Commentarii in Sphaeram J. DE SACROBOSCO per Chr. CLAVIUM· · · , on trouve une *Digressio de Crepusculis*, où l'auteur affirme, dans le préambule, qu'il a seulement rassemblé dans un résumé le livre de NUNES. La Prop. XXII de cette Digression nous apprend à trouver un point de l'écliptique, où le soleil produit le crépuscule minimum et à déterminer la durée de ce crépuscule. Quoique, en vérité, elle ne soit pas une relation si simple que celle que l'on propose ici, on ne peut pas, toutefois, nier que cette solution-là est légitime, laquelle facilment aussi se réduit à celle-ci.

Et voilà la relation trouvée par Jacob Bernoulli, pour la détermination de la déclinaison du soleil, le jour du crépuscule minimum, dans un endroit[25] : *"Comme le sinus total à la tangente de 9°, ainsi le sinus de l'élévation du pôle au sinus de la déclinaison cherchée"*, c'est-à-dire,

$$1/\mathrm{tg}(9^\circ) = \sin(\phi)/\sin(d).$$

Donc, le jour où le crépuscule de durée minimum arrive, dans un endroit septentrional ayant latitude ϕ, c'est celui où la déclinaison *austral* du soleil, sur l'écliptique, a la valeur d, telle que

$$\sin(d) = \sin(\phi)\mathrm{tg}\ (h/2).$$

Finalement, on peut dire que le problème du crépuscule minimum a été résolu par PEDRO NUNES, qui a établi géométriquement (il ne connaissait pas encore le calcul différentiel) des formules pour la détermination, soit de la durée du crépuscule minimum, dans un endroit septentrional, soit des jours[26], où il a lieu. Il a aussi été résolu, une centaine d'années après, mais partiellement, par JACOB BERNOULLI celui-ci ayant d'autres moyens mathématiques, c'est-à-dire, le calcul différentiel. Lui aussi a trouvé, une formule pour la détermination des jours[27] où le crépuscule, dans un endroit septentrional, a durée minimum.

Références

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA. Obras de PEDRO NUNES, *De Crepusculis*, 1943.

GUIMARÃES, Rodolfo. Les Mathématiques en Portugal, 2ième édition, Coimbra 1909.

GUIMARÃES, Rodolfo. Sur la Vie et l'Œuvre de Pedro Nunes, Coimbra, 1915.

STOKLER, Garção. Ensaio Histórico sobre a Origem e os Progressos das Matemáticas em Portugal, Paris, 1819.

DORRIE, Heinrich. 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover Publications, New York, 1965.

"SOLUTION PROBLEMATIS DE MINIMO CREPUSCULO, Per Jacob Bernoullium *Communicata in litteris, Basileae, die 20 Julii, 1692, datis.*

[25] Ut Sinus Totus ad Tangent. 9 grad. Sic Sinus Elevationis Poli ad Sinum quaesitae Declinationis *Australis*, quam Sol tempore minimi Crepusculi obtinet.

[26] La déclinaison *austral* du soleil, sur l'écliptique, le jour où le crépuscule, dans un endroit septentrional, a durée minimum.

[27] V. note 26.

Quelles mathématiques pour former des enseignants
Illustration d'une expérience de définition de contenus adéquats, à forte coloration épistémologique et historique, sur le thème "La géométrie : une description de la réalité ?"

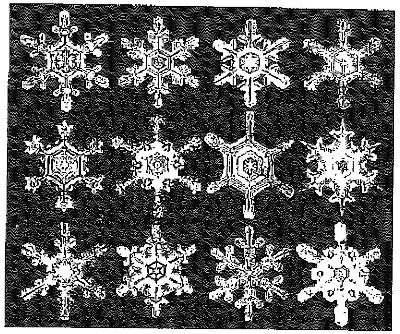
DALLA PIAZZA Aldo
Université de Berne (Suisse)

Abstract

Doit-on former des matématiciens qui feront de l'enseignement ou des enseignants qui enseigneront les mathématiques ? Une formation académique en mathématiques donne-t-elle de cette discipline la vue large et contextualisée qui devrait être celle d'un enseignant ou mène-t-elle à une forte spécialisation et à une vision formaliste et trop axée sur la rigueur et la structuration axiomatique ?

Ces questions ont amené, notamment en Suisse, à ce que soit discutée l'idée de formation en mathématiques orientée vers l'enseignement. La définition des buts, des contenus et des processus à mettre en œuvre dans un tel cadre demande un travail approfondi de réflexion ainsi que la réalisation et l'évaluation de nombreux essais.

Cette conférence donnera une présentation d'un tel essai, centré sur une approche épistémologique et historique de la géométrie et de son enseignement, essai qui a été réalisé l'automne dernier à l'Université de Berne, en Suisse, dans le cadre d'une formation post-diplôme destinée à habiliter un groupe de personnes à enseigner la didactique des mathématiques dans les Hautes écoles pédagogiques qui se mettent en place dans ce pays.



1 Le problème général

Doit-on former des mathématiciens qui feront de l'enseignement ou des enseignants qui enseigneront les mathématiques ? Une formation académique en mathématiques donne-t-elle de cette discipline la vue large et contextualisée qui devrait être celle d'un enseignant ou mène-t-elle à une trop forte spécialisation, à une vision formaliste et trop axée sur la rigueur et sur la structuration axiomatique ?

Quelques réflexions préalables permettent d'éclairer ces questions, sans prétendre leur donner une réponse définitive. Partons peut-être du "haut niveau" de savoir qui est généralement attendu pour enseigner les mathématiques et remarquons avec DEVELAY (1994, p. 84) :

> Qu'est-ce qu'un haut niveau : un savoir pointu comme celui de l'agrégation dans quelques domaines triés et sans grande relation avec les programmes du second degré ou ne couvrant au mieux qu'une faible partie d'entre eux ? Nous pensons pour notre part, qu'un savoir de haut niveau est celui qui permet un recul distancié vis-à-vis de la structure de la discipline, un savoir des contenus et de leur épistémologie.

Nous partageons ici l'avis de WITTMANN (1989, p. 294 et 299) selon lequel la formation universitaire ne répondrait pas réellement à cette attente :

> In general, the mathematical training of teachers is not systematically related to educational aspects. Very often we find a formal study of mathematics ignoring the requirements of school [...]. Mathematics must not be seen within the narrow boundaries of a specialised discipline which is represented exclusively by the departments of pure mathematics at the universities; rather it should be seen in the full spectrum of its relationships to science, to technology, to the humanities, and to human life.

L'enseignement universitaire est souvent très formel. Il privilégie des connaissances pointues, une démarche d'enseignement essentiellement transmissive et une présentation des connaissances sous la forme de "théories achevées". La concrétisation par des exemples "pratiques", par des interprétations ou des représentations intuitives est rare.

Cette forme d'enseignement peut s'avérer efficace et permettre une avance rapide pour les quelques étudiants qui deviendront éventuellement des chercheurs en mathématiques, les mieux adaptés et les plus doués pour une telle approche. Cependant, nombreux sont ceux qui se réfugient dans un apprentissage par cœur, pour les examens, seul moyen pour eux de "réussir". La représentation de ce que sont les mathématiques, de la façon dont elles se construisent, se structurent, se présentent ou s'enseignent en sort fréquemment biaisée. Cela se révèle notamment lors des séminaires, dans les examens ou dans les cours de didactique, lorsque les étudiants doivent "se dévoiler".

Sans nécessairement vouloir la condamner, nous pensons que cette forme d'enseignement n'est sûrement pas idéale si l'on vise à former des enseignants. Selon nous, un réel effort doit être entrepris pour infléchir la formation des futurs enseignants vers des contenus moins techniques, en cherchant à leur donner une vision large de la structure des mathématiques, une vision réaliste de la façon dont on les "fait", une vision de leur sens, de leur rôle et de leur histoire[1].

[1]Pour rétablir l'équilibre, il convient de remarquer que, de leur côté, les sciences de l'éducation devraient se pencher plus qu'elles ne le font aujourd'hui sur les particularités des disciplines à enseigner. Ce qu'écrit Shulman (1986, p.7) au sujet de ce qu'il appelle "the missing paradigm" mérite bien une réflexion ! WITTMANN (1992, p. 58) montre selon nous très bien comment peut être réalisée une intégration des aspects liés aux mathématiques et de ceux liés aux disciplines qui contribuent à leur apprentissage ou à leur enseignement.

Ces réflexions ont amené à ce que soit discutée l'idée de **formation en mathématiques orientée vers l'enseignement**. La définition des buts, des contenus et des processus à mettre en œuvre dans un tel cadre demande un travail approfondi de réflexion ainsi que la réalisation et l'évaluation de nombreux essais. Ce texte présente un tel essai, centré sur une approche épistémologique et historique de la géométrie et de son enseignement.

2 Le cadre de l'expérience

Nous l'avons réalisée, mon collègue Th. Rychener et moi, à l'Université de Berne, en 1998, dans le cadre d'une formation post-diplôme destinée à habiliter un groupe de personnes à enseigner la didactique des mathématiques dans les Hautes Écoles Pédagogiques qui se mettent en place en Suisse. Le cours concernait douze personnes enseignant la didactique des mathématiques dans la formation des enseignants du primaire et du secondaire obligatoire depuis plusieurs années, mais elles-mêmes insuffisamment formées pour satisfaire aux exigences qui seront posées pour œuvrer dans les nouvelles structures de formation. La majorité des participants étaient des enseignants du degré secondaire I (élèves de 12-15 ans) réputés avoir "fait leurs preuves". La plupart disposaient d'une formation de premier cycle en mathématiques (comparable au niveau bac+2). Quelques-uns n'avaient jamais étudié les mathématiques à l'université mais étaient porteurs d'un diplôme de psychologie ou de pédagogie.

La formation qu'ils suivaient comportait des compléments académiques en mathématiques, des cours de psychopédagogie et de didactique générale, des cours de didactique des mathématiques ainsi que des modules de formation en mathématiques orientée vers l'enseignement (le terme allemand exact est "unterrichtsbezogene Mathematik"). C'est d'un tel module, organisé sur une semaine intensive de cours, de travaux de groupe et de séminaires, qu'il est question ici.

Le niveau relativement peu élevé des connaissances des participants en mathématiques a évidemment constitué une difficulté particulière. Il nous a contraints à nous en tenir à l'essentiel et nous a évité de nous laisser entraîner dans des considérations formelles et techniques pourtant bien tentantes pour des mathématiciens...

Nous avions carte blanche pour la conception de ce cours si ce n'est qu'il devait porter sur la géométrie et répondre aux attentes d'un "cours de mathématiques orienté vers l'enseignement"[2].

3 Les objectifs poursuivis

Nous nous étions fixés des objectifs de trois types :

Connaissances "dans" les mathématiques :

- Approfondir les connaissances des participants en géométrie euclidienne.
- Travailler dans des théories géométriques diverses, ou dans différentes approches de la géométrie, pour les comprendre.

La géométrie s'étudie d'habitude par une approche élémentaire construite sur le modèle euclidien dans les premières années de scolarité obligatoire. Par la suite, elle se traite sous forme analytique et vectorielle puis, à l'université, sous forme d'algèbre linéaire, de géométrie affine, convexe, projective ou différentielle, par une approche des variétés riemanniennes ou de la topologie. Il est rare qu'un retour sur les fondements euclidiens apparaisse dans les cursus.

[2]WITTMANN (1989, p. 299-300) donne une description qui s'appliquerait très bien à ce concept, mais qui ne nous était malheureusement pas encore connue à l'époque.

Cette trajectoire de formation fait que les futurs enseignants considèrent fréquemment la théorie euclidienne comme peu profonde, élémentaire et naïve. Ils sont en outre souvent très mal à l'aise en géométrie synthétique et recourent volontiers à des formes calculées de géométrie, même lorsque les arguments synthétiques sont plus explicites. Une réflexion au sujet des liens entre les différentes approches joue un rôle important dans la préparation à l'enseignement. Dans un cours classique de mathématiques, nous nous en serions tenus à ces premiers points.

Connaissances "sur" les mathématiques :

- Étudier la genèse des théories géométriques.
- Étudier le va-et-vient entre perception de la réalité, élaboration de schémas, de théories et illustration par des modèles, sur l'exemple de la géométrie.
- Comprendre la portée et le sens de la démarche axiomatique.
- Réfléchir sur les rapports entre le vrai, la réalité, la perception et la géométrie.

Généralement, les étudiants savent peu de choses de l'histoire des mathématiques et des idées mathématiques. Ils savent que la géométrie euclidienne relève d'une construction axiomatique et la conçoivent fréquemment comme un "système axiomatique matériel" (TRUDEAU 1987). Ils y attachent quelques noms mythiques, en connaissent divers axiomes ainsi que des "définitions" pour les notions de point, de ligne et de surface, qu'ils citent avec une pointe d'amusement et de gêne parce qu'ils en craignent confusément les limites. L'idée que la géométrie naïve qu'ils ont à l'esprit n'est que leur représentation mentale d'une géométrie formelle et que ces "définitions", bien que nécessaires pour cette représentation, n'ont pas de raison d'être dans une telle géométrie leur est habituellement étrangère.

Ils décrivent volontiers l'axiome des parallèles, qu'ils savent discutable, mais sans vraiment pouvoir imaginer comment ou pourquoi. Justement parce que leur conception de cette géométrie est celle d'une idéalisation de la réalité et de la vérité[3] et que, dans la pensée commune, le lien entre **la** géométrie et **la** réalité est à la fois extrêmement fort et culturellement bien ancré !

Ils lient l'approche axiomatique aux structures algébriques, ressenties comme formelles, plutôt qu'à la géométrie, ressentie comme bien réelle. Ils sont fréquemment désarçonnés lorsqu'on leur demande si un axiome se prouve ou se justifie et qu'on leur rappelle dans la foulée qu'ils ont systématiquement dû commencer par les "vérifier", dans chaque exemple traité en cours d'algèbre. Pour la plupart, le rapport entre système axiomatique formel et modèle le réalisant concrètement n'est pas clair, comme ne l'est pas celui entre réalité et schéma.

Un cours d'histoire des mathématiques serait entré dans les évènements et les différentes sources existantes de manière plus détaillée[4]. Un cours d'épistémologie aurait approché les questions évoquées ci-dessus plus systématiquement. Il les aurait traitées plus en profondeur, avec un accent plus marqué vers la philosophie. Mais de tels cours n'auraient probablement pas

[3]On ne discute habituellement pas la vérité dans les cours de mathématiques. Elle est supposée être absolue et basée sur la logique, bien qu'elle soit en fait souvent issue de la conviction par "le bon sens", fondée sur la perception "claire" de la réalité ou construite sur l'intuition (GONSETH 1936, p. 327).

[4]Nous pensons avec DEVELAY (1994, p. 85-86) que ce qui importe dans la formation des enseignants ce n'est bien sûr pas "*une histoire descriptive, biographique qui expliquerait par exemple, que la notion de logarithme népérien est due à un baron écossais du nom de John Neper qui vécut au XVIème siècle* [...]. *Mais à une histoire des idées qui évoquerait à quel problème s'est confronté Neper* [...], *quels étaient les concepts mathématiques de l'époque, en quoi ils se montraient insuffisants* [...]."

abordés les liens de ces questions avec la géométrie enseignée aujourd'hui à l'école, pour en donner une vue large et contextualisée.

Objectifs de type didactique

- Suivre les étapes de l'histoire pour développer le savoir des participants en géométrie et en histoire de la géométrie (démarche génétique).
- Comparer la genèse du savoir géométrique, l'apprentissage de la géométrie et l'évolution de son enseignement.
- Expérimenter une approche socio-constructiviste au niveau tertiaire.
- Comprendre ce qu'est une révolution copernicienne, en la vivant dans le sens de son déroulement.

La démarche génétique se justifie particulièrement dans un cas où l'on veut simultanément, comme ici, étudier la constitution du savoir, faire acquérir ce savoir et réfléchir au processus de son acquisition par des élèves. Couplée à une réflexion sur quelques courants didactiques actuels ainsi qu'à une analyse de manuels, elle donne une grande cohérence à l'ensemble et permet de dresser de nombreux parallèles entre ce qui s'est passé dans l'histoire, ce qui est en train de se passer chez les étudiants et ce qui se passera probablement chez des élèves.

Il est par exemple intéressant de comparer, d'une part, ce qu'on imagine avoir été le processus de constitution du savoir géométrique avant qu'il ne soit formalisé par Euclide (PONT 1986, pp. 62-65 et 75-99), d'autre part, les processus décrits par les théories de l'apprentissage et, finalement, certains processus préconisés aujourd'hui dans l'enseignement de la géométrie : passer par des mathématiques en construction, des mathématiques *informelles* (WITTMANN, 1987); privilégier une approche *réaliste*, favoriser l'élaboration *d'objets mentaux* par le biais d'activités concrètes faisant sens pour l'apprenant, constituer et renforcer graduellement des *îlots déductifs* (CREM 1995, pp. 33, 34 et 135).

Il est de même intéressant d'opposer cela à la démarche axiomatique systématique qui transparaît encore dans de nombreux manuels de géométrie, alors que c'est beaucoup plus rare pour d'autres domaines des mathématiques, et de mesurer ainsi l'influence considérable des travaux d'Euclide. L'utilisation, comme manuel d'enseignement, d'un traité scientifique établissant l'état du savoir à une certaine époque exerce encore ses effets aujourd'hui.

Il vaut également la peine de constater comment, après plus de deux mille ans d'efforts ayant mené aux travaux de Hilbert, si parfaits qu'on a pu penser clos le chapitre de la géométrie, quelques années ont suffi pour retourner la construction et amener à des présentations de la géométrie basées sur les nombres : les nombres s'expliquaient par la géométrie (SESIANO 1999), la géométrie se justifie aujourd'hui par les nombres.

Finalement, la démarche génétique s'impose dans un cas où elle permet de faire vivre une révolution copernicienne à celui qui la suit. Se libérer d'un enfermement dans une vision strictement euclidienne par l'ouverture de perspectives de géométrie hyperbolique, se forger grâce à une théorie mathématique une clé avec laquelle nous pouvons ouvrir notre regard sur une autre perception de la réalité, ressentir le trouble qui résulte du sentiment que la réalité s'en trouve comme modifiée, est une expérience fascinante. Nous partageons sur ce point l'avis de TRUDEAU (1987, viii-ix) :

> This [...] will provide [...] a rare opportunity to actually experience the intellectual and intuitive disorientation scientific revolutions cause. In fact the opportunity may be unique. If you are an

average educated person it would probably be difficult for you, reading an account of one of the other scientific revolutions I mentioned, to feel the confusion (and excitement !) that originally surrounded the event, because you already believe the once-revolutionary theory to be substantially correct. You have brought up to believe the earth moves around the sun and is held to its path by gravity [...]. With regard to geometry, however, you are almost certainly a committed Euclidean, and consider the possibility of a logical, "truthful" geometry contradicting Euclid's to be absurd. You are alike a 16th-century astronomer hearing of Copernicanism for the first time.

4 La démarche poursuivie

Pour atteindre ces objectifs, nous avons suivi une démarche *d'apprentissage en spirale* (CREM 1995, p. 37) construite autour de la question récurrente des rapports entre vérité, géométrie et réalité, prise comme fil conducteur du cours. La description qui en est donnée ci-dessous livre bien sûr un aperçu très incomplet, en particulier parce qu'elle se centre sur les contenus et les intentions et fait peu apparaître les modes de travail utilisés.
Nous avons suivi le découpage suivant, partiellement imposé par la chronologie des évènements :

4.1 Une entrée dans la géométrie

On renvoie très naturellement celui à qui l'on pose la question : "Décrivez les objets de la géométrie (point, ligne droite, ...)" à une géométrie considérée comme un ensemble de vérités tirées de la réalité, à une géométrie obtenue par idéalisation de faits observés. Il est alors facile de faire naître une série de conflits entre intuition, logique et savoir. Mais c'est bien cette démarche qui était suivie jusque dans les années soixante dans les manuels utilisés en Suisse, manuels par ailleurs construits sur le modèle des *Éléments*, sans cesse présents en filigrane. Ils débutaient invariablement par une description des termes primitifs et une justification de leurs propriétés "sûres" (GONSETH & MARTI 1933, DELESSERT 1960). Leur analyse et leur mise en opposition avec des textes plus récents permettent de mener des discussions avec les étudiants sur les *objets mentaux*, sur leur caractère indispensable lorsqu'il s'agit de penser et de faire des mathématiques. Elle mène à parler de la nécessité, à l'école, de construire, de décrire ou de faire décrire les images idéalisées qu'on se fait des objets de la géométrie, à parler finalement aussi d'une première géométrie, structurée localement en *îlots déductifs*. On bascule ainsi naturellement vers la didactique et les points évoqués dans la discussion des objectifs s'y rapportant. Cette démarche a aussi pour effet, d'ailleurs recherché, de replonger les étudiants dans leur conception pré-universitaire de la géométrie et de recréer l'obstacle épistémologique (BACHELARD 1938, p. 18) qui les empêche de penser à une autre géométrie, par exemple hyperbolique. Les questions posées ensuite au sujet des résultats connus et du foisonnement de leurs liens logiques, les uns aux autres, ramènent les étudiants à un stade pré-euclidien. Désécurisés par une constellation si diffuse, ils conçoivent le besoin de structurer et d'ordonner les connaissances. Le moment est venu de faire le pas et d'entrer dans les *Éléments*.

4.2 Au-delà d'une approche descriptive, première abstraction : une forme mixte

Se plonger dans le texte d'Euclide est proprement fascinant. Tout est à interpréter et à discuter. Que veulent dire les définitions ? S'agit-il vraiment toujours de définitions ? Quelle est la portée des différentes demandes (postulats) ? Pourquoi distinguer entre demandes et notions

communes (axiomes) ? La rencontre avec la culture grecque nous contraint à questionner notre point de vue. Le mode d'expression inhabituel utilisé dans ce texte ouvre la porte aux interrogations sur la pensée de l'auteur et appelle le débat. Les questions ne trouvent pas toutes des réponses mais des sous-entendus sont évoqués, des conjectures sont émises sur des implicites possibles, qu'il s'agira de mettre à l'épreuve à la lecture des constructions, des théorèmes et des justifications qui suivent. L'importance de la langue et du débat d'idées sur les mathématiques apparaît clairement aux étudiants qui goûtent par ailleurs le plaisir d'avoir une marge de manœuvre : grâce au décalage culturel, les mathématiques sont "discutables". Ce qui est paradoxal si l'on songe au but poursuivi par Euclide !

L'analyse des premiers résultats proposés permet de revenir sur les hypothèses émises, de comprendre certains sous-entendus, d'observer la structure impressionnante de la construction mais aussi de déceler un appel somme tout fréquent à l'évidence géométrique ainsi que quelques manques de rigueur, du point de vue des exigences formelles d'aujourd'hui. Ceci constitue une excellente base pour discuter de la relativité de la rigueur et de la précision, mais aussi pour confronter preuve et conviction, dans un contexte a priori plus "élémentaire" que celui des exemples de LAKATOS (1984).

Cette analyse permet de traiter du concept de système axiomatique matériel et de s'interroger à ce propos sur le statut des manuels dont nous disposons ainsi que sur celui des *Éléments* (TRUDEAU 1987, pp. 250-251). Nous avons convenu à ce stade de parler pour Euclide de système mixte : matériel au premier abord, parce que les éléments fondamentaux semblent définis, mais finalement formel par le fait que ces définitions ne sont pas vraiment descriptives et qu'il n'est jamais réellement fait appel à elles; formel aussi par l'absence de toute tentative de justifier les postulats; formel encore dans la volonté de rigueur, mais matériel dans l'appel fréquent à l'évidence géométrique; matériel finalement en ce sens que cette géométrie se veut une idéalisation des faits observés, de la réalité.

D'autre part, une certaine familiarité et de nombreuses similarités avec les manuels se font jour et imposent une conclusion : l'influence des *Éléments* a été telle qu'ils ont très longtemps été simplement transposés dans l'enseignement, quand ils n'étaient pas même directement utilisés tels quels (PONT 1986, pp. 102-105) ! Ce qui constitue là encore une source de discussion didactique.

4.3 Le postulat des parallèles

Avant de lancer une analyse des résultats qui concernent les parallèles dans les *Éléments*, nous avons proposé la lecture et l'interprétation de la définition que donne LOBATSCHEFSKIJ du terme *parallèle*[5]. La prégnance des images euclidiennes est frappante. Elles ramènent les étudiants à estimer, après un certain étonnement, qu'il s'agit là d'une définition inutilement compliquée pour une notion somme tout usuelle et claire. Les potentialités de cette définition ne sont pas reconnues.

Les étudiants savent cependant bien qu'il y a eu polémique au sujet des parallèles. Ils sont d'ailleurs étonnés de ne pas trouver explicitement le postulat qu'ils attendent, qui affirmerait selon les uns l'existence, selon les autres l'unicité des parallèles (axiome de Playfair). La recherche et l'analyse des énoncés ayant trait à cette notion permettent de clarifier le sens du cinquième postulat et de comprendre ce qui le lie à l'axiome de Playfair et au résultat sur la

[5]Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, savoir : en droites *qui coupent* la droite donnée, et en droites *qui ne la coupent pas*. La droite qui forme la *limite* commune de ces deux classes est dite *parallèle* à la droite donnée.

somme des angles intérieurs d'un triangle.

4.4 Une échappatoire pour sortir de la polémique sur l'axiome des parallèles : le point de vue axiomatique. Ou : Trancher le nœud gordien par le renoncement à la réalité

La richesse des implications du postulat des parallèles apparaît lorsqu'on étudie les formulations proposées dans l'histoire des mathématiques pour le "prouver" ou le remplacer. Diverses activités portant sur une liste de formulations équivalentes ainsi que sur leurs liens logiques réciproques permettent aux étudiants de s'en imprégner et de sentir les conséquences profondes du postulat sur des résultats dont ils ne mettraient pas en doute la vérité, dans la réalité. C'est notamment le cas de celui portant sur la somme des angles intérieurs d'un triangle, qui semble bien être pour eux un des résultats les moins discutables de la géométrie.

La résistance de cet axiome aux tentatives de montrer qu'on peut s'en passer et l'histoire des échecs successifs de ces tentatives amènent graduellement une prise de liberté. Dans ce jeu, on accepte peu à peu de faire abstraction du lien de la géométrie avec la réalité et la vérité, l'essentiel passant dans la clarification "à tout prix" des questions concernant sa nécessité et sa portée. Ce processus historique correspond aussi à celui suivi par les étudiants dans ce cours. À ce stade, la lecture des *Éléments*, à la recherche de ce qui touche au parallélisme, et l'analyse des points concernés donnent l'occasion de présenter des explications sur la notion de système axiomatique, sur celle d'équivalence entre axiomes et sur la possibilité de réorganiser une théorie. Mais si la disposition et la volonté sont bien là, une deuxième lecture du texte de Lobatchevski montre que la conception usuelle du mot *droite* fait encore barrage à une interprétation qui serait nouvelle.

4.5 La méthode axiomatique. Mot d'ordre : Renoncer à toute description ou justification des concepts et des énoncés fondamentaux

Même si les étudiants sont désormais d'accord de jouer le jeu de l'axiomatique, suivre la démarche de Hilbert ne leur apparaît pas très naturel. Renoncer, comme il le fait, à définir et à décrire les objets de la géométrie, ravalés au niveau de "choses" sans signification propre, suscite des résistances. Cependant, une fois cette situation acceptée, la lecture des *Fondements* de Hilbert se passe sans difficultés apparentes. Les étudiants ont le sentiment de suivre. Les premiers éléments lus concernent uniquement des "évidences", si bien que la concentration n'est pas vraiment élevée et qu'on est facilement convaincu d'avoir compris. Mais on lit plutôt les figures que ce qui est réellement écrit. Un test effectué après une lecture et une réflexion individuelle portant sur les axiomes d'ordre a bien révélé que les étudiants avaient plutôt projeté les images de ce qu'ils pensaient que diraient les axiomes plutôt que d'interpréter ce qu'ils disent exactement. Au fond, le texte de Hilbert est très subtil. Tout compte, tout a une importance. L'analyse d'un des premiers théorèmes prouvés par l'auteur[6] s'est d'ailleurs avérée extrêmement ardue, les arguments verbaux et le rappel précis des axiomes étant toujours court-circuités par l'évidence liée à la figure.

Dès le moment où le principe d'un système formel et d'une démarcation du réel est admis, il est envisageable de postuler des axiomes qui seraient, sinon, contraires au "bon sens". La lecture du texte de Hilbert portant sur la géométrie hyperbolique peut être entreprise. Mais la surprise est alors de taille. Même si le style reste exactement le même, le contraste est total. Le sentiment

[6] Théorème 3. Deux points A et C étant donnés, il existe sur la droite AC au moins un point D situé entre A et C.

de stupeur et d'incompréhension remplace le confort de l'évidence et de la banalité apparente qui avait régné à la lecture de la partie euclidienne du texte. Ceci agit comme révélateur de la superficialité avec laquelle les parties précédentes étaient lues. De même le rôle essentiel qu'avaient joué les figures devient patent. Ici, elles contredisent l'intuition au lieu de la refléter fidèlement. Les droites sont courbes. Les termes, supposés ne désigner que des choses, se révèlent avoir été d'importants supports de lecture et d'interprétation. Désormais ils interfèrent avec la pensée et créent une situation de paradoxe permanente. Plus que l'absence *d'images mentales* c'est l'appel naturel à des images mentales inadaptées qui nuit à la compréhension.

On se rend compte qu'on comprenait les textes euclidiens de Hilbert, malgré la relative rareté des figures et le fait que le texte ne s'y réfère pas explicitement, parce qu'on a en tête suffisamment de représentations issues de l'expérience. Par contre, on ne peut pas lire les textes hyperboliques de Hilbert. On ne dispose justement pas de ces outils, nécessaires pour penser ! On perçoit alors bien l'importance de pouvoir s'appuyer, pour comprendre, sur des représentations, même partielles et mal abouties, sur des images mentales, généralement construites à partir du concret. On pourrait rappeler à ce propos le point de vue de GONSETH (1936, p. 338) pour qui "*la permanence du concret est une condition d'existence de l'abstrait*". Sans ce concret, sans ces images mentales, les textes mathématiques, bien que corrects de l'avis des spécialistes, ne font tout simplement aucun sens. Ils ne deviennent ni faux, ni dénués de sens. Mais ils se vident de tout sens, glissent dans le "sans sens" (BARUK 1985, chapitre 8). Sans clés d'interprétation, tous les énoncés se ressemblent et se confondent : ceux qui sont faux, ceux qui sont absurdes, ceux qui sont corrects. Seules les personnes qui disposent des connaissances nécessaires ou de représentations préconceptuelles qui guident leur intuition peuvent faire le tri.

Pour des enseignants, vivre une telle situation et en débattre constitue à coup sûr une expérience importante. Placés, face au savoir officiel, dans une situation qui sera peut-être parfois celle de leurs futurs élèves face au savoir du maître, ils vivent l'inconfort de cette situation. Une expérience sans doute a fortiori utile pour un maître de didactique.

4.6 Une approche axiomatique de la géométrie hyperbolique, illustration par le modèle de Poincaré

L'illustration par un modèle, en l'occurrence celui de Poincaré pour le disque, permet d'entrer dans cette géométrie. La traduction et la vérification des axiomes donnent l'occasion de revenir sur différents énoncés de géométrie euclidienne concernant notamment les propriétés des inversions par rapport aux cercles. Celles-ci jouent dans ce modèle de plan hyperbolique le rôle des symétries orthogonales de la géométrie euclidienne. On peut illustrer avec elles la possibilité de "conjuguer les situations" pour passer de situations générales à d'autres, particulières mais favorables, et résoudre ainsi divers problèmes assez simplement. Un passage par la géométrie analytique ou par les nombres complexes montre parfois l'efficacité de ces approches et l'interconnexion de diverses facettes des mathématiques. Ces activités sont l'occasion de remplir certains des objectifs fixés en ce qui concerne les connaissances "dans" les mathématiques : approfondissement des connaissances en géométrie classique, approche de problèmes non élémentaires par des méthodes variées et mise en évidence de principes mathématiques généraux.

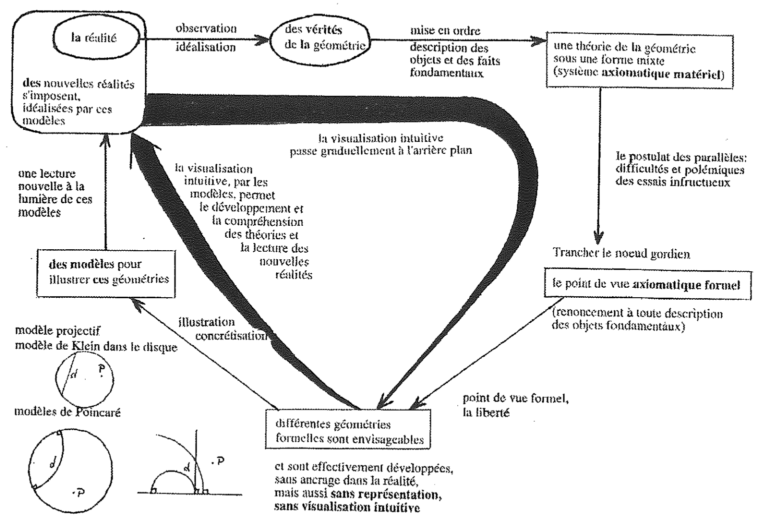
Il est frappant d'observer comment, après quelques réflexions menées dans ce modèle au sujet des premiers axiomes, la situation se débloque. Le texte de Hilbert devient lisible, car désormais interprétable. L'axiome concernant le parallélisme, les définitions qui le suivent au sujet des extrémités des droites, le texte de Lobatchevski, la possibilité pour la somme des angles intérieurs d'un triangle d'être inférieure à 180, tous ces aspects qui avaient offert tant de résistance auparavant s'ouvrent littéralement à la compréhension intuitive ! Le modèle a livré les représentations mentales qui permettent de "penser hyperbolique". La discussion de ce phénomène, vécu par tous les participants, devrait selon nous avoir eu un impact didactique profond. Parler du besoin, pour penser, de disposer d'images mentales est une chose. Avoir l'occasion de ressentir soi-même le déblocage qu'elles peuvent permettre est incomparablement plus marquant.

Ceci dit, qu'une telle géométrie puisse exister ne constitue encore ni la surprise ni la révolution copernicienne attendue. A ce stade, la géométrie hyperbolique est prise comme une vue de l'esprit, un pur produit de l'intellect sans réel rapport à la réalité, même si l'on dispose désormais pour elle d'une concrétisation par un modèle. L'évocation dans un jeu de l'esprit d'une plongée dans le centre de notre modèle de plan hyperbolique et d'un brusque changement d'échelle fait surgir le sentiment trouble que cette géométrie est peut-être bien aussi réelle que nous le pensions de la géométrie euclidienne ! La révolution promise se situe bien là : cette géométrie, dont a priori l'approche a été rendue possible en évacuant le lien à la réalité, se charge d'elle-même de réalité. On ne peut plus choisir vraiment entre elle et celle qu'on pensait initialement être en fait la seule vraie possible. TRUDEAU (1987) décrit très bien une démarche menant son lecteur à un tel basculement et l'on ne peut que répéter avec lui :

> This [...] will provide [...] a rare opportunity to actually experience the intellectual and intuitive disorientation scientific revolutions cause.

4.7 Conclusion : Vérité, géométrie et réalité

Le schéma ci-dessous, établi dans une discussion avec les participants à la fin du cours, donne un aperçu de la démarche suivie et du jeu entre abstraction et représentations intuitives, entre schémas, théories et modèles concrets. Il permet de revenir une dernière fois sur la question du rapport entre géométrie et réalité et de constater l'évolution des points de vue. Il peut d'ailleurs se lire aussi bien comme représentation du processus historique de constitution du savoir géométrique, comme vue d'ensemble récapitulant le déroulement du cours que comme illustration du processus d'apprentissage de ses participants. Ses premiers éléments fournissent l'occasion d'un retour sur quelques éléments didactiques discutés en cours de route : évolution de l'enseignement de la géométrie, évolution des manuels utilisés et processus d'apprentissage des élèves.



Géométrie et réalité, schéma d'une (r)évolution. (A. DALLA PIAZZA & *Th.* RYCHENER, *Berne, 1998)*

5 Résultats et conclusions provisoires

La démarche que nous avons suivie a rencontré un accueil enthousiaste des participants. Nous pensons avoir atteint de manière satisfaisante la plupart de nos objectifs et estimons pouvoir relever à son sujet les points positifs suivants :

- Elle permet de compléter, mais surtout de relier entre elles des connaissances éventuellement fragmentaires.

- Elle permet de relier les processus individuels d'apprentissage aux processus historiques d'élaboration du savoir.

- Elle illustre des correspondances entre difficultés observées chez les élèves et difficultés conceptuelles rencontrées historiquement.

- Elle permet de comprendre des faits **sur** les mathématiques malgré d'éventuelles difficultés ou lacunes de connaissances **dans** les mathématiques.

- Elle donne du recul et une vue d'ensemble sur un domaine des mathématiques.

- Elle illustre des rapports entre mathématiques, courants de pensée et culture, au sens large.

- Elle montre "d'où nous venons", ce que sont les sources de notre savoir ou de notre façon de voir et permet de mesurer le caractère extraordinaire des performances de nos prédécesseurs.

En outre, le rôle et le sens de l'approche axiomatique nous paraissent avoir été clairement perçus, de même que les rapports entre systèmes axiomatiques et modèles. Le fait qu'une théorie a priori abstraite amène à lire des aspects de la réalité auxquels le "bon sens" et l'empirisme n'auraient pas donné accès, qu'elle crée une distance qui permet justement de dépasser l'enfermement dans le bon sens, semble avoir été clairement ressenti. L'universalité de résultats considérés comme absolus a été remise en question, notamment celui concernant la somme des angles dans un triangle, ouvrant un regard désormais plus critique. La démarche génétique a rencontré un grand succès. Grâce à elle, histoire et apprentissage individuel des mathématiques ont été mis en correspondance. Le regard des participants sur les mathématiques s'est véritablement modifié. Ils devraient avoir enrichi leur compréhension des rapports entre mathématiques et réalité.

On doit toutefois tempérer ce tableau très optimiste en relevant que parmi les participants, jusqu'à présent, seul le tiers a finalement réalisé les activités exigées pour la validation du module ! La très grande disparité de leurs connaissances mathématiques, qui avait compliqué la préparation et le déroulement du cours, a finalement rattrapé les moins bien préparés d'entre eux. Le cours n'a pas suffi pour combler les lacunes existantes. Il les a parfois même révélées. Certains doivent encore fournir un travail considérable pour parvenir à remplir les conditions imposées. Ils s'y sont pour la plupart attelés avec un fort engagement, motivés aussi, rappelons-le, par des raisons externes à leur intérêt pour les mathématiques, liées à la nécessité d'assurer leur avenir professionnel.

Le seul objectif insuffisamment atteint concerne l'approfondissement des connaissances en géométrie. Le travail de vérification du modèle de Poincaré par l'étude de constructions faisant intervenir les inversions n'a pas assez pu être développé. Le temps à disposition était trop court. Ou le projet trop ambitieux. Trois blocs de deux jours, séparés par des phases de travail individuel à domicile auraient peut-être fourni de meilleures conditions pour le réaliser. Bien sûr, un cours classique de mathématiques aurait certainement pu amener plus de connaissances, ou des connaissances plus pointues. Par opposition, un cours comme celui que nous avons décrit et réalisé amène des connaissances plus profondes **sur** les mathématiques, en privilégiant une vue contextualisée et large du domaine. Selon nous, cet aspect de la formation en mathématiques des enseignants est celui dans lequel on relève actuellement les plus grandes faiblesses, du moins en Suisse.

Par cet essai, nous entendions clarifier le concept de "formation en mathématiques orientée vers l'enseignement" et ouvrir la voie pour les développements en cours dans notre région. Nous ne savons pas dans quelle mesure nous y avons réussi ni si nous avons suffisamment caractérisé les critères propres à ce type de formation[7]. Néanmoins, cette expérience nous semble révéler la nécessité de travailler simultanément sur trois plans différents si l'on entend répondre aux objectifs visés par une telle formation :

- Le plan des connaissances "dans" les mathématiques, au travers de thèmes liés aux contenus des plans d'études scolaires.
- Le plan des connaissances "sur" les mathématiques : aspects historiques, réflexion sur le fonctionnement des mathématiques, sur leur construction, sur leur sens, sur leur rôle par rapport à d'autres secteurs du savoir.
- Le plan des processus d'enseignement/d'apprentissage, au travers d'une approche dans laquelle le savoir étudié est mis en relation avec l'apprentissage des élèves, au niveau des contenus **et** des modes de travail.

[7]Voir à ce sujet WITTMANN 1989.

Nous ne prétendons pas que ce type de cours doive se substituer à l'étude des mathématiques[8] ou de la didactique. Nous pensons qu'ils ont à remplir un rôle de pont entre ces deux aspects et qu'ils peuvent orienter la formation en mathématiques vers une formation à l'enseignement des mathématiques.

Ce cours n'était pas notre premier essai. Nous en avions déjà dispensé un autre dans le même cadre. La place de l'histoire y était incomparablement plus faible. On y partait des représentations des étudiants au sujet des nombres. Le cours était construit sur un canevas similaire à celui d'une situation-problème, contraignant les étudiants à expliciter diverses facettes de leurs conceptions des nombres, à établir un débat au sujet des contradictions entre ces facettes, contradictions présentes parfois chez une même personne mais plus généralement entre les différents participants, puis à clarifier (à institutionnaliser) les points de vue. On visait à montrer la signification des théories qu'ils avaient étudiées préalablement dans des cours classiques mais qu'ils ne reliaient pas toujours spontanément aux questions inhabituelles qui étaient posées. Le débat était illustré par des controverses similaires ayant traversé l'histoire et qui avaient débouché sur l'élaboration, justement, des théories étudiées dans leurs cours académiques antérieurs. Là, c'était plus la méthode de travail que les aspects historiques ou épistémologiques qui avaient donné au cours sa teinte et son orientation particulière.

Ces cours ne devaient a priori être pour nous que l'occasion ponctuelle de sortir du cadre de nos activités habituelles. Cependant, le contexte de réformes dans lequel nous nous trouvons engagés nous a donné l'envie de lancer une démarche plus large, en vue de définir, pour la formation des enseignants, des contenus et des approches des mathématiques qui tiendraient compte d'une orientation vers la didactique. Nous ne nous sommes pas guidés pour cela par des considérations et une démarche scientifiques. Nous avons procédé de façon pragmatique et intuitive, sur la base de notre expérience de mathématiciens et d'enseignants[9]. Mais nous entendons prolonger ces premiers pas et suivre le plan de travail suivant, comportant trois phases :

- Faire des essais. Ces cours étaient les premiers. Un prolongement suivra pendant l'année 1999/2000 dans le cadre de la formation continue des enseignants.
- Sur la base de ces expériences, des conclusions provisoires, des conjectures et des hypothèses qui en seront retirées, passer à une théorisation de la démarche et définir des thèmes de recherche et d'expérimentation, avec cette fois une méthodologie précise.
- Construire des modules de formation qui viendraient à l'avenir s'insérer dans la formation des enseignants.

La réalisation de la dernière étape dépendra des choix qui seront faits dans notre région et qui nous échappent pour une grande part. Selon ce qu'il adviendra, le projet en restera peut-être aux deux premières phases. Ce congrès aura été l'occasion d'établir des contacts et d'apprendre. Il est un pas dans la phase de théorisation et vers l'établissement de contacts avec des collègues prêts à collaborer avec nous à un tel projet.

[8]Nous avons bien perçu les limites imposées par le niveau insuffisant des connaissances en mathématiques de certains participants. En soi, ce constat est très préoccupant et nous ne pouvons qu'espérer que les nouvelles institutions de formation des enseignants sauront poser des exigences plus élevées au moment du recrutement de leur personnel.

[9]Nous avons tous deux une expérience de l'enseignement des mathématiques au degré secondaire II (élèves de 15-19 ans) et au niveau des premiers cycles universitaires (étudiants de 18-21 ans) ainsi que, pour la didactique des mathématiques, dans la formation des enseignants du secondaire II (étudiants de 23-25ans).

6 Références bibliographiques

BACHELARD, G.: *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin, Paris, 1938.

BARUK, S.: *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*, Editions du Seuil, Paris, 1985.

CREM : *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, Nivelles, 1995.

DALLA PIAZZA, A. & RYCHENER, Th.: *Die Geometrie als Beschreibung der Wirklichkeit*, notes de cours, Université de Berne, 1998.

DELESSERT, A.: *Géométrie plane*, éditions SPES, Lausanne, 1960.

DEVELAY, M.: *Peut-on former les enseignants ?*, ESF éditeur, Paris, 1994.

EUCLIDE (traduction de C. Thaer) : *die Elemente*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1962.

GONSETH, F.: *Les mathématiques et la réalité*, Librairie Félix Alcan, Paris, 1936.

GONSETH, F. & MARTI, P.: *Leitfaden der Planimetrie*, Orell Füssli, Zürich, 1933.

HILBERT, D.: *Grundlagen der Geometrie*, in Wissenschaft und Hypothesen, Band 7, Teubner Verlag, Leipzig und Berlin, 1930 (siebente Auflage).

HILBERT, D.: *Les Fondements De La Géométrie*, traduction de P. Rossier, Dunod, Paris, 1971.

LAKATOS, I.: *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann, Paris, 1984.

LOBATSCHEFSKIJ, N.J.: *Pangeometrie*, in Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nummer 130, Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1912 (2. Auflage).

MOISE, E.: *Elementary Geometry From An Advanced Standpoint*, Addison-Wesley, New York, 1973 (2nd edition).

PONT, J.-C.: *L'aventure des parallèles. Histoire de la géométrie non euclidienne: précurseurs et attardés*, Peter Lang, Berne, 1986.

ROE, J.: *Elementary Geometry*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

SESIANO, J.: *Une introduction à l'histoire de l'algèbre. Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 1999.

SHULMAN, Lee S.: Those Who Understand : Knowledge Growth in Teaching, in *Educational Researcher* 1986 (15), pp. 4-14.

TRUDEAU, R.: *The Non-Euclidean Revolution*, Birkhäuser, Boston, 1987.

WITTMANN, E.: Mathematikdidaktik als "design science", *Journal für Mathematik-Didaktik 13* (1992) 1, pp. 55-70.

WITTMANN, E.: The mathematical training of teachers from the point of view of education, *Journal für Mathematik-Didaktik, 10* (1989) 4, pp. 291-308.

WITTMANN, E.: *Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken*, Vieweg, Braunschweig, 1987.

Some reflections on the illusion of linearity

DE BOCK Dirk, VERSCHAFFEL Lieven, JANSSENS Dirk
University of Leuven (Belgium)

Abstract

Linear (proportional) functions are undoubtedly one of the most common models for representing and solving both pure and applied problems in mathematics education. But according to several authors, different aspects of the current culture and practice of school mathematics develop in students a tendency to use these linear models also in situations in which they are not applicable. In this paper, we first present some historical examples of and comments on this "illusion of linearity". Second, we briefly discuss the results of five recent empirical studies about the occurrence of this phenomenon in 12-16-year old students working on problems about the relation between the linear measurements, the area and/or the volume of similar geometrical figures, as well as about the effect of several task variables on this improper use of linearity. Finally, we analyse the connection between this linear illusion and other intuitive rules and erroneous ways of thinking in mathematics education.