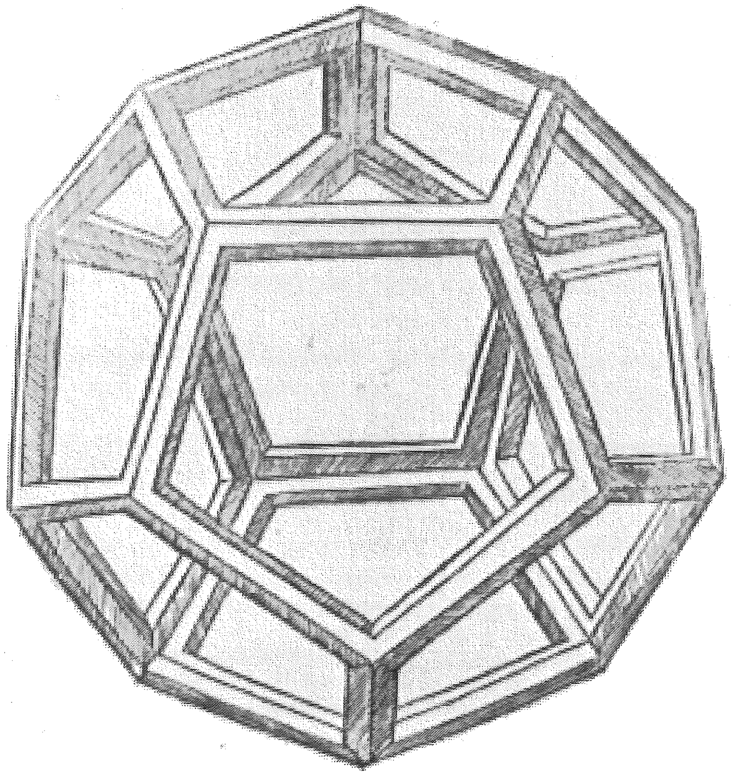
- le sens étroit et le sens large : les fractions sont plus que des rationnels;
- point de vue heuristique de Lakatos : ne pas conceptualiser trop tôt. Introduire les concepts au moment où on en a besoin;
- **"l'histoire est utile", quelle histoire ? On a besoin d'une histoire personnelle;
- **il faut ancrer les nouvelles connaissances dans cette histoire personnelle.



Histoire des mathématiques : constructions géométriques

GUICHARD Jean-Paul
IREM de Poitiers (France)

Abstract

Pourquoi réinterroger l'histoire des mathématiques à propos des constructions géométriques ? Notre motivation initiale est essentiellement didactique : depuis une vingtaine d'années, les problèmes de construction ont quasi disparu du cursus de l'enseignement des mathématiques en France, mais, paradoxalement, les logiciels de constructions géométriques se multiplient et se perfectionnent. Et les nouveaux programmes incitent fortement les enseignants à utiliser ces logiciels dans leur enseignement. Mais qu'y a-t-il de commun entre la construction d'une figure géométrique simple et les fameux problèmes de construction où l'on supposait le problème résolu et où les lieux géométriques tenaient une place importante ? La première proposition du premier livre des Éléments d'Euclide n'est-elle pas la construction du triangle équilatéral ? Qu'est-ce qui peut transformer les activités de construction bien présentes dans les programmes, mais traitées comme des recettes de constructions particulières, qu'est-ce qui peut donc les transformer en réels problèmes ? Rechercher et retrouver certains de ces problèmes dans l'histoire de notre discipline devrait nous permettre de mieux cerner ce type de problème et donner sens et intérêt à cette activité géométrique.

Par rapport à cela, notre projet est modeste. Nous proposons de nous focaliser sur de grands problèmes classiques qui ont marqué l'histoire. Pour chacun, nous avons proposé aux participants à l'atelier un certain nombre de textes historiques : l'objectif était de les transformer en textes de problèmes pour nos élèves de collège et de lycée. Nous donnerons donc en illustration un certain nombre de ces textes et de leurs transpositions.

1 Un regard historique

Qui dit constructions géométriques, dit nécessairement utilisation d'instruments pour réaliser une figure géométrique astreinte à un certain nombre de conditions. Un de ses intérêts, qui en fait aussi une difficulté que l'on rencontre effectivement en enseignant, est l'articulation d'un aspect pratique et d'un aspect théorique. Ces aspects se fécondent mutuellement. Ainsi, dans son livre *Constructions géométriques nécessaires à l'artisan*, le mathématicien arabe Aboul-Wafa (940-998) écrit : "Beaucoup d'artisans ont besoin de ces problèmes mais toutes les méthodes utilisées par eux ne se fondent sur aucun principe et sont de ce fait peu sûres et extrêmement inexactes."

Artisans, mais aussi arpenteurs, bâtisseurs, architectes, peintres, ingénieurs ... ont eu et ont toujours besoin de résoudre des problèmes de construction. Parmi ces problèmes, certains ont été des défis tels, pour les mathématiciens, qu'ils ont traversé l'histoire de notre discipline et ont suscité la création de nouveaux concepts, de nouveaux outils, de nouveaux domaines des mathématiques. Dans son livre *Introduction à l'Art analytique* (1591), le mathématicien François Viète en témoigne : "L'analyste résout artificieusement les problèmes les plus fameux appelés jusqu'à présent irrationnels, tels que le problème mésographique (construction de deux moyennes proportionnelles, en lien avec la duplication du cube), celui de la section d'un angle en trois parties égales, l'invention du côté de l'heptagone et tous les autres qui tombent dans ces formules d'équations... "

Dans ce vaste domaine des constructions géométriques, nous proposons une classification en lien avec les grands types de construction qui ont marqué les mathématiques au travers de leur histoire.

Les grands types de problèmes	Les objets	Problèmes célèbres
Figures	polygones réguliers	polygones constructibles à la règle et au compas (le cas de l'heptagone cf. Viète)
Figures inscrites et circonscrites	cercles	problème des 3 cercles d'Apollonius (cf. Viète, Descartes,...)
Sections	angles	la trisection de l'angle (cf. l'héritage grec, Viète, Descartes,...)
Quadratures	carré d'aire égale à celle d'une figure donnée	la quadrature du cercle, la quadrature de la parabole et de la spirale (Archimède), la quadrature de la roulette (Pascal)
Autour des quadratures:		
dimension 3	Cube de volume égal à un volume donné	duplication du cube (problème de Délos)
dimension 2	figure d'aires égales, puzzles, découpages	
dimension 1	rectification des courbes...	

Les problèmes de constructions, par le fait même qu'il s'agit de **construire** effectivement une figure, amènent à se poser deux questions importantes.

1. Quel est le rôle des instruments ?

On sait l'importance des conditions imposées à la construction, et qui en changent complètement la nature. Par exemple le tracé de la parallèle à une droite passant par un point donné ne

fera pas intervenir les mêmes propriétés mathématiques s'il s'agit d'une construction à la règle et au compas, ou à l'équerre, ou au trace parallèle... Les contraintes instrumentales sont donc à préciser impérativement : il y a celles des instruments classiques (règle non graduée, compas, équerre, règle graduée, rapporteur), mais ce peut être des appareils, des systèmes articulés comme les trisecteurs. On peut également construire par pliages (trisection [1], pentagone ou nœud doré...). D'où vient le privilège que nous accordons à la règle et au compas ? Dans *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*, Ellipses, 1993 page109, Rudolf Bkouche écrit : "Ces deux outils auraient-ils seuls le privilège de construire des figures géométriques ? N'est-ce pas plutôt que leur caractère très simple et rudimentaire constituerait justement une garantie de ne pas confondre figure tracée et figure étudiée de façon théorique ? D'ailleurs, quoi de plus "mécanique" et bricolé que le tracé au compas, et peut-on dire que le mouvement et le temps n'interviennent pas dans une telle construction ?"

2. La construction effectuée est-elle exacte ou approchée ?

Ne nous méprenons pas sur ce que veut dire approchée en mathématiques : approchée ne veut pas dire approximative, mais traduit le fait que la construction faite ne donne pas exactement la figure attendue mais l'approche avec une précision que l'on peut donner. Ainsi en est-il de la célèbre construction du pentagone de Dürer (cf. II, ci-après), ou de la trisection approchée d'Ocagne [1], faites à la règle et au compas, alors que la trisection de l'angle ou la construction du pentagone par pliage, déjà citées, sont des constructions exactes, bien que n'interviennent ni règle, ni compas.

L'intérêt des problèmes de construction est qu'ils nous placent au cœur de la démarche mathématique :

Analyse du problème	Trouver la construction	Chercher
Construire la figure	Produire la figure attendue	Agir
Valider la construction	Justifier que l'on a résolu le problème	Démontrer

En particulier ils permettent de retrouver une des fonctions originelles de la démonstration et donc de donner du sens à l'activité de démonstration. L'histoire des mathématiques est à ce propos une source importante de problèmes et d'exercices qui peuvent redonner du sens aux mathématiques, et les réinscrire dans l'aventure humaine.

2 Des documents historiques

Voici la liste des documents historiques proposés avec des indications sur une utilisation possible en classe (les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie) :

Types de problèmes	Documents historiques	Documents à visée pédagogique
Figures : polygones réguliers	1. Dürer : pentagones, 7gone, 10gone	Étoile de Noël (devoir maison $6^{ème}$)
Figures inscrites et circonscrites : cercles	2. Euclide prop.3 livre IV (trad. Vitrac) 3. Aboul Wafa : triangle équilatéral Descartes à Elisabeth 4-5-6. Ex-voto japonais (1803, 1913, 1788)	Activité $4^{ème}$ [10]. Exercice $4^{ème}$ [12] Exercice $3^{ème}$ [9] Le problème des trois cercles [8] [6] [11]
Sections : la trisection	7. Descartes (La Géométrie pp. 396-397) 8. Trisecteur de Bergery 9. Systèmes articulés : Pascal et Céva	Parabole et cercle [1] Rallye Poitou-Charentes ($3^{ème}$-2nde) [1]
Quadratures	10. Marolois (1617) 11. Sulbasutras indiens (8°- 4° s. av. J-C) 12. Aboul Wafa : les 3 carrés	Exercice $3^{ème}$ [7] [5] Exercice $3^{ème}$ [9]

Une illustration en classe de sixième (à partir du document 1, ci-après):

6°5 Devoir sur feuille *à faire pour le jeudi 19 décembre 1996.*

L'étoile de Noël

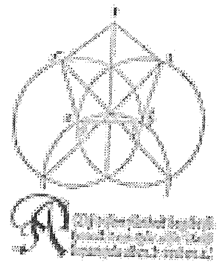
Pour la construire on va se servir de la construction du pentagone de Dürer qui est expliquée sur la figure ci-contre.

1) Observe bien cette figure pour comprendre comment est construit le pentagone de sommets 1,2,3,4,5. Ce pentagone a tous ses côtés de la même longueur.

2) Prends une feuille blanche, et fais avec soin, au crayon, la construction de Dürer en partant d'un segment [ab] de longueur 6 cm.

3) Trace en couleur les 5 diagonales du pentagone, et **colorie l'étoile**.

Une diagonale est un segment qui rejoint deux sommets qui ne se suivent pas; par exemple le segment qui rejoint le sommet 1 au sommet 3 est l'une des diagonales du pentagone.



4) Sur ta feuille de copie, réponds aux trois questions suivantes.
a) Qui était Dürer ? Quand et où a-t-il vécu ?
b) Pourquoi le troisième cercle que l'on trace passe-t-il par les points a et b ?
c) Quelle est la forme de l'intérieur de l'étoile ? Quelles idées cela te donne-t-il ?

Aide pour le 2
1) Pour commencer on trace un segment [ab] de 6 cm. Ce segment donne :
- deux sommets du pentagone (3 et 4) et les centres des 2 premiers cercles à tracer
- le rayon de tous les cercles à tracer (on ne touche pas à l'ouverture du compas).

2) Observe où se trouve le centre du troisième cercle (celui qui passe par les points a et b).

3) On trace l'axe de symétrie de la figure, puis les 2 autres droites qui vont donner les sommets 2 et 5 (observe bien les 2 points de la figure par où passe chacune de ces droites).

4) Pour construire le sommet 1, on sait qu'il est à 6 cm des sommets 2 et 5. On utilise donc le compas qui a toujours son ouverture de 6 cm. Si le dessin est très bien fait, les 2 derniers cercles que tu viens de tracer se coupent sur l'axe de symétrie de la figure.

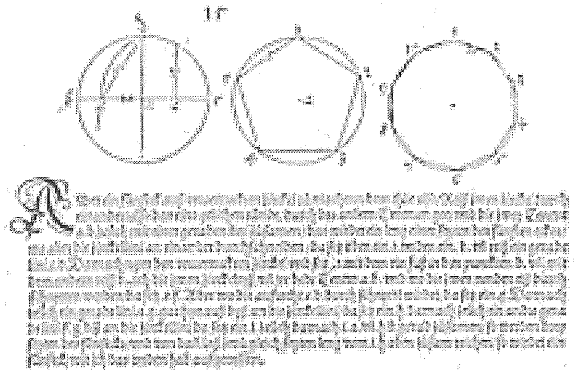
Remarque *: si tu as du temps libre tu peux aller au CDI et faire facilement cette étoile sur ordinateur en utilisant* ***l'Atelier de Géométrie****.*

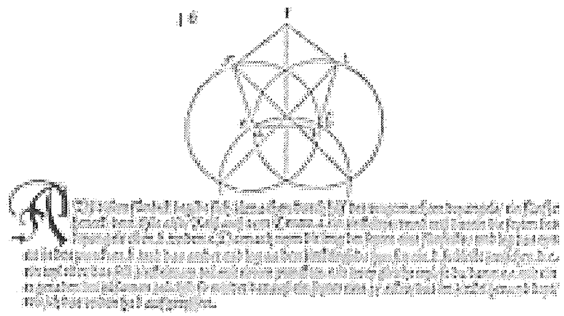
3 Documents exploités

Document n°1 : Albrecht DÜRER (1471-1528). Constructions de polygones. [Document IREM de Caen]

Figure 15 : pentagone, décagone, heptagone (à la règle et au compas).

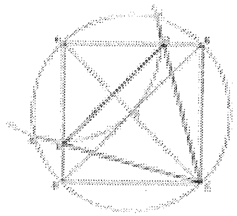
Figure 16 : pentagone (à la règle et au compas à rayon constant).





Document n°3 : ABOUL WAFA (940-998). Triangle équilatéral inscrit dans un carré. [9]

Dans son livre sur "Les constructions géométriques nécessaires à l'artisan", le mathématicien arabe Aboul Wafa donne de nombreuses constructions géométriques utilisant la règle et le compas. Il s'intéresse aux polygones inscrits les uns dans les autres et donne cinq méthodes pour tracer un triangle équilatéral inscrit dans un carré.

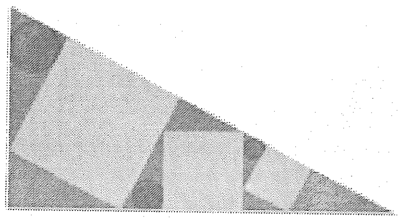


Voici une des méthodes d'Aboul Wafa :

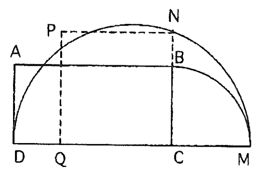
Soit $ABCD$ le carré. On trace le cercle circonscrit au carré, de centre O. Puis le cercle de centre A passant par O, qui coupe le cercle circonscrit en F et G. (CF) coupe (AB) en E. (CG) coupe (AD) en S.

CES est un triangle équilatéral répondant à la question.

Document n°5 : Sangaku (ex-voto) japonais (1913). Triangle, carrés et cercles tangents. [6] [12]



Document n°10 : MAROLOIS (1617). Quadrature d'un rectangle ABCD. [7]

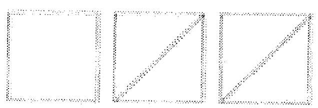


Document n°12 : ABOUL WAFA (940-998). Carré d'aire triple de celle d'un carré. [9]

Dans son livre sur "Les constructions géométriques nécessaires à l'artisan" le mathématicien arabe Aboul Wafa traite de nombreux problèmes sur la division de carrés en somme de plusieurs carrés.

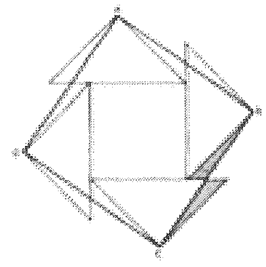
Dans son traité, il résout le problème ci-dessous.

On dispose de trois carrés identiques à découper pour fabriquer avec les morceaux un unique nouveau carré.



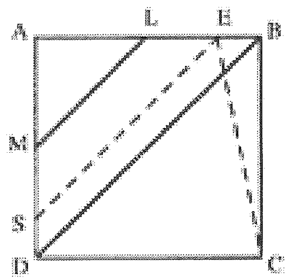
Voici la méthode de Aboul Wafa.

Il découpe deux des carrés suivant une diagonale et les accole au carré restant comme sur la figure. Evidemment ça colle mal mais ce n'est pas grave : $ABCD$ est un carré et ce qui en dépasse correspond à ce qui manque. Son aire est donc triple de celle des carrés de départ. En découpant un petit triangle dans chaque demi carré, on a donc résolu le problème.



4 Transpositions proposées par les participants

Proposition 1. (à partir du document 3 : Aboul Wafa)



Soit ABC un carré, L et M les milieux de AB et AD.
On pose $AB = a$
1. Montrer que $\frac{LM}{LC} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1 < \sqrt{2} = \frac{BD}{DC}$.
Soit E entre L et B, S entre M et D, avec $LE = MS$.
On pose $EB = x$.
2. Montrer que quand E varie de L à B, le rapport $\frac{ES}{EC}$ augmente continûment, passant de la valeur $\sqrt{\frac{2}{3}}$ à la valeur $\sqrt{2}$.
3. Montrer que $\frac{ES}{EC} = \frac{(a-x)\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$.
4. Montrer que $\frac{ES}{EC} = 1$ si $EB = (2 - \sqrt{3})AB$.

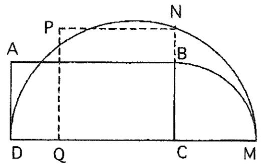
Proposition 2. (à partir du document 10 : Marolois)

Niveau $3^{\text{ème}}$-2^{nde}

1. Soit un rectangle $DCNR$ de côtés b et x $DC = 6, CN = x$.
   Soit Q le point de $[DC]$ tel que $QC = x$ et on complète le carré $QCNP$.
   On trace la diagonale CR), on appelle S le point d'intersection de $[RC]$ et $[PQ]$.
   On trace la parallèle à (DC) passant par S qui coupe $[RD]$ en A et $[CN]$ en B. On pose $CB = a$.
   a) Montrer que l'aire de $PNBS$ est égale à l'aire de $DQSA$, en déduire que $x^2 = ab$.
   b) Soit M le point (DC), extérieur à $[DC]$ tel que $CM = a$.
   Montrer que le triangle DNM est rectangle en N.

2. La figure ci-contre est due à Marolois (1617). De quoi s'agit-il ?

3. Utiliser ce qui précède pour construire à la règle et au compas $\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3}$.

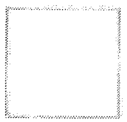


Proposition 3. (à partir du document n°5)

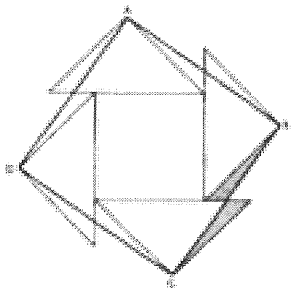
1. Niveau 2$^{\text{nde}}$: Problème ouvert
   On donne la figure terminée, en précisant que ABC est un triangle rectangle en A.
   Trouver une construction à la règle non graduée et au compas des carrés et inscrits dans le grand triangle.
   [C'est l'occasion d'introduire la construction d'un carré inscrit dans un triangle à l'aide d'une homothétie.]
   Question supplémentaire pour ceux qui ont terminé avant les autres : quels rapports existe-t-il entre les côtés des carrés et les rayons des cercles ?
2. Adaptation en 3$^{\text{ème}}$: Idem avec agrandissement-réduction.
3. École élémentaire : Puzzle. On donne dix carrés et dix cercles. Choisir les bons carrés et les bons cercles pour reproduire le dessin donné.
4. Collège 6$^{\text{ème}}$: On donne la figure terminée (sans les cercles) et le premier petit triangle rectangle, seul. Reproduire la figure donnée.

Proposition 4. (à du problème 12. Construire un carré dont l'aire soit triple d'un carré donné.

Solution d'Aboul-Wafa (940-998)



$\longrightarrow$



1. Quelle est la méthode d'Aboul Wafa ?
2. La construction est-elle exacte ou approchée ? (Justifier)

Bibliographie

[1] AYMES J. Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle). Brochure APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) n° 70. 1988.
[2] CARREGA J.-C. Théorie des corps. La règle et le compas. Hermann, 1981.
[3] KLEIN Félix. Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire. Vuibert, 1931. (Réédition disponible à l'IREM de Paris Sud. En anglais : Elementary mathematics from an advanced standpoint, Dover. En allemand : Elementarmathematik von höheren Standpunkt aus, Springer Verlag, 1968).
[4] BOYÉ A. L'Apollonius Gallus et le problème des trois cercles... Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1998. Disponible à l'IREM des Pays de Loire.
[5] Repères-IREM n° 40, juillet 2000. Spécial constructions géométriques. Topiques éditions, Metz.
[6] Géométrie au Bac. Tangente, Hors série n° 8. Éditions Archimède.
[7] Le calcul littéral au collège, IREM de Poitiers, 1999.
[8] Le logiciel de calcul formel au collège et au lycée, IREM de Poitiers, 1998.
[9] Histoire des mathématiques pour les collèges, Cédic, 1980.
[10] De la figure vers la démonstration, IREM de Rouen, et dans Petit x n° 27 (1990-1991), IREM de Grenoble.
[11] Pour la Science n° 249 juillet 1998, Belin.
[12] Décimale, Maths 4^{e}, Belin, 1998 (exercice n° 42, p. 174).