technique **13**, 1806, 148–181.
BOCKSTAELE, P. *Nineteenth Century Discussions in Belgium on the Foundations of the Calculus.* Janus **53**, 196, 1–16.
DU BOIS–REYMOND, P. *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in denkleinsten Intervallen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **19**, 1875, 25–37.
CAUCHY, A.L. *Œuvres complètes.* 2. Série tome 3. Paris, 1897.
CAUCHY, A.L. *Œuvres complètes.* 2. Série tome 4. Paris, 1899.
COURNOT, M.A.A. *Traité élémentaire des fonctions et du calcul infinitésimal.* Tome premier. Paris : Hachette, 1841.
DARBOUX, G. *Mémoires sur les fonctions discontinues.* Annales scientifiques de l'école normale Supérieure, 2ième série 4, 1875, 57–112.
DUHAMEL, J.-M.-C. *Éléments de calcul infinitésimal.* Paris, 1856.
GILBERT, PH. *Mémoires sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues.* Dans : Mémoires couronnés et autres mémoires de l'Académie de Bruxelles. Édition en 8, 1873.
GISPERT, H. *Fondements de l'analyse en France.* Archive for History of Exact Sciences **28**, 1983, 38–106.
HAWKINS, TH. *Lebesgue's Theory of Integration.* New York : Dover, 1975.
HOUEL, J. *Cours de Calcul Infinitésimal.* Tome premier. Paris, 1878.
LAGRANGE, L.J. *Œuvres de Lagrange.* Tome IX. Théorie des fonctions analytiques. Paris, 1881.
LAMARLE, A.-H.-E. *Étude approfondie sur les deux équations fondamentales Lim* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ *et* $dy = f'(x)dx$. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, collection in-4°* **24**, *1855, 118 pages.*
MAWHIN, J. Louis–Philippe Gilbert : de l'analyse mathématique aux sources du Nil, en passant par la rotation de la Terre et le procès de Galilei. *Revue des Questions Scientifiques* **160**, *1989, 4: 385–396).*
MAWHIN J. Une brève histoire des mathématiques à l'Université catholique de Louvain. *Revue des Questions Scientifiques* **163**, *1992, 4: 369–386.*
POINCARÉ, H. La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'enseignement mathématique 1, 1889, 157–162; ici cité selon Œuvres tome 11, 129–133.*
RIEMANN, B. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Reihen. *Dans: Riemann, B.* Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlaß, *Éd. par R. Dedekind et H. Weber. Leipzig, 1892.*
DE TILLY, J. Notice sur la vie et les travaux de A.-H.-E. Lamarle. *Annuaire de l'Académie Royale de Belgique* **45**, *1879, 205–253).*
VOLKERT, K. Die Krise der Anschauung. *Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht, 1986.*
VOLKERT, K. Die Geschichte der pathologischen Funktionen – Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie. *Archive for History of Exact Sciences* **37**, *1987, 193–232.*
VOLKERT, K. Zur Differenzierbarkeit stetiger Funktionen – Ampère's Beweis und seine Folgen. *Archive for History of Exact Sciences* **40**, *1989, 37–112.*
WIENER, CHR. Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstraß schen Function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **90**, *1881, 221–252.*
ZERNER, M. Le règne de J. Bertrand (1874 – 1900). *Dans: La France mathématique, Éd. par H. Gispert (Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences.* Nouvelle série Nr. **34**, 1991, 293–322.

La construction et la validation de la connaissance chez Stevin

WALDEGG Guillermina
Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav (Mexique)

Abstract

Le fécond changement subit au 16ème siècle par le concept de nombre et dû à l'unification du traitement des quantités discrètes et continues, n'a été possible que grâce à une profonde transformation des méthodes et des critères de construction, et de validation, des objets mathématiques. Les travaux théoriques de SIMON STEVIN (1548-1620) ont contribué, de façon primordiale, à la réalisation d'une telle transformation, produisant une rupture tant épistémologique que méthodologique avec la Mathématique ancienne. Dans cet article, nous analysons les arguments que STEVIN utilise dans *L'Arithmétique* pour démontrer les propositions dérivées de sa conception opératoire de nombre, et nous montrons le caractère innovateur de ces arguments.

DE

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menſchen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen ſonder ghebrokenen.

Beſchreven door SIMON STEVIN *van Brugghe.*

TOT LEYDEN,
By Chriſtoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.

Introduction

Au cours du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, l'histoire des Mathématiques a subit de dramatiques transformations qui ont inauguré l'ère moderne. Tout d'abord, la création mathématique cartésienne a permis le traitement unifié de l'algèbre et de la géométrie, nécessaire au futur développement du Calcul. Ensuite, l'apparition de l'Algèbre généralisée, comprenant les processus infinis, a marqué le début de la modélisation mathématique du monde physique. Plus important encore a été l'introduction de la méthode analytique, point de départ de la science moderne.

Au XVI$^{\text{ème}}$ siècle se sont produits les changements conceptuels relatifs aux objets mathématiques et à leurs opérations qui ont rendu possibles les résultats innovateurs obtenus au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Cependant, les transformations survenues à la fin de la Renaissance ne sont pas encore entièrement étudiées et comprises par les historiens des Mathématiques et des sciences et donc pas valorisées à leur juste mesure. Un de ces changements importants concerne la notion de *nombre*, sa signification et ses opérations; il a été initié par le grand ingénieur et mathématicien flamand SIMON STEVIN (1548-1620).

Les travaux théoriques de STEVIN ont contribué, de façon capitale, à l'accomplissement d'une rupture aussi bien épistémologique que méthodologique avec la Mathématique ancienne.

STEVIN est connu pour avoir introduit le système décimal de numération dans la culture Occidentale. Le système de STEVIN inclut notamment le traitement des fractions de l'unité qui est encore employé aujourd'hui. Afin de procurer des fondements théoriques à son arithmétique décimale, STEVIN a dû mettre à jour le concept grec de nombre. Il proposa spécialement une nouvelle formulation permettant de relier théoriquement *nombre* et *grandeur* par l'intermédiaire de processus de mesure. Cela a donné une identité aussi bien aux fractions décimales qu'à un important ensemble d'expressions numériques que les anciens avaient explicitement exclues du domaine numérique.

Les méthodes et les critères de construction et de validation des objets mathématiques chez les Grecs.

Il convient de rappeler que l'opposition *continu-discret*, toujours présente dans la cosmologie grecque, atteignait aussi les concepts de base des Mathématiques. ARISTOTE définit la *quantité* comme étant une catégorie de la pensée telle que, si elle est discrète -et par conséquent dénombrable-, il s'agit d'un *nombre*; par contre, si la quantité est continue -et, donc mesurable-, on est face à une *grandeur*. L'opération qui permet l'identification et la classification des quantités est la *division* : une quantité qui ne peut être divisée qu'un nombre fini de fois est un nombre, et à la limite d'une telle division se trouve l'*unité*. Mais, si la quantité peut être divisée indéfiniment -sans perdre son essence- il s'agit d'une *grandeur*, auquel cas la division n'est pas bornée. Ceci implique qu'il n'existe pas d'unité naturelle de mesure.

Poursuivant la tradition aristotélienne, EUCLIDE établit les définitions suivantes dans *Les Éléments* :

> *Définition VII-1* : L'**unité** est ce suivant quoi chacune des choses existantes est dite **une**
>
> *Définition VII-2* : Le **nombre** est une multitude composée d'unités.
>
> *Définition VII-3* : Un nombre est une **partie d'un autre nombre**, le plus petit du plus grand, quant le premier mesure le deuxième.

De cette façon, EUCLIDE suggère l'origine (concrète, appartenant au monde réel) de l'unité, aussi bien que le principe de génération du nombre par l'itération d'unités, et la décomposition

des nombres par la partition de nombres.

De ces définitions et du traitement opératoire qu'EUCLIDE attribue aux nombres dans *Les Éléments*, il découle que, pour l'arithmétique grecque :

> L'unité (numérique) n'est pas un nombre
>
> Les fractions de l'unité ne sont pas des nombres.

Le domaine numérique est donc constitué, chez les Grecs, des nombres entiers, positifs bien sûr, l'unité n'y appartenant pas.

Les grandeurs, à leur tour, constituent un territoire distinct de celui des nombres, un territoire irréductible. Par conséquent, l'étude qui leur est consacrée, la Géométrie, n'a aucun rapport avec l'Arithmétique. En fait, dans *Les Éléments* d'EUCLIDE les livres traitant des nombres (7, 8, 9 et 10) sont complètement indépendants des livres géométriques : jamais, dans un même livre, les mots *nombre* et *grandeur* n'apparaissent ensemble, à l'exception de la proposition 5 du Livre 10, où EUCLIDE énonce la propriété qu'ont les grandeurs commensurables de se comporter "comme les nombres".

Il n'y a aucune définition de grandeur chez EUCLIDE. Néanmoins, il apparaît clairement qu'il utilise tacitement la définition d'ARISTOTE[1] lorsqu'il affirme :

> *Définition V-1* : Une grandeur est **une partie d'une autre grandeur**, la plus petite de la plus grande, quant la première mesure la deuxième. [Les Éléments]

Remarquons que cette définition reproduit la définition VII-3, que nous avons discuté plus haut, le mot *nombre* étant remplacé par *grandeur*.

On reconnaît donc chez EUCLIDE que *nombre* et *grandeur* sont des objets différents dès leurs origines, que leurs traitements théoriques sont dissemblables et que leurs domaines sont disjoints et restreints par rapport aux domaines actuels.

Quant aux méthodes de raisonnement des Grecs, rappelons que la Mathématique euclidienne est l'archétype de la structure hypothético-déductive de la science; cette organisation suppose que tous les éléments qui la composent sont liés par des relations d'*antécédent-conséquent* constituant une chaîne déductive parfaite. Pour échapper à la régression infinie, il faut supposer l'existence de certaines vérités -évidentes d'elles mêmes- appelées *axiomes* et *postulats*. Une fois acceptée l'évidence des axiomes et des postulats, ainsi que toutes les règles de l'enjeu logique, la vérité des propositions est assurée à l'intérieur de la structure. Cela veut dire qu'il n'est jamais nécessaire de sortir de la structure théorique pour démontrer les théorèmes.

Grâce à cette organisation, les Grecs ont développé le système théorique inébranlable que nous connaissons aujourd'hui. Pour aboutir à cette construction, la Mathématique grecque laisse de côté le réalisme et l'empirisme de l'épistémologie aristotélienne en limitant leur participation au seul démarrage de la chaîne logique, c'est-à-dire, à l'établissement de l'évidence des axiomes et des postulats. Une fois qu'EUCLIDE définit l'unité numérique en invoquant le référent du monde physique (comme dans *"ce suivant quoi chacune des choses existantes est dite une"*), tous les concepts et les résultats numériques sont validés à l'intérieur de la théorie. C'est la force de la vérité nécessaire, tirée de la déduction logique, qui procure de la stabilité à la structure.

Voici, sommairement, les impasses de la Mathématique ancienne que STEVIN doit surmonter afin de fournir un fondement théorique au système décimal :

[1] "Ce qui est divisible par deux ou par plus de parties aliquotes" [Métaphysique 1020a, 5].

- Un domaine numérique restreint aux nombres entiers positifs.
- Une unité numérique qui n'est pas un nombre et dont les fractions ne sont pas non plus des nombres.
- Un divorce, aussi bien conceptuel qu'opératoire, entre nombres et grandeurs.
- Une façon de raisonner -dans la tradition axiomatico-déductive- où il est impossible d'ignorer.

Les méthodes et les critères de construction et de validation des objets mathématiques chez STEVIN

Contrairement à la tradition grecque, STEVIN accepte la possibilité de diviser l'unité numérique et d'attribuer aux fractions de l'unité la propriété d'être des *nombres*. Ce fait constitue le point capital sur lequel STEVIN doit diriger toute la force de son raisonnement. Cela est compréhensible dès lors que le but de son travail est de convaincre les savants de l'époque de la justesse et la convenance de la représentation décimale des nombres -rompus-, sans violenter les principes théoriques des anciens.

L'ouvrage mathématique de SIMON STEVIN, qui contient les plus importants apports théoriques à cette science, s'intitule *L'Arithmétique*, un volume publié en français en 1585. Dans ce texte STEVIN présente une extension du concept de nombre qui n'est possible qu'au dépens d'une rupture explicite avec la conception euclidienne. A l'aide de ce nouveau concept de nombre, STEVIN cherche à donner des fondements théoriques aux procédures du calcul arithmétique, nécessaires à la représentation décimale qu'il vient de développer[2].

Le référent concret des objets

STEVIN commence sa dissertation par les définitions suivantes :

> Définition I : L'arithmétique est la science des nombres. [STEVIN, 1585, p. 1]

(à ce stade, aucune rupture ne s'observe encore).

> Définition II : Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chacune chose. [STEVIN, 1585, p. 1]

Ce qui aboutit à :

> Définition X : Nombre rompu est partie ou parties de nombre entier. [STEVIN, 1585, p. 3]

Chez STEVIN, contrairement à ce que la Mathématique grecque préconise, le nombre est associé à la quantité sans que l'opposition entre discret et continu fasse partie du concept. Dès sa deuxième définition, STEVIN supprime la dichotomie continu-discret en tant que propriété définissant la quantité. En effet, il nie explicitement que les nombres soient, dans leur essence, des quantités discrètes :

[2]La même année (1585), STEVIN publie un bref fascicule intitulé *La Disme* traitant la notation décimale et son arithmétique, qui inclut le traitement des fractions décimales.

QUE NOMBRE N'EST POINT QUANTITE DISCONTINUE[3]

Le nombre en tant qu'entité isolée est, d'après STEVIN, "continu" dans le sens aristotélique, c'est-à-dire, qu'il est possible, dans la plupart des cas, de le diviser indéfiniment sans qu'il perde son essence; à la limite, il hérite la propriété de continuité ou de discontinuité de la "chose" (sa quantité) qu'il quantifie. Par exemple, si l'on parle de 2 hommes, le 2 est discret parce que son référent concret -l'ensemble d'hommes- est discret; tandis que si l'on parle de 2 kilomètres, le 2 est continu puisqu'il fait référence à une distance (ou à une longueur) continue. Dorénavant, continu et discret cessent d'être des catégories ontologiques. La discussion sur ce point s'éloigne du domaine des Mathématiques, puisque le fait d'être continu ou discret devient une propriété circonstancielle imputable uniquement aux objets quantifiés. Ceci marque une première différence entre STEVIN et la science grecque : *une façon de valider les objets mathématiques qui a besoin de faire constamment appel aux référents concrets afin de discerner s'il s'agit d'objets continus ou discontinus.*

Cette ligne d'argumentation, souvent utilisée par STEVIN, a le caractère extra-logique qui lui impose le référent concret dont STEVIN a besoin pour conférer une réalité aux nombres. Examinons cet argument lors de sa première apparition, lorsque STEVIN affirme que l'unité est un nombre :

> La partie est de mesme matiere qu'est son entier,
> l'unité est partie de multitude d'unitez,
> Ergo l'unité est de mesme matiere qu'est la multitude d'unitez
> Mais la matiere de la multitude d'unitez est nombre
> Doncques la matiere d'unité est nombre. [STEVIN, 1585, p. 1]

Qui le nie, continue STEVIN, *fait comme celui qui nie qu'une pièce de pain soit du pain.* Nous reviendrons sur ce point à plusieurs reprises par la suite.

L'existence opératoire des objets

Le concept de nombre est édifié par STEVIN sur la constatation d'un isomorphisme opératoire entre nombres et grandeurs, c'est-à-dire, que le nombre se développe à partir de la considération selon laquelle il est possible d'opérer avec lui exactement de la même façon qu'avec les quantités continues. *Nous trouvons ici la façon de valider les objets mathématiques qui domine l'argumentation stevinienne : les opérations définissent (et ainsi attribuent) l'existence des objets.* Dans le cas qui nous intéresse, l'essence du nombre est portée par ses opérations.

Voici un passage de *L'Arithmétique* où STEVIN, argumentant en faveur de la division de l'unité, utilise cette façon de valider l'existence des nombres; il affirme que nier la divisibilité de l'unité revient à étouffer la *nature du nombre*, dont l'essence se manifeste par les opérations arithmétiques qu'on peut réaliser avec lui :

> L'unité est divisible en parties (vrai est qu'ils [les anciens] les nient, mais mille leurs distinctions ne sont pas suffisantes, de pouvoir ainsi opprimer la nature du nombre, qu'elle ne manifeste par force son essence, es arithmétiques opérations de plusieurs auteurs, comme entre autres par l'absolue partition de l'unité de la 33 question du 4 livre, & la 12, 13, 14, 15 questions du cinquième livre du Prince des Arithméticiens Diophante[4]). [STEVIN, 1585, p. 2]

[3]STEVIN, 1585, p. 2 (en majuscules dans l'original)

[4]Voir HEATH (1964). Ces propositions sont nommées IV 31, V 9, 10, 11 y 12: Elles commencent toutes avec la phrase : "pour diviser l'unité en deux parties (ou nombres)" ou bien, "pour diviser l'unité en trois nombres".

L'affirmation précédente confère au nombre une existence opératoire, c'est-à-dire que ce sont les opérations que nous pouvons réaliser sur les nombres qui déterminent leur nature.

Le fait que les résultats des opérations algébriques réalisées sur les nombres soient à leur tour des nombres constitue un pas très important vers l'extension du domaine numérique. Cette affirmation n'obéit pas aux règles grecques d'homogénéité des grandeurs. Chez les Grecs, il est interdit d'opérer avec des grandeurs dont la nature est inégale; ainsi, l'addition d'aires et de volumes ou de lignes et d'aires n'a pas de sens. De même, une grandeur de la quatrième puissance n'a pas non plus de signification. Dans la géométrie grecque, une grandeur de la première puissance représente un segment, une de la deuxième puissance, une surface, et une grandeur de la troisième puissance représente un volume; en conséquence, il n'y a aucun besoin de puissances supérieures à trois.

STEVIN, inspiré par la nature opératoire des nombres, ne trouve aucune difficulté à accepter :

QUE NOMBRES QUELCONQUES PEUVENT
Etre Nombres carrés, cubiques,&c. Aussi que racine quelconque est nombre[5]

Dont la démonstration directe se base sur l'exposition des grandeurs géométriques qui représentent ce genre de nombres (nous reviendrons sur ce point plus tard). Cette affirmation conduit STEVIN à définir un *nombre algébrique* comme étant une *quantité ou une multitude composée de quantités* [Définition XIX, p. 6], peu importe que les quantités en question portent une puissance supérieure à trois (ou inférieure à un) ou que leurs puissances soient différentes entre elles.

Afin de compléter le cadre qui élimine le problème d'homogénéité dimensionnelle, STEVIN définit le polynôme (multinome) algébrique :

> Multinomie algebraique est un nombre consistant en plusieurs diverses quantitez. [STEVIN, 1585, Définition XXVI, p. 6]

et il présente un exemple :

> Comme 3③ + 5② - 4① + 6 s'appelle multinomie algebraique [*Ibidem*]

La raison de fond qui nourrit la conviction de STEVIN sur le caractère numérique des nombres algébriques est la nature opératoire du nombre : tous les résultats des opérations qui se réalisent avec des nombres sont, à leur tour, des nombres[6].

Le raisonnement par l'absurde appuyé sur le contexte concret

Afin de gagner l'acceptation de son nouveau concept, STEVIN reconnaît qu'il doit montrer la supériorité de sa définition par rapport à la définition traditionnelle. C'est ainsi qu'il commence son argumentation par l'affirmation suivante :

QUE L'UNITE EST NOMBRE[7]

[5]STEVIN, 1585, p. 8, En majuscules dans l'original
[6]Sur les arguments de STEVIN en faveur du caractère opératoire du nombre, voir WALDEGG 1993.
[7]STEVIN 1585 p. 1 (en majuscules dans l'original)

STEVIN conteste le point de vue traditionnel selon lequel l'unité n'est pas un nombre mais le "principe" générateur du nombre, un rôle équivalent au rôle du point (géométrique) par rapport au segment de droite. Il élabore deux arguments contre la perspective ancienne : l'un est philosophique, l'autre pseudo-mathématique. L'argumentation philosophique -que nous avons aperçue dans une citation précédente[8]- fait référence au caractère ontologique de l'unité, concluant que la négation de l'unité en tant que nombre équivaut à nier qu'un morceau de pain soit du pain.

D'autre part, l'argument pseudo-mathématique est le suivant :

> Si du nombre donné l'on ne soubstraie nul nombre, le nombre donné demeure
> Soit trois le nombre donné, & du mesme soubstrayons un
> que n'est point nombre, comme tu veux.
> Doncques le nombre donné demeure, c'est-à-dire qu'il y restera encore trois, ce qui est absurde [STEVIN, 1585, p. 1]

Les deux argumentations font partie d'un même discours démonstratif : *un raisonnement par l'absurde appuyé sur le recours au contexte concret* : en niant la proposition en question on aboutit à une incohérence dont la constatation est à la portée de quiconque.

L'appel à l'analogie

STEVIN affirme que l'exclusion de l'unité du genre nombre retrouvée dans la Mathématique de l'antiquité, est due à la volonté des anciens de trouver le "principe" ou la "cause" du nombre. Il reconnaît qu'il s'agit là de la méthode utilisée par les philosophes dans de telles discussions et ajoute que, dans le cas des grandeurs géométriques comme la longueur, l'aire et le volume, le principe évident est le "point". C'est dans ce sens de "principe" que l'on cherche un principe pour le nombre. STEVIN, plutôt que d'argumenter sur la pertinence de rechercher les causes dans un traité de Mathématiques, accepte le défi philosophique et élabore une critique de la solution donnée dans le passé. Voilà un autre raisonnement typique de la pensée de STEVIN dont le fondement principal se trouve dans l'*analogie*.

Les nombres et les grandeurs, poursuit STEVIN, ont tant de choses en commun qu'ils pourraient paraître presque identiques; par conséquent, il y a quelque chose dans le nombre qui doit correspondre à ce que le point est par rapport aux grandeurs. Pour les Grecs, l'unité est le principe du nombre de même que le point est le principe de la grandeur et ceci, affirme STEVIN, est à la source de toutes les difficultés. [Cf. STEVIN, 1585, p. 2]. L'analogie proposée par les Grecs, selon STEVIN, présente deux défauts fondamentaux : d'abord, l'unité est une partie du nombre tandis que le point n'est pas une partie de la droite[9]. Ensuite, l'unité est divisible mais le point ne l'est pas, comme STEVIN démontre dans la citation que nous avons étudiée plus haut[10].

[8]La partie est de mesme matiere qu'est son entier,
l'unité est partie de multitude d'unitez,
Ergo l'unité est de mesme matiere qu'est la multitude d'unitez
Mais la matiere de la multitude d'unitez est nombre
Doncques la matiere d'unité est nombre [STEVIN, p. 1].

[9]EUCLIDE, dans sa définition du Livre I, suit l'analyse d'ARISTOTE. Un point constitue la frontière d'un segment ou divise un segment en deux parties. Mais un segment n'est pas fait de points [EUCLIDE, Livre I, Définition 3].

[10]L'unité est divisible en parties (vrai est qu'ils [les anciens] les nient, mais mille leurs distinctions ne sont pas suffisantes, de pouvoir ainsi opprimer la nature du nombre, qu'elle ne manifeste par force son essence, es arithmé-

Ainsi, STEVIN conclut que l'unité n'est pas au nombre ce que le point est au segment. Cependant, puisqu'il soutient que nombre et grandeur sont à ce point semblables que "*ils paraissent presque identiques*", la question suivante se pose : qu'est qu'il y a pour le nombre qui soit équivalent au point pour la droite? STEVIN répond :

> Je dit que c'est 0 (qui se le dict vulgairement Null, & que nous nommons commencement en la suivante 3 définition) ce que ne tesmoignent pas seulement leurs parfaictes & générales communautez, mais aussi leurs irréfutables effects. [STEVIN, 1585, p. 2]

Les "communautés" que STEVIN établi entre le zéro et le point sont les suivantes :

1. Point et zéro ne sont ni segment ni nombre (respectivement) mais ils y sont attachés.
2. Ni le point ni le zéro ne peuvent être divisés en parties.
3. Une infinité de points ne fait pas de segment de même qu'une infinité de zéros ne fait pas de nombre.
4. Ajouter un point ou un zéro au segment ou au nombre (respectivement) n'accroît pas sa quantité.

Concernant cette dernière analogie, STEVIN présente le raisonnement suivant (figure 1) :

> Mais si l'on concède que AB soit prolongée jusques au poinct C ainsi que AC soit une continue ligne, alors AB s'augmente par l'aide du poinct C; Et semblablement si l'on concède que D 6 soit prolongé jusques en E 0, ainsi que DE 60 soit un continue nombre faisant soixante, alors D 6 s'augmente par l'aide du nul 0... [STEVIN, 1585, p. 2]

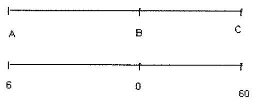

FIGURE 1

De cette façon, la ressemblance est encore valable.

L'exposition des grandeurs

STEVIN est convaincu que grâce à ses arguments, l'unité ne joue plus le rôle central dans l'analyse de la quantité. Le rôle spécial qu'ARISTOTE donne à l'unité et qu'EUCLIDE incorpore dans sa Mathématique, repose sur des arguments philosophiques. Ces arguments, à leur tour, sortent de la distinction qualitative entre nombre et grandeur en termes de continuité.

La définition euclidienne de nombre ("*une multitude composée d'unités*") fait penser davantage à un "nombre pur", de telle sorte que les rapports entre deux ou plus de nombres peuvent être conçus indépendamment des quantités auxquelles ils font référence; par exemple, pour

tiques opérations de plusieurs auteurs, comme entre autres par l'absolue partition de l'unité de la 33 question du 4 livre, & la 12, 13, 14, 15 questions du cinquième livre du Prince des Arithméticiens Diophante) [*L'Arithmétique*, p. 2].

déterminer que 10 est un nombre entier, paire, moitié de 20, double de 5, etc. il n'est pas nécessaire d'imaginer les quantités (la chose énumérée) que ces nombres représentent.

Un problème qui surgit au moment d'étendre la définition de nombre aux quantités continues est que, contrairement à ce que l'on trouve pour les quantités discrètes, il n'y a pas d'"unité naturelle" : on affecte un nombre à une grandeur au moyen d'une unité conventionnelle, à savoir, celle qui a été choisie comme unité de mesure. Dans ce cas, lorsqu'on opère sur les nombres identifiés aux quantités (continues et discontinues) il n'est pas claire si l'on opère sur des "vrais nombres", sur des symboles, ou sur les "quantités dénombrées", ce que Le Teneur reproche à STEVIN [Cf. JONES, 1978]. Le manque d'une unité naturelle entraîne une difficulté à débarrasser le nombre du contexte qui permet d'opérer sans avoir besoin de faire appel à la quantité correspondante. Conscient de cette difficulté, STEVIN définit le nombre arithmétique comme étant celui qui s'obtient après abstraction de la quantité dont il provient :

> Définition IV : Nombre arithmétique est celuy qu'on explique sans adjective de grandeur [STEVIN, 1585, Def. 4, p. 3]

Une grande partie du travail de STEVIN dans *L'Arithmétique* est consacrée à montrer que le domaine des nombres est homogène, étant donné que les nombres sont indépendants de leur genèse et que, de cette façon, on peut opérer sur eux sans aucune référence aux quantités d'où ils proviennent. De sorte que, par exemple, le nombre 9, que nous pouvons imaginer comme étant associé à une quantité linéaire, peut être interprété aussi comme l'aire d'un carré, sans perdre ou modifier ses propriétés relationnelles par rapport aux autres nombres, ni même ses propriétés opératoires.

Il est clair que l'unité cesse d'avoir le caractère privilégié qu'elle a dans la Mathématique grecque, en tant que principe générateur du nombre. C'est la raison pour laquelle STEVIN doit renoncer à la possibilité d'avoir un principe de génération absolu; dorénavant il sera toujours obligé de chercher un support en dehors des Mathématiques, situé dans le contexte concret : la quantité de chaque chose.

STEVIN, en ouvrant un si vaste spectre aux nombres, soulève les préoccupations suivantes : ces nouvelles entités sont-elles cohérentes avec la définition initiale de nombre? Représentent-elles vraiment des "quantités des choses"? STEVIN se consacre donc à la tâche de montrer que, de la même façon qu'il y a un nombre pour chaque grandeur (résultat de la mesure de cette grandeur), il existe une grandeur pour chaque nombre. Pour y aboutir, STEVIN a besoin de montrer que l'identification grecque qui restreint certaines grandeurs géométriques aux puissances d'un nombre (x^2 est une aire et x^3 un volume, sans aucune autre possibilité) n'est pas unique.

Un exemple de ce raisonnement est le suivant : supposons que nous ayons un segment de longueur 2 (figure 2). Si nous dessinons un carré sur le segment, l'aire sera $2^2 = 4$ et si maintenant nous construisons un cube sur le carré d'aire 4, son volume sera $2^3 = 8$. Jusqu'alors ce raisonnement coïncide avec le raisonnement grec : la première puissance est linéaire, la deuxième est carré et la troisième est cubique. Si maintenant nos empilons 2 de ces cubes, le volume du prisme résultant sera $2^4 = 16$ de sorte qu'on a conféré un sens géométrique a la quatrième puissance ainsi qu'à toutes les puissances suivantes [Cfr. STEVIN, 1585, pp. 4-5].

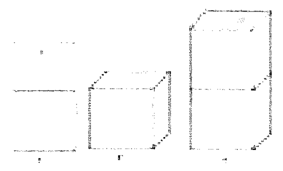

FIGURE 2

De la même façon, STEVIN expose les grandeurs géométriques associées à des puissances de nombres fractionnaires. Par exemple, partons d'un segment de longueur 1/2 (figure 3) et construisons le carré correspondant qui aura une aire $(1/2)^2 = 1/4$, et le cube qui aura un volume $(1/2)^3 = 1/8$. En divisant le cube en deux nous aurons un prisme dont le volume es $(1/2)^4 = 1/16$, de même que pour toutes les puissances fractionnaires suivantes [Ibidem].

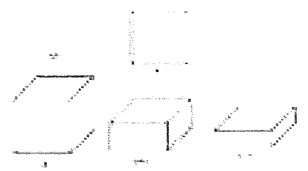

FIGURE 3

Avec cette méthode, STEVIN veut montrer qu'il est toujours possible de produire une grandeur qui représente un nombre donné, de la même façon qu'il est toujours possible d'exhiber un nombre associé à une grandeur donnée. À travers cette identification fonctionnelle, STEVIN prétend apporter un fondement a l'homogénéité du domaine numérique et à la nature de son "nombre arithmétique".

Les processus infinis

STEVIN accepte l'existence théorique des expansions décimales infinies en tant que conséquence de l'existence opératoire des nombres. En fait, il propose une méthode (basée sur l'algorithme de la division) permettant de s'en approcher indéfiniment [cf. STEVIN, 1585, p. 210]. La citation suivante, relative aux grandeurs incommensurables, montre la position de STEVIN à cet égard :

> ... Mais combien ce théorème est véritable[11], toutesfois nous ne pouvons cognoistre par telle experience, l'incommensurance de deux grandeurs proposée; Premièrement parce qu'à cause de l'erreur de nos yeux et mains (qui ne peuvent parfaitement veoir et partir) nous iugerions à la fin que tous grandeurs, tant incommensurables que commensurables, fussent commensurables. Au second, encore qu'il nous fust possible, de soubsttraire par action, plusieurs cent mille fois la moindre grandeur de la maieure, et le continuer plusieurs milliers d'années, toutesfois (estant les deux nombres proposez incommensurables) l'on travailleroit éternellement, demeurant tousisours ignorants de ce qui à la fin en pourroit encore avenir; Ceste, **manière donc de cognition n'est pas légitime**, ainsi position de l'impossible, à la fin d'ainsi aucunement declairer, ce qui consiste véritablement en la Nature. [STEVIN, *Traité des incommensurables grandeurs*, p. 215)]

[11] STEVIN fait référence à la Deuxième Proposition du Livre X des *Éléments* d'EUCLIDE : "Si de deux quantités distinctes données, on reste toujours la plus petite de la plus grande, et le reste ne mesure jamais la quantité précédente, Telles quantités sont incommensurables".

Dans cette affirmation, STEVIN montre aussi bien sa position empiriste que la prééminence de l'opération : il suppose que la connaissance est extraite de la Nature, à travers les opérations que le sujet peut effectuer et *conclure*.

La validation de la connaissance

Quand STEVIN caractérise les objets théoriques par les opérations qu'on réalise sur eux, il se retrouve dans la nécessité de faire appel aux arguments exogènes afin de valider ses résultats. Tout au long de son ouvrage mathématique STEVIN passe constamment des arguments numériques aux arguments géométriques et aux arguments physiques. Lorsqu'il définit le nombre en fonction de "la quantité de chaque chose" et résume son essence aux opérations qu'on réalise sur lui, STEVIN crée une série d'objets (résultats des opérations) pour lesquels il n'existe pas de structure théorique pour les valider. En conséquence, STEVIN a besoin de faire appel à de divers contextes, soit en présentant des grandeurs géométriques associées à ces objets, soit en s'appuyant sur "la quantité de la chose" que ces objets représentent. Bien que suffisamment cohérente pour être formalisable, la théorie de STEVIN est subordonnée aux contenus donnés, extra-logiques, d'où sa faiblesse structurale du point de vue formel.

Bibliographie

ARISTOTLE, *The Great Books of the Western Word*, Vol. VIII, Encyclopaedia Britannica, Chicago 1978.

EUCLID, *The Elements*, T. Heath, *Euclid. The Thirteen Books of the Elements*, Dover Publications Inc., New York, 1956.

HEATH, T.L., (1964) *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*. New York: Dover Publications.

JONES, C.V., (1978), *On the concept of one as a number*, doctoral dissertation, University of Toronto.

JONES, C.V., (1987), "La influencia de Aristteles en el fundamento de Los Elementos de Euclides", *Mathesis*, vol. II, No. 4.

STEVIN, SIMON, (1585a), *L'Arithmétique et la Pratique d'Arithmétique. Les Œuvres Mathématiques* (1634) Ed. A. Girard, Leyde.

STEVIN, SIMON, (1585b), *La Disme. Les Œuvres Mathématiques* (1634) Ed. A. Girard, Leyde.

WALDEGG, G., (1993): "La notion du nombre avant l'établissement de la science analytique". *Actes de la Première Université d'été Histoire et épistémologie dans l'éducation Mathématique*. Montpellier