ibn Sahl, l'étude des miroirs ardents fait désormais partie de l'optique géométrique : c'est précisément cela qui caractérise la troisième période. Et là, nous sommes à la veille d'une grande transformation, celle qu'accomplit Ibn al-Haytham. Cependant, l'étude du miroir parabolique que nous a laissée ce dernier est proche de celle d'Ibn Sahl, mais à une différence près, qui n'est pas négligeable : Ibn al-Haytham souligne le contenu physique des notions géométriques, comme celles de rayon lumineux et de faisceau lumineux. Il commence par établir les propriétés anaclastiques de la parabole, celles du paraboloïde de révolution ensuite, puis il s'emploie à la fabrication du miroir. Il explique comment construire sur des plaques d'acier les gabarits nécessaires à la confection des miroirs. Il distingue deux types de plaques : plaque du sommet de la section, et plaque du milieu de la section. Si donc on construit un miroir ovoïdal, on utilise une plaque du premier type, le côté droit de la parabole étant choisi à partir de la distance souhaitée pour l'embrasement ; le côté droit sera égal au quadruple de la distance. Mais si on veut construire un miroir parabolique en forme d'anneau, on détermine la plaque en supposant connus la distance à laquelle on veut embraser et le côté droit de la parabole.

Ainsi se poursuit la recherche sur les miroirs ardents, depuis la transmission des travaux grecs jusqu'à Ibn al-Haytham. Le développement de cette recherche ne se réduit pas, comme on le voit, à un accroissement mécanique des résultats, ni à un perfectionnement linéaire des techniques ; c'est l'histoire de la modification du sens, elle-même effet d'une rénovation des perspectives.

Beaucoup plus que toute autre, l'étude d'Ibn al-Haytham eut un grand impact sur les travaux consacrés aux miroirs ardents, que ce soit en arabe ou en latin. Mais on verra brièvement que cet impact ne fut nullement le même dans chaque cas.

Rédigé au Caire avant les années quarante du XIe siècle, le mémoire d'Ibn al-Haytham sur le miroir parabolique, en effet, n'a pas seulement été lu en arabe, mais aussi en latin à partir du XIIe siècle. La différence qui, pendant un temps tout au moins, a distingué ces deux lectures, est riche d'enseignement pour une réflexion sur l'histoire des miroirs ardents et sur la transmission scientifique. En fait, la ligne de clivage passe pour ainsi dire entre optique et géométrie.

Amplement diffusé en arabe, ce mémoire a été commenté à Bagdad, à l'Est comme à l'Ouest islamiques, mais en tant qu'écrit optique. L'essentiel de la recherche d'Ibn al-Haytham dans ces pages est, en effet, optico-technique, nullement géométrique. À cela, rien d'étonnant : la tradition de l'optique est alors bien établie, avec ses noms, ses références, ses problématiques et son langage. Quant à la recherche en théorie des coniques, elle est déjà trop avancée pour qu'un mathématicien qui s'y adonne aille chercher des informations dans un traité consacré aux miroirs ardents. Mais il en va tout autrement au XIIe siècle, en latin. La traduction du traité d'Ibn al-Haytham par Gérard de Crémone ne semble pas, quant à elle, répondre aux besoins de la recherche en optique, puisqu'en effet celle-ci n'existait pas encore. En revanche, cette tradition offrait le premier accès en latin à la géométrie des coniques.

Lisons ce qu'écrit Marshall Clagett : « Avant le douzième siècle, la connaissance des sections coniques à l'Ouest était inexistante »[30], et il poursuit : « Les premières traces d'une quelconque connaissance des sections coniques en Occident résultaient de la traduction latine de deux ouvrages d'Alhazen (Ibn al-Haytham). Le premier était la traduction par Gérard de Crémone du *Liber de speculis comburentibus* d'Alhazen… ». Il fallait attendre la traduction du *De aspectibus* d'al-Kindī et celle du *Livre de l'optique* d'Ibn al-Haytham pour que fût entamée en latin la recherche en optique. Il reste que l'impact de ce mémoire en géométrie des coniques fut grand, comme l'a montré M. Clagett à l'aide de l'analyse de travaux comme le *Speculi almukefi compositio*, anonyme, ou le *Libellus de seccione mukefi*, de Johannes Fusoris[31].

Comme je viens de le rappeler, le rôle de ce mémoire en arabe était bien différent, du fait même de son intégration dans une tradition de recherche continue, et bien établie depuis déjà deux siècles. Pour illustrer son rôle dans le développement de la recherche future, je m'en tiendrai à un seul exemple, celui d'un auteur jusqu'ici inconnu, un certain Ibn Ṣāliḥ. Ibn Ṣāliḥ a écrit un volumineux mémoire sur le miroir parabolique, dans lequel il emprunte de nombreux paragraphes au texte d'Ibn al-Haytham.

L'auteur commence par des considérations sur la théorie des coniques, en mêlant le langage des *Éléments* d'Euclide à celui des *Coniques* d'Apollonius[32]. Puis il revient au miroir parabolique. La principale difficulté qu'il pressent concernant ce miroir est d'ordre technique : réussir la courbure d'un miroir parabolique d'une surface assez grande pour augmenter l'embrasement. On comprend qu'un tel miroir est difficile, voire impossible, à fabriquer pour l'artisan de l'époque. L'idée est donc la suivante : perdre un peu en focalisation pour gagner en surface. Or, on se souvient qu'Ibn al-Haytham a étudié le miroir « en forme d'anneau », dont l'axe est toujours l'axe du paraboloïde, et le point d'embrasement le foyer. On peut dans ce cas choisir l'arc EB générateur d'un tel miroir, pour que le foyer F soit à une distance arbitrairement choisie du centre du cercle décrit par le point E.

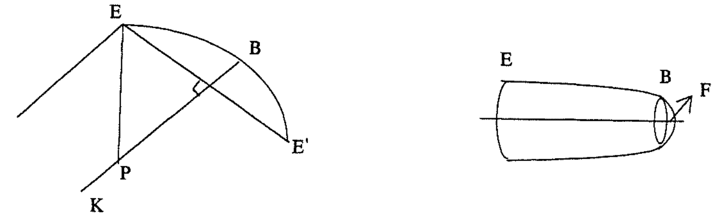


Figure 2

[30] M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Volume Four : *A Supplement on the Medieval Latin Traditions of Conic Sections*, Part I : *Texts and Analysis* (Philadelphia, 1980), p. 3.

[31] *Ibid.*, vol. IV, chap. 4 et 5.

[32] On peut à ce propos souligner tout le danger qu'il y a à déterminer la succession des auteurs à l'aide de leur seule langue.

Ibn Ṣāliḥ considère alors un miroir concave engendré par la rotation de cet arc *EB* autour de la normale *BK* au point *B*; *BK* sera donc l'axe du miroir. Tous les rayons incidents parallèles à *BK* et tombant sur le cercle engendré par *E* sont réfléchis vers un point *P* de *BK*. La distance *BP* dépend du point *E* qui détermine le bord du miroir. Un rayon incident parallèle à *BK* tombant en un point quelconque du miroir rencontrera l'axe en un point différent de *P*, point plus proche de *B*. Ibn Ṣāliḥ procède au calcul de ces points. Il n'y a donc pas un point d'embrasement, mais une concentration de rayons réfléchis au voisinage de l'axe *BK*.

Ibn Ṣāliḥ expose ensuite un procédé qui permet d'obtenir un arc de parabole comme section plane d'un tronc de cône de révolution ; il décrit en détail les procédés techniques employés à la fabrication de ce miroir[33].

L'exemple d'Ibn Ṣāliḥ est clair : s'il conçoit ce type de miroir, jamais pensé auparavant, c'est qu'il y est poussé par une contrainte technique. Ni les matériaux, ni les procédés de fabrication de son temps, ne permettaient en effet de construire un miroir parabolique avec une grande courbure. On peut dire que cette dialectique entre la tradition conceptuelle développée depuis al-Kindī et la tradition technique, domine et distingue de part en part l'histoire des miroirs ardents en arabe.

Voici donc un bref tableau historique des principales étapes de la recherche sur les miroirs ardents, au long de quinze siècles environ. La transmission pour la recherche, comme on l'a vue au IXᵉ siècle, s'accompagne d'une traduction massive des écrits; elle est critique et innovatrice. On reprend les anciens acquis pour les intégrer dans de nouvelles traditions conceptuelles et techniques, en formation ; à leur tour, les écrits transmis sont productifs dans ce mouvement d'élaboration d'une nouvelle tradition. Ce mouvement lui-même représente le véritable mode de survie des écrits de Dioclès, de Dtrūms, d'Anthémius et de Didyme. Même s'ils ont rapidement cessé d'exister « en personne » après le IXᵉ siècle au nombre des écrits sur les miroirs ardents, ils sont cependant présents par le rôle qu'ils jouent dans cette recherche au IXᵉ siècle, et peut-être même encore au Xᵉ siècle.

L'étude du miroir parabolique a été entreprise par tous les auteurs dont nous connaissons les écrits : Dioclès, Dtrūms, Anthémius, et, implicitement tout au moins, Didyme. À ceux-ci il faut ajouter l'auteur du fragment de Bobbio et al-Kindī ; ainsi qu'Ibn al-Haytham, enfin, dans un célèbre mémoire connu aussi bien en arabe qu'en latin. Certains historiens ont cru pouvoir placer ce dernier à la suite de Dioclès ; d'autres à la suite d'Anthémius. Mais il nous faut introduire encore une autre figure, Ibn Sahl, si nous voulons situer l'œuvre d'Ibn al-Haytham. Pour confronter ces textes, nous procéderons par deux comparaisons, l'une à partir de la propriété rayon-foyer, et l'autre à partir de la propriété foyer-directrice. Mais, pour que ces comparaisons soient à la fois concises et claires, commençons par rappeler quelques propriétés de la parabole.

[33] Voir notre article à paraître « Les miroirs ardents d'Ibn Ṣāliḥ ».

Soit *F* le foyer, *S* le sommet, *DK* la directrice, *T* le pied de la tangente en un point quelconque *M* de la parabole, *H* la projection de *M* sur l'axe, *D* la projection de *M* sur *DK* et *N* le pied de la normale. Menons $SP = 4\,SF$, le côté droit, et joignons *FM* et *FZ*. Menons la droite *XM* parallèlement à l'axe ; on a d'abord :

1) *S* le milieu de la sous-tangente *HT*.

2) La sous-normale *HN* est égale à la moitié du côté droit, donc $HN = 2\,SF$.

3) $FM = MD$.

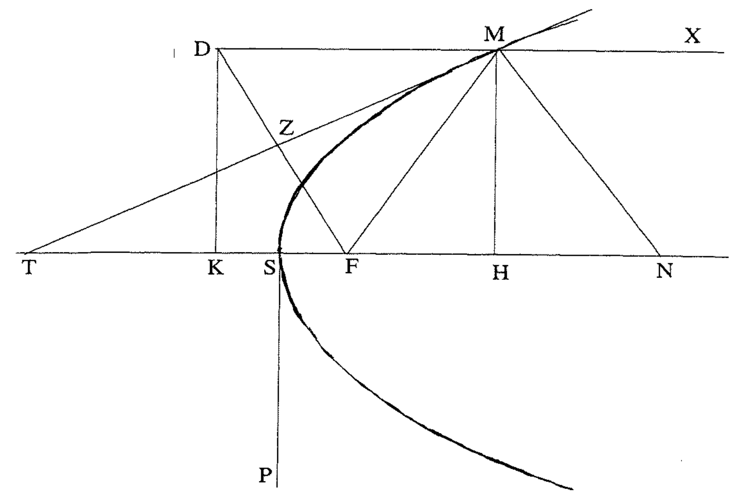


Figure 3

Nous avons remarqué que Dioclès utilise les propriétés 1° et 2° ; il part du foyer et établit les égalités d'angles. Il part ainsi d'un rayon incident parallèle à l'axe et montre que la droite joignant le point d'incidence au foyer est bien le rayon réfléchi, car la loi de la réflexion est vérifiée.

Cette étude manque à l'écrit d'Anthémius. Nous savons seulement qu'il utilise *implicitement* la propriété selon laquelle *MT* est la médiatrice de *FD*, qui n'est autre que la propriété foyer-directrice.

Le cas de Dtrūms se distingue des deux précédents. Dtrūms utilise le *symptoma* de la parabole, et la propriété 1°. De plus, il part de l'égalité d'angles pour aboutir au foyer, contrairement à Dioclès.

Quant à l'auteur du fragment de Bobbio, il utilise lui aussi le *symptoma*, mais, contrairement à Dtrūms, il part du foyer et en déduit une égalité d'angles.

On voit bien que, tout au moins pour la propriété rayon-foyer, il y a autant de démarches que d'auteurs : rien ne permet donc de déceler les traces d'une quelconque influence de l'un sur l'autre.

Venons-en maintenant aux successeurs arabes de ces mathématiciens. Nous avons montré qu'al-Kindī[34], dans son traité sur *Les Rayons*, reprend la construction de la parabole opérée par Anthémius. Abū al-Wafā' al-Būzjānī, au X^{e} siècle, dans son étude du miroir parabolique, a recours au *symptoma*, et prend dès le départ un segment égal au côté droit ; mais il construit par points la parabole[35]. Quant à son contemporain Ibn Sahl[36], il se donne d'abord le foyer, joint le point d'incidence à ce dernier par une droite, et montre que celle-ci est la droite suivant laquelle se propage le rayon réfléchi, c'est-à-dire qu'elle détermine une égalité d'angles. La démonstration d'Ibn Sahl se fait à l'aide du *symptoma* de la parabole et de la propriété 1°. Son successeur Ibn al-Haytham procède pratiquement de la même manière, et utilise au cours de sa démonstration par analyse et synthèse les deux propriétés auxquelles recourait Ibn Sahl. Tous deux distinguent trois cas dans leur démonstration, selon que l'angle *MFS* est aigu, droit ou obtus. Notons enfin que Ibn Sahl utilise les deux propriétés auxquelles recourait l'auteur du fragment de Bobbio. Mais la maîtrise géométrique d'Ibn Sahl est bien supérieure à celle de ce dernier, et rien n'indique d'autre part que ce fragment fût traduit en arabe.

Aussi brève soit-elle, la précédente comparaison permet de partager nos auteurs en trois grands groupes. Le premier, dont les membres n'examinent pas la propriété rayon-foyer, comprend Anthémius et al-Kindī. Le second se réduit à Dioclès : il n'y a que lui en effet qui utilise dans sa démonstration les deux propriétés 1° et 2°, et elles seules. Le troisième groupe comprend l'auteur du fragment de Bobbio, Dtrūms, Ibn Sahl et Ibn al-Haytham, dans la mesure où tous utilisent le *symptoma* de la parabole et la propriété 1°. Il reste que, dans ce groupe, on peut isoler deux sous-groupes, dont l'un comprend Dtrūms tout seul, alors que l'autre comprend l'auteur du fragment de Bobbio, Ibn Sahl et Ibn al-Haytham. En effet, alors que ces derniers partent du foyer pour établir une égalité d'angles, Dtrūms au contraire part de l'égalité d'angles pour aboutir au foyer. Or, dans le sous-groupe formé des trois savants, Ibn al-Haytham connaissait l'œuvre optique d'Ibn Sahl, et a même recopié de sa propre main l'un des travaux de son prédécesseur[37]. Mais aucune indication ne suggère que les mathématiciens arabes avaient une connaissance, directe ou indirecte, du fragment de Bobbio. Pour confirmer cette conclusion, importante pour l'histoire d'Anthémius arabe, il nous faut affiner notre comparaison, en reprenant la confrontation des auteurs, à partir de la propriété foyer-directrice cette fois.

Rappelons que Dioclès part du foyer *F* et du sommet *S*, et construit la directrice *KD*. Sur une parallèle à cette directrice dans le demi-plan (*DK*, *F*), il construit deux points qui sont sur le cercle de centre *F* et dont le rayon est la distance des deux parallèles.

[34] Rashed, *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī*, pp. 114-115 et 414-419.

[35] R. Rashed et O. Neugebauer, «Sur une construction du miroir parabolique par Abū al-Wafā' al-Būzjānī», *Arabic Sciences and Philosophy*, 9.2 (1999), p. 261-277.

[36] R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique au X^{e} siècle : Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris, Les Belles Lettres, 1993), pp. XIX-XXVI et 2-15.

[37] En effet Ibn al-Haytham a copié le traité d'Ibn Sahl, *Preuve que la sphère n'est pas d'une transparence extrême*, et le reprend dans son mémoire sur le *Discours de la lumière*. Voir Rashed, *Géométrie et Dioptrique au X^{e} siècle*, p. CXLI-CXLII.

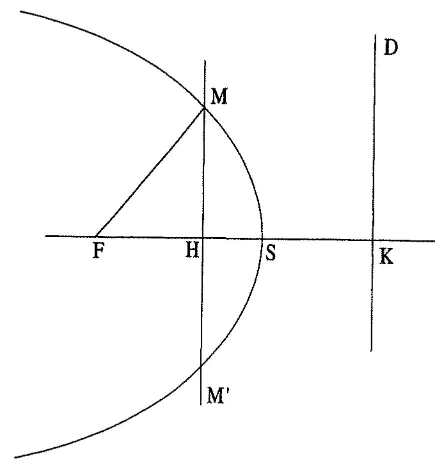


Figure 4

Il démontre ensuite que ces deux points appartiennent à la parabole de foyer *F* et de sommet *S*. Sa construction ne fait donc pas apparaître la tangente.

Anthémius, en revanche, part de la propriété catoptrique d'égalité des angles d'incidence et de réflexion sur un miroir plan. Il se donne un point *F* et un segment *AB*, avec $FA = FB$, et construit une droite *DK* parallèle à *AB*, telle que *A* et *B* soient équidistants de *F* et de cette droite. Sa construction fait *implicitement* appel à la propriété suivante : sur toute parallèle à l'axe d'une parabole de foyer *F* et de directrice *DK*, il existe un point *M* de cette parabole qui appartient à la médiatrice de *FD*, et cette médiatrice est la tangente en *M* à la parabole. Al-Kindī, nous l'avons montré, reprend la construction d'Anthémius.

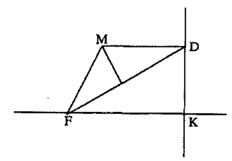


Figure 5

Dtrūms, quant à lui, ne fait pas appel à cette propriété foyer-directrice, mais construit par points la parabole à l'aide de deux règles, à partir d'une propriété sur les rapports établie par lui auparavant. Si cette propriété sur les rapports est bien une propriété caractéristique, le fait est que Dtrūms lui-même ne l'a pas exposée, puisqu'il a négligé d'en démontrer la réciproque.

Les autres textes considérés ici cessent d'être comparables dans cette perspective, celle de la propriété foyer-directrice ; soit en raison de son absence – comme dans le fragment de Bobbio – soit que l'on opère la construction de la parabole par un procédé différent de ceux de Dioclès et de Dtrūms : c'est le cas d'Ibn Sahl et d'Ibn al-Haytham. Ibn Sahl, pour sa part, procède par tracé continu. Il se sert dans sa construction du foyer et d'une droite parallèle à la directrice. La propriété foyer-directrice, $MF = MD$, donne immédiatement $MK + MF = l$, *K* étant la projection de M sur Δ et l la distance des deux droites parallèles. Ibn Sahl utilise alors un fil de longueur l, dont une extrémité est fixée au foyer F et l'autre au sommet K d'une équerre, qui glisse sur Δ. Un stylet placé en M décrit un arc de parabole.

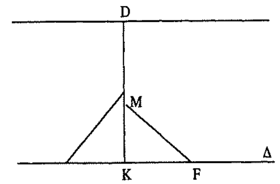


Figure 6

La comparaison qui vient d'être établie semble donc confirmer les résultats de la première confrontation des textes. On peut donc sans trop de risques conclure :

- L'étude de Dioclès semble n'avoir eu aucune influence directe sur les travaux d'Anthémius, de l'auteur du fragment de Bobbio et de Dtrūms. Traduit en arabe, ce texte de Dioclès n'a pas davantage influencé les travaux d'Ibn Sahl et d'Ibn al-Haytham.

- L'étude par Anthémius du miroir parabolique, en revanche, a été reprise par al-Kindī. Elle circulait encore au X^e siècle, comme l'attestent Ibn ʿĪsā et ʿUṭārid, sans cependant avoir d'impact sur les travaux ultérieurs, comme ceux d'Ibn Sahl et d'Ibn al-Haytham. En effet, même si ces derniers avaient lu le texte d'Anthémius, leur recherche était trop avancée pour qu'ils puissent en tirer un vrai profit.

- Il n'y a aucun lien direct entre le fragment de Bobbio et celui d'Anthémius. Il n'y a non plus aucune trace du fragment de Bobbio en arabe, autant que nous le sachions.

- Il est possible que le texte de Dtrūms ait été connu d'Ibn Sahl, mais dans ce cas, il n'aurait eu guère d'effet sur sa recherche – rapport en tous points comparable à celui qui lie la compilation de Dioclès, et celle d'un auteur tardif, Ibn Ṣāliḥ[38]. Il reste que la recherche en arabe sur les miroirs ardents s'est rapidement développée en extension et en compréhension, pour aboutir à une transformation de l'ensemble du domaine, avec Ibn Sahl d'abord, et Ibn al-Haytham ensuite.

- Enfin, cette étude de l'histoire du miroir parabolique confirme celle du miroir sphérique concave chez Dioclès, Dtrūms, l'auteur du fragment de Bobbio, al-Kindī et Ibn al-Haytham, que nous avons présentée ailleurs[39].

Je viens de retracer l'histoire des miroirs ardents pendant un millénaire et demi : l'histoire des textes aussi bien que celle des concepts. Mais cette histoire ne s'arrête pas là. La recherche en ce domaine est restée bien vivante encore, pour un demi-millénaire au moins. A la suite d'Ibn al-Haytham, les mathématiciens de la Renaissance s'en font l'écho : Maurolico,

[38] Voir notre article à paraître « Les miroirs ardents d'Ibn Ṣāliḥ ».

[39] Rashed, *L'Optique et la Catoptrique d'al-Kindī*, pp. 117-124.

discutent en vue de la recherche anaclastique. Le Père Taquet, plus tard, s'en occupe lors de l'étude des section coniques. Newton, enfin, en personne, puis Buffon, lui portent un intérêt renouvelé : on souligne bien plus qu'auparavant le phénomène physique et l'effet cinétique de la focalisation. Newton a reproduit au cours de plusieurs réunions de la Royal Society une expérience, à l'aide d'un miroir ardent composé de sept miroirs concaves articulés, dont le diamètre est d'un pied. Tout se passe comme si le souvenir de l'architecte de Sainte-Sophie — Anthémius — ne voulait pas s'effacer. Si ce n'est qu'au lieu d'un système catoptrique de sept miroirs plans, on passe aux miroirs concaves.

Voici donc un thème de recherche qui a traversé pas moins de deux millénaires, productif en géométrie, en optique et en technique. Ce thème a également fourni aux mathématiciens un domaine d'exercice, où ils se sont familiarisés avec les valeurs expérimentales, comme il a offert aux historiens quelques instruments de réflexion sur les problèmes soulevés par les mathématiques appliquées.