Aspects linguistiques de l'Épistémologie et de l'Éducation des Mathématiques

WINSLØW Carl
Département de Mathématiques, Université danoise d'Éducation,
Copenhague (Danemark)

Abstract

La linguistique structurale depuis la 'révolution Chomskienne' est saturée de conséquences importantes pour les questions classiques de la nature du savoir mathématique et de son acquisition, surtout si l'on adopte de manière conséquente la position de regarder les mathématiques comme un domaine de communication, ou plus précisément, comme une famille de registres linguistiques. En fait, l'importance des phénomènes discursifs dans l'éducation mathématique a été l'objet de nombreuses études depuis les années 70. Cependant, il nous semble que la philosophie des mathématiques et (surtout) la didactique des mathématiques n'ont pas envisagé les plus profonds aspects épistémologiques du travail Chomsky sur la compétence linguistique (qui d'ailleurs s'inspire de manière essentielle des mathématiques), ce qui s'explique certainement par l'absence de théories suffisamment explicites et cohérentes des relations entre les mathématiques et les langues naturelles.

Dans cette communication, j'expliquerai les contours d'une telle théorie, ou les mathématiques (de la maternelle à l'université, de la théorie pure aux applications) seront décrites dans des termes purement linguistiques. On se limitera à traiter les idées fondamentales (registre, transformation etc.) de cette description, pour discuter en plus de détails les conséquences possibles pour l'épistémologie de l'enseignement des mathématiques.

1 Introduction

Les relations et les interactions entre langues et mathématiques sont le sujet de nombreux articles et livres dans la littérature moderne sur la didactique et l'épistémologie des mathématiques. Dans la plupart de ces études, il s'agit du rôle joué par le langage employé dans les communications touchant aux mathématiques : dans les salles de classe (p.e. DURKIN & SHIRE 1991; PIMM 1994), dans les textes pédagogiques et scientifiques (p.e., MORGAN 1998), dans les discussions des chercheurs (p.e., ERNEST 1998), etc.; surtout, il s'agit en première ligne de l'usage des langues naturelles dans ces contextes divers, même si cet usage est lié aux spécificités de la matière des mathématiques. A côté de ces efforts du *mainstream*, le langage mathématique interne, propre aux mathématiques, a été ocassionellement traité, surtout dans un sens métaphorique ('les mathématiques sont une langue', cf. p.e. PIMM 1987 ou SCHWEIGER 1994), et même comme un langage construit à base des métaphores (LAKOFF & NÚÑEZ 1997).

Le but de ce travail est de décrire l'usage linguistique des mathématiques dans des termes qui sont et linguistiques dans un sens général, et propres à saisir les spécificités des mathématiques de manière à élucider son épistémologie. Ce faisant, nous partirons des données suivantes :

- Notre analyse se réduit à décrire les mathématiques comme phénomène communiqué, donc les questions classiques de l'ontologie sont pour ainsi dire écartées par avance;
- Nous renonçons à problématiser le genre des mathématiques comme tel, supposant un certain niveau de consentement sur l'existence d'un pratique homogène des 'mathématiques modernes' (en Anglais, *mainstream mathematics*);
- Également nous ne nous engageons point dans les débats sur les paradigmes linguistiques (linguistique structurale et socio-linguistique) auxquelles nous puisons les notions conceptuels pour notre analyse; nous nous bornerons à les expliciter.

En somme, notre but est pragmatique plutôt que dogmatique : de fournir des notions analytiques pour l'enseignant et pour le chercheur en quête d'une compréhension des aspects linguistiques des mathématiques.

2 Définitions fondamentales : langue, langage, registre

Les catégories Saussuriennes de *langue et parole* (DE SAUSSURE 1967) pénetrent toute la linguistique moderne. Les deux forment ce phénomène hétérogène du *langage*, comprenant les aspects physiques, physiologiques et psychologiques de la communication entre êtres humains. Tandis que *parole* comprend les manifestations individuelles et observables de cette communication, c'est à dire les 'textes' (écrites, orales etc.) qui constituent la communication concrète – *langue* peut être grossièrement caractérisé comme les structures de savoir qui sont à la base de la production de textes, telles que la syntaxe, la sémantique etc. Une définition plus formelle, très utile pour nos buts, est donnée par GIRSDANSKY (1963, p. 3) :

> Language is a set of arbitrary symbols (words) which are placed in orderly relationship with one another according to conventions accepted and understood by the speakers, for the transmission of messages.
> Une langue est un ensemble de symboles (mots) arbitraires qui sont placés en relations ordonnées d'après des conventions acceptées et comprises par les interlocuteurs, dans le but de transmettre des messages.

Traditionnellement, le sujet des sciences linguistiques se définit comme l'étude de *langues naturelles* (telle que le Français, le Danois etc.) à partir des évidences présentes en usage concret, en *parole*. Avec une compréhension suffisamment générale de la définition de *langue* que nous venons de citer, il se voit aisément que ce domaine d'enquête peut être élargie de manière à comprendre aussi les *langues formelles* telle que nous les trouvons p.e. dans la *parole* des mathématiciens. En effet, JACOBSON (1970, p. 15) note que

> formalized languages... are artificial transforms of natural language, in particular, of its written variety.
> Les langues formelles sont... des transformés artificielles de la langue naturelle, surtout dans sa variété écrite.

Bien que la situation se montre quelque plus complexe en usage concret des mathématiques, nous verrons qu'une partie de la syntaxe de la *langue* des mathématiques peut effectivement être conçue de cette manière.

Néanmoins, des précisions sur les théories de *parole* sont nécessaires pour placer notre étude d'une langue des mathematiques dans son propre contexte linguistique. Comme il n'y a pas de parole sans interlocuteurs, et même une société d'interlocuteurs avec une langue commune, il n'y a pas de communication (en parole) cohérente sans un certain cadre d'usage déterminé par le contexte : p.e., une leçon en classe, un exercice militaire, un débat entre hommes politiques etc. Ces systèmes de conventions d'usage propre à des groupes d'interlocuteurs placés dans certaines situations, sont nommés communément des *registres* linguistiques (voir HALLIDAY et al. 1964, pp. 87-94). Nous avons donc des registres professionnels (liés à la communication dans la cadre d'une certaine profession), des registres d'enfants (p.e. liés a certains jeux), des registres religieux (p.e. la rhétorique des oraisons) etc.; dans tous les cas cités, la *langue* peut bien évidemment être la même, la différence étant marqué par son usage pour des buts différents.

3 La révolution Chomskienne

Les années 50 et 60 ont vu l'essor de la linguistique structurale, promue surtout par la 'linguistique de transformation' de Zellig Harris, et par la théorie des 'grammaires génératrices' de son étudiant, Noam Chomsky.

Il est intéressant de constater que notre idée de puiser aux études des langues naturelles pour notre analyse des mathématiques, est historiquement précédée par l'influence directe et indirecte des mathématiques dans la génèse de la linguistique structurale. Cette influence est très claire dans toute l'œuvre de Harris, où elle est souvent directe et explicite :

> The interest here is... in formulating in a mathematical system precisely those properties sufficient and necessary to characterize the whole of natural language and its unique power.
> Le point d'intérêt ici est... de formuler dans un système mathématique exactement les propriétés qui sont nécessaires et suffisantes pour caractériser la totalité de la langue naturelle et sa puissance unique. (HARRIS 1970, p. 603)

Voici un résumé simplifié d'une partie (concernant la syntaxe) caractéristique de la stratégie de Harris pour ce faire (HARRIS 1970, pp. 533-577) : toute phrase se dérive par *transformations* d'un ensemble fini de *phrases de base*. Les transformations forment une structure algébrique –un semigroupe– sous composition, et l'étude de la construction de phrases se réduit à analyser la structure de ce semigroupe, en particulier de décider s'il possède un ensemble fini de générateurs.

L'idée d'utiliser des notions mathématiques pour décrire les structures linguistiques est également fondamental dans (CHOMSKY 1957) qui contient la démonstration (mathématique) du fait bouleversant que les langues naturelles sont infinies non seulement en nombre de phrases possibles, mais aussi –à grands traits– en nombre de 'règles' qui sont nécessaires et suffisantes pour produire toutes les phrases correctes (et seulement celles-ci). D'autant plus revolutionnaire était donc l'idée des 'grammaires génératrices', qui

> attempts to characterize in the most neutral possible terms the knowledge of the language that provides the basis for actual use of language by a speaker-hearer.
> cherche à caractériser dans les termes les plus neutres les connaissances qui sont à la base de l'usage concrète de la langue par un interlocuteur. (CHOMSKY 1965, p. 9)

Donc, revenant aux catégories Saussuriennes, on cherche à isoler les aspects de *langue* qui, en écartant un amas de faits (p.e. lexicologiques) de genre plus ou moins arbitraires, sont fondementales dans la production de *parole*. Dans les termes de Chomsky, ces aspects constituent *l'état initial (initial state ou universal grammar)* de la faculté linguistique, la partie de nos connaissances qui –par leur complexité même, dont nous venons de faire la mention– ne saurait être apprises à partir de l'expérience nécessairement finie que l'on puisse acquérir avec un langage quelconque, mais qui d'autre part nous permet en principe d'acquérir n'importe quelle langue naturelle. Cet état initial étant nécessairement une partie innée du cerveau humain, on a affaire ici avec l'aspect le plus controversé de la théorie de Chomsky – bien que personne n'ait su réfuter l'argument que, sans cette hypothèse, la compétence linguistique de l'homme serait un paradoxe épistémologique des plus manifestes.

Il est d'autant plus intéressant pour nous que Chomsky suggère que d'autres compétences relatées pourraient être analogues, et même dérivées, de la compétence linguistique innée :

> Assuming the language faculty to be a distinguished component of the mind, it has a genetically-determined initial state S_0^L ... But the mind has other ressources as well, with other capacities, and thus a more general initial state S_0^M for formation of concepts – for example, in the course of theory construction in the advanced sciences.
> Supposant que la faculté linguistique soit un composant distinct de l'esprit humain, il a un état initial S_0^L qui est génétiquement determiné... Mais l'esprit humain a d'autres capacités, donc un état initial S_0^M plus général, pour former des notions – p.e. dans la construction des théories des sciences avancées. (CHOMSKY 1991)

Nous avons donc en particulier à traiter de la partie de S_0^M où le M signifie 'mathématiques modernes' – et, surtout, de ses relations avec S_0^L.

4 Syntaxe universelle des mathémathiques

Pour toute classe d'objets mathématiques –comme les nombres réels, les ensembles, les polyèdres– il y a des *opérations* naturelles par lesquelles un ou plusieurs objets sont transformés en un autre objet. De même, nous avons des *relations* qui nous permettent de comparer deux objets – par exemple, un objet et l'objet obtenu par une opération. Cette structure, dans un sens vague 'universelle' pour les mathématiques, a été partiellement formalisée dans la théorie des catégories. Ici, nous esquisserons une formalisation dans l'esprit de la linguistique structurale. Pour un exposé plus détaillé, voir (WINSLØW 1998).

Notons d'abord que pour le moment nous nous occuperons uniquement de la syntaxe des parties 'symboliques' de la communication mathématique, c'est-à-dire des séquences de symboles (incluant les représentations par diagrammes géométriques) qui apparaissent en pratique

au milieu des explications verbales écrites ou parlés selon la situation. Dans la section suivante, nous allons traiter la communication mathématique dans son ensemble.

Les séquences de symboles contiennent explicitement trois catégories de 'syntaxe' : *objets, relations* et *opérateurs*. Les *objets* sont seuls à pouvoir constituer une séquence complète, telle que '$\sum_n 1/n$' ou '2'. Les symboles représentants des *relations* sont toujours placés entre deux objets, comme dans '$2 \leq \sum_n 1/n$'. Finalement, les *opérateurs* se placent de deux manières différentes : *entre deux objets* comme dans '2+3=5', où le complément '=5' indique le résultat de l'opérateur '+' agissant sur la paire d'objets '2' et '3'; et de différentes manières en *combinaison* (avant, au dessus, au dessous...) avec l'objet (ou les objets) auquel agit l'opérateur, comme dans

$$\sqrt{9}, \beta^2, \ell^\perp, \sin(x), f(x,y,z), V^*, \mathrm{Hom}\,(V, \mathbf{C}), \text{etc.}$$

Ces séquences d'objets avec opérateurs représentent, par définition, de nouveaux objets (composés) qui se placent dans toutes les positions possibles pour un objet. Les séquences *de base* sont de forme O (*séquence d'objet*, contenant un seul objet) et O_1RO_2 (*séquence simple*, objet-relation-objet).

Implicitement, on trouve une quatrième catégorie des *transformations*.

Les plus importantes sont les transformations induites par un opérateur (que nous pouvons, en analogie avec la syntaxe de transformation de HARRIS (1970), appeler les *transformation simples*). Celles-ci agissent *simultanément* sur objets et relations, de manière à transformer une séquence entière. Par exemple, l'inversion additive des nombres réels transforme la relation '$\leq$' en '$\geq$', donc, le résultat de cette transformation de la séquence '$2 \leq \sum_n 1/n$' est '$-2 \geq -\sum_n 1/n$'. Plus généralement, la transformation induite par l'opérateur T agit sur les séquences de base ainsi :

$$O \to TO; \quad O_1\, R\, O_2 \to TO_1\, TR\, TO_2,$$

où TR désigne la relation transformé de R par T.

Les transformations simples sont *unaires* comme elles agissent sur une seule séquence. D'autres transformations unaires sont celles de *réduction* (p.e. réduction de transitivité dans certains contextes : $O_1RO_2RO_3 \to O_1RO_3$, etc.).

Pour construire les séquences à plusieurs relations, il nous faut introduire les transformations *binaires de juxtaposition* et *de combinaison*. Si S_1 et S_2 sont des séquences quelconques, O est un objet, et R_1 et R_2 sont des relations, la juxtaposition de S_1R_1O et OR_2S_2 a pour résultat la séquence $S_1R_1OR_2S_2$. Comme un exemple, notons le passage

$$0 = 0+0 < 1+1, 1+1 \leq \sum_n 1/n \to 0 = 0+0 < 1+1 \leq \sum_n 1/n.$$

De même, la combinaison des séquences $S_1R_1S_2$ et $S_3R_2S_4$ induite par un opérateur T à deux arguments a pour résultat la séquence $T(S_1,S_3)T(R_1,R_2)T(S_2,S_4)$ où $T(R_1,R_2)$ est la relation induite par R_1 et R_2 sous T (cette induction n'étant évidemment pas possible pour n'importe quelle combinaison de relations et opérateur). Par exemple,

$$1 < 2, 3 \leq \sum_n 1/n \to 1+3 \leq 2 + \sum_n 1/n.$$

Comme c'est aussi le cas en syntaxe de transformation, on a besoin seulement de tranformations unaires et binaires pour générer les séquences d'une complexité arbitraire. Notons néanmoins qu'une répétition de la même transformation peut bien être infinie dans le cas traité ici.

De cette manière, nous avons indiqué un mécanisme pour générer un grand nombre de séquences de symboles correctes. Une indication du contexte sera nécessaire pour fournir des règles plus précises p.e. des transformations induites par les opérateurs, en vue d'assurer que seules les séquences correctes soient générées.

L'universalité des quatre entités de syntaxe que nous venons d'examiner –objets, relations, opérateurs, transformations– se prolonge bien sûr dans des aspects de sémantique. Ils sont brièvement indiqués dans le schéma suivant (WINSLØW 1999) :

	Représentation	**Structure**
État	Objet	Relation
Processus	Opérateur	Transformation

5 Contours des registres mathématiques

L'usage mathématique combine deux éléments : une langue de symboles régularisé par le contexte mais aussi par des principes universels (décrits au-dessus), et une langue naturelle comme le Français ou le Danois. Il est d'une importance capitale pour donner une image fidèle des registres mathématiques de tenir compte de *l'interaction* des deux langues dans l'usage mathématique. En fait, ôter d'un texte mathématique toute expression symbolique le rend absurde et du point de vue grammatical et du point de vue sémantique, tandis que la seule langue symbolique ne saurait –en dépit des efforts faits par certains logiciens –rendre tout le sens même des plus simples raisonnements mathématiques.

Commençons par l'exemple suivant d'un texte classique (CARTAN 1961, p. 75) :

> Soit Γ le bord orienté d'un compact K contenu dans un ouvert D et soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans D. Alors
> $$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \ldots$$

Il se voit aisément que les séquences de symboles 'γ', 'K', 'D', '$f(z)$' et '$\int_{\Gamma}(f(z)dz = 0$' remplacent des éléments verbaux dans la structure d'une phrase également représenté par : 'Soit *Pierre* l'ami d'un marin, *Paul*, embarqué au navire *Napoléon*, et soit *Pierrot* un clown engagé au *Napoléon*. Alors *l'ami de Pierre voyage avec un clown*.' Hors un certain clou logique, la dernière phrase n'a certes pas beaucoup de sens, mais elle est parfaitement grammaticale. Les séquences d'objets remplacent des nom propres, tandis que la séquence simple '$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$' tient lieu d'une phrase complète, la relation correspondant grossièrement au verbe fini. Abstraction faite de ces remplacements, la structure des deux phrases reste la même.

Il est, en effet, possible d'énumérer les règles qui déterminent, en grands traits, comment insérer dans la structure d'une phrase de langue naturelle des séquences de langue symbolique pour arriver à des phrases correctes pour le registre *mainstream* des mathématiques modernes (WINSLØW 1999, §6). La pointe est essentiellement que les noms propres (et leurs équivalents ainsi que les noms après certains articles) se remplacent avec les séquences d'objets, tandis que les propositions principales précédées de manière arbitraire (mais non-vaine) se remplacent par les séquences contenant une ou plusieurs relations.

Nous avons toujours à rendre compte de l'usage de l'inventaire verbal dans les registres mathématiques, comme celui-ci est clairement assez restreint; bien qu'aucune tournure ne soit

exclue d'avance, il est impossible de rencontrer dans un texte mathématique des expressions tel que 'humeur', 'ma mère est malade' etc., en tous cas dans leur sens quotidien. Le registre mathématique est 'fermée' dans le sens qu'il ne permet pas les références externes, donc, ne saurait exprimer les opinions, les sentiments, etc. (ne comptant pas, ici, la possibilité de registre mixte, tel que l'usage dans les applications des mathématiques). Dans ce sens, les mathématiques sont, selon l'expression de JACOBSON (1970, en vue de la musique), *un langage qui se signifie soit-même* (cf. aussi ROTMAN 1988).

Le texte mathématique crée sa propre sémantique par des processus de nomenclature très explicites. Retournant à notre example du texte de Cartan, tous les termes 'bord orienté', 'un compact', 'contenu', 'un ouvert', 'une fonction holomorphe' doivent être explicitement définis par le contexte (typiquement par les parties antérieures du texte) pour être employés dans le présent; ils font alors, et seulement alors, partie de l'inventaire sémantique du registre, avec un sens très différent du sens dans tout autre registre, s'ils ne sont pas exclusivement créés pour l'usage du registre (tel que l'adjectif 'holomorphe'). Cette possibilité de créer *ad hoc* une sémantique est á la racine de l'extrême flexibilité du registre mathématique. Elle est, d'ailleurs, différente d'un autre processus, beaucoup plus local, de nomenclature, par lequel un sens soit assigné aux symboles (dans l'exemple, 'Soit Γ le bord orienté. . . '), mais qui ne crée pas une partie du registre proprement dit.

Finalement, les registres mathématiques se retrouvent rarement en usage isolé hors des salles de classes ou de recherche. Par contre, on va souvent trouver les mathématiques dans des contextes appliqués; donc, le registre est *mixte*, comme le registre du contexte (par exemple de la physique, du commerce, etc.) se mêle avec le registre mathématique utilisé pour représenter (modéliser) une situation décrite par le premier registre. Dans ces situations, il est utile sinon nécessaire de séparer ce mélange –d'isoler ce qui est dit ou écrit en langage mathématique– pour l'analyse du discours, ou plus modestement, pour donner un sens à l'usage apparemment bizarre de symboles au milieu d'un discours verbal.

6 L'analyse du discours mathématique

Notre analyse jusqu'ici peut bien sembler assez éloignée des problèmes réels de l'usage communicatif des mathématiques – en classe aussi bien qu'ailleurs. C'est dans le discours cohérent –la *parole*– plutôt que dans les détails de syntaxe que les difficultés du langage mathématique se montrent les plus urgentes.

L'analyse grammaticale se termine traditionnellement par la phrase entière. Pour saisir le déroulement sémantique d'un texte comprenant plus d'une phrase, il est indispensable de traiter aussi la relation entre ces phrases et leur contribution à la totalité. Ceci est le point de départ d'une discipline nouvelle (STUBBS 1983, p. 15) :

> Connected discourse is clearly not random. People are able to distinguish between a random list of sentences and a coherent text, and it is the principles which underlie this recognition of coherence which are the topic of study for discourse analysis.
> Le discours cohérent n'est évidemment pas arbitraire. Nous sommes capables de distinguer une liste arbitraire de phrases d'un texte cohérent, et ce sont les principes qui se trouve derrière cette reconnaissance de cohérence qui sont le sujet pour l'analyse du discours.

Cette cohérence est déterminée grossièrement par l'information transmise, reçue et interprétée au cours de la communication.

Les phrases d'un texte mathématique sont centrées autour de certains ensembles sémantiques représentés surtout par les séquences symboliques dont la cohérence est typiquement établie par les parties des phrases usant de l'inventaire verbal. Nous distinguons, pour notre analyse, les ensembles suivants :

1. L'ensemble *primaire*, représenté par les phrases, et surtout les séquences symboliques, du texte,
2. L'ensemble *secondaire*, constitué par le 'contexte'; p.e. dans un texte pédagogique, le contexte d'un extrait quelconque est souvent défini dans l'ensemble précédent du texte,
3. L'ensemble *tertiaire*, constitué par le savoir uni des *agents* du discours, c'est-à-dire des interlocuteurs (voir ci-dessous).

Notons que ces ensembles sont d'habitude successivement plus larges, l'ensemble primaire étant le seul à être directement 'visible' à fleur du texte; seulement, dans certaines situations, l'ensemble secondaire (le contexte) n'est pas entièrement contenu dans le tertiaire, ce qui est susceptible de donner lieu à des difficultés au cours du discours (et à se manifester ainsi dans le texte). Il est aussi important de noter que les ensembles doivent être conçus comme des entités *dynamiques*, donc, qui changent au cours du discours.

En considérant un texte (dans le sens général) mathématique, nous observons un ensemble grandissant d'éléments (formules, concepts, allégations, théorèmes etc.) qui, à un point du texte donné, constituent l'ensemble primaire. Il est donc vide au début du texte, et sa capacité explanateur dépend de la manière dont nous l'aurons délimité. Si, p.e., notre texte est constitué par un théorème et sa démonstration –et non pas, disons, par la dernière moitié de la démonstration– l'ensemble primaire donnera souvent une image déjà assez significative du déroulement superficiel des messages communiqués.

Toutefois, n'importe quel discours mathématique a lieu dans un contexte assez restreint de définitions, théorèmes, méthodes etc.; dans la surface du texte, nous observons de temps en temps l'introduction d'un élément secondaire dans l'ensemble primaire. Il est capital pour la compréhension du texte d'avoir une image assez précise de cet ensemble, ce qui rend l'analyse du discours oral beaucoup plus difficile que dans le cas des textes écrits, où l'ensemble secondaire est souvent explicite dans le texte précédent l'extrait considéré.

L'ensemble tertiaire est, en contraste avec le secondaire, dépendant des interlocuteurs. Pour les textes écrits, il faut d'ailleurs comprendre comme 'interlocuteur muet' aussi le 'lecteur imaginé' par les auteurs, comme le discours est souvent visiblement dirigé vers celui-ci (et ferait typiquement peu de sens conçu comme un monologue sans destinataire). Cet ensemble est pour ainsi dire la limite du domaine qui saurait apparaître à la surface du texte; l'introduction d'éléments tertiaires non-partagés par tous les interlocuteurs est une source fréquente de difficultés communicatives, bien qu'elle soit essentielle pour le discours pédagogique où l'ensemble tertiaire pourait souvent être compris comme représentant 'le savoir du professeur' (ou de l'auteur). En général, l'ensemble tertiaire d'un groupe donné d'interlocuteurs est difficile à déterminer, et même la détermination partielle demande une observation longue et variée du discours du groupe. Cet ensemble est pour ainsi dire 'le spectre nécessaire' de l'analyse du discours mathématique : indispensable pour la compréhension d'un texte non-trivial, mais bien caché sous la surface textuelle.

Cette analyse procède donc de la manière suivante : identifier les interlocuteurs et le contexte (après une lecture rapide du texte), suivre le déroulement du texte au niveau de l'ensemble primaire, observer les introductions d'éléments secondaires et (possiblement) tertiaires non secondaires et les transformations des éléments primaires; décrire au moyen de ceci le flux

d'informations et les aspects globaux de l'événement discoursif. (Pour un exemple simple mais assez détaillé du processus, voir WINSLØW 1998, §3.3.6).

Le rôle pour cette analyse de notre description du registre et de la syntaxe universelle reste à être explicité (bien qu'il soit partiellement évident dans l'analyse de n'importe quel texte suivant les idées ci-dessus). Il est lié aux aspects les plus délicats du développement du sens dans le cours d'un discours mathématique : l'interprétation et la transformation d'informations données dans l'ensemble primaire. Un texte mathématique peut être plein de sens et de dynamique et pourtant être constitué essentiellement d'une succession de transformations unitaires d'une seule séquence simple – p.e., le texte représentant la solution d'une équation bicarrée par complément des carrés. Un texte verbal procédant de manière pareille est peu vraisemblable hors des genres comme le théâtre absurde... D'autre part, pour les textes plus compliqués, le sens est typiquement représenté par (ou peut être reconstruit comme) un amas de transformations comportant la combinaison d'un grand nombre de séquences symboliques de tous les ensembles. C'est de la structure de cet amas de transformations que dépend notre compréhension du texte, comme d'ailleurs celle des interlocuteurs, et c'est un trait caractéristique du registre que la transformation linguistique des éléments soit aussi significative pour son usage.

7 Conséquences pour l'épistémologie

Qu'est-ce que le savoir mathématique et comment l'acquière-t-on? Il me semble que la compréhension du savoir mathématique comme une compétence discursive contribuera à éclairer d'une lumière nouvelle ces questions du moment que nous avons décrit cette compétence au niveau de *langue* (comme la syntaxe universelle) et au niveau de *parole* (registre et dynamique du discours). Ce faisant nous avons à la fois donné substance à la thèse que le savoir mathématique soit une extension de notre faculté de langage, et signalé de quelle manière les problèmes des épistémologies des langues et des mathématiques sont interdépendants. Dans les deux cas, nous avons à faire avec une pratique plutôt qu'avec un corpus d'objets avec certaines qualités. Selon le philosophe Resnik,

> ... in mathematics the primary subject matter is not the individual mathematical objects but rather the structures in which they are arranged. The objects of mathematics... are themselves atoms, structureless points...
>
> ... en mathématique, la matière n'est pas les objets mathématiques individuels, mais plutôt les structures dans lesquelles ils sont situés. Les objets des mathématiques... sont en eux-mêmes des atomes, des points dépourvus de structure.... (RESNIK 1997, p. 201)

Notre discussion précédente nous éloigne d'un pas de plus des objets comme la matière principale du savoir mathématique : elle n'est même pas les relations entre objets (ou points) situés dans une structure inerte, mais plutôt la dynamique du changement de ces relations – c'est-à-dire, la structure transformable de la syntaxe et du discours. D'être savant des mathématiques ne dépend pas seulement de la connaissance des relations fixes entre objets (tel que l'arrangement des nombres, ou un corpus de théorèmes), mais surtout de la compétence de manipuler ces relations (tel que dans la pratique de l'arithmétique ou dans l'invention et dans la démonstration des théorèmes). L'analogie ici avec la faculté de langue me semble très persuasive; le savoir lexical et la connaissance reçus d'un amas fini de phrases toutes faites sont nécessaires mais bien loin d'être suffisants pour la participation au discours d'une langue naturelle. L'importance de la maîtrise d'une structure transformable des séquences symboliques, ainsi que de sa relation avec la syntaxe de la langue naturelle dont le registre se sert, nous montre que cette analogie n'est pas une coïncidence mais une conséquence de la parenté proche entre les deux formes de compétences expressives.

La compétence mathématique est donc essentiellement de nature linguistique et elle est acquise de manière analogue à la faculté linguistique : par la participation au discours (dans un sens large, comprenant aussi la lecture de textes) basée sur un registre mathématique. Il est donc trivial que l'acquisition est partiellement un processus de socialisation; mais c'est une faute, de nos jours trop commune, de conclure qu'elle est pour cette raison arbitraire ou bien entièrement dépendante d'un milieu de socialisation, c'est-à-dire du groupe d'interlocuteurs dans lequel elle a lieu. Il n'est pas entièrement vrai (en effet, essentiellement faux) que le savoir mathématique et le résultat d'un accord explicite, ou que

> ... objective mathematical knowledge is to be found socially in the interrelations and interaction of... texts and persons within the culture and institution of mathematics.
> ... le savoir mathématique objectif se trouve socialement dans les interrelations et les interactions des... textes et individus à l'intérieur de la culture et de l'institution des mathématiques. (ERNEST 1998, p. 244)

L'argument d'Ernest et d'autres pour refuser essentiellement l'objectivité (dans le sens habituel) de tout savoir mathématique est précisement le processus discursif dans lequel ce savoir se laisse observer – mais qui ne le crée pas pour cela dans sa totalité. L'analogie avec le cas de la faculté de langue naturelle nous montre qu'il n'y a pas de nécessité qu'une compétence d'ordre linguistique soit entièrement formée par la participation au discours; remplaçant le savoir mathématique par les connaissances linguistiques l'extrait ci-dessus contredit clairement l'existence de l'état initial qui ne réside certainement pas dans des institutions ou dans des 'cultures de l'institution de langue naturelle'. Il y a des éléments de notre faculté de langue qu'il ne nous est pas donnée de changer; hors notre appareil physique d'articulation, il y a dans notre constitution mentale des structures qui la déterminent partiellement. Comme nous venons de souligner la relation intime entre cette faculté et l'usage mathématique, nous voyons que la question du savoir mathématique objectif ne se réduit point à l'analyse des institutions ou des 'cultures' – de même que la linguistique ne se laisse pas concevoir comme un coin de la sociologie.

Un argument principal pour la non-existence d'une objectivité invariante du discours mathématique a été le développement historique des formes acceptées de démonstrations de théorèmes. Sans doute, on observe au cours de l'histoire, p.e., de l'analyse infinitésimale, des changements assez importants de la perception d'un raisonnement correct et aussi, bien que moins prononcé, l'abandon de résultats autrefois conçus comme bien étayés. Toutefois, la possibilité d'observer de tels changements et de les concevoir comme stades commensurables de théories, nous montre que nous n'avons aucunement à faire avec des 'changements de paradigmes' au sens de KUHN (1962), où toute la base du savoir ancien est soudainement renversée. Aussi, il n'appartient au fait pas à une communauté de chercheurs en mathématiques de changer de façon abrupte la structure des transformations permissibles, bien que nous ayons des tentatives partielles telle que l'école intuitionniste, qui a justement échoué par manque de continuité et de commensurabilité avec les registres du *mainstream*. D'ailleurs, les langues naturelles se développent de manière pareille; le français d'un Molière ou d'un Pascal est différent, mais loin d'être incommensurable, du français contemporain, tandis que l'introduction de langues 'artificielles' comme l'espéranto ne nous donnera justement jamais une langue 'naturelle'. On pourrait objecter ici que les mathématiques ressemblent peut être plus à l'espéranto qu'au français, étant plutôt une langue articifielle que naturelle; mais il me semble que cette objection est tout

simplement sans évidence dans la pratique comtemporaine et historique des mathématiques. Jamais ne fut-il décidé d'ériger de telle ou telle manière ce bâtiment de savoir qui nous est connu sous ce nom; et surtout ce bâtiment est de manière irréversible contigu aux langues naturelles dont il se sert. En effet, les mathématiques remplissent beaucoup des conditions normalement posées dans les définitions des langues naturelles (p.e. MORAVSCIK 1983), à l'exception, bien sûr, d'avoir la forme orale comme le médium primaire.

D'un autre côté, l'utilité des mathématiques comme moyen pour décrire à peu près tous les phénomènes du monde physique, et aussi un grand nombre de phénomènes sociaux, est souvent citée comme évidence d'une objectivité inhérente aux mathématiques. L'argument me semble capital mais aussi plein de dangers. Il faut résister à la tentation de conclure que cette objectivité réside donc 'hors de la sphère humaine', et démontrer qu'au contraire elle vient de notre incapacité à décrire et même à concevoir des relations extérieures de nous-mêmes sans nous servir des moyens d'expression qui nous sont fournis par les langues. L'invariance et l'objectivité de notre conception du monde sont imposées par celles de nos langues et elles ne sont point plus étendues que l'objectivité de nos langues; notre compréhension du monde physique est en effet bien moins stable que les structures mathématiques par lesquelles nous l'exprimons. Ici, KUHN (1962) est à sa place pour nous convaincre que notre description, et aussi notre construction partielle, de l'univers physique et social, sont limitées et induites par la liberté actuelle de choisir parmi les moyens. C'est aussi un point cardinal pour WITTGENSTEIN (1969, §5.6) :

> Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.
> Les limites de ma langue sont les limites de mon univers.

Cela se comprend aussi (par nous) au pluriel, dans le sens social; il est peu étonnant alors que les partie de notre 'langue' (au sens général) qui s'occupent des quantités et des formes –comme avant tout les mathématiques– nous semblent bien utiles pour décrire et former les aspects quantitatifs du monde. La régularité intrinsèque de la langue ne doit pas être confondue avec les incidents de son usage.

Le caractère transformable du langage mathématique a aussi des conséquences pour l'interprétation du concept de vérité dans l'usage des mathématiciens et des philosophes. Dire qu'une proposition mathématique est 'vraie' est une manière de dire qu'elle est 'bien formée' ou 'correctement dérivée', dans le sens que nos critères pour sa vérité portent typiquement sur les transformations d'un discours (ici, d'une démonstration). Si cette chaîne de transformations, ainsi que son point de départ, sont reconnus par nous comme corrects, nous affirmons la correction de la proposition avec autant de sûreté que nous le pouvons pour la forme d'une phrase dans notre langue maternelle. Dans les deux cas, l'idiosyncrasie joue un rôle relativement petit, bien que dans le discours mathématique, les divergences entre le savoir d'un individu, l'ensemble secondaire et l'ensemble tertiaire donnent fréquemment lieu à des efforts de raccommodage – non pas des 'points de vues', mais des 'connaissances'. Dans le cas de l'usage d'une langue naturelle, p.e. dans les registres de débat politique, on ne trouve pas cette corrélation intime entre syntaxe, structure de discours et sémantique; les divergences sur le contenu ne sont pas primairement d'ordre linguistique. Cette différence s'explique également au niveau de la signification : comme nous l'avons déjà noté dans notre discussion du registre mathématique, celui-ci est fermé et donc le discours est dépourvu de références extérieures – ce qui restreint aussi la portée de son concept de vérité.

8 Conséquences pour l'éducation et l'enseignement

Il me semble essentiel que l'enseignement général des mathématiques soit conçu dans sa totalité comme un mouvement vers un but de perfection qui pourrait être atteint à différents degrés, toujours partiels. Notre analyse des registres et du discours des mathématiques nous permet d'abord de formuler avec plus de précision ce but et donc la direction générale du 'vecteur' de l'éducation mathématique, puis d'analyser brièvement son implantation aux niveaux différents.

Pour la direction générale, l'analogie avec l'acquisition d'une langue étrangère est très utile. Quoique lointain au début de l'apprentissage, le but principal déterminant la direction de l'enseignement est bien sûr la compétence de comprendre et de s'exprimer comme un adulte ayant cette langue pour langue maternelle. A ceci se joint des moyens qui sont aussi des buts partiels, comme l'enseignement de la culture et des littératures associées à la langue en question. Retenons comme mots clés : *compétence adulte, langue maternelle, culture, littératures.* A priori, ils ne semblent peut être pas très éclairants dans le contexte de l'apprentissage mathématique. D'ailleurs, par quel 'mathématicien idéal' aurons nous un modèle pour la compétence 'adulte', pour ne pas dire 'de langue maternelle'? Nous aurons à opérer avec un *ideal speaker* (CHOMSKY 1965) dans les deux cas, mais le besoin de préciser ses attributs est peut être plus grand dans le cas présent. Dans l'usage des mathématiques, la compétence pour participer au discours me semble étroitement liée à la faculté de suivre et de produire les transformations qui constituent, comme nous l'avons vu, l'élément central de la dynamique interne de ce discours. Notre *ideal speaker* est donc complètement libre aux jeux de transformations dans n'importe quel contexte sensé des mathématiques. Il connaît aussi la littérature, donc, possède le savoir jusqu'ici obtenu, en étant capable de le situer dans son contexte historique et culturel. De plus, il lui est possible de communiquer et d'appliquer son savoir hors du contexte protégé des mathématiques pures.

Comment peut on s'y rendre, puisqu'il est clair que l'on n'atteint jamais ce but idéal? Pour les calculs comme pour les raisonnements d'un certain genre, il est certes possible de développer des facultés basées sur les recettes, sur les méthodes toutes faites, mais où l'élément transformable des opérations est pour ainsi dire donné d'avance. Évidemment, ces facultés ont peu de valeur de transfert au-delà des situations strictement analogues. Par contre, l'étude de telles 'recettes' peut fournir des *exemples* importants de la navigation de transformation du mathématicien dans une structure mathématique. En effet, la 'littérature' des mathématiques est pleine de tels exemples 'modèles'; par exemple, la preuve de l'irrationalité de la racine de 2 est un cas classique et exemplaire de l'argument indirect, et elle est aussi par sa signification historique une partie de la 'culture' associée aux mathématiques. Si l'on réussit à élargir cet argument aux racines d'un nombre non-carré quelconque, on aurait déjà une expérience valable pour des exploits plus avancés. D'autres exemples plus élémentaires sont les algorithmes de multiplication et de division (pour l'enseignement primaire) dont l'importance pratique a certes diminué avec l'introduction des calculateurs, mais qui sont néanmoins des véhicules possibles pour l'acquisition des transformations associées à ces opérations (qui sont, d'ailleurs, à leur tour, nécessaires pour la compréhension de notre premier exemple). L'importance pour l'apprenti de formuler pour lui-même les hypothèses, les arguments et les contre-exemples est analogue aux principes modernes de la pédagogie linguistique :

> Rules that the child discovers are more important and carry greater weight than practice. Concept attainment and hypothesis testing are more likely paradigms in language teaching than response strength through rote memory and repetition.

> Les règles découvertes par l'enfant même sont plus importantes et ont plus de poids que la pratique. La réalisation des concepts et l'épreuve d'hypothèses sont des paradigmes plus prometteurs pour l'enseignement des langues que la faculté de répondre par cœur et par répétition. (JACOBOVITS 1970, p. 15)

Nous n'avons ici qu'à remplacer le mot 'langues' pour avoir un manifeste bien sensé d'une éducation des mathématiques modernes.

Retournons à la question des significations possibles de 'langue maternelle' dans le contexte des compétences mathématiques. Puisque celles-ci sont, comme nous l'avons vu, intégrées aux compétences linguistiques générales, il n'y a pas de raison théorique qu'elles soient acquises comme celles d'une langue secondaire. Effectivement, des rudiments des registres des mathématiques élémentaires, tels que les notions de quantité et de forme, sont présents même dans les stades les plus primitifs de l'acquisition des langues naturelles (voir p.e. USISKIN 1997, pp. 234f). On peut compter parmi les conclusions les plus manifestes des études de l'éducation mathématique élémentaire qu'il est favorable à sa réusite de profiter de ces éléments déjà intériorisés et qu'il est substantiellement plus difficile, quoique possible, d'acquérir l'arithmétique comme des processus détachés de l'usage connu de la langue maternelle.

Considérons ensuite le problème de l'âge idéal pour commencer l'initiation aux aspects centraux du registre mathématique (le raisonnement logique par discours de transformation). On trouve un problème parallèle dans le 'facteur d'âge' dans l'apprentissage d'une langue secondaire, où l'analyse se résume ainsi (KRESHEN et al. 1979) :

> ... adults and older children in general initially acquire the second language faster than young children (older-is-better-for-rate-of acquisition), but child second language acquirers will usually be superior in terms of ultimate attainment (younger-is-better-in-the-long-run).
>
> ... les adultes et les enfants plus âgés en général sont plus prompts à acquérir une langue secondaire que les jeunes enfants (plus-âgé-est-mieux-pour-la-rapidité-d'acquisition), tandis que les enfants apprenant une langue secondaire sont d'habitude supérieurs au sens du résultat final (plus-jeune-est-mieux-à-la-longue).

On serait tenté de conclure par analogie que l'introduction des éléments centraux du registre devait être effectuée aussi rapidement que possible. Toutefois nous nous heurtons ici aux limites posées par la capacité cognitive de l'enfant, dont nous informent Piaget et son école avec une documentation écrasante :

> On voit donc ce qu'est la déduction formelle : elle consiste à tirer les conséquences, non pas d'un fait d'observation directe, ou d'un jugement auquel on adhère sans réserve... mais d'un jugement que l'on assume simplement... C'est cette déduction dont nous situons l'âge vers 11-12 ans. (PIAGET 1924, p. 82)

Puisque la déduction formelle -les transformations effectuées sur un ensemble d'éléments donnés- est tellement fondamentale dans le discours 'adulte' des mathématiques, nous nous trouvons donc face à une des tensions les plus importantes dans les débats sur l'éducation mathématique.

Face à ces problèmes, la tentation est grande de diviser et de compartimenter l'enseignement des mathématiques selon des buts utilitaires, et de renoncer ainsi à communiquer le registre dans sa totalité. L'absurdité de la conception instrumentale des mathématiques pour l'enseignement général est bien illustré avec l'analogie d'une présentation semblable d'une langue (ou d'un registre de langue) naturelle, où l'on peut bien pour des propos très spécifiques enseigner un inventaire des phrases toutes faites qui sont simplement expliquées une à une. L'enseignement parallèle des mathématiques est pourtant réalisé dans maintes écoles, comme un inventaire des procédures à accomplir en présence de certaines tâches. On évite par là les difficultés présentées par la compréhension d'un discours abstrait et de transformation, mais on perd aussi toute la force expressive du registre.

Pour l'enseignant, il me semble essentiel d'avoir conscience de ces tensions partiellement inévitables entre les besoins du but final de compétence discursive et les conditions d'apprentissage pour les jeunes enfants. Bien que Bruner (1960) a peut être été un peu trop optimiste à déclarer que l'on peut enseigner n'importe quoi aux enfants de n'importe quel âge, il a raison d'insister sur le fait que l'enseignant doit posséder et communiquer les idées fondamentales de son sujet, et peut être même les 'personnaliser'. Cela implique que l'enseignant doit, au plus haut degré possible, être un *ideal speaker* dans le sens défini plus tôt, au moins pour les contextes qu'il enseigne.

Bibliographie

BRUNER, J. (1960) *The proces of education*. Harward Univ. Press, Cambridge, MA.

CARTAN, H. (1961) *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris.

CHOMSKY, N. (1957) *Syntactic structures*. Mouton & Co., The Hague.

CHOMSKY, N. (1965) *Aspects of the theory of syntax*. MIT Press, Cambridge, MA.

CHOMSKY, N. (1991) *Linguistics and Cognitive Science: Problems and Mysteries*. In: A. Kasher (Ed.): *The Chomskyan Turn*, pp. 26-53. Basil Blackwell, Oxford and Cambridge, MA.

DE SAUSSURE, F. (1967) *Cours de linguistique générale*. Payot, Paris. (Éd. orig. 1916).

DURKIN, K. et SHIRE, B. (1991) (Eds.) *Language in mathematical education*. Open University Press, Milton Keynes.

ERNEST, P. (1998) *Social constructivism as a philosophy of mathematics*, SUNY Press, New York.

GIRSDANSKY, M. (1963) *The adventure of language*. Prentice Hall, New Jersey.

HALLIDAY, M., MCINTOSH, A. & STREVENS, P. (1964) *The linguistic sciences and language teaching*. Longmans, London.

HARRIS, Z. (1970) *Papers in structural and transformational linguistics*. Reidel, Dordrecht.

JACOBOVITS, L. (1970) *Foreign language learning: a psycho-linguistic analysis of the issues*. Newboury House, Rowley, MA.

JACOBSON, R. (1970) *Language in relation to other communication systems*. In: *Linguaggi nella società e nella tecnica*. Edizioni Comunità, Milano.

KRASHEN, S., LONG, M. & SCARCELLA, R. (1979) *Age, rate and eventual attainment in second language acquisition*. TESOL Quarterly 13, 573-582.

KUHN, T. (1962) *The structure of scientific revolutions*. Chicago Univ. Press, Chicago.

LAKOFF, G. et NÚÑEZ, R. (1997) *The metaphorical nature of mathematics*. In L. English (Ed.): *Mathematical Reasoning: Analogies, metaphors and images*, pp. 21-89. Lawrence Erlbaum, New Jersey.

MORAVCSIK, J. (1983) *Natural languages and formal languages: a tenable dualism*. In R. Cohen et al. (Eds.): *Language, logic and method*, pp. 225-239. D. Reidel.

MORGAN, C. (1998) *Writing mathematically. The discourse of investigation*. Falmer Press, London.

PIAGET, J. (1924) *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Delachaux et Niestlé, Paris.

PIMM, D. (1987) *Speaking mathematically*. Routledge & Kegan Paul, London.

PIMM, D. (1994) *Mathematics classroom language: form, function and force*. In R. Biehler et al. (Eds.): *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Kluwer, Dordrecht.

RESNIK, M. (1997) *Mathematics as a science of patterns*. Clarendon, Oxford.

ROTMAN, B. (1988) *Towards a semiotics of mathematics*. Semiotica **72**, 1-35.

SCHWEIGER, F. (1994) *Mathematics is a language*. In: David Robitaille et al. (Eds.): *Selected lectures from the 7th international congress on mathematical education*. Les presses de l'Université Laval, Sainte-Foye, Québec.

STUBBS, M. (1983) *Discourse analysis. The sociolinguistic analysis of natural language*. Basil Blackwell, Oxford.

USISKIN, Z. (1997) *Mathematics as a language*. In M. Kenney (Ed.): *Communication in Mathematics, K-12 and beyond*. NTCM 1996 Yearbook.

WINSLØW, C. (1998) *On the role of transformations in mathematical discourse*. Preprint.

WINSLØW, C. (1999) *An analogue of Chomsky's language acquisition device?* In Proc. of the 23th annual conference of PME, vol. 4, pp. 329-336. Technion, Haifa, Israël.

WITTGENSTEIN, L. (1969) *Logische-Philosophische Abhandlung*. Routledge & Kegan Paul, London. (Ed. orig. 1922).