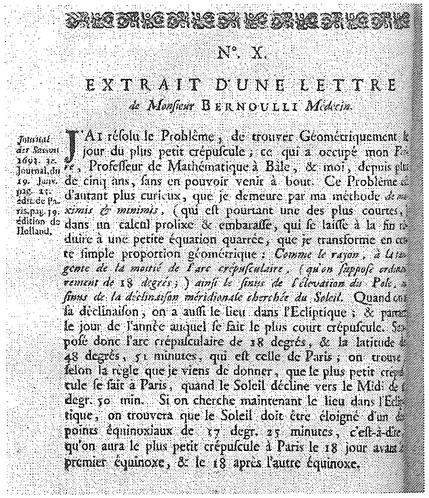
tics Pure and Applied, 1, (350-358), 1878
CNOPS J. & MALONEK H. Introduction to Clifford Analysis, Coimbra, 1995
CROWE Michael J. A history of vector Analysis, Dover, 1993
DESCARTES R. The geometry of Réne Descartes, Dover 1954
FONSECA A. d'Arzilla. Principios Elementares do Calculo de Quaterniões- Coimbra, 1884
FUETER R. Quelques résultats de l'algèbre moderne- Revista da Faculdade de Ciências, vol.II, n°4, Coimbra, 1932
GRAY J. & ORTIZ E.L. On the transmission of Riemann's Ideas to Portugal- História Mathematica, 26 (52-67), 1999
HAMILTON W.R. On a new Species of Imaginaries Quantities connected with a theory of Quaternions – Proceedings of the Royal Irish Academy, Nov. 13, 1843, vol. 2, 424-434
HAMILTON W.R. Copy of a letter from sir William R. Hamilton to John T. Graves, Esq., Philosophical Magazine, 3rd series, 25 (1844), pp. 489-95, edited by David R. Wilkins, 1999
HAMILTON W.R. On Quaternions- Proceedings of the Royal Irish Academy, Nov. 11, 1844, vol. 3 (1847), 1-16
HAMILTON W.R. Letters describing the Discovery of Quaternions, August 5 , 1865
HESTENES D. New Foundations for Classical Mechanics- D. Reidel Publishing Company, 1986
HESTENES D. Hermann Gunther Grassmann (1809-1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neo-humanist Scholar, Klumer Academic Publishers, Dordrecht, 1996
KUIPERS Jack B. Quaternions and Rotation Sequences- Princeton Uni. Press, 1999
MACFARLANE A. Bibliography of quaternions and allied systems of Mathematics, Dublin, Uni. Press, 1904
SILVA Jaime C. História da Universidade em Portugal (A Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra (1772-1911)), à publier
STEWART I. & TALL D. The foundations of mathematics- Oxford Uni. Press, 1977
STILLWELL J. Mathematics and its History, Springer Verlag, 1989



N°. X.

EXTRAIT D'UNE LETTRE
de Monsieur BERNOULLI *Médecin.*

Journal des Savans 1693. 3e. Journal, du 19. Janv. pag. 21. édit. de Paris, pag. 19. édition de Holland,

J'AI résolu le Problême, de trouver Géométriquement le jour du plus petit crépuscule ; ce qui a occupé mon Frere, Professeur de Mathématique à Bâle, & moi, depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout. Ce Problême est d'autant plus curieux, que je demeure par ma méthode *de maximis & minimis*, (qui est pourtant une des plus courtes,) dans un calcul prolixe & embarassé, qui se laisse à la fin reduire à une petite équation quarrée, que je transforme en cette simple proportion géométrique : *Comme le rayon, à la tangente de la moitié de l'arc crépusculaire, (qu'on suppose ordinairement de 18 degrés ;) ainsi le sinus de l'élevation du Pole, au sinus de la déclinaison méridionale cherchée du Soleil.* Quand on a sa déclinaison, on a aussi le lieu dans l'Ecliptique ; & par-là le jour de l'année auquel se fait le plus court crépuscule. Supposé donc l'arc crépusculaire de 18 degrés, & la latitude de 48 degrés, 51 minutes, qui est celle de Paris ; on trouve, selon la règle que je viens de donner, que le plus petit crépuscule se fait à Paris, quand le Soleil décline vers le Midi de 7 degr. 50 min. Si on cherche maintenant le lieu dans l'Ecliptique, on trouvera que le Soleil doit être éloigné d'un des points équinoxiaux de 17 degr. 25 minutes, c'est-à-dire qu'on aura le plus petit crépuscule à Paris le 18 jour avant le premier équinoxe, & le 18 après l'autre équinoxe.

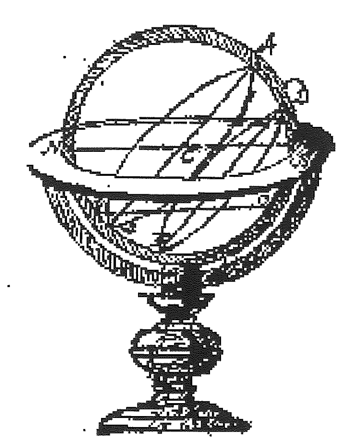
Lettres de Johann Bernoulli au Journal des Savans.

Le problème du crépuscule minimum, d'après PEDRO NUNES, dans son ouvrage "De Crepusculis"

DA SILVA VILAR Carlos Alberto
Universidade do Minho

Abstract

PEDRO NUNES est un mathématicien célèbre portugais du XVI$^{\text{ème}}$ siècle. La géométrie, la cosmographie, l'algèbre, l'astronomie et tout ce qui concerne la navigation sont les sujets de plusieurs ouvrages qu'il écrivit, au cours de sa vie. Le "De Crepusculis" n'en est peut-être pas le principal, mais il est certainement l'un des plus beaux et plus connus. C'est dans cet ouvrage que Pedro Nunes résolut le problème du crépuscule minimum et sa duration par une voie géométrique, ce que les frères Jean et Jacob Bernoulli firent aussi, une centaine d'années après, par l'application de la théorie des extrema d'une fonction de plusieurs variables. On fera, ici, au cours de ce travail, un résumé de ce problème.



Johann Bernoulli, *Lectiones de calculo differentialium*, Problema XX, *Invenire brevissimum Crepusculum*, Manuscrit de l'Universitätsbibliothek Basel, L I a 6.

PEDRO NUNES, mathématicien portugais du XVIème siècle, après avoir fait ses études à l'Université de Coimbra, au Portugal, et plus tard, à Salamanca, en Espagne, fut Professeur à l'Université de Coimbra, et le grand cosmographe du Royaume, pendant de nombreuses années. L'astronomie, la géographie, la géométrie, l'algèbre et tout ce qui concerne la navigation maritime ont été les sujets de ses recherches et de ses nombreux écrits.

D'après Rodolfo Guimarães, dans son essai *Les Mathématiques au Portugal*, beaucoup de mathématiciens se sont intéressés à ses écrits : Ticho-Brahe, Possevino, Stevin, Vossius, Christopher Clavius, Dechasles Kastner, Saverien, Montucla, Dutens, de Zach, Bailly, Lalanne, Poggendorff, Delambre, Paul Serret, Maximilien Marie, S. Gunther, M. Moritz Cantor, etc. Sont donc tout à fait légitimes les paroles de Rodolfo Guimarães, encore lui, au début de son étude biographique *Sur la vie et l'œuvre de* PEDRO NUNES : "Parmi les portugais du XVIème siècle, qui se sont rendus illustres dans les sciences mathématiques, la première place revient, sans conteste, au Dr. PEDRO NUNES", ou encore celles-ci de Garção Stokler, dans son *Essai historique sur l'origine et les progrès des mathématiques au Portugal* : "Ce géomètre, le plus grand que les Espagnes ont produit et, incontestablement, l'un des plus grands de l'Europe du XVIème,. . . "[1]

Son ouvrage *De Crepusculis* est peut-être le plus beau, parmi tous ceux qu'il a écrits et, certainement, celui qui lui a attiré le plus de louanges et de prestige, dans le monde scientifique de son époque. C'est, d'après Garção Stokler, dans son *Essai historique*· · · , un ouvrage "digne, certainement, de mémoire éternelle" ou encore, "celui qui a fait beaucoup plus d'honneur à la sagacité de son esprit" et, d'après la Commission de l'Académie des Sciences de Lisbonne, chargée de sa dernière édition, celle de 1943, "Le *De Crepusculis* est un chef-d'œuvre. Son originalité, l'écho qu'il a eu, l'influence qu'il a exercée, attestent son importance. Le *De Crepusculis*, à lui tout seul, suffit à justifier la reconnaissance qui a été faite à PEDRO NUNES, en astronomie en donnant son nom à l'un des cratères de la Lune".

PEDRO NUNES était un défenseur de la théorie ptolémaique[2], d'après laquelle le soleil se meut, sur l'écliptique[3], autour de la terre, qui est le centre de l'univers. C'est à l'intérieur de cette théorie qu'il développe tous ses raisonnements relatifs aux crépuscules, qui arrivent, chaque jour et partout, c'est-à-dire, une période de lueur, qui précède le lever du soleil -c'est le crépuscule matinal- et une autre de lumière incertaine, qui succède immédiatement au coucher du soleil - c'est le crépuscule vespéral. Dans cet ouvrage, il ne s'occupe pas seulement du sujet central "les crépuscules". On peut même dire que *De Crepusculis* est presque un traité d'astronomie sphérique. Tous les problèmes y sont étudiés géométriquement, depuis la définition du crépuscule, la variation de son amplitude, chaque jour, d'endroit en endroit, et chaque jour et à chaque endroit, tout au long de l'année, jusqu'au problème couronnant toute la théorie exposée - celui du plus petit crépuscule et sa durée.

C'était un problème conséquent, en ce temps-là, celui des crépuscules. En effet, le problème du crépuscule de durée minimum a été étudié, une centaine d'années après, par les frères Jean et Jacob Bernoulli, qui ont utilisé la théorie des extrêmes d'une fonction et, après beaucoup d'efforts, comme d'ailleurs Jean Bernoulli, l'avoue lui-même, sont arrivés à la solution, d'une

[1] *Ensaio histórico, sobre a origem e progressos das matemáticas, em Portugal (Paris, 1819)* : "Este geómetra, o maior que as Hespanhas têm produzido e, incontestavelmente, um dos maiores, que, no século XVI, floresceram na Europa,. . . "

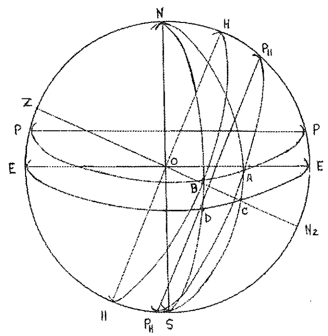
[2] L'ouvrage *Des revolutionibus orbium coelestium libri sex*, où Copernic a développé sa théorie d'après laquelle c'est la terre que se meut sur l'écliptique autour du soleil, a été publié en 1543, c'est-à-dire l'année suivante de celle de la première publication du *De Crepusculis* de PEDRO NUNES.

[3] Grand cercle d'intersection du plan de l'orbite du soleil, dans son mouvement autour de la terre (théorie ptolémaique ou géocentrique), ou du plan de l'orbite de la terre, dans son mouvement autour du soleil (théorie copernicienne ou héliocentrique), avec la sphère céleste.

façon peut-être plus élégante. Voilà un *"Extrait d'une lettre*[4] *de M. Bernouilli, Medecin : J'ai résolu le Problème, de trouver géométriquement le jour du plus petit crépuscule; ce qui a occupé mon Frère, Professeur de Mathématique à Bâle & moi depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout. Ce problème est d'autant plus curieux que je demeure par ma méthode de maximis & minimis, (qui est pourtant une des plus courtes), dans un calcul prolixe & embarassé qui se laisse, à la fin réduire à une petite équation quarrée, que je transforme à cette simple proportion géométrique :* **Comme le rayon à la tangente de la moitié de l'arc crépusculaire,** *(qu'on suppose ordinairement de 18 degrés),* **ainsi le sinus de l'élévation du Pole, au sinus de la déclinaison**[5] **méridionale cherchée du soleil.** *Quand on a sa déclinaison, on a aussi le lieu dans l'Ecliptique; & partant le jour de l'année auquel se fait le plus court crépuscule. . . "*

En ce qui concerne les crépuscules, voilà des points spécifiques minutieusement développés par PEDRO NUNES, dans cet ouvrage, avant d'arriver au problème du plus petit crépuscule.

1. Le crépuscule matinal en un endroit commence quand le soleil, pendant son mouvement diurne et apparent autour de la terre, sur le parallèle[6] de la position qu'il occupe en ce jour-là dans l'écliptique, se trouve 18 degrés au-dessous de l'horizon[7] de l'endroit[8] et se termine quand le soleil le dépasse, en se levant au-dessus du même. Le crépuscule vespéral commence quand le soleil, à la fin du jour, encore pendant son mouvement diurne sur ce parallèle-là autour de la terre, se couche, en dépassant l'horizon, jusqu'au moment où il se trouve 18 degrés au-dessous du même. Leur durée est la même chaque jour, en un même endroit. C'est pourquoi PEDRO NUNES parle des crépuscules, sans aucune distinction.



N-S axe Nord-Sud;

EE l'équateur,

PP parallèle décrit par le soleil;

HH horizon de l'endroit;

PHPH parallèle à l'horizon, 18º au-dessous;

Z-Nz axe Zénith-Nadir;

AB arc crépusculaire, sur le parallèle PP;

CD arc crépusculaire, sur l'équateur.

[4] Lettre, qui a été publiée dans le *Journal des Sçavans pour l'année M.CD.XCIII (Paris, 1729)*, pg.25, et reproduite dans le t.I, (Lausanne et Génève, 1742), pg.64 de son ouvrage *Opera omnia tam antea sparsim edita quam hactenus inedita*.

[5] Arc de méridien céleste compris entre un astre et l'équateur céleste.

[6] Petit cercle de la sphère céleste, parallèle au plan de l'équateur.

[7] Grand cercle théorique divisant la sphère céleste en deux parties égales, l'une visible, l'autre invisible.

[8] On dit aussi que la dépression du soleil est, alors, de 18 degrés. En ce qui concerne cette valeur de la dépression du soleil, aux limites des crépuscules, il faut noter que ce n'est pas exactement comme ça, mais c'était la théorie, en ce temps-là, la plus vraisemblable. En effet, on a toujours atribué, dès l'antiquité, une valeur constante à cette dépression, quoique pas la même, parmi les astronomes : 18°, d'après Ptolémée; 17° 30', d'après Estrabon; 19°, d'après Allacen; etc. D'après la tradition astronomique et l'opinion généralisée, à l'époque de PEDRO NUNES, c'était 18°. Mais PEDRO NUNES ne l'a pas admis, sauf théoriquement et comme point de départ pour ses raisonements. Il a montré, dans la *Proposition I* de la deuxième partie de son ouvrage *De Crepusculis*, que cette valeur-là n'est pas du tout une valeur constante et a annoncé une méthode pour sa détermination, chaque jour et à chaque endroit, ce qu'il fit, plus loin, vers la fin de l'ouvrage, dans la *Proposition* XVI.

2. Les crépuscules, qui arrivent, à chaque endroit, quand le soleil, pendant son mouvement autour de la terre, sur l'écliptique -le mouvement ascendant et le mouvement descendant- se trouve à même distance d'un même point solsticial, soit celui de l'hiver, soit celui de l'été - ont même durée. Donc, seulement la durée du crépuscule, qui arrive dans un endroit, le jour où le soleil dépasse un point solsticial, ne se répète pas.

3. À des positions du soleil, sur l'écliptique, également éloignées de l'un ou de l'autre des points equinoxiaux -soit celui du printemps, ou le point vernal, soit celui de l'automne, ou le point automnal- correspondent, à chaque endroit, des crépuscules de différentes durées :

dans les endroits de l'hémisphère septentrional, sont plus longs les crépuscules correspondant à la position septentrionale du soleil, sur l'écliptique;

dans les endroits de l'hémisphère méridional, sont plus longs les crépuscules correspondants à la position méridionale du soleil, sur l'écliptique.

4. Quand le soleil, pendant son mouvement autour de la terre, visite les signes septentrionaux de l'écliptique, soit en ascendant soit en descendant, la durée des crépuscules dans un endroit, augmente à mesure que le soleil s'approche, sur l'écliptique, du principe de Cancer. On va voir, plus tard, comme d'ailleurs le fait aussi PEDRO NUNES, que cette croissance de la durée des crépuscules en quelqu'endroit septentrional, se vérifie, à partir d'une valeur minimum, qui arrive quand le soleil, pendant son mouvement ascensional, dépasse un certain point de l'écliptique, encore avant l'équinoxe du printemps.

5. Sur l'équateur, la durée des crépuscules est différente de jour en jour. Elle grandit à mesure que le soleil s'approche des points solsticiaux. Toutefois, la durée des crépuscules est la même en des positions du soleil, sur l'écliptique, également éloignées des points équinoxiaux. Donc, on peut dire que, sur l'équateur, les crépuscules ont durée minimum les jours où le soleil dépasse les points équinoxiaux, et maximum, les jours où le soleil se trouve aux points solsticiaux.

6. Quelle que soit la position du soleil sur l'écliptique, la durée des crépuscules, qui arrivent chaque jour, en deux endroits septentrionaux quelconques, est toujours plus grande dans l'endroit plus boréal. De même, en deux endroits méridionaux quelconques, la durée des crépuscules qui y arrivent chaque jour, est plus grande dans l'endroit plus austral.

7. PEDRO NUNES avant d'étudier le problème du plus petit crépuscule et il ne faut pas oublier qu'il y a dans son ouvrage beaucoup d'autres problèmes, qui ne concernent pas directement les crépuscules -s'occupe des méthodes pour la détermination de la durée des jours et des nuits et aussi des crépuscules, soit dans un endroit quelconque, hors de la ligne équatoriale[9]- quelle que soit la position du soleil sur l'écliptique, et, spécialement, dans le cas où le soleil se trouve sur l'équateur - soit sur la ligne équatoriale[10].

C'est vers la fin de l'ouvrage, dans la *Proposition* XVII, certainement la plus fameuse, que PEDRO NUNES fait une exposition minutieuse de l'évolution de la durée des crépuscules, dans un endroit septentrional, pendant le "voyage" du soleil, le long de l'écliptique, dès le point

[9]C'est-à-dire, dans un horizon oblique quelconque.

[10]C'est-à-dire, dans un horizon droit quelconque.

solsticial de l'hiver[11], jusqu'au point solsticial de l'été[12].

En ce qui concerne les jours -comme d'ailleurs tout le mond le sait- leur durée augmente, de plus en plus, dans un endroit quelconque de l'hémisphère nord, et ils ont même durée que les nuits, quel que soit l'endroit, boréal ou austral, précisément, quand le soleil dépasse l'équateur.

En ce qui concerne les crépuscules, ils y décroissent jusqu'au jour où ils ont une durée minimum, encore avant l'équinoxe du printemps. Après ce jour-là, leur durée augmente continuellement, jusqu'au jour du solstice d'été. En effet, on peut dire et montrer, comme l'a fait PEDRO NUNES, que les crépuscules y décroissent rapidement jusqu'au jour où le soleil dépasse un certain point de l'écliptique tel que le sinus de la latitude de l'endroit soit égal à la raison entre le sinus de la dépression du soleil[13], au début du crépuscule matinal ou à la fin du crépuscule vespéral, et deux fois le sinus de la déclinaison de ce point-là de l'écliptique;

qu'ils y décroissent encore, mais plus lentement, jusqu'au jour, où ils ont même durée que ceux qui arrivent, quand le soleil dépasse l'équateur;

que cette décroissance continue encore, quoique beaucoup plus lentement, après ce jour-là, ce qui implique qu'il y ait une valeur minimum, quand le soleil dépasse un certain point sur l'écliptique encore avant le point équinoxial;

et que c'est après ce passage, que commence la croissance de la durée des crépuscules, jusqu'au solstice d'été.

Après une exposition théorique du problème, sûre et exacte, quoique très longue, sans doute, et même complexe -ce qui n'enlève pas du tout la valeur et le mérite de son raisonnement, en ce temps-là- il est arrivé géométriquement et dans un contexte d'astronomie sphérique aux calculs, soit des jours (deux), où arrivent à chaque endroit, les crépuscules de durée minimum, soit même et aussi de sa durée. PEDRO NUNES a même résolu le problème pour l'horizon de Lisbonne. Voilà les résultats, qu'il a trouvés[14].

1 Les jours de l'année où les crépuscules, à Lisbonne, ont même durée que ceux qui ont lieu, quand le soleil dépasse la ligne équatoriale

1.1 Arc crépusculaire, en ces jours-là

$$sr(ArcCrp) = sr(DpS)st()/sr(HE)$$

[11]Le Tropique du Capricorne.

[12]Le Tropique du Cancer.

[13]Arc du méridien céleste d'un endroit, au-dessous de l'horizon, compris entre le soleil et l'horizon.

[14]PEDRO NUNES, n'utilise que deux fonctions trigonométriques, tout le long du *De Crepusculis* : le *sinus rectus* et le *sinus versus*.
Étant AB un arc d'un cercle, centré en O et dont le rayon soit OA, on dit que le *sinus total*, $st()$, quelque soit l'arc AB, c'est la mesure du rayon OA;

- *sinus rectus* de l'arc AB, $sr(AB)$, c'est la mesure du coté CB du triangle OCB (C, un point en OA), rectangle en C;
- *sinus versus* de l'arc AB, $sv(AB)$, c'est la mesure de $OA - OC$.

On a, alors, $\sin(AB) = sr(AB)/st()$ et $sv(AB) = OAsr(90° - AB))$
Dans son ouvrage *De Crepusculis*, PEDRO NUNES a utilisé des tables de sinus, où le rayon de la sphère céleste était supposé d'être divisé en 100000 parties égales, c'est-à-dire, où $st() = 100000$.

$ArcCrp$ = Arc Crépusculaire.

DpS = Dépression du Soleil, au début du crépuscule matinal et à la fin du crépuscule vespéral. À Lisbonne, $DpS = 16°2'$, valeur auparavant calculée[15].

HP = Hauteur du Pôle, (latitude de l'endroit).

HE = Hauteur de l'Équateur.

$$\begin{aligned} DpS &= 16°2' \\ HP &= 38°40' \\ HE &= 51°20' \end{aligned}$$

$sr(DpS) = 27626$
$sr(HE) = 78079$
$st() = 100000$

$$\begin{aligned} sr(ArcCrp) &= 27626 \times 100000 \div 78079 = 35382 \\ ArcCrp &= 20°43'20'' \end{aligned}$$

auquel correspond la durée 1h 22m 53.3s

1.2 Déclinaison des points P de l'écliptique, où se trouve le soleil, quand les crépuscules, à Lisbonne, ont même durée que les crépuscules équinoxiaux :

$$sr(DclP) = sr(AO)sr(HE)/st()$$

$DclP$ = Déclinaison des points P de l'écliptique...;

AO = Amplitude Ortive[16] du point P de l'écliptique, où se trouve le soleil, pendant son mouvement ascendant, quand les crépuscules, à Lisbonne, ont même durée que les crépuscules équinoxiaux.

AO = $13°12'$, valeur auparavant calculée.

HE = Hauteur de l'Équateur, $(HE = 51°20')$.

$$\begin{aligned} sr(AO) &= 22551 \\ sr(HE) &= 78079 \\ st() &= 100000 \end{aligned}$$

$$sr(DclP) = 22551 \times 78079 \div 100000 = 17607.5$$

Déclinaison du point $P = 10°8'30''$.

La déclinaison du point P correspondant, quand le soleil descend l'écliptique, est évidemment la même.

1.3 Identification de ces point-là

$$sr(DistP) = sr(DclP)st()/sr(DME)$$

$DistP$ = Arc de l'écliptique, entre la position P du soleil et le point equinoxial plus proche – le point vernal, pendant le mouvement ascendant, ou le point automnal, pendant le mouvement descendant.
DME = Déclinaison maximum de l'écliptique, $(DME = 23°28')$.
$DclP$ = Déclinaison des points P de l'écliptique,...

$$\begin{aligned} sr(DclP) &= 17607.5 \\ sr(DME) &= 39874 \\ st() &= 100000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sr(DistP) &= 17607.5 \times 100000 \div 39874 = 44158 \\ DistP &= 3°48' \text{ du signe des } \textit{Poissons} \\ & \quad 26°12' \text{ du signe de la } \textit{Balance} \end{aligned}$$

On peut donc affirmer, comme l'a fait Pedro PEDRO NUNES, que les jours de l'année *de notre temps*, où les crépuscules à Lisbonne ont même durée que les crépuscules équinoxiaux, sont le 12 Février et le 10 Octobre, quand le soleil se trouve déjà, respectivement, dans les signes des *Poissons* et de la *Balance* du Zodiaque[17].

2 Durée minimum des crépuscules à Lisbonne

$$sr(CrM/2) = st()sr(DpS/2)/sr(HE)$$

CrM = Arc crépusculaire minimum.
DpS = Dépression du Soleil, au début du crépuscule matutinal et à la fin du crépuscule vespéral, (à Lisbonne, $DpS = 16°2'$)[18].
HE = Hauteur de l'Équateur, $(HE = 51°20')$.

$$\begin{aligned} st() &= 100000 \\ sr(DpS/2) &= 13946 \\ sr(HE) &= 78079 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sr(CrM/2) &= 100000 \times 13946 \div 78079 = 17865 \\ CrM &= 20°34'40'' \end{aligned}$$

auquel correspond la durée 1h 22m 18.7s

2.1 Déclinaison des points de l'écliptique, où se trouve le soleil, quand les crépuscules à Lisbonne ont durée minimum

$$sr(\text{Déclinaison}) = sr(AO)sr(HE)/st()$$

[17] Il n'y a ici aucune erreur, au contraire de ce qu'il semble. En effet, d'après le Calendrier, *au temps de* PEDRO NUNES, c'est-à-dire, le Calendrier Julien, les équinoxes du printemps et de l'automne avaient lieu le 11 Mars et le 12 Septembre, respectivement. Par conséquent, le 12 Février était, en ce temps-là, le vingt-huitième jour, avant le printemps, et le 10 Octobre, le vingt-huitième jour, après l'automne.

[18] V. note 15.

AO	=	Amplitude Ortive du point P de l'écliptique, où se trouve le soleil, pendant son mouvement ascendant, quand les crépuscules, à Lisbonne, ont durée minimum. $AO = 6°28'$, valeur auparavant calculée.
HE	=	Hauteur de l'Équateur, ($HE = 51°20'$).

$$\begin{aligned} sr(AO) &= 11262 \\ sr(HE) &= 78079 \\ st() &= 100000 \end{aligned}$$

$$sr(\text{Déclinaison}) = 11262 \times 78079 \div 100000 = 8793$$
$$\text{Déclinaison (austral) du point } P = 5°2'40''.$$

La déclinaison du point P correspondant, quand le soleil descend l'écliptique est évidemment la même.

2.2 Identification de ces points-là

$$sr(DistP) = sr(DclP)st()/sr(DME)$$

$DistP$	=	Arc de l'écliptique, entre la position P du soleil et le point vernal ou le point automnal – le plus proche.
DME	=	Déclinaison maximum de l'écliptique, ($DME = 23°28'$).
$DclP$	=	Déclinaison des points P de l'écliptique,...

$$\begin{aligned} sr(DclP) &= 8793 \\ st() &= 100000 \\ sr(DME) &= 39874 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sr(DistP) &= 8793 \times 100000 \div 39874 = 22052 \\ DistP &= 17°16' \text{ du signe des } \textit{Poissons} \\ & \quad\ 12°44' \text{ du signe de la } \textit{Balance} \end{aligned}$$

ce qui, à l'époque de PEDRO NUNES, avait lieu, le 25 Février et le 26 Septembre, respectivement.
On peut donc et finalement affirmer, comme l'a fait PEDRO NUNES que les jours de l'année *de notre temps*, où les crépuscules, à Lisbonne, ont durée minimum, sont le 25 Février et le 26 Septembre[19], quand le soleil se trouve déjà, respectivement, dans les signes des *Poissons* et de la *Balance* du Zodiaque.

D'après Heinrich Dorrie, dans son ouvrage *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, PEDRO NUNES a essayé de résoudre le problème du crépuscule minimum, mais n'y a pas réussi; néanmoins, ce problème a été résolu, beaucoup plus tard, par Jacob Bernoulli et D'Alembert, qui sont arrivés d'une façon pas simple à la solution cherchée en utilisant le calcul différentiel. Mais il s'est trompé, en ce qui concerne les efforts de PEDRO NUNES. Tous ces mathématiciens

[19]C'est-à-dire, *au temps* de PEDRO NUNES, le quatorzième jour, avant le printemps, et le quatorzième jour, après l'automne. (V. note 17).

Jacob Bernoulli, D'Alembert et, peut- être, d'autres ont trouvé, par des voies différentes de celles de PEDRO NUNES et après lui, les mêmes résultats, soit pour la durée du crépuscule minimum, soit pour la déclinaison du soleil, le jour où le crépuscule le plus petit arrive en chaque endroit. Dans l'ouvrage ci-dessus, par exemple, on peut voir[20] la détermination d'une formule pour la durée du crépuscule minimum (CrM), dans un endroit ayant latitude ϕ, en supposant, toujours et partout, $h = 18°$, la dépression du soleil, au début du crépuscule matinal et à la fin du crépuscule vespéral, c'est-à-dire,

$$\sin(CrM/2) = \sin(h/2)/\cos(\phi)$$

celle-ci tout à fait analogue à celle que PEDRO NUNES avait dejà trouvée, par des voies différentes, c'est-à-dire,

$$sr(ArcCrp/2) = sr(DpS/2)st()/sr(HE)^{21}$$

et, encore, la détermination d'une autre, celle qui donne la déclinaison d du soleil, ce jour-là,

$$\sin(d) = \sin(f) \text{ tg } (h/2)^{22}$$

celle-ci, différente, sans doute, de celle que PEDRO NUNES a trouvée, mais encore, tout à fait équivalente, comme l'on peut voir, par exemple, quand on cherche la déclinaison du soleil, le jour du crépuscule minimum, à Lisbonne[23]. En effet, on a

$$\begin{aligned} \sin(d) &= \sin(38°40')\text{tg } (8°1') \\ &= 0.624793547 \times 0.140836294 \\ &= 0.08799361 \end{aligned}$$

et la déclinaison du soleil correspondante, c'est-à-dire, $d \approx -5°2'40''$.

Mais, beaucoup plus important, pour mettre fin à cette question, c'est le témoignage de Jacob Bernoulli lui-même[24] :

> [*] Par contre, si je ne me trompe pas, ce problème a été déjà résolu par PEDRO NUNES, l'année 1542, dans son ouvrage *De Crepusculis*. Certes, je n'ai pas pu trouver ce livre-là, mais vers la fin des

[20]Solution qui se trouve dans *Lehrbuch der Spharischen Astronomie* de Brunnow.

[21]$ArcCrp$ = Arc Crépusculaire; DpS = Dépression du Soleil, au début du crépuscule matinal et à la fin du crépuscule vespéral; ($DpS = 18°$); et HE = Hauteur de l'Équateur, soit $90° HP$, (HP = Hauteur du Pôle ou latitude de l'endroit). D'après la note 14, les formules $sr(ArcCrp/2)/st() = (sr(DpS/2)/st())/(sr(HE)/st())$ et $\sin(CrM/2) = \sin(h/2)/\cos(f)$ sont équivalentes.

[22]C'est, donc, négative la déclinaison du soleil, le jour du crépuscule minimum, dans un endroit septentrional, comme d'ailleurs l'avait déjà montré PEDRO NUNES.

[23]Puisque on veut comparer des résultats, on va mettre $h = 16°2'$. (V. note 15).

[24]"SOLUTIO PROBLEMATIS DE MINIMO CREPUSCULO", Per Jacob Bernoullium *Communicata in litteris, Basileae, die 20 Julii, 1692, datis* :
"Imo, nisi fallor, jam anno 1542 id Problema fuit a P. NONNIO legitime solutum, in Tractatu *De Crepusculis*. Librum quidem reperire non potui, sed exstat ad calcem *Commentarii in Sphaeram* J. DE SACROBOSCO per *Chr.* CLAVIUM ... *Digressio de Crepusculis*, cujus Auctor in Prooemio prosequitur, se NONNII librum in compendium duntaxat redegisse. Huius autem Digressionis Prop.XXII docet reperire Punctum Eclipticae in quo Sol brevissimum efficit Crepusculum, eiusque Crepusculi magnitudinem definire. Etsi vero non incidit in Analogiam tam simplicem, quam ea est quae hic proponitur, legitimam tamen solutionem esse negari nequit, quaeque facile ad istam reducitur".

Commentarii in Sphaeram J. DE SACROBOSCO per Chr. CLAVIUM···, on trouve une *Digressio de Crepusculis*, où l'auteur affirme, dans le préambule, qu'il a seulement rassemblé dans un résumé le livre de NUNES. La Prop. XXII de cette Digression nous apprend à trouver un point de l'écliptique, où le soleil produit le crépuscule minimum et à déterminer la durée de ce crépuscule. Quoique, en vérité, elle ne soit pas une relation si simple que celle que l'on propose ici, on ne peut pas, toutefois, nier que cette solution-là est légitime, laquelle facilment aussi se réduit à celle-ci.

Et voilà la relation trouvée par Jacob Bernoulli, pour la détermination de la déclinaison du soleil, le jour du crépuscule minimum, dans un endroit[25] : *"Comme le sinus total à la tangente de 9°, ainsi le sinus de l'élévation du pôle au sinus de la déclinaison cherchée"*, c'est-à-dire,

$$1/\mathrm{tg}(9^\circ) = \sin(\phi)/\sin(d).$$

Donc, le jour où le crépuscule de durée minimum arrive, dans un endroit septentrional ayant latitude ϕ, c'est celui où la déclinaison *austral* du soleil, sur l'écliptique, a la valeur d, telle que

$$\sin(d) = \sin(\phi)\mathrm{tg}\ (h/2).$$

Finalement, on peut dire que le problème du crépuscule minimum a été résolu par PEDRO NUNES, qui a établi géométriquement (il ne connaissait pas encore le calcul différentiel) des formules pour la détermination, soit de la durée du crépuscule minimum, dans un endroit septentrional, soit des jours[26], où il a lieu. Il a aussi été résolu, une centaine d'années après, mais partiellement, par JACOB BERNOULLI celui-ci ayant d'autres moyens mathématiques, c'est-à-dire, le calcul différentiel. Lui aussi a trouvé, une formule pour la détermination des jours[27] où le crépuscule, dans un endroit septentrional, a durée minimum.

Références

ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA. Obras de PEDRO NUNES, *De Crepusculis*, 1943.

GUIMARÃES, Rodolfo. Les Mathématiques en Portugal, 2ième édition, Coimbra 1909.

GUIMARÃES, Rodolfo. Sur la Vie et l'Œuvre de Pedro Nunes, Coimbra, 1915.

STOKLER, Garção. Ensaio Histórico sobre a Origem e os Progressos das Matemáticas em Portugal, Paris, 1819.

DORRIE, Heinrich. 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover Publications, New York, 1965.

"SOLUTION PROBLEMATIS DE MINIMO CREPUSCULO, Per Jacob Bernoullium *Communicata in litteris, Basileae, die 20 Julii, 1692, datis.*

[25]Ut Sinus Totus ad Tangent. 9 grad. Sic Sinus Elevationis Poli ad Sinum quaesitae Declinationis *Australis*, quam Sol tempore minimi Crepusculi obtinet.

[26]La déclinaison *austral* du soleil, sur l'écliptique, le jour où le crépuscule, dans un endroit septentrional, a durée minimum.

[27]V. note 26.

Quelles mathématiques pour former des enseignants

Illustration d'une expérience de définition de contenus adéquats, à forte coloration épistémologique et historique, sur le thème "La géométrie : une description de la réalité ?"

DALLA PIAZZA Aldo
Université de Berne (Suisse)

Abstract

Doit-on former des matématiciens qui feront de l'enseignement ou des enseignants qui enseigneront les mathématiques ? Une formation académique en mathématiques donne-t-elle de cette discipline la vue large et contextualisée qui devrait être celle d'un enseignant ou mène-t-elle à une forte spécialisation et à une vision formaliste et trop axée sur la rigueur et la structuration axiomatique ?

Ces questions ont amené, notamment en Suisse, à ce que soit discutée l'idée de formation en mathématiques orientée vers l'enseignement. La définition des buts, des contenus et des processus à mettre en œuvre dans un tel cadre demande un travail approfondi de réflexion ainsi que la réalisation et l'évaluation de nombreux essais.

Cette conférence donnera une présentation d'un tel essai, centré sur une approche épistémologique et historique de la géométrie et de son enseignement, essai qui a été réalisé l'automne dernier à l'Université de Berne, en Suisse, dans le cadre d'une formation post-diplôme destinée à habiliter un groupe de personnes à enseigner la didactique des mathématiques dans les Hautes écoles pédagogiques qui se mettent en place dans ce pays.