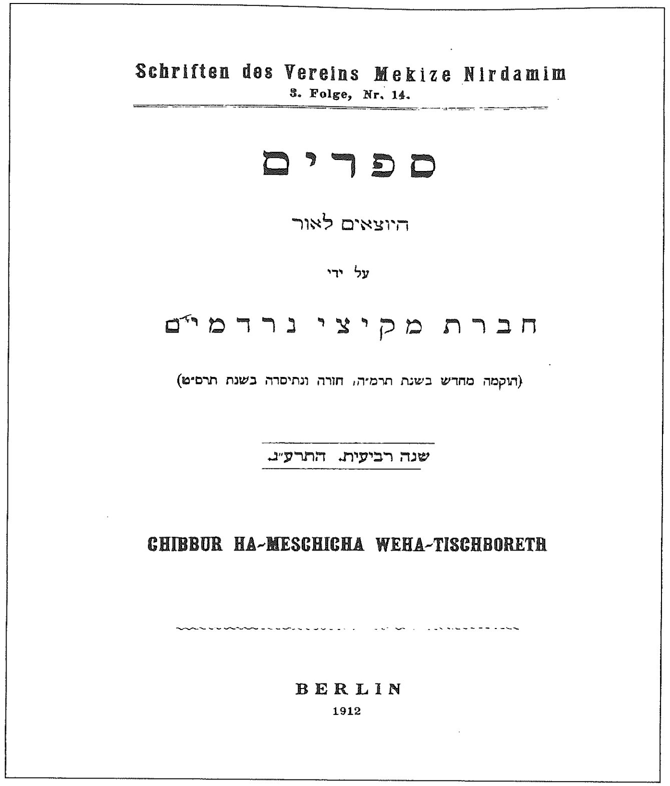


Schriften des Vereins Mekize Nirdamim
3. Folge, Nr. 14.

ספרים

היוצאים לאור

על ידי

חברת מקיצי נרדמים

(הוקמה מחדש בשנת תרמ״ה, חזרה ונתיסדה בשנת תרס״ט)

שנה רביעית. התרע״ג.

CHIBBUR HA-MESCHICHA WEHA-TISCHBORETH

BERLIN
1912

FIGURE 1 *Treatise on Measurement and Calculation*

Elementary School Teachers meet Abraham bar Hiyya Ha-Nassi

WINICKI-LANDMAN Greisy[1] (Israël)

Abstract

Abraham bar Hiyya was a Spanish Jewish mathematician from the XII Century. Between the books he wrote, the following may be mentioned: (a) Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tishboret (Treatise on Measurement and Calculation), translated into Latin as Liber Embadorum and, (b) Yesod ha-Tebunah u-Migdal ha-Emunah (The Foundation of Understanding and the Tower of Faith) which is the first encyclopedia in Hebrew.

Since there are very few sources written in Hebrew, we decided to use some passages from these two books during a History of Mathematics course. This is a course designed for Israeli pre-service elementary school teachers as well as a part of a professional development program for in-service teachers. Many teaching techniques are implemented during this course but only lately we adopted an approach learnt from our French colleagues: to study ancient primary sources. One of the main difficulties faced was to find appropriate sources: contents appropriate for the learners and sources written in a language known by those learners.

The workshop proposed here will present the activities designed for this course and the learners' reactions and comments.

[1] Oranim - School of Education of the Kibbutz Movement Kyriat Tivon 36006
greisyw@techunix.technion.ac.il

Abraham bar Hiyya was a Spanish Jewish mathematician from the XII Century. Among the books he wrote, the following may be mentioned: (a) *Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tishboret* (Treatise on Measurement and Calculation), translated into Latin as Liber Embadorum and, (b) *Yesod ha-Tebunah u-Migdal ha-Emunah* (The Foundations of Understanding and the Tower of Faith) which is the first encyclopedia in Hebrew. He also wrote books on Astronomy - *Zurath ha-Haretz ve-Tavnith ha-Shamaim* and *Heshbon Mahalkhoth ha-Kokhavim* - and calendar calculations - *Sefer ha-Hibbur*. He can be considered the father of Hebrew mathematics.

Since there are very few mathematical sources written in Hebrew, we decided to use some passages from his books during a history of mathematics course. This is a course designed for Israeli pre-service elementary school teachers as well as a part of a professional development program for in-service teachers. Many teaching techniques are implemented during this course but lately we adopted an approach learnt from our French colleagues: to study ancient primary sources. One of the main difficulties was to find appropriate sources: appropriate contents for the students and sources written in a language known by them.

This paper presents the activity designed within the framework of this course as well as some of the students' reactions and comments.

1 The activity

Four passages from Bar Hiyya were chosen, following two didactic considerations: a) diversity of content (geometry problems and arithmetic problems) b) diversity of role in the mathematical discourse (i.e. problems, demonstrations, algorithms). Two passages were taken from the book *Treatise on Measurement and Calculation*, one of them dealing with the calculation of the area of a triangle, and the other one explaining why we calculate the area of a circle the way we do. The other two passages were taken from the book *The Foundations of Understanding and the Tower of Faith*. One is part of the introduction and the other one deals mainly with arithmetic calculations.

The main aims of the activity were:

a) To have the learners read mathematical texts;

b) To have the learners learn from original mathematical texts;

c) To have Hebrew speakers as well as Arabic speakers read mathematics written in the Middle Ages and to have them compare the terminology used then with the terminology used nowadays;

d) To have the learners analyze the teaching methods employed by the writer, to discuss them and to compare these methods to the "modern" ones.

The materials used for the activity may constitute a proof of an existence statement: there *are* Hebrew scientific manuscripts and they are of considerable importance because they "testify to the part played by the Jews in the vast enterprise of transferring Greek science, by way of the Islamic world, to the European nations" (SARFATTI, 1968). In that sense, another aim of this activity was

e) To expose the learners to a not very known aspect of Jewish history: its contribution to the development of mathematical knowledge during the Middle Ages.

At the beginning of the activity and without any introduction, the students were organized in small groups and each group was presented with a different Hebrew passage. Each group had: a) to read the text and to make sense of it, b) to summarize it and to present it to the others, and finally, c) to try to figure it out when that text was written.

The presentation of each small group was followed by a general discussion of the passage. Part of the didactic analysis of the passages was conducted according to Swetz's ideas. He wrote: "An examination and analysis of didactic trends in historical material can take place along several lines:

1. The organization of material, the sequential ordering of topics and specific problems;

2. The use of an instructional discourse and techniques of motivation contained within the discourse;

3. A use of visual aids; diagrams, illustrations, and colors, to assist in the grasping of concepts on the part of the learner;

4. The employ of tactile aids, either directly or by reference, to clarify a mathematical concept." (SWETZ, 1996)

TEXT I (from *Treatise on Measurement and Calculation* cfr. Figure 1)
Bar Hiyya classified triangles according to their sides. In this passage he treats the triangle with "changing" sides (what we call a scalene triangle, that is, with three inequal sides).

חיבור המשיחה והתשבורת

ג.

משלש מתחלף הצלעות.

והמשלש הזה יכול להיות נצב הזוויות או מרוויח הזוויות או מחדד כל הזוויות. ואני מבאר בראשונה דרך המחדד בכל הזוויות. והדמיון למשלש הזה משלש **אבג** אשר לצלע **אב** ממנו י״ג אמות וצלע **בג** יש בו י״ד אמות וצלע **אג** הוא ט״ו אמות ואנו רוצים לדעת שיעור תישבורת המשלש הזה ואין אנו יכולים לדעת תשבורתו אלא מן עמודיו, אנו צריכים בהוצאת העמוד במשלש הזה לדעת גבול מעמד העמוד מן התושבת כי העמוד במשלש הזה אינו נופל על מחצית התושבת כאשר היה מנהגו במשלש השוה בצלעותיו וגם במשולש השוה בשוקיו בעת שהוצאנו את העמוד בין השוקיים אל הצלע המתחלפת אבל במשולש הזה הוא נוטה בכל צלעיו ממחצית התושבת אל צד אחד. והצד הארוך מגבול מעמדו אנו קוראים לו מעמד הארוך. ומפני זה אנו צריכים תחלה להוציא נקודת גבול מעמד העמוד על התושבת ולדעת צד מעמד הארוך ומרחקו וצד המעמד הקצר ומרחקו ואחר כך נבא לדעת אורך העמוד. והדרך הזה הוא על הענין הזה: אם נרצה במשלש **אבג** אשר מסרנו לך להוציא עמוד בין צלעי **אב** **אג** על התושבת **בג** אשר ארכה י״ד אמה אנו צריכים תחלה להגביל את מעמד העמוד ואם נבא להוציא המעמד הארוך נקח מרובע הצלע הארוך משני הצלעות המקיפות את זוית הראש במשלש אשר נוציא ביניהם את העמוד והוא צלע **אג** אשר אורכו ט״ו אמה ונחבר אל המרובע הזה מרובע התושבת ויהיו שני המרובעים האלה תכ״א אמות, נוציא מהם מרובע צלע **אב** הנשאר והוא הצלע הקצר ומרובעו קס״ט וישאר בידך רנ״ב. נחלק את הנותר לשנים ויהיה מחציתו קכ״ו, וחלק המחצית הזאת על התושבת אשר הוא י״ד ויהיה חלוקה ט׳ והוא מרחק גבול מעמד העמוד מן הצלע הארוך.

ואם נרצה לדעת המעמד הקצר נקח מרובע הצלע הקצר אשר בו י״ג עם מרובע התושבת אשר הוא י״ד ויהיו שני המרבעים שס״ה, נוציא מהם מרבע הצלע האחר יהיה רכ״ה וישאר ק״מ נחלק אותו לשנים ויהיה מחציתו ע׳ ויחלק המחצית הזאת על התושבת ויהיה חלוקה ה׳ והוא מרחק גבול העמוד מן הצלע הקצר.

ועל הדרך הזה היינו עושים על כל צלע וצלע אלו היינו באים להוציא עליו עמוד ואחר נדע גבול מעמד העמוד נבא לדעת אורך העמוד ודרך ידיעתו היא כך: נרבע הצלע ונציא ממרובעו מרבע המעמד הנדבק דו ונקח גדר הנשאר והוא אורך העמוד. כאילו היינו מרבעים את הצלע הקצר במשלש הזה והוא צלע **אב** אשר הוא י״ג ומרובעו קס״ט ונוציא ממנו מרובע המעמד הנדבק בו והוא הקצר אשר הוא ה׳ ומרובעו כ״ה וישאר קמ״ד וגדר המספר הזה הוא אורך העמוד והוא י״ב. וכן אם היינו מרבעים את הצלע הארוך והוא ט״ו היה מרובעו רכ״ה. כיון שהיינו משליכים ממנו מרובע המעמד הארוך והוא ט׳ ומרובעו פ״א ונשאר קמ״ד כאשר נשאר מן הצלע הקצר. וגדר המספר הזה הוא י״ב והוא אורך העמוד. ורבוע העמוד הזה בחצי התושבת, אשר היא י״ד ומחציתה ז׳ הוא פ״ד והוא תושבת המשלש הזה.

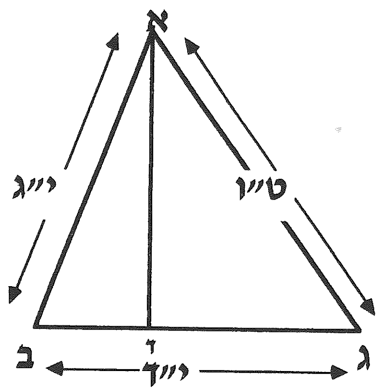
ואם תבוא לדעת האות על הוצאת העמוד הזה בא ועיין בצורת המשלש הזה אשר אצייר לך עתה. ודע כי מרובע צלע **אב** אשר היא מיתר זווית חדה כאשר הוא במשלש הזה פוחת ממרובע הצלע **אג** וצלע **בג** אשר היא התושבת בכדי רביע **גד** אשר הוא המרחק האחר בכל **בג** אשר היא התושבת פעמיים כאשר מפורש בחכמת השיעור. ואות לזה ידענו כי העמוד לעולם יפול על התושבת על זווית נצבה בכל משלש מחדד הזויות כגון עמוד אד בצורה אשר עשינו, וצלע **אג** הוא אלכסון וצלע **אד** הוא העמוד וצלע **גד** והוא מעמד הארוך מהתושבת. וידענו כי מרובע צלע **אג** שווה למרובע **אד** ומרובע **גד** כל אחת בפני עצמה, כענין כל אלכסון........

∗ *The learners identified the problem discussed by Bar Hiyya*:

ABC is a triangle and AB = 13 cubits, BC = 14 cubits, AC = 15 cubits.
Calculate the area of the triangle.
It is important to note here that Bar Hiyya does not use Latin letters for the triangle's vertices, but Hebrew letters: Aleph (instead of A), Beth (instead of B) and so on. He does not use Hindu-Arabic numerals either, but Hebrew letter-numerals. So, instead of "13 cubits" he writes "yod - guimmel amot". The following table presents the numerical value of the Hebrew letters.

1	aleph	א
2	bet	ב
3	gimmel	ג
4	dalet	ד
5	hey	ה
6	vav	ו
7	zayin	ז
8	chet	ח
9	tet	ט
10	yud	י
20	caf	כ
30	lamed	ל
40	mem	מ
50	nun	נ
60	samech	ס
70	ayin	ע
80	peh	פ
90	tzadi	צ
100	kuf	ק
200	resh	ר
300	shin	ש
400	tav	ת

∗ *Without trying to solve the problem themselves, the learners went on reading and tried to follow Bar Hiyya's rhetorical solution*:
Bar Hiyya suggests drawing the altitude AD and establishes that the length of CD is:



$$CD = \frac{15^2 - 13^2 + 14^2}{\frac{2}{14}}.$$

Then, he claims that :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 - DC^2 \Rightarrow \\ AD &= \sqrt{(AC - DC)(AC + DC)} \Rightarrow \\ AD &= \sqrt{6 \times 24} = 12. \end{aligned}$$

From here, Bar Hiyya concludes that the area of the triangle is 84 squared cubits:

$$S(\Delta ABC) = \frac{14 \times 12}{2} = 84.$$

∗ *The learners tried to verify if Bar Hiyya's solution is correct by comparing its numerical result with the result they got by using the Pythagorean Proposition twice.*
Working with h - the length of AD - as unknown, and with x - the length of BD - they wrote:

ΔABD is a right triangle. So, $AD^2 = AB^2 - BD^2 \Rightarrow h^2 = 13^2 - (14 - x)^2$

ΔACD is a right triangle too. So, $AD^2 = AC^2 - CD^2 \Rightarrow h^2 = 15^2 - x^2$.

From here they wrote the equation:

$$\begin{aligned} &13^2 - (14 - x)^2 = 15^2 - x^2 \Rightarrow \\ &13^2 - 14^2 + 2 \cdot 14 \cdot x - x^2 = 15^2 - x^2 \Rightarrow \\ &2 \cdot 14 \cdot x = 15^2 - 13^2 + 14^2 \Rightarrow \\ &x = \frac{15^2 - 13^2 + 14^2}{2 \cdot 14} = \frac{(15 - 13)(15 + 13) + 14^2}{2 \cdot 14} = \frac{2 \cdot 2 + 14}{2} = 9. \end{aligned}$$

And from here, they concluded that

$$AD^2 = 15^2 - 9^2 \Rightarrow AD^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow AD = 12.$$

Finally, they could calculate $S(\Delta ABC)$ and got that $S(\Delta ABC) = \frac{14 \times 12}{2} = 84$, the same result and the same calculation Bar Hiyya asked them to do!!!.
∗ *The learners were eager to know details about the text and the author.*
They found it hard to believe that this text was written in the XII Century by a Spanish Rabbi who lived in Barcelona. They were encouraged to look up details about him and his time with the help of the Internet.
∗ *The learners were engaged in a deeper analysis of the text from a pedagogical point of view.*
The discussion focused mainly on Bar Hiyya's technical language and the comments he added in order to make the text an exemplary learning text book. For example, the term *altitude* was not used by Bar Hiyya. He used the term *column* or *pillar*. Some of the learners pointed out that it is a more convenient term for the concept. Others were strongly against the idea because they believed that student would wrongly believe that a "mathematical column" is always vertical.

Another term used by Bar Hiyya was *gader*. The Hebrew speakers did not understand the meaning of this word in this mathematical context, since the term's popular meaning is *fence* or *limit*. The Arabic speakers thought about the term *jidhr* which is used as *square root*. A discussion about the use of this term may be found also in (EFROS 1969, p. 128).
Re-reading the text with this meaning in mind, they conjectured that Bar Hiyya borrowed the term from Arabic sources. This point led us to discuss interactions between the Jews and the Arabs during the Muslim Period in Spain.

Bar Hiyya's language is elegant and very clear. Moreover, his explanations and considerations enable the reader to generalize the method to calculate the area of a triangle determined by the length of its sides. So, in this case, his teaching method relies on the use of a clear example that enables its generalization in a very transparent way. We thought it was not by chance that Bar Hiyya chooses such a triangle (13, 14, 15 - an Heronian triangle) to present his ideas. All the calculations are easy and the numbers "nice". One of the students asked if Bar Hiyya knew about Heron's formula to compute the area of a triangle defined by its three sides. In this passage, Bar Hiyya asks to compute one height and the two parts of the base, so he does not use the Heronian formula here. But some pages later, when Bar Hiyya summarizes the chapter on triangular figures, he describes rhetorically a general method to calculate the area of a triangle without having to calculate any height. The method described is Heron's. He also exemplifies its use by means of an "nice" case, the 6-8-10 triangle. All through the chapter, Bar Hiyya does not explain how his results are obtained and he declares he is aware of that.

חיבור המשיחה והתשבורת

...

וכבר הודעתיך דרך מדות המשלשות בכל חלקיהם וכל מיניהם והודעתיך המדה אשר משלש נצב הזוית מתיחד בה וגם מדת מרויח הזוויות וכן הוי יודע כי למחדד הזויות מדה שהוא מתיחד בה, והוא, כי מיתר כל זוית חדה מרובעו הוא פוחת ממרובעי שתי הצלעות המקיפות לה בכדי רבוע הקו אשר הוא תושבת לעמוד בקו מרחקי גבול העמוד מנקודת הזוית החדה פעמים.
ואני הוריתך רך העינין הזה בהוצאת העמוד במשלש מתחלף הצלעות המחדד ובחשבון הזה אתה יכול לחשוב כל משלש, כי אין לך משלש שאין לו זוית חדה. ואם אתה סומך על החשבון ההוא בעמודי המשלשות ותשברתם והיה מספיק לך ואין אתה צריך ענין אחר.

ואעפ״י שהדבר כן וכל הדרכים האלה אשר הוריתיך הם נכונים ונכוחים למבין ומוציאים אלחשבון אמתי, אתה מוצא דרך לחשבון המשלשות ומדידתן שאינו מצריך אל העמוד והוא החשבון אשר קראו לו חשבון המותרות.
והדרך הזה הוא שתהיה יודע מחצית כל אחת מצלעי המשלש ותקבוץ את המציות האלה, ותדע מותר כללם על כל צלע וצלע ותשמור המותרות האלה ותמנה אחת מהם בשני והמספר הנקבץ מנה אותו במותר השלישי, ואשר יכנס בידך מן החשבון הזה מנה אותו בכל כלל המחצית אשר קבצת ויהיה המספר הזה מרובע תשבורת המשלש, ואם תוציא גדר המספר הזה מתצא התשבורת.

והדמיון לחשבון הזה משלש אשר צלעו האחת י׳ והשניה ח׳ והשלישית ו׳ , אם אתה מקבץ לשלש חצי הצלעות האלה יהיו י״ב, ומותר י״ב על הצלע האחת ב׳ ועל השנית ד׳ ועל השלישית ו׳. ואתה בא ומנה ב׳ אשר הם מותרהאחת בד׳ אשר הם מותר הצללע השנית והיה ח׳ , ומנה ח׳ בו׳ אשר הם הצלע השלישית ויהיה מ״ח, ושוב ומנה מ״ח בי״ב אשר הוא כלל המחציות ויהיה הכל תקע״ו. ודע כי המספר הזה הוא מרובע התשבורת, ואם אתה מוציא את גדרו והוא כ״ד מתצא תשבורת המשלש. והחשבון הזה בנוי על יסודי חכמת השיעור והאות עליו מפורשת שם ואין אנו יכולין לאומרה בכאן ואין אנו צריכין אליה במקום הזה כ״כ מפני שראית שאמת הוא החשבון הזה מן המנין אשר אמרתי לך.

From the above we concluded, that one of the messages from Bar Hiyya to these future teachers may be: teach mathematics by means of clear examples, examples that explain and examples that naturally engage the learner in a process of generalization and justification.

TEXT II (from *Treatise on Measurement and Calculation*)

In this chapter Bar Hiyya describes how to compute the area of a circular field and the area of circular segments.

חיבור המשיחה והתשבורת

החלק הרביעי.

בפירוש מדידת קרקעות בצורת העגול התמים או על צורת העגול הפגום אשר הוא מחצית עיגול או מרבה על המחצית או פוחת מן המחצית.

א.

ואתה יודע את תשבורת העגול התמים אם אתה יודע את אלכסונו והוא הנקרא קוטר בלשון ערבי, ותכפול אותו שלושה פעמים ושביעית פעם ויהיה אורך הקו הסובב, ואחר כך הוי מרבע את מחצית הקוטר במחצית הקו הסובב ותמצא תשבורת העגול.
ואות לאורך הקו הסובב ג׳ פעמים ושביעית פעם במידת הקוטר כגון **אבגדהו**, והקוטר שלה הוא **אזר** ומחציתו על הנקודה **ז** והוא מרכז העגולה. וידענו כי קו **או** הישר שוה לקו **אז** ולקו **אב** כי שלושתם יצאו מציר העגולה **בזו** והוא **א**, וכן עגולת **בזד** מצד האחד מראה כי קו **גד** וקו **גב** שוים אליהם וכן קו **דה** וקו **הו** הישרים כי כמדת זה כן מידת זה. נמצא כמדת אז חצי הקוטר נמנו ששה ישרים בתוך העגול מושים והמוקף בששה מקומות והם ג׳ במידת הקוטר כלו. וידענו כי עגולת **אב** שהיא קשת גדולה מקו הישר **אב** שהוא מיתר לקשת כי כל קשת מוסיף על מיתרו. ושערו המדקדקים וקבצו אלה המותרות מכל קשת וקשת מאלו הששה ועלו למדת שביעית הקוטר.

The students identified the purpose of the chapter and the main concepts: circle, area of the circle, circumference (surrounding line) and diameter. Bar Hiyya explains that instead of diagonal

of a circle he uses *koter* (diameter), a term he borrowed from the Arabic. He presents the well known rule:

$$\text{Circumference of a circle} = \text{its diameter} \times (3 + 1/7).$$

Then he presents his rule to calculate the area of a circle:

$$\text{Area of the circle} = (\text{half its circumference}) \times (\text{half its diameter}).$$

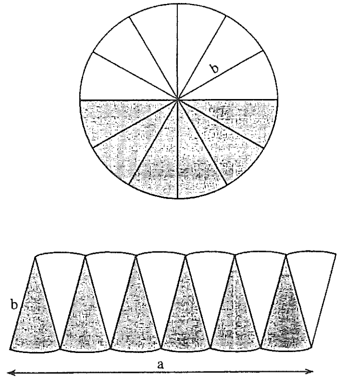
Following his statement, he comments on how you can deduce the second rule from the first one.

חיבור המשיחה והתשבורת

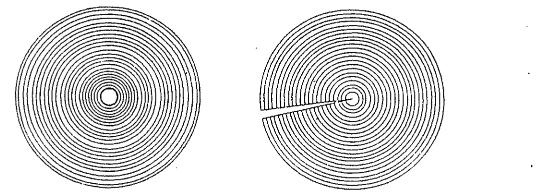
ואחר שידענו הקו הסובב והקוטר אנו יודעים תשבורת כל העגולה שהיא מחצית הקוטר במחצית הקו הסובב. והאות על התשבורת הזה ידענו אם תפתח שטח העול מצד אחד ותישר כל הקוים הסובבים מקו החיצוני עד המרכז יתפשטו המקיפים שטח העגול ויחזרו לקוים ישרים מתמעטים והולכים עד שחוזרים אל נקודה אחת והיא נקודת המרכז כגון הקו **אבגד דהוז חטי** שציירתי וכן החיצון גדול מכולם, ואשר לפנים ממנו קטן ממנו וגדול מאשר לפנים ממנו וכן הולכים עד הנקודה ובזה נולדה לנו צורת המשלש. ותשבורת המשלש כבר בארנו, הוא כדי העמוד בחצי התושבת וזהו מחצית הקוטר במחצית הקו המקיף והוא בצורה אשר עשינו עמוד **אב** במחצית קו **ג**.

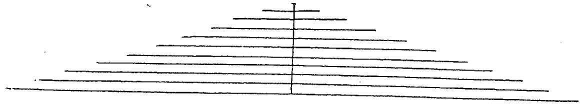
והדמיון לענין הזה עגולה שיש בקוטר שלה י״ד ואתה תכפול אותה שלושה פעמים ושביעית ויהיה מ״ד, והיא מדת הקו הסובב. ואם אתה כופל חצי הקוטר והוא ז׳ במחצית הקו הסובב והוא כ״ב יהיה המנין הנקבץ קנ״ד והוא תשבורת העגול.

The students read it and draw the following diagram:



This diagram appears in the school textbook as a part of the activities about the area of the circle. But... this is not what Bar Hiyya was telling them to do!!! Bar Hiyya demonstration may be illustrated as follows:

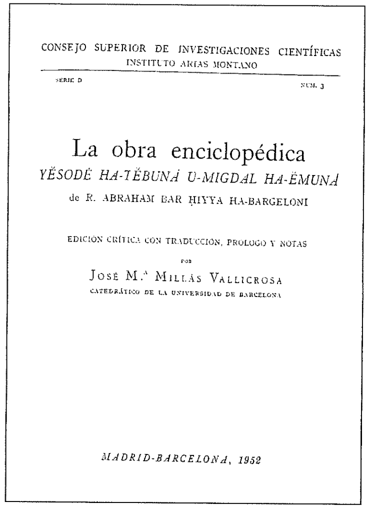




$$S(\Delta) = \frac{b}{2} \times h = \frac{2\pi r}{2} \times r = \pi r^2$$

This presentation was followed by a very enlightening discussion about the idea and purpose of proof in mathematics and in mathematics teaching.

TEXT III (from *The Foundations of Understanding and the Tower of Faith*)


CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS
INSTITUTO ARIAS MONTANO

SERIE D NUM. 3

La obra enciclopédica

YĔSODÉ HA-TĔBUNÁ U-MIGDÁL HA-ĔMUNÁ

de R. ABRAHAM BAR ḤIYYA HA-BARGELONI

EDICIÓN CRÍTICA CON TRADUCCIÓN, PROLOGO Y NOTAS

POR

JOSÉ M.ª MILLÁS VALLICROSA

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE BARCELONA

MADRID-BARCELONA, 1952

According to SARFATTI (1969), the main goal of this book was to clarify the main terms used in the different sciences, to present their definitions and also to present general rules (p. 90). It is a sort of dictionary for scientific terms organized by topic rather than alphabetic order. The book is divided in two parts: a) *The foundations of understanding*, b) *The tower of faith*. The first part is divided in four foundations (mathematics, physics, politics and metaphysics). The mathematics foundation is composed of three pillars which are: arithmetic, geometry, music. The arithmetic pillar is divided in two parts: the theory of the number (pure arithmetic) and the theory of computations (logistics). The texts presented to the students belong to the theory of the number.

ספר יסודי התבונה ומגדל האמונה

החלק הראשון בחכמת המספר

הוי יודע כי המספר הזה או המנין הזה הוא הרבויי הנקבץ מהאחדים. ומשמע האחדות בכאן הוא ענין הנמצא באחד אשר בו הוא הנקרא אחד והאחדות היא משכללת את צורת האחד ומקיימת תבניתו ומפני שאנו מעיינים במספר הנוצר בלב הביאנו בגדרו האחדות שהיא נוצרת בלב ולא הביאנו שהוא נמצא חוצה מהלב.

ומתוך שגדר המספר הוא הריבוי הנקבץ מהאחדים או מן האחד, אתה רואה כי זה האחד והאחדות אינה מספר אבל אתה אומר כי האחד מן המספר והוא עקר המספר ואינו מספר וכן הוא סופר את המספרים ואינו מספר. וכדומה לו תיבות אלף אשר הן עקר לשון הקודש ובהן נבנה כל לשון ויובן כל דבר אמור בלשון והן מן הלשון ואינם הלשון כי אינם משמיעים ענין מעניני העולם אשר הלשון מחוה ומלמד אותם וכל ענין אינו נשמע אלא בהם והם מן הלשון ואינו לשון כן האחד מן המספר ואינו מספר.

והאות המעידה על המספר ומפרשת אותו ונותנת בו סימן אשר הוא משכלל אותו כי כל מספר הוא מחצית שני צדיו, הצד העודף עליו והצד החסר, וכן הוא מחצית שני צדי צדיו עד תכלית כל צדיו. ואתה מבין האות הזה מן העשרה על דרך המשל, הצד אשר לפניה העודף הוא י״א והצדאשר מאחריה החסר ממנה הוא ט׳ ואתה מוצא העשרה מחצית שני הצדדים האלה בהתקבצם יחד וכן הוא מחצית שני צדי צדדיה שהם י״ב וח׳ ומחצית שני צדי צדי צדדיה שהם י״ג וז׳ וכן עד תכלית כל צדדיה ובענין הזה תמצא כל המספר מחצית ב׳ צדיו עד סופן. והאחד מפני שאינו מספר אין אתה מוצא לו ב׳ צדדים ומפני שהוא פשוט בלי מתחלק אתה מוצא אותה מחצית צדו האחד והוא השנים אשר האחד מחציתו והוא מחצית לדבר אחד מענין אחד ולא מחצה לשני דברים ולא על שני ענינים.

חלקי המספר

והמספר נחלק לב׳ חלקים ראשונים והם הזוג והנפרד, הזוג הוא המספר הנחלק ב[ש]תים, והנפרד הוא המספר שאינו יכול ליחלק ב[ש]תים, ומסימני הזוג שכל חלקיו שהוא נחלק אליהם הם שנים בדמותם, אם החלק האחד יהיה זוג השני יהיה זוג, ואם האחד יהיה נפרד גם השני יהיה נפרד. אבל הנפרד הוא שכל חלקיו לעולם אינם שווים לא במנינם ולא בדמותם אבל האחד לעולם זוג והשני נפרד, ואתה יכול לחלק את הזוג בנתים לשני חלקים שוים במספרם ואי אתה יכול לחלק את הנפרד לשני חלקים שוים במספרם, אבל אם אתה מדקדק בחלוקם ומקריב אותם מן השוה אתה חלק אחד מוסיף על השני אחד או גורע ממנו אחד כגון ט׳ כשאתה מחלק אותה לה׳ חלקים ולד׳.

...

חלקי המספר בדרך אחרת

והמספר נחלק מדרך אחרת לג׳ חלקים: למלא, ועודף וחסר, והמספר המלא הוא אשר חלקיו המונין אותו ממלאים אותו ואין עודפים עליו ולא פוחתים ממנו כגון מספר ו׳ אשר חלקיו שתות ושליש וחצי ואי אתה מוצא לו חלק אחר וכשאתה מקבץ שתיתו ושלישו וחציו מתצא בהן ששה לא פחות ולא יותר ודומה לו המספר כ״ח.
והמספר העודף הוא אשר חלקיו עודפים על מספרו כמו י״ב אשר אתה מוצא בהם כמו אחד מי״ב וגם שתות ושליש ורביע וחצי וכשאתה כולל כל החלקים האלה יהיה המספר י״ו ויהיה יותר על המספר אשר הם חלקיו והוא י״ב.
המספר החסר הוא אשר אין חלקיו ממלאים את מספרו כמספר י״ד אשר תמצא לו חלק אחד מי״ד וגם יש לו שביע ויש לו חצי ואי אתה מוצא יותר מאלו ג׳ חלקים וכשאתה מצרפם יחד יגיע מספרם עד עשרה ולא יותר והוא חסר מי״ד אשר הם חלקיה.
והמשילו החכמים המספר המלא לאדם ישר ותמים והמספר העודף המשילו לאדם שיש לו אברים עודפים כגון מי שיש לו שש אצבעות בידיו וברגליו. והמספר החסר המשילו לאדם שהוא פחות אחד מאיבריו או שיש לו ד׳ אצבעות בידיו או ברגליו.

This passage deals with the Pythagorean ideas of number: number is always connected with counted things and number is the substance of all things. A number is, according to Bar Hiyya - who must be considered a Neo-Pythagorean like Nicomachus - a multitude composed of units. It follows that **1** cannot be considered a number. Reading this passage presented an excellent opportunity to look for Bar-Hiyya's descriptions of known terms like *odd numbers, even numbers, prime numbers, composite numbers, perfect number*, etc.

TEXT IV (from *The Foundations of Understanding and the Tower of Faith*)

ספר יסודי התבונה ומגדל האמונה

החלק השני בחכמת החשבון

וכל אשר הקדמנו למעלה מצורת המנין וגדריו הוא מן החכמה השכלית ומעניינת במנין מהדרך שהוא עומד בלב. וחכמת החשבון אשר אנו באים אתה לדבר עליה בחלק הזה מעיינת במנין בדרך שהוא נופל על כל עניני העולם הזה ועל כל עסקיו כי אין לך דבר בעולם הזה שאין המנין משמש ומונה אותו וחופף עליו מכל צדדיו. וכל המנין נכלל בשנים עשר שמות, תשעה מהם חוזרין חלילה עליו ושלשה מהם בונים את מעלותיו. והתשעה שמות הם האחדים והם המעלה הראשונה מהם עד תשעה והגי שמות הן לגי מעלות המנין אחר האחדים והם העשרות והמאות והאלפים. ואלו הארבע הם עקר מעלות המנין אשר הם חוזרים עליו ומקיפין אותו כי כל מעלה אשר עולה על האלפים שמה חצוב משלושת המעלות אשר לפניה אלפי אלפים ועשרות אלפי אלפים ומאות אלפי אלפים ואלפי אלפי אלפים וכן למעלה מזה.

...

וחכמי המנין מתעפקים בחשבון על ענינים רבים, ראשונה הם צריכים לחשוב מנין במנין, ושנית לחלק מנין אל מנין ושלישית לדעת קצב מנין ממנין, ורביעית לפחות מנין מן מנין, וחמישית לספות מנין אל מנין, ושישית להשלים מנין במנין ושביעית להשיב מנין אל מנין, ובזה הענין הם צריכים לחלק את האחד ולעיין בחלקיו איך הם נחשבים זה בזה ונשלמים זה מזה, ואנו נותנים כללות לכל אחד מענינים האלה בדרך החבור הזה. והמבין צורת הענינים האלה נקרא מבין בחכמת החשבון, והממהר בחשבון ומקבץ אותו נקרא זריז במלאכת החשבון ואינו נקרא על זה חכם בה ומבין וזה דרך הבינה יכול אדם ללומדה וללמדה בספר והמלאכה והזריזות אינה נלמדת מספר כי בינה ממעשה הלב והמלאכה ממעשה ידים.

....

דרך חלוק החלקים

אתה מקים ראשונה מספר שיהיה מוכיח ואליו תקיש כל חשבונך כגון האומר לך חלק גי שמיניות על בי חמישיות, אתה חושב ראשונה שמות החלקים והם חי על הי והנה המוכיח מי וקח גי שמיניות מי והם טייו ובי חמישיותיו והם ייו ונחלק טייו על ייו הוא חלק גי שמיניות על בי חימישיות והוא אחד חסר חצי שמינית.

This passage deals with the ratio of fractions and it is presented by Bar Hiyya after the passage that deals with division of numbers (natural numbers) and the passage that deals with the calculation of a certain part of a number. Bar Hiyya uses the term *moneh* (counts) for "divides". For example he may say: 3 counts 12 (similar to the Greek "3 measures 12"), and : 5 does not count 12. He uses the term "division" when the dividend is bigger that the divisor and the term "ratio" when the dividend is smaller than the divisor.

Before the students read Bar Hiyya's passage, they were asked to describe how would they explain a young child how to divide fractions. All of them followed the same procedure: "Tell them that to divide by a/b is to multiply by b/a". This is not a surprising fact since this is the usual procedure described in school textbooks.

Then, they were allowed to read Bar Hiyya's passage. He says:

> To find the ratio between 3/8 by 2/5, you may have a "helping" number, like 40. 3 eighths of 40 is 15 and 2 fifths of 40 is 16. So, the ratio between 3/8 and 2/5 is the ratio between 15 and 16.

The students found again, that Bar Hiyya's explanations are transparent and his example explains not only *how* but mainly *why* you divide fractions the way you do. From this text we learn again that to teach is not only to tell a story but to know when to shut down.

Summary

This paper described an experience in which teachers were involved in a worthwhile mathematical task in which the context was provided by the analysis of primary sources in Hebrew. We would like to encourage more teachers to think in this direction and to invite them to share primary sources which they have found with other teachers.

References

BAR HIYYA HA-BARGELONI, R. ABRAHAM: La obra enciclopedica *Yesod ha-Tebunah u-Migdal ha-Emunah* Edicion Critica con Traduccion Prologo y Notas por Jose Maria Millas Vallicrosa (1952) Consejo Superior de Investigaciones Cientificas Instituto Arias Montano Serie D Num 3. Madrid.

BAR HIYYA, R. ABRAHAM: *Hibbur ha-Meshihah ve-ha-Tishboret* edited by Schriften des Vereins Mekize Nirdamim (1912) 3 Folge, Num. 14 Berlin.

EFROS, I. (1969) *Mediaeval Jewish Philosophy -Terms and Concepts* Dvir Publishing Co.: Tel Aviv (in Hebrew).

GANDZ, S. (1970) *Studies in Hebrew Astronomy and Mathematics* Ktav Publishing House, Inc N.Y.

SARFATTI, GAD B. (1968) *Mathematical Terminology in Hebrew Scientific Literature of the Middle Ages* Jerusalem: Magnes Press (in Hebrew).

SWETZ, F. (1996) *Mathematical Pedagogy: An Historical Perspective* Proceedings from the ICME-8 satellite meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics, Universidad de Minho vol. 2 pp. 121-127.