SINGER, J. & J.B. WILLETT (1990). Improving the teaching of applied statistics: putting the data back into data analysis. The American Statistician 44(3), 223.
STAMHUIS, I.H. & A. DE KNECHT-VAN EEKELEN (1992). De met cijfers bedekte negentiende eeuw. Erasmus Publishing, Rotterdam.
STIGLER, S.M. (1973). Simon Newcomb, Percy Daniell, and the history of Robust Estimation 1885-1920. Journal of the American Statistical Association.
STIGLER, S.M. (1977). Eight centuries of sampling inspection: the trial of the Pyx. Journal of the Americal Statistical Association, 72, 493-500.
STIGLER, S.M. (1986) . The History of Statistics. The measurement of uncertainty before 1900. Harvard University Press.
STRAUSS, S. & E. BICHLER (1988). The development of children's concepts of the arithmetic mean. Journal for Research in Mathematics Education 19(1), 64-80.
TUKEY, J.W. (1977). Exploratory Data Analysis. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
TUKEY, J.W. (1980). Why we need both exploratory and confirmatory. The American Statistician, 34(1), 23-25.
WALKER, H.M. (1931). Studies in the history of stastistical method; with special reference to certain educational problems. Baltimore, Williams and Wilkins Company.
WITTGENSTEIN, L. (1984). Philosophische Untersuchungen. Suhrkamp.

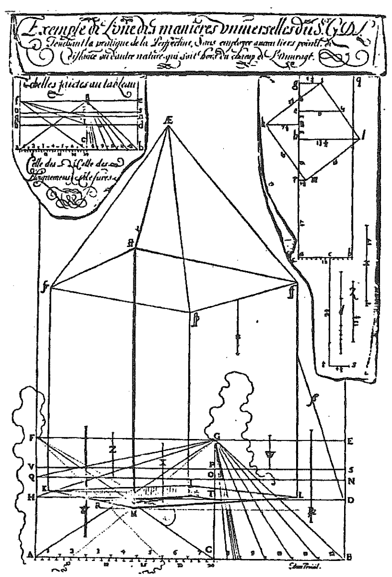

Planche du traité de perspective de Desargues de 1636.

De Brunelleschi à Desargues ou des problèmes liés à la représentation plane d'objets de l'espace . . .

BALLIEU, Michel
C.R.E.M. (Belgique)

Abstract

À partir de textes originaux – Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da VInci, Albrecht Dürer, Antonio Manetti, Giorgio Vasari, Simon Stevin, . . . – nous tentons de mettre en évidence les difficultés qui surgissent lorsque l'on essaie de représenter dans un plan des objets de l'espace. C'est un problème auquel nos jeunes élèves sont confrontés dans leur cours de géométrie de l'espace. Nous tentons de montrer que ce problème mathématique qui va déboucher sur une nouvelle géométrie -la géométrie prospective- trouve en fait son origine dans un idéal profondément humain de recherche d'esthétique en peinture.

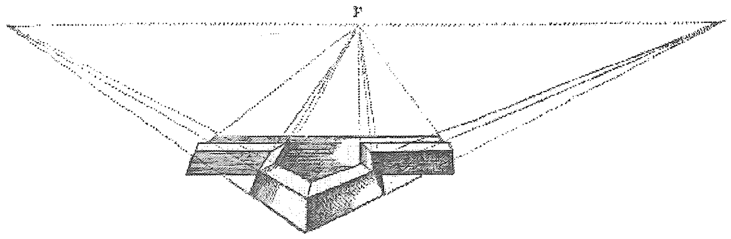

Illustration tirée du *De sterkte Bouwing* de Stevin

1 Introduction

De nombreux élèves du secondaire affichent une certaine réticence quand ce n'est pas un réel dégoût envers le cours de mathématiques. La raison en est très souvent qu'ils ne voient pas bien à quoi les mathématiques peuvent servir. Or il est légitime qu'ils essaient de trouver un sens à ce que nous exigeons d'eux dans le cadre de ce cours. Donner du sens à ce qu'on fait constitue une source importante de motivation.

S'il est relativement aisé de rendre attrayante une revue scientifique traitant même très sérieusement de physique, chimie ou biologie, ... grâce à de belles photographies ou maquettes aux couleurs chatoyantes, le niveau d'abstraction des objets manipulés en mathématiques ne permet guère de recourir à cette forme de vulgarisation. L'aspect esthétique d'un tableau de nombres ou d'une équation est — il faut bien l'admettre — a priori assez limité.

Très souvent, il nous est même impossible de donner une bonne réponse à la question 'à quoi cela sert-il ?', tout simplement parce que les élèves ne disposent pas des connaissances nécessaires à la bonne compréhension de cette réponse.

L'approche historique d'un concept est en général plus efficace et permet de situer le cours de mathématiques dans l'histoire de l'humanité. La nécessité d'évaluer les dimensions d'un terrain, de construire un bâtiment qui sera 'droit', de partager équitablement un avoir, de représenter le monde réel, ... est source de découvertes et d'activités mathématiques auxquelles il est possible de sensibiliser les élèves.

Nous proposons ici une anthologie de quatre textes que nous allons commenter et qui représentent diverses étapes dans la connaissance des règles de la perspective. L'un ou l'autre de ces textes pourra être exploité en classe pour introduire le cours de géométrie de l'espace qui, chez nous en Belgique, fait partie du programme de quatrième année du secondaire.

Pour diverses raisons que nous ne pourrons pas analyser ici, les artistes de la Renaissance n'auront pas les mêmes buts en peinture que leurs prédécesseurs. Au moyen âge, la glorification de Dieu, l'illustration de scènes bibliques sont pratiquement les seuls thèmes abordés dans nos régions. Les arrière-plans dorés suggèrent que les personnages et objets peints coexistent dans des lieux célestes. La réalité a peu d'importance ; c'est plutôt le côté symbolique de la scène qui compte. Les peintres produisent des tableaux plats, comme par exemple la représentation du martyre de Saint Quirin (Figure 1). Les artistes de la Renaissance manifestent eux un intérêt pour la représentation fidèle de la nature et sont dès lors confrontés aux problèmes posés par la représentation de la réalité du monde à trois dimensions sur une toile à deux dimensions. Il y a là une difficulté réelle à laquelle n'échappent pas les élèves. Certains ont beaucoup de mal à interpréter une représentation plane de l'espace, ce qui est sans doute dû au fait que le passage de trois à deux dimensions ne se fait pas sans perte d'information.

Les règles qui seront mises au point à partir du *Quattrocento* sont basées sur des théorèmes mathématiques.

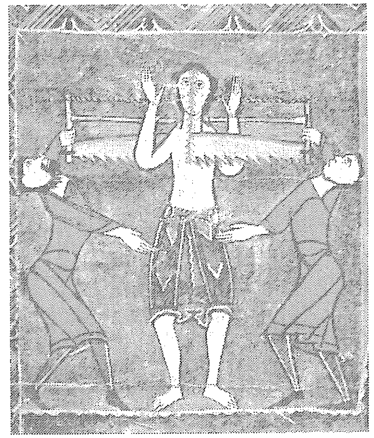

FIGURE 1 : *Le martyre de Saint Quirin, XII^{ème} siècle*

S'il est relativement simple d'exhiber des différences fondamentales entre la peinture de la figure 1 et les deux peintures des figures 2 et 3, il est par contre plus difficile de décider laquelle de ces deux dernières peintures est la plus proche de l'ombre à la lampe d'un damier transparent (4) ou d'une photographie (Figure 5).

FIGURE 2 : *L'annonciation de A. Lorenzetti, 1344*

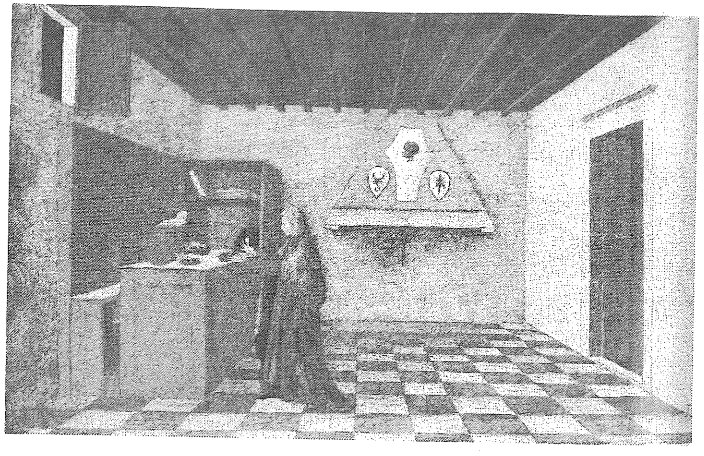

FIGURE 3 : *Le miracle de l'hostie profanée de Uccello, 1469*

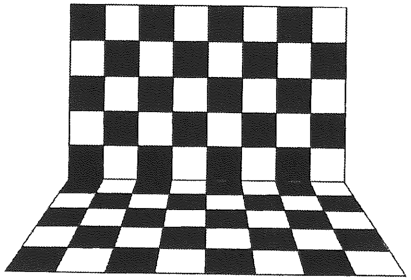

FIGURE 4 : *Ombre à la lampe d'un damier*

FIGURE 5 : *Photographie de carrelage*

Comment se forme une ombre à la lampe ? Que se passe-t-il dans un appareil photographique ? Comment les peintres italiens du *Quattrocento* ont-ils établi les règles de la perspective centrale ? Ces questions sont provoquées par la comparaison des différents documents ci-dessus. Elles ont été abordées sous forme de situations-problèmes dans une brochure élaborée durant cette année par l'équipe du CREM (voir bibliographie). Notons que ces différentes approches permettent également d'introduire la géométrie projective.

Dans le cadre de cet exposé, nous ne parlerons que du dernier point qui concerne quelques étapes historiques de la découverte des règles de la perspective centrale.

2 Filippo Brunelleschi (1377 – 1446)

Selon Giorgio Vasari (1511 – 1574), son intérêt pour les mathématiques l'a conduit à étudier la perspective. Il avait lu Euclide, Hipparche, et appris les mathématiques avec le mathématicien florentin Paolo del Pozzo Toscanelli (1397 – 1482). Pour lui, la peinture était prétexte à pratiquer la géométrie.

Les panneaux que Brunelleschi réalisa pour montrer la validité de la perspective centrale sont perdus. Voici la description qu'en donne Manetti. La scène se passe vers 1415.

> ... La première chose qui révéla cette science de la perspective fut un panneau d'environ une demi-brasse carrée où il peignit l'extérieur de l'église *San Giovanni* de *Firenze*, autant qu'on en voit en la regardant du dehors, comme si pour la représenter il s'était enfoncé de trois brasses environ dans la porte centrale de *Santa Maria del Fiore*. Elle était peinte avec tant de soin et d'artifice, et tant de précision dans les couleurs des marbres blancs et noirs, qu'aucun miniaturiste n'aurait fait mieux. Filippo avait aussi représenté cette partie de la place que voit l'œil du spectateur, c'est-à-dire le côté d'en face de la *Misericordia* jusqu'à la voûte et au *Canto de Pecori*, le côté de la colonne du miracle de *Santo Zanobi* jusqu'au *Canto alla Paglia*, et tout ce qu'on voit au loin ; pour ce qu'on voyait du ciel, c'est-à-dire là où les murailles représentées se détachaient dans l'atmosphère, il était d'argent bruni, afin que l'air et le ciel réel s'y réfléchissent, et de même les nuages entraînés par le vent quand il souffle. Comme le peintre doit supposer un seul point pour voir sa peinture, tant en hauteur qu'en largeur et de biais comme de loin, afin qu'on ne pût se tromper en la regardant, puisque tout changement de lieu entraîne une vision différente, il avait fait dans le panneau supportant cette peinture un trou au point exact de l'église *San Giovanni* où frappait le regard de qui se trouvait à l'intérieur de la porte centrale de *Santa Maria del Fiore*, endroit où il se serait placé s'il l'avait peint sur le motif. Ce trou était petit comme une lentille sur le côté de la peinture, s'élargissant en pyramide, comme un chapeau de paille de femme, du côté du revers, jusqu'à atteindre la circonférence d'un ducat ou un peu plus. Il voulait que celui qui regardait appliquât l'œil au revers, là où le trou était large, qu'une main fût placée près de l'œil et que l'autre tînt, face à la peinture, un miroir plan où celle-ci vînt se réfléchir : la distance entre le miroir et la seconde main était proportionnellement, en brasses minuscules, pour ainsi dire, la même qu'en brasses réelles entre l'endroit où il supposait s'être mis pour peindre et l'église *San Giovanni* ; si bien qu'en le regardant, grâce aux autres éléments dont on a parlé, l'argent bruni, la place, etc., et de ce point, on croyait voir la réalité même. Ayant eu ce dispositif en main et l'ayant vu plusieurs fois jadis, je peux en porter témoignage.

La Vita di Ser Filippo Brunelleschi, Antonio di Tuccio MANETTI. Republié. Supplément aux *Cahiers de la recherche architecturale,* n°3, C.E.R.A., Paris, 1979.

Manetti insiste sur l'unique point d'où l'œil doit regarder à la bonne distance la scène réelle pour voir exactement ce que le peintre a vu ; ce problème est le même en ce qui concerne l'objectif d'un appareil photographique. Il faut se placer à la bonne distance face à un point précis qui, sur la peinture, porte le nom de point de fuite principal ou point central. C'est précisément en ce point que Brunelleschi avait percé son panneau.

3 Leone Battista Alberti (1404 – 1472)

Descendant d'une illustre et antique famille florentine exilée et dispersée dans toute l'Italie, il est né à Gênes. Il a grandi dans une atmosphère humaniste et est devenu une personnalité très cultivée, que ce soit en sciences, lettres ou arts. Il a beaucoup voyagé et a eu énormément de contacts tant avec les gens du Nord que du Sud. En 1428, les Alberti obtiendront la permission de rentrer à Florence où Leone Battista peut rencontrer Brunelleschi, Donatello, ... En 1435, il écrit son traité *De Pictura* en latin. Il écrira également une *Descriptio urbis Romae*, un autre petit traité *De Statua* et son grand traité d'architecture *De Re aedificatoria*.

Alberti est convaincu de ce que les mathématiques sont essentielles pour traiter les formes de manière à ce qu'elles représentent correctement la réalité. Toute bonne peinture implique une connaissance approfondie de la perspective. Toutefois, au début du *De Pictura*, il précise bien que 'en tout cet exposé je ne parle pas de ces choses en mathématicien mais bien en peintre'. Voici un extrait où il donne sa *costruzióne legittima*.

> [...] Je trace d'abord sur la surface à peindre un quadrilatère de la grandeur que je veux, fait d'angles droits, et qui est pour moi une fenêtre ouverte par laquelle on puisse regarder l'histoire[1], et là je détermine la taille que je veux donner aux hommes dans ma peinture. Je divise la hauteur de cet homme en trois parties et ces parties sont pour moi proportionnelles à cette mesure qu'on nomme vulgairement bras[2]. Car, comme on le voit par la symétrie des membres de l'homme, la longueur la plus commune du corps d'un homme est de trois bras. À l'aide de cette mesure, je divise la ligne de base du rectangle que j'ai tracé en autant de parties qu'elle peut en contenir, et cette ligne de base du rectangle est pour moi proportionnelle à la quantité transversale la plus proche sur le sol et qui lui est parallèle. Je place ensuite un seul point, en un lieu où il soit visible à l'intérieur du rectangle. Comme ce point occupe pour moi le lieu même vers lequel se dirige le rayon central, je l'appelle point central. Ce point est convenablement situé s'il ne se trouve pas, par rapport à la ligne de base, plus haut que l'homme que l'on veut peindre. De cette façon, ceux qui regardent et les objets peints sembleront se trouver sur un sol plat. Une fois ce point central placé, je tire des lignes droites de ce point à chacune des divisions de la ligne de base, et ces lignes me montrent comment les quantités transversales successives changent d'aspect presque jusqu'à une distance infinie.[3]

[1]Selon Schefer, il faut entendre par là un agencement de parties (corps, personnages, choses) doté de sens.

[2]Mesure florentine valant environ 0,58 mètre.

[3][...] Principio in superficie pingenda quam amplum libeat quadrangulum rectorum angulorum inscribo, quod quidem mihi pro aperta finestra est ex qua historia contueatur, illicque quam magnos velim esse in pictura homines determino. Huiusque ipsius hominis longitudinem in tres partes divido, quae quidem mihi partes sunt proportionales cum ea mensura quam vulgus brachium nuncupat. Nam ea trium brachiorum, ut ex symmetria membrorum hominis patet, admodum communis humani corporis longitudo est. Ista ergo mensura iacentem infimam descripti quadranguli lineam in quod illa istiusmodi recipiat partes divido, ac mihi quidem haec ipsa iacens quadranguli linea ex proximiori transversae et aequaedistanti in pavimento visae quantitati proportionalis. Post haec unicum punctum quo sit visum loco intra quadrangulum constituo, qui mihi punctus cum locum occupet ipsum ad quem radius centricus applicetur., idcirco centricus punctus dicatur. Condecens huius centrici puncti positio est non altius a iacenti linea quam sit illius pingendi hominis longitudo, nam hoc pacto aequali in solo et spectantes et pictae res adesse videntur. Posito puncto centrico, protraho lineas rectas a puncto ipso centrico ad singulas lineae iacentis divisiones, quae quidem mihi lineae demonstrant quemadmodum paene usque ad infinitam distantiam quantitates transversae successivae sub aspectu alterentur.

> Pour ce faire, certains traceraient à travers le rectangle une ligne parallèle à la ligne de base et diviseraient en trois parties l'intervalle qui se trouve entre les deux lignes. Puis, à cette seconde ligne parallèle à la ligne de base, ils ajouteraient une autre ligne parallèle, placée de telle façon que l'intervalle divisé en trois parties qui sépare la ligne de base de la seconde ligne soit plus grand d'une partie que celui qui sépare la seconde ligne de cette troisième ; et ils ajouteraient ainsi d'autres lignes pour que l'intervalle qui suit un autre intervalle entre les lignes soit toujours, pour employer le terme des mathématiciens, *superbipartiens*. Ceux qui feraient ainsi, même s'ils affirmaient suivre la meilleure voie en peinture, je déclare qu'ils se trompent beaucoup car, ayant posé au hasard la première ligne parallèle, quand bien même les autres lignes parallèles se suivraient selon un même rapport de diminution, le fait est qu'ils n'ont pas le moyen d'obtenir un lieu précis pour la pointe [de la pyramide] qui permet de bien voir.[4]
>
> [...]
>
> J'ai d'ailleurs trouvé cette excellente méthode : dans tous les cas je poursuis cette même division entre le point central et la ligne de base en tirant des droites de ce point jusqu'à chacune des divisions de la ligne de base. Mais pour la succession des quantités transversales, je procède de cette manière-ci. Je prends une petite surface sur laquelle je trace une seule ligne droite. Je la divise en autant de parties que la ligne de base du rectangle est divisée. Je pose ensuite un point unique au-dessus de cette ligne, à la verticale d'une de ses extrémités, aussi élevé que l'est dans le rectangle le point central au-dessus de la ligne de base. De ce point, je trace des droites jusqu'à chacune des divisions de la ligne. Je fixe alors la distance que je désire avoir entre l'œil de celui qui regarde et la peinture, puis, ayant fixé l'emplacement de la section, au moyen de ce que les mathématiciens appellent une ligne perpendiculaire, je produis l'intersection de toutes les lignes qu'elle rencontre.[5]
>
> Une ligne perpendiculaire est celle qui, divisant une autre ligne droite, possède partout autour d'elle des angles droits. Ainsi cette ligne perpendiculaire me donnera par ses points d'intersection les

[4]Hic essent nonnulli qui unam ab divisa aequedistantem lineam intra quadrangulum ducerent, spatiumque, qod interutrasque lineas adsit, in tres partes dividerent. Tum huic secundae aequedistanti lineae aliam item aequedistantem hac lege adderent, ut spatium, quod inter primam divisam et secundam aequedistantem lineam est, in tres partes divisum una parte sui excedat spatium id quod sit inter secundam et tertiam lineam, ac deinceps reliquas lineas adderent ut semper sequens inter lineas esset spatium ad antecedens, ut verbo mathematicorum loquar, superbipartiens. Itaque sic illi quidem facerent, quos etsi optimam quandam pingendi viam sequi affirment, eosdem tamen non parum errare censeo, quod cum casu primam aequedistantem lineam posuerint, tametsi caeterae aequedistantes lineae ratione et modo subsequantur, non tamen habent quo sit certus cuspidis ad bene spectandum locus. [...]

[5]Haec cum ita sint, ipse idcirco optimum hunc adinveni modum. In caeteris omnibus eandem illam et centrici puncti et lineae iacentis divisionem et a puncto linearum ductionem ad singulas iacentis lineae divisiones prosequor. Sed in successivis quantitatibus transversis hunc modum servo. Habeo aerolam in qua describo lineam unam rectam. Hanc divido per eas partes in quas iacens linea quadranguli divisa est. Dehinc pono sursum ab hac linea punctum unicum ad alterum lineae caput perpendicularem tam alte quam est in quadrangulo centricus punctus a iacente divisa quadranguli linea distans, ab hocque puncto ad singulas huius ipsius lineae divisiones singulas lineas duco. Tum quantam velim distantiam esse inter spectantis oculum et picturam statuo, atque atque illic statuto intercisionis loco, perpendiculari, ut aiunt mathematici, linea intercisionem omnium linearum, quas ea invenerit, efficio. Perpendicularis quidem linea est ea quae aliam rectam lineam dividens angulos utrinque circa se rectos habeat. Igitur haec mihi perpendicularis linea suis percisionibus terminos dabit omnis distantiae quae inter transversas aequedistantes pavimenti lineas esse debeat. Quo pacto omnes pavimenti parallelos descriptos habeo. est enim parallelus spatium quod intersit inter duas aequedistantes lineas de quibus supra nonnihil tetigimus. Qui quidem quam recte descripti sint inditio erit., si una eademque recta continuata linea in picto pavimento coadiunctorum quadranguloraum diameter sit. Est quidem apud mathematicos diameter quadranguli recta quaedam linea ab angulo ad sibi oppositum angulum ducta, quae in duas partes quadrangulum dividat ita ut ex quadrangulo duos triangulos efficiat.

limites de chaque écartement qui doit se trouver entre les lignes transversales parallèles du dallage. Je peux de cette façon tracer toutes les rangées transversales de carreaux du dallage. On appelle parallèle l'intervalle séparant deux des lignes parallèles dont nous avons parlé plus haut. J'aurai la preuve que celles-ci ont été correctement tracées si une même ligne droite prolongée sur le dallage peint sert de diamètre aux rectangles juxtaposés. Pour les mathématiciens, le diamètre d'un rectangle est la ligne droite, tirée d'angle à angle opposé, qui divise le rectangle en deux parties de façon à faire deux triangles.

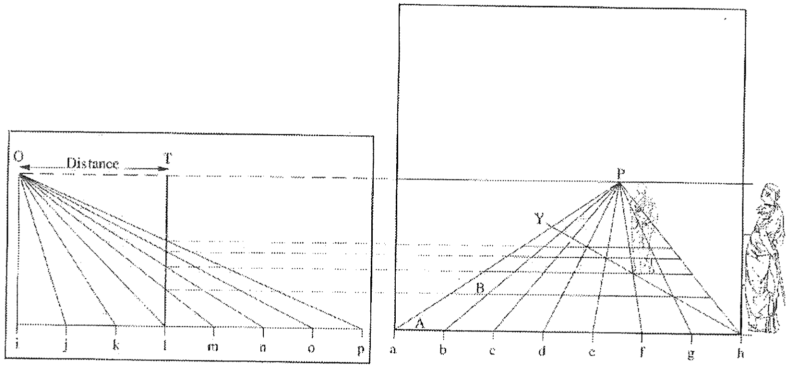

FIGURE 6 : *La costruzióne legittima*

La dernière partie de l'extrait du texte d'Alberti suggère maintenant d'aller vérifier les diagonales des carrelages des figures 2, 3, 4 et 5.

Remarquons que, pour expliquer sa *costruzióne legittima*, Alberti donne une représentation de la situation au moyen de deux projections orthogonales (plan et profil). Et ce sont ces deux projections qui permettent la mise en perspective d'une figure. Il n'aurait certainement pas pu donner une représentation de la situation en perspective cavalière car celle-ci n'est entrée dans la pratique qu'à la fin du seizième siècle en Europe. Elle convenait parfaitement pour réaliser des plans d'architecture classique pour laquelle elle faisait mieux percevoir les alignements, les symétries, le parallélisme, ... La perspective cavalière donne une vue plus globale des objets car en fait, le point de vue de l'observateur est rejeté à l'infini. Elle aura également beaucoup d'applications dans l'art de la guerre, car il est plus facile d'y mesurer les objets, les distances. P. COMAR (voir bibliographie) signale que, dans ses *Cours de mathématique nécessaires à un homme de guerre* (1693), Ozanam écrit :

> Pour représenter les fortifications, on se sert d'une perspective [...] qu'on appelle *Perspective Cavalière* et *Perspective Militaire*, qui suppose l'œil infiniment éloigné du Tableau, [...] et quoiqu'elle soit naturellement impossible, la force de la vue ne pouvant se porter à une distance infinie, elle ne laisse pas néanmoins de faire bon effet.

Signalons encore que depuis l'Antiquité et notamment en Extrême-Orient (peintures japonaises, par exemple), on trouve des utilisations de cette perspective, mais pas comme moyen global de représentation. Ainsi, une partie du 'tableau' qui fait penser à une perspective cavalière peut avoisiner une projection orthogonale, par exemple. C'est surtout une manière empirique de suggérer le relief.

Alberti fait allusion à de fausses perspectives, notamment celle qui utilise la règle des deux tiers. Il s'agit là d'utilisations empiriques de la perspective. Dans son ouvrage sur *Piero della Francesca* (voir bibliographie), J.-P. LE GOFF (note 21 de la page 48) explique comment on peut renverser une certaine problématique de la perspective. À partir du moment où on prend conscience de ce que des objets de même grandeur paraissent de plus en plus petits lorsqu'on les éloigne, si l'on tente de construire un carrelage en en tenant compte, le théorème de Thalès nous offre un point de fuite 'en cadeau'. Et ainsi, dans certains tableaux antérieurs à la découverte des règles de la perspective, on trouve par exemple plusieurs points de fuite en *arête de poisson*, c'est-à-dire disposés sur une même verticale.

Quant à la pyramide dont il est question dans l'extrait, il s'agit de la pyramide visuelle, notion connue depuis fort longtemps en optique, reprise par les artistes de la Renaissance pour expliquer la perspective. Voici par exemple, un extrait des Carnets de notes de Leonardo da Vinci (1452 – 1519) :

> La perspective n'est rien d'autre que la vision d'un objet derrière un verre lisse et transparent, à la surface duquel pourront être marquées toutes les choses qui se trouvent derrière le verre ; ces choses approchent le point de l'œil sous forme de diverses pyramides que le verre coupe.

C'est peut-être cette conception de la perspective qui fait qu'Alberti, dans son explication, trace d'abord tous les rayons joignant l'œil aux différents objets à représenter avant de fixer la distance – en coupant la pyramide visuelle – qu'il désire avoir entre l'œil de celui qui regarde et la peinture.

4 Piero della Francesca (1410-20 – 1492)

Il naît dans le petit village de Borgo San Sepolcro. Son père était cordonnier. Vasari note chez lui un intérêt précoce pour les mathématiques. On ne sait que peu de choses de ses premiers maîtres. Assez vite, il travaille et voyage avec Domenico Veneziano mais en 1439, il est toujours un peintre de renommée plutôt locale. Par la suite on le verra à Urbino, Rimini, ...

Son traité *De prospectiva pingendi*, écrit en italien mais avec un titre en latin, date des années 1470 - 80. Il innove en ce sens qu'il traite la perspective en termes de géométrie et la détache du domaine de l'optique. C'est de la géométrie pratique mise au service de la résolution d'un problème technique. Il écrit pour les peintres mais il donne toutes les démonstrations dans le style des *Éléments* d'Euclide. On lui doit encore un *Trattato dell'abaco* (arithmétique, algèbre, stéréométrie) et un *Libellus de quinque corporibus regularibus* dont son élève, Luca Pacioli s'inspira lorsqu'il écrivit son traité de la *Divine proportion*.

Voici un texte extrait de son traité *De la perspective en peinture* qui montre comment réduire en carré un plan dégradé.

> Comme dans la proposition précédente, soit DC une ligne partagée au point B, menons BF qui lui est perpendiculaire et une autre ligne perpendiculaire au-dessus de D jusqu'en A, placé en son lieu[6] ; tirons une ligne perpendiculaire au-dessus de C, de longueur égale à BC, soit GC, et du point G, menons une parallèle à BC, soit GF ; je dis qu'il s'ensuit un carré de côtés égaux BC, CG, GF et FB. Maintenant, je tire du point A les lignes AC et AG, qui coupent BF en deux points : AC coupe BF au point E, et AG coupe BF au point H. Je dis que E apparaît au point A plus élevé que B, parce que A se tient au-dessus de B, et que H apparaît plus bas que F, parce que A est plus bas que F, comme cela est démontré dans les dixième et onzième propositions du *De*

[6] Ce lieu est l'endroit où se trouve l'œil du peintre.

Aspectuum Diversitate d'Euclide[7]. Je dis que BE apparaît égal à BC dans le lieu déterminé, et que EH apparaît égal à CG dans le même lieu déterminé, et que HF apparaît égal à FG. Tirons AF et AB : nous aurons trois triangles, chacun avec deux bases [opposées à A] : le triangle ABC avec les deux bases BC et BE, le triangle ACG avec les deux bases CG et HE, et le triangle AGF avec les deux bases FG et FH ; d'où par la seconde proposition de ce livre, la base BE apparaît égale à la base BC, parce qu'elles sont sous un même angle A, et la base EH apparaît égale à CG, du fait qu'elles sont sous un même angle, et la base HF apparaît égale à FG, parce qu'elles sont contenues dans un même angle ; la proportion qui est de AE à AC, est celle qui est de DB à DC, la même qui est de EH à CG, mais aussi de AE à AC, [. . .]
Donc je dirai que EH-CG[8] est le plan BE réduit à un carré. Maintenant, menons du point A une ligne parallèle à BC, prolongée sans fin, puis divise la ligne BC en deux parties égales au point I, et tire au-dessus de I la perpendiculaire ; à l'endroit où elle coupe la ligne qui part du point A parallèlement à BC, se trouve le point A' ; puis tire à partir de E une parallèle à BC qui coupe CG au point K, mène à partir de A' une ligne vers B, qui coupe EK au point D', puis tire à partir de A' une ligne vers C qui coupera EK au point E' ; je dis avoir mis au carré le plan dégradé, à savoir $BCD'E'$. La preuve : voyons si $D'E'$ est égale à EH qui apparaît égale à la quantité CG, comme cela a été prouvé ci-dessus. Je dis qu'elle est égale ou semblable, car la proportion qui est de $A'D'$ à $A'B$, est de $A'E'$ à $A'C$, est la même que celle de $D'E'$ à BC, qui est aussi de EH à CG. Étant proportionnelles, elles sont égales ou semblables, mais en fait égales, car nous avons admis que BC de l'une est égale à BC de l'autre[9], ce qui éclaire l'énoncé. Mais si tu me disais : pourquoi mets-tu l'œil au milieu ? Parce que cela me paraît convenir mieux pour voir les opérations ; néanmoins, chacun peut le mettre là où il lui plaît, [. . .]

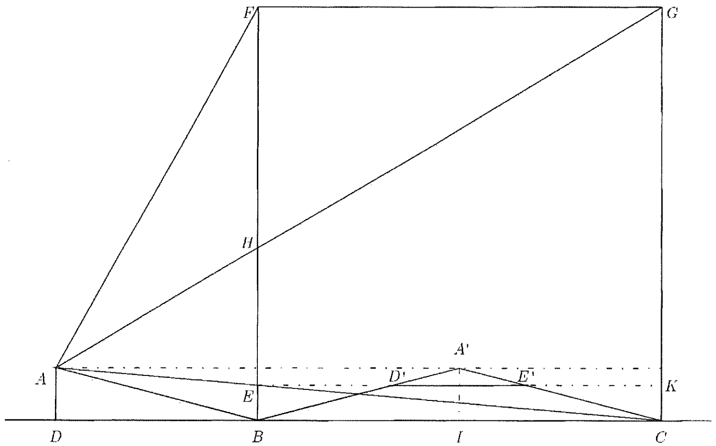

FIGURE 7 : *Réduction en carré d'un plan dégradé*

[7]Euclide, *L'Optique*.
[8]Il s'agit du rapport de réduction.
[9]C'est-à-dire $BC = CG$.

5 Albrecht Dürer (1471 – 1528)

Il est né à Nuremberg qui, à l'époque, était une importante ville marchande à l'artisanat très développé. Son père était orfèvre et ce fut donc sa première formation. C'est dès l'âge de quinze ans qu'il put s'initier à la peinture dans l'atelier du peintre Wolgemut. La présence dans les murs de la ville de Johannes Müller, plus connu sous le nom de Regiomontanus, ne sera pas étrangère à la formation humaniste d'Albrecht Dürer. Il voyagera en Italie et à son retour, s'intéressera de plus en plus aux fondements de l'art pictural. Sa connaissance du latin était sans doute faible et c'est grâce à ses amis humanistes qu'il pourra accéder à la culture classique. L'un des ouvrages les plus connus de Dürer est l'*Underweysung der Messung* de 1525, titre traduit par *Instruction sur l'art de mesurer* ou plus simplement *La Géométrie*. Le livre IV est notamment consacré à la perspective.

Dürer était conscient des difficultés rencontrées par le peintre lorsqu'il essayait de mettre 'le monde à plat'. Il a imaginé différents dispositifs, encombrants et peu maniables, qui ont cependant le mérite de mettre en évidence les grands principes de la perspective centrale. Voici un extrait du livre IV qui décrit un matériel de ce type.

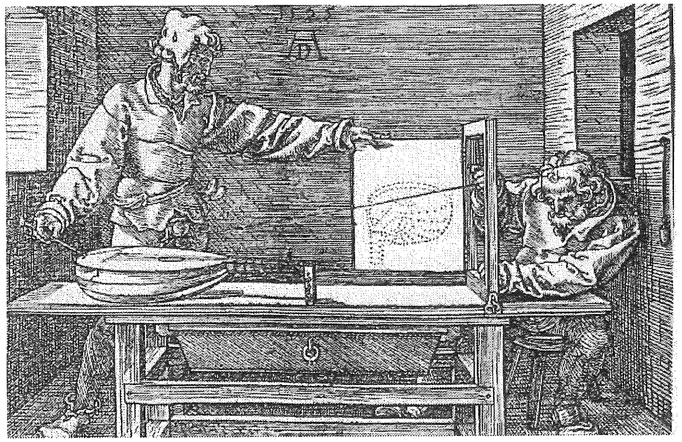

FIGURE 8 : *L'un des dispositifs de Dürer*

À l'aide de trois fils tu peux projeter dans un plan et dessiner sur un tableau tout objet que tu peux atteindre par ces fils. Procède comme suit.

Si tu te trouves dans une salle, enfonce une aiguille au chas très vaste, spécialement conçue à cet effet, dans un mur. Elle jouera le rôle de l'œil. Fais-y passer un fil solide et suspends un poids en plomb à une de ses extrémités. Dispose ensuite une table ou un tableau à une distance arbitraire du chas de l'aiguille où se trouve le fil. Places-y un cadre vertical, transversal par rapport au chas de l'aiguille, plus haut ou plus bas, et du côté voulu. Dans ce cadre se trouvera un portillon qui s'ouvre et se ferme. Ce portillon sera le tableau sur lequel tu peindras. Fixe ensuite par des clous deux fils qui ont des longueurs respectivement égales à la longueur et à la largeur du cadre, l'un au milieu de la traverse supérieure, l'autre au milieu d'un montant, puis laisse-les pendre librement. Prépare ensuite une longue pointe en fer avec un chas dans son extrémité pointue, par lequel tu feras passer le fil long passant déjà par l'aiguille fixée au mur. Amène la pointe avec le fil long dans le cadre et au-delà, et remets-la à quelqu'un d'autre, alors que toi tu t'occuperas des deux autres fils fixés au cadre. Utilise ce dispositif comme suit. Pose le luth ou tout autre objet qui te plaît à la distance voulue du cadre et veille à ce qu'il ne bouge point pendant le temps dont tu en as besoin. Demande à ton compagnon de maintenir tendu le fil passant par l'aiguille et de l'amener sur les principaux points du luth. Dès qu'il s'arrête sur un point et tend le fil, amène les deux fils fixés au cadre, tendus, à se croiser avec le fil long. Attache leurs extrémités avec de la cire au cadre ; ordonne à ton compagnon de ne plus tendre le fil long. Ferme alors le portillon et reporte sur le tableau le point où les deux points se croisent. Rouvre le portillon et procède de même pour un autre point et ainsi de suite jusqu'à ce que le luth apparaisse en pointillé sur le tableau. Joins par des lignes tous ces points que tu as obtenus à partir du luth sur le tableau, et tu verras ce qui adviendra. [. . .]

6 Girard Desargues (1591 – 1661)

Né à Lyon, on connaît peu de choses sur son enfance. C'est à plus de trente-cinq ans qu'on retrouve sa trace à Paris où le graveur Abraham Bosse affirme que dès le début de l'année 1630, il avait déjà obtenu le privilège royal pour divers écrits qu'il avait l'intention de publier. En tant qu'ingénieur, Desargues était semble-t-il fort apprécié de Richelieu. Il eut des contacts avec le Père Mersenne, Descartes, Roberval, Pascal et bien d'autres. Parmi ses œuvres, citons le *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (1639), qui traite des coniques et trois paragraphes d'esprit géométrique qui terminent le *Traité de perspective*, publié par son élève Abraham Bosse en 1648. Le fonds et la forme de ces paragraphes montrent, selon René Taton, qu'ils doivent être attribués à Desargues lui-même. Le titre que Bosse a donné à son traité est d'ailleurs *Maniere universelle de M. Desargues, pour pratiquer la Perspective, . . .* La première proposition qu'on y trouve est le célèbre 'théorème de Desargues'. Ce théorème, vrai aussi bien dans l'espace que dans le plan, permet de ramener à deux dimensions toute configuration spatiale, ce qui est l'esprit même de la perspective. Cet aboutissement sera à l'origine de la géométrie projective.

Signalons pour terminer que dès 1636, Desargues publiait à Paris, un ouvrage intitulé *Exemple de l'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage.* Cette étude fut en partie plagiée par Du Breuil, révérend père jésuite. Desargues riposte en placardant sur les murs de Paris des affiches dénonçant cet emprunt ; mais cela ne lui profite pas et, découragé, il abandonne. C'est sans doute pour cela que c'est son disciple Bosse qui publiera, comme nous l'avons dit, le fameux théorème. Bosse sera alors admis comme membre honoraire à l'Académie royale pour y enseigner la perspective. Il prône un peu trop que l'art repose tout entier sur les règles de la géométrie et finit par se quereller avec Le Brun, futur premier peintre du Roi et directeur de l'Académie. L'affaire s'envenime et l'Académie prononce l'exclusion de Bosse en 1661. Il fonde alors sa propre école. Cette impudence a pour conséquence un arrêt du Conseil signé par le roi, qui donne à l'Académie le monopole de l'enseignement artistique.

Si le théorème de Desargues marque le point d'aboutissement de toutes les théories sur la perspective et annonce la géométrie projective, il condamne malheureusement cette perspective comme instrument de l'art. L'artiste ne peut se contenter de choses arrivées à terme et donc figées ; il a envie de se tourner vers d'autres voies. Mais si la perspective s'apprête à connaître quelques siècles d''oubli', elle n'est cependant pas définitivement morte. Un peintre comme Delvaux, par exemple, a su l'employer à merveille au vingtième siècle.

Références

ALBERTI L. [1435], *De la peinture*, Macula, Dédale, Paris, 1992. Traduction par Jean-Louis SCHEFER.

COMAR P. [1996], *La perspective en jeu – les dessous de l'image*, Gallimard.

CREM [à paraître] *Construire et représenter un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à dix-huit ans*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

DÜRER A [1525], *Underweysung der Messung*. Traduction française par Jeanne PEIFFER sous le titre *Géométrie*, Éditions du Seuil, 1995.

FOCILLON H. [1992], *Piero della Francesca*, Pratiche Editrice, Parma.

MACCURDY E. [1942], *Les Carnets de Leonardo da Vinci*, Gallimard. Traduit de l'anglais et l'italien par Louise SERVICEN, préface de Paul VALÉRY.

PIERO DELLA FRANCESCA [1470 - 80], *De la perspective en peinture*, In Medias Res, Paris, 1998. Traduction par Jean-Pierre LE GOFF.

TATON R. [1951], *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Presses universitaires de France, Paris.