Les nombres complexes, les vecteurs et les quaternions

(L'introduction des quaternions au Portugal par Augusto d'Arzilla Fonseca-1884)

COSTA PEREIRA CARACOL Teresa de Jesus
Escola Secundária de Montejunto (Portugal)

Abstract

À la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, les nombres complexes n'ont pas de statut mathématique.

Avec les travaux de Wessel (1745-1818), Argand (1768-1822), Gauss (1777-1855), les quaternions de Hamilton (1805-1865) et l'algèbre de Grassmann (1809-1877), on voit la représentation géométrique et la multiplication des quantités imaginaires.

En utilisant la multiplication de triples, Hamilton arrive aux quaternions et aux algèbres non-communicatives. Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle on voit apparaître les vecteurs comme une partie de l'ensemble des quaternions. Cependant, Hamilton s'interroge sur la nature de Sab et Vab, au produit des quaternions ab.

Présenter le quaternion, choisir son meilleur mode de représentation, montrer son efficacité et ouvrir des horizons, a été le but de ceux qui ont défendu l'utilisation des quaternions, comme on voit au travail de Arzila Fonseca (Coimbra 1884, Portugal).

1 Les Nombres complexes

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle on voit beaucoup de travail sur la résolution des équations algébriques. À ce sujet, nous rappelons les travaux des algébristes italiens (Bombelli, Cardan, Tartaglia), de Nicolas Chuquet en France, de Robert Recorde en Angleterre et de Pedro Nunes au Portugal.

Dans quelques livres de cette époque-là nous pouvons voir beaucoup de problèmes à résoudre, comme par exemple le suivant [STEWART & TALL 1977] :

> *La somme de deux nombres, quels qu'ils soient est 10 et leur produit est 40, quels sont ces nombres ?*

Nous allons transformer le problème en équation et nous avons $x + y = 10$ et $x \cdot y = 40$ ou encore $y = 10 - x$ et $x(10 - x) = 40$. Cela veut dire que $x = 5 \pm \sqrt{-15}$.

Pour les mathématiciens du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, $\sqrt{-15}$ était une chose étrange. En supposant que le carré d'un nombre réel est positif, le carré de $\sqrt{-15}$ est (-15), qui est un nombre négatif. D'autre part nous vérifions que l'addition des deux racines trouvées est égale à 10 et leur produit, égal à 40. Cela veut dire que nous pouvons traiter $\sqrt{-15}$ d'une manière *imaginaire* ?

Ces *imaginaires* (c'est Descartes qui a donné ce nom aux nombres dont le carré est négatif, comme nous pouvons voir dans le livre *La Géométrie* [De,1954]), sont entrés dans les opérations usuelles. Cela permet de trouver les solutions des équations et d'arriver à quelques résultats importants.

En 1774, Euler introduit des symboles et il écrit ces nombres $a + b\sqrt{-1}$ (a et b sont des nombres réels).

Les imaginaires prennent du sens et leur représentation géométrique impose de croire à leur existence.

En 1673, John Wallis essaye de représenter géométriquement les solutions imaginaires de l'équation du deuxième degré. [STILLWELL 1989]

$$\boxed{x^2 + 2bx + c^2 = 0, \qquad b, c \geq 0}$$

Cependant il n'a pas réussi car il a traité les racines imaginaires de l'équation comme si elles étaient réelles. Il faut remarquer qu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle les nombres négatifs attendent encore un statut mathématique propre jusqu'au moment (1770) où Euler définit $\sqrt{-a}$ et explicite le produit $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{6}$.

En 1811, Gauss appelle les imaginaires *nombres complexes* et parle déjà du plan complexe. Il publie quelques résultats sur ce sujet dans *Theoria Residuorum Biquadraticorum* en 1831.

D'autres mathématiciens ont travaillé sur la représentation des *nombres complexes*. En 1797, Wessel (1745-1818) publie l'*Essai sur la représentation analytique de directions*, qui est resté inconnu pendant 100 ans.

L'idée fondamentale qui va permettre d'accepter les imaginaires est d'associer la perpendicularité au signe $\sqrt{-1}$ en relation avec l'unité positive $(+1)$. Ce qui est présent dans les travaux de Wessel, comme nous allons le décrire :

$(+1)$ *est le segment unité positif et* $(+\epsilon)$ *est une autre unité perpendiculaire à* $(+1)$. *La direction angulaire de* $(+1)$ *est* $O°$, *de* (-1) *est* $180°$, *de* $(+\epsilon)$ *est* $90°$ *et de* $(-\epsilon)$ *est* $(-90°)$ *ou encore* $270°$.

En utilisant la règle du produit de deux segments sur le même plan, Wessel est arrivé aux égalités suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (+1)\cdot(+1) = (+1) & (+1)\cdot(-1) = (-1) & (-1)(-1) = (+1) \\ & (+1)\cdot(+\epsilon) = (+\epsilon) & \\ (+1)\cdot(-\epsilon) = (-\epsilon) & (-1)\cdot(+\epsilon) = (-\epsilon) & (-1)\cdot(-\epsilon) = (+\epsilon) \\ & (-\epsilon)\cdot(-\epsilon) = (-1). & \end{array}}$$

En 1806, Argand (1768-1822) publie *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, où il définit géométriquement les *imaginaires*, leur addition et leur produit. L'acceptation de ces entités dans le champ algébrique revient à considérer i comme la moyenne proportionnelle géométrique entre $(+1)$ et (-1) et nous avons $i^2 = -1$.

2 Hamilton et l'invention des quaternions

Hamilton est né à Dublin en 1805 et il est mort, aussi dans cette ville en 1865. À l'âge de 3 ans il va habiter avec son oncle, qui reconnaît rapidement sa précocité, surtout dans l'étude des langues.

En 1823, Hamilton entre au Trinity College à Dublin et en 1827, il obtient le poste d'astronome royal à l'observatoire de Dunsink et de professeur d'astronomie au Trinity College.

De 1830 à 1840, Hamilton écrit une théorie des *nombres complexes* en utilisant les couples (a, b), a et b étant des nombres réels.

On considère que les résultats déjà connus sur les *nombres complexes*, leur représentation géométrique et la théorie de couples (1837), ont joué un rôle très important dans l'invention des quaternions. La Théorie des Couples a convaincu Hamilton de la légitimité des *nombres complexes* et, en même temps a donné le moyen d'aller au-delà de la dimension 2. Elle a préparé la découverte et la certitude qu'il fallait passer de la dimension 2 à la dimension 4. Cependant la démarche d'Hamilton pour arriver aux quaternions a été longue et a occupé vingt ans de sa vie.

Par analogie avec les nombres complexes, Hamilton écrit les triples $a + bi + cj$, où les vecteurs $1, i, j$ sont perpendiculaires deux à deux et de longueur un. Pour le produit des triples il a considéré qu'il était possible de multiplier terme à terme et que la longueur du vecteur produit était égale au produit des longueurs des vecteurs facteurs (1)

Lors du produit $(a + bi + cj)(x + yi + zj)$ (2), on voit apparaître les expressions i^2, j^2 que Hamilton égale à (-1), par analogie avec $i^2 = -1$ dans la *théorie des couples*. Le produit ij fait surgir beaucoup de doutes, ce qui a amené Hamilton à faire quelques essais que nous allons décrire [HAMILTON 1844] :

1- Si on a $i^2 = j^2 = -1$, alors $(ij)^2 = 1$, mais dans ce cas $ij = 1$ ou $ij = -1$ et au produit (2), la propriété (1) n'est pas vérifiée.

2- Si on a le cas particulier du produit $(a + ib + cj)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2iab + 2jac + 2ijbc$, en faisant l'addition des carrés des coefficients de $1, i, j$, à droite on a $(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$. La règle du produit est vérifiée si $ij = 0$, ce qui n'est pas en accord avec la propriété (1)

3- Hamilton est sûr qu'il ne peut pas faire $ij = 0$ et il écrit $ij = -ji$ ou $ij = k, ji = -k$. Il reste encore des doutes sur la valeur de k.

4- Hamilton multiplie les triples $(a + ib + jc)$ et $(x + ib + jc)$ et il obtient :

$$ax - b^2 - c^2 + i(a + x)b + j(a + x)c + k(bc - bc).$$

Si on considère $ij = -ji$, le coefficient k a disparu. Les expressions $ax - b^2 - c^2, (a + x)b, (a + x)c$ sont les vraies coordonnées du produit et Hamilton a la confirmation de ce résultat par voie géométrique.

Avec l'égalité $ij = -ji$, Hamilton généralise le produit des triples

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + k(bz - cy)$$

et il s'interroge sur la véracité de l'égalité

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2.$$

Le membre de gauche est plus grand que celui de droite en $(bz - cy)^2$, qui est en même temps le carré du coefficient en k, quand on condidère $ij = k$ et $ji = -k$. Hamilton n'a plus de doutes sur l'existence d'une autre unité imaginaire, qu'il appelle k.

Le 16 octobre 1843 est le jour de la découverte des quaternions. En partant du produit $ij = -ji = k$, Hamilton travaille sur une base avec quatre vecteurs indépendants, $1, i, j$ et k, jusqu'à arriver aux résultats suivants (en supposant $i^2 = j^2 = k^2 = -1$)

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

qui vérifient la propriété (1), pour le produit des quaternions, quels qu'ils soient.

En s'appuyant sur l'ensemble des *nombres complexes*, Hamilton a essayé le produit de triples. Ce travail, par hasard, l'a amené à une troisième unité imaginaire, k et à l'algèbre des quaternions.

Le scepticisme sur les nombres de carré négatif a été dépassé et en même temps, se créent des abîmes de doutes sur la nouvelle théorie des quaternions due à Hamilton qui n'obéit pas aux lois de l'arithmétique usuelle; on a perdu la propriété de commutativité de la multiplication.

Hamilton écrit tout quaternion sous la forme $q = w + ix + jy + kz, (w, x, y, z \in \mathbb{R})$ et il introduit, pour la première fois les mots *scalar* et *vector*. Sur l'ensemble des quaternions, ils déterminent deux entités différentes.

Nous considérons $q = w + ix + jy + kz, w$ est le *scalar* et $(ix + jy + kz)$ est la partie vectorielle et Hamilton a écrit

$Q =$ Scal. $Q +$ Vect. Q ou $Q = S.Q + V.Q$ ou encore $Q = SQ + VQ$, pour le quaternion Q.

Considérons le cas particulier du produit $\alpha\alpha'$ des quaternions $\alpha = ix + jy + kz$ et $\alpha' = ix' + jy' + kz'$:

$$\alpha\alpha' = (-xx' - yy' - zz') + i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - x'y)$$

$(-S'\alpha\alpha)$ est le produit scalaire et $V\alpha\alpha'$ est le produit vectoriel au sens moderne.

Hamilton a vu que les quaternions ne ressemblaient pas aux nombres complexes et surtout il a eu des doutes sur la représentation géométrique de la partie réelle. À ce propos il écrit [CROWE 1993] :

> Regarded from a geometrical point of view, this algebraically imaginary part of a quaternion has thus so natural and simple a signification or representation in space, that the difficulty is transferred to the algebraically real part; and we are tempted to ask what this last can denote in geometry, or what in space might have suggested it.

En 1989, Simon L. Altmann, publie un article sous le titre *Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal* (What went wrong with on of the major mathematical discoveries of the nineteenth century), dans le *Mathematical Magazine* [ALTMANN 1989], ce qui nous fait croire que l'intérêt pour la théorie des quaternions reste présent à notre époque.

Dans cet article, Altmann met côte à côte Hamilton, considéré l'inventeur des quaternions et Olinde Rodrigues, directeur de la *Caisse Hypothécaire* de la Rue Neuve-Saint –Augustin à Paris. L'auteur dit qu'en 1840 Olinde Rodrigues a présenté quelques résultats sur les rotations dans l'espace, en donnant un sens géométrique aux entités créées par Hamilton trois ans plus tard.

Depuis qu'Hamilton est mort en 1865, la théorie des quaternions a eu quelques disciples. On a resenti l'importance des produits scalaire et vectoriel, grâce au produit des quaternions. À ce sujet nous rappelons les travaux de Hermann Grassmann (1809-1877) en Allemagne et de Heaviside (1850- 1925) en Angleterre.

En 1844 Grassmann a publié la *Théorie de l'Extension*, en présentant deux produits, le vectoriel (*outer product*) et le scalaire (*inner product*). En considérant la notation moderne et la base $e_1, e_2, \cdots, e_n$, le produit vectoriel obéit aux propriétés suivantes $(x, y, z \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} e_x e_y &= -e_y e_x \\ e_x e_x &= e_y e_y = 0 \\ e_x(e_y + e_z) &= e_x e_y + e_x e_z. \end{aligned}$$

Dans le langage de Grassmann le résultat du produit vectoriel est une entité de deuxième ordre, une surface orientée ou un *bivecteur*. Dans son algèbre nous avons les 0-vecteurs, les 1-vecteurs, les bivecteurs, etc.

David Hestenes [HESTENES 1986] considère que Grassmann a développé le produit vectoriel, à partir d'un travail déjà réalisé par son père Gunther Grassmann, sur le sujet, pour l'enseignement de base.

Dans l'algèbre de Grassmann, à un bivecteur B correspond un parallélogramme unique, déterminé par le produit des vecteurs a et b sur leurs côtés tel que $a \wedge b = B$ et $a \wedge b = -b \wedge a$.

Plus tard Grassmann a additionné les produits $a \cdot b$ (le produit scalaire) et $a \wedge b$ en créant le produit mixte, $ab = a \cdot b + a \wedge b$, qui est à la base des algèbres de Clifford [CNOPS & MALONEK 1995].

Le travail de Grassmann a été considéré comme très difficile à comprendre par les mathématiciens de son époque.

En 1886, Gibbs (1839-1903) a présenté les idées de Hamilton et de Grassmann, côte à côte, sans réussir à établir un lien entre eux et il a écrit à ce propos :

We begin by studying multiple algebras ; we end, I think, by studing MULTIPLE ALGEBRA [CROWE 1993].

Le travail de Hamilton l'a amené à un système de nombres pour représenter les rotations dans l'espace, où il a essayé d'expliquer la géométrie en langage algébrique. Hamilton et Grassmann travaillent en même temps mais de façon indépendante.

En 1878, William Clifford (1845-1879) a publié un article sous le titre *Applications of Grassmann Extensive Algebra*, où il dit que Hamilton et Grassmann sont restés très proches du même sujet, en utilisant différents points de vue et Clifford écrit [CLIFFORD 1878] :

Now there are two sides to the notion of a product. When we say $2 \times 3 = 6$, we may regard the product 6 as a number derived from the numbers 2 and 3 by a process in which they play similar parts; or we may regard it as derived from the number 3 by the operation of doubling. In the former view 2 and 3 are both numbers; in the latter view 3 is a number, but 2 is an operation, and the two factors play very distinct parts. The Ausdehnungslehre is founded on the first view; the theory of quaternions on the second.

Depuis qu'on a connaît le travail de Grassmann, les mathématiciens se sont divisé entre ceux qui ont défendu les quaternions et ceux qui sont contre cette théorie. Crowe [CROWE 1993] présente les publications, dans différents pays, des travaux sur les quaternions et sur l'algèbre de Grassmann. Au Portugal nous pouvons voir la publication de deux livres sur la théorie des quaternions.

En 1884, Augusto d'Arzilla Fonseca, publie le livre (3) *Principios Elementares do Cálculo de Quaterniões* [FONSECA 1884], suivi par un autre livre, *Applicação dos Quaterniões á Mecânica*, publié en 1885.

En prenant en compte la liste de Alexander Macfarlane [MACFARLANE 1904], nous pouvons considérer que Arzilla Fonseca a été le premier à travailler sur la Théorie des Quaternions au Portugal.

On considère que les mathématiciens portugais connaissent la production en mathématique en Europe. Quelques uns ont fait leur formation à l'étranger et ils ont établi des contacts avec leurs amis d'Europe, c'est l'exemple de Henrique Manuel de Figueiredo (1861-1922) qui a été le premier à travailler et à divulguer les idées de Riemann au Portugal [GRAY & ORTIZ 1999].

En 1877, Francisco Gomes Teixeira a créé le *Jornal de Sciencias Matematicas e Astronomicas*, ce qui a permis la divulgation de travaux mathématiques tant portugais qu'étrangers [SILVA].

Augusto d'Arzilla Fonseca[1] est contemporain de Francisco Gomes Teixeira et de Henrique Manuel de Figueiredo et il a participé au climat dynamique crée à la *Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra*.

Pour obtenir le poste de professeur à Coimbra, Arzilla Fonseca a présenté sa thèse, sous le titre (3). Ce travail se divise en six parties, sous les thèmes suivants :

I – *Propriedades das operações*
II – *Vectores e sua composição*
III – *Produto e quociente de vectores. Quaterniões*
IV – *Interpretação e transformação de expressões*

[1]Augusto d'Arzilla Fonseca est né au Funchal (Madeira) en 21 octobre 1853 et il est mort à Porto le 17 février 1912. Il a été licencié en philosophie (7/07/1883) et en mathématique (3/3/1834) à l'université de Coimbra. Le 27 juillet 1884 il est devenu docteur en mathématique. Parallèlement à la vie académique il a suivi la carrière militaire. Plus tard dans sa vie il a eu de problèmes de santé et il est resté presque aveugle.

V – *Equações do 1ºgrau. Biquaterniões*
VI – *Diferenciação de quaterniões*

Arzilla Fonseca commence son travail par une référence à l'histoire de la découverte des quaternions, par Hamilton. Il nous parle aussi, d'une arrivée très positive du calcul des quaternions en Angleterre, en Allemagne et en Amérique, et sur les avantages de ses applications.

Nous pouvons lire une référence à Grassmann et à Bellavitis, et surtout l'auteur présente plusieurs remarques sur Hamilton.

Fonseca a défini opération, vecteur, addition et soustraction de vecteurs dans l'espace, produit et division de vecteurs, où il présente un quaternion comme le quotient de deux vecteurs. Il travaille sur les rotations de l'espace en utilisant le nom versor. Il utilise des figures sur la sphère (de rayon 1) pour arriver au produit des unités imaginaires i, j, k :

$$jk = i, ki = j, ij = k, kj = -i, ik = -j, ji = -k.$$

Fonseca a définit le produit de deux vecteurs perpendiculaires (c'est le produit vectoriel moderne). Nous pouvons voir la décomposition d'un quaternion en scalaire et en vecteur, en utilisant les symboles S et V, comme l'a présenté plus tôt Hamilton. L'auteur a fait quelques applications à la trigonométrie, jusqu'à présenter la différentiation des quaternions et l'operateur *nabla*. Pour finir son travail, Fonseca établit une relation entre le calcul des quaternions et la physique.

Nous savons que les exigences de la science du XIX$^{\text{ème}}$ siècle n'ont pas fait triompher le système des quaternions, qui a connu une époque de décadence en opposition au système vectoriel de Gibbs-Heaviside qui a réussi.

Au XX$^{\text{ème}}$ siècle, R. Fueter, professeur de l'université à Zurich, a récupéré les opportunités perdues de la théorie de quaternions en travaillant sur le sujet. En 1924, il a été invité à participer au *Clube dos Lentes* à Coimbra et plus tard, en 1932, il a présenté un travail, à l'université à Coimbra sur *Quelques résultats de l'algèbre moderne* [FUETER 1932] ce qui nous fait croire que les mathématiciens portugais se sont intéressés au développement de l'algèbre moderne.

Une question se pose :

Quel place occupe aujourd'hui la théorie des quaternions créée par Hamilton ?

Pour répondre à cette question nous citons Jack B. Kuipers [KUIPERS 1999] :

Our intent in these pages is to explore the use of Hamilton's quaternions in studying certain transformations in ordinary space of three dimensions. It must be said that it was not long after the publication of Hamilton's results that Josiah Willard Gibbs and others began to work out the details of what we know today as the algebra of vector spaces, and Hamilton work seemed quickly to be eclipsed. Recently, however, interest in the use of quaternions has revived, and we want to consider ways in which quaternion algebra may still be more effective than the use of ordinary vector algebra.

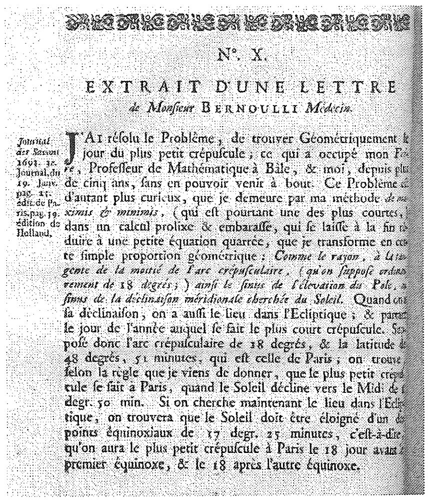
Bibliographie

ALTMANN Simon L. Hamilton, Rodríguez, and the Quaternion Scandal-Mathematical Magazine, 62, (291-308), 1989

BOYÉ A., CLERO J-P, DURAND-RICHARD M-J, FRIEDELMEYER J-P, HALLEZ M., VERLEY J-L. Images, Imaginaires, Imaginations. . . , Ellipses,1998

CLIFFORD W. Applications of Grassmann'Extensive Algebra- American Journal of Mathema-

tics Pure and Applied, 1, (350-358), 1878
CNOPS J. & MALONEK H. Introduction to Clifford Analysis, Coimbra, 1995
CROWE Michael J. A history of vector Analysis, Dover, 1993
DESCARTES R. The geometry of Réne Descartes, Dover 1954
FONSECA A. d'Arzilla. Principios Elementares do Calculo de Quaterniões- Coimbra, 1884
FUETER R. Quelques résultats de l'algèbre moderne- Revista da Faculdade de Ciências, vol.II, n°4, Coimbra, 1932
GRAY J. & ORTIZ E.L. On the transmission of Riemann's Ideas to Portugal- História Mathematica, 26 (52-67), 1999
HAMILTON W.R. On a new Species of Imaginaries Quantities connected with a theory of Quaternions – Proceedings of the Royal Irish Academy, Nov. 13, 1843, vol. 2, 424-434
HAMILTON W.R. Copy of a letter from sir William R. Hamilton to John T. Graves, Esq., Philosophical Magazine, 3rd series, 25 (1844), pp. 489-95, edited by David R. Wilkins, 1999
HAMILTON W.R. On Quaternions- Proceedings of the Royal Irish Academy, Nov. 11, 1844, vol. 3 (1847), 1-16
HAMILTON W.R. Letters describing the Discovery of Quaternions, August 5 , 1865
HESTENES D. New Foundations for Classical Mechanics- D. Reidel Publishing Company, 1986
HESTENES D. Hermann Gunther Grassmann (1809-1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neo-humanist Scholar, Klumer Academic Publishers, Dordrecht, 1996
KUIPERS Jack B. Quaternions and Rotation Sequences- Princeton Uni. Press, 1999
MACFARLANE A. Bibliography of quaternions and allied systems of Mathematics, Dublin, Uni. Press, 1904
SILVA Jaime C. História da Universidade em Portugal (A Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra (1772-1911)), à publier
STEWART I. & TALL D. The foundations of mathematics- Oxford Uni. Press, 1977
STILLWELL J. Mathematics and its History, Springer Verlag, 1989



N°. X.

EXTRAIT D'UNE LETTRE
de Monsieur BERNOULLI *Médecin.*

Journal des Savans 1693. 32. Journal, du 19. Janv. pag. 25. édit. de Paris, pag. 39. édition de Holland.

J'AI résolu le Problême, de trouver Géométriquement le jour du plus petit crépuscule ; ce qui a occupé mon Frere, Professeur de Mathématique à Bâle, & moi, depuis plus de cinq ans, sans en pouvoir venir à bout. Ce Problême est d'autant plus curieux, que je demeure par ma méthode *de maximis & minimis*, (qui est pourtant une des plus courtes,) dans un calcul prolixe & embarassé, qui se laisse à la fin reduire à une petite équation quarrée, que je transforme en cette simple proportion géométrique : *Comme le rayon, à la tangente de la moitié de l'arc crépusculaire, (qu'on suppose ordinairement de 18 degrés ;) ainsi le sinus de l'élevation du Pole, au sinus de la déclinaison méridionale cherchée du Soleil.* Quand on a la déclinaison, on a aussi le lieu dans l'Ecliptique ; & partant le jour de l'année auquel se fait le plus court crépuscule. Supposé donc l'arc crépusculaire de 18 degrés, & la latitude de 48 degrés, 51 minutes, qui est celle de Paris ; on trouve, selon la régle que je viens de donner, que le plus petit crépuscule se fait à Paris, quand le Soleil décline vers le Midi de [illegible] degr. 50 min. Si on cherche maintenant le lieu dans l'Ecliptique, on trouvera que le Soleil doit être éloigné d'un des points équinoxiaux de 17 degr. 25 minutes, c'est-à-dire qu'on aura le plus petit crépuscule à Paris le 18 jour avant le premier équinoxe, & le 18 après l'autre équinoxe.

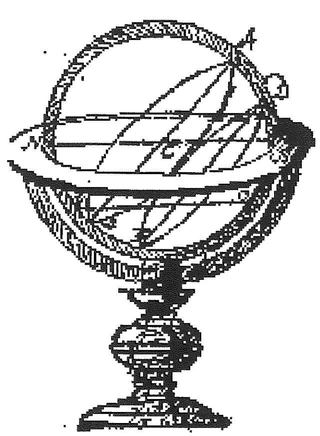
Lettres de Johann Bernoulli au Journal des Savans.

Le problème du crépuscule minimum, d'après PEDRO NUNES, dans son ouvrage "De Crepusculis"

DA SILVA VILAR Carlos Alberto
Universidade do Minho

Abstract

PEDRO NUNES est un mathématicien célèbre portugais du XVI$^{\text{ème}}$ siècle. La géométrie, la cosmographie, l'algèbre, l'astronomie et tout ce qui concerne la navigation sont les sujets de plusieurs ouvrages qu'il écrivit, au cours de sa vie. Le "De Crepusculis" n'en est peut-être pas le principal, mais il est certainement l'un des plus beaux et plus connus. C'est dans cet ouvrage que Pedro Nunes résolut le problème du crépuscule minimum et sa duration par une voie géométrique, ce que les frères Jean et Jacob Bernoulli firent aussi, une centaine d'années après, par l'application de la théorie des extrema d'une fonction de plusieurs variables. On fera, ici, au cours de ce travail, un résumé de ce problème.



Johann Bernoulli, *Lectiones de calculo differentialium*, Problema XX, *Invenire brevissimum Crepusculum*, Manuscrit de l'Universitätsbibliothek Basel, L I a 6.