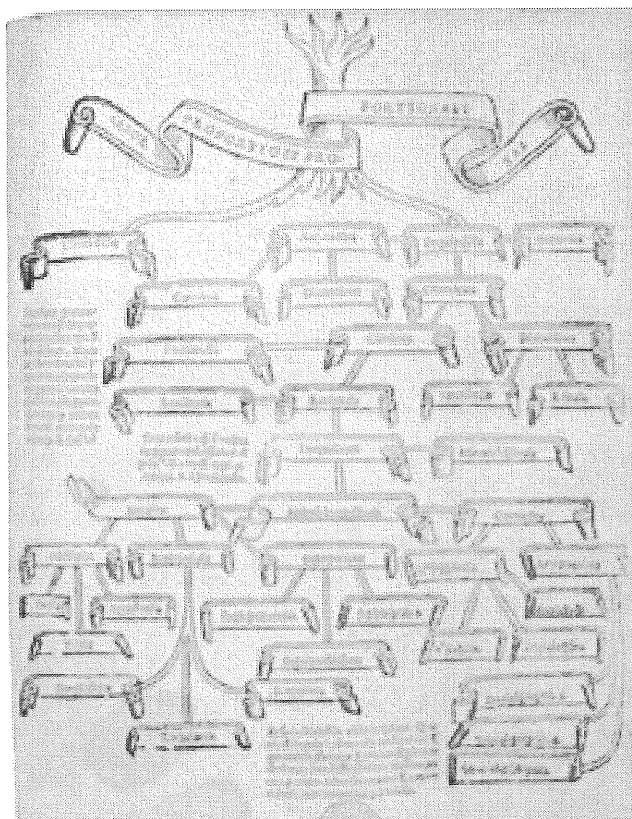




De la fraction-tarte au nombre

COQUETTE M., COUNIOT P., de TERWANGNE M., WARNIER A.
CHEVALIER A., DE LAET L., DOCQ C., MALO A.
JADIN B.

GILBERT T., ROUCHE N.
Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) (Belgique)

Abstract

Chaque histoire personnelle de l'apprentissage des fractions commence tôt, avec les premières expériences concrètes de partage. Elle se poursuit longtemps, jusqu'à l'acquisition du concept de nombre, en passant par la découverte de diverses facettes des fractions et des opérations.

Le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) a proposé de revivre en quatre ateliers quelques-unes de ces étapes pour réfléchir à leurs enjeux épistémologiques. Ceux-ci se relient les uns aux autres de manière complexe. Cette quadruple intervention a précisément pour intérêt de permettre sur une notion – en l'occurrence les fractions – un regard d'ensemble depuis les balbutiements jusqu'à une pleine maturité. Il est significatif de survoler d'un seul coup un chemin aussi long.

Les quatre exposés ci-après présentent chacun une suite de situations-problèmes, des éléments de solutions et quelques commentaires épistémologiques. Chaque séquence proposée est conçue pour une recherche dans des classes dont le niveau est précisé ci-dessous.

Nous présentons, en conclusion, une analyse de l'évolution, au fil des quatre exposés, du concept de fraction et du rôle du contexte.

1. Savants partages (primaire)

Dans ce premier atelier, la manipulation de différents puzzles géométriques fait mûrir le concept de fraction et débouche sur les premières opérations sur les fractions.

2. Rapports et proportions (début du secondaire)

Dans cet atelier, les systèmes d'engrenages et de figures semblables offrent l'occasion d'utiliser les fractions en tant que rapports, d'accéder aux écritures littérales et à diverses opérations sur les fractions.

3. Modèles pour calculer avec les fractions (fin du secondaire)

Probabilités et phénomènes de croissance exponentielle sont des contextes riches pour l'usage des fractions. Une occasion est ainsi donnée aux élèves de (re)comprendre les opérations sur les fractions (mieux vaut tard que jamais) et de progresser dans l'idée qu'ils se font du nombre.

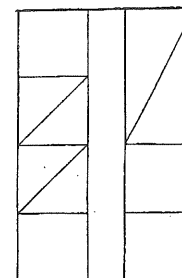
4. Des décimaux aux nombres (fin du secondaire - début du supérieur)

Des idées que les étudiants se font des nombres (réels) sont multiples : écritures, points sur une droite, parfois objets ou résultats de calcul. Des questions sur l'écriture décimale donnent l'occasion de voir comment ces divers aspects se rejoignent ou divergent et de cerner un peu mieux ce que sont les nombres réels.

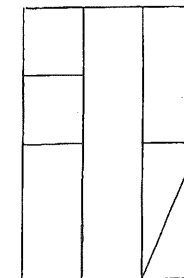
1. Savants partages¹ : Puzzles de fractions

1 Introduction

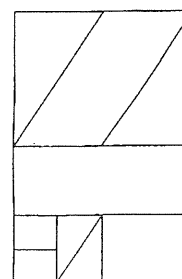
Nous avons initié les enfants aux fractions avec les 6 puzzles suivants, de difficulté variable.



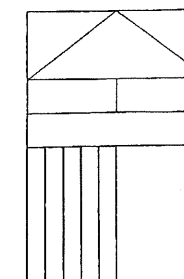
(1) famille $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$



(2) famille $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{20}$



(3) famille $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{32}$

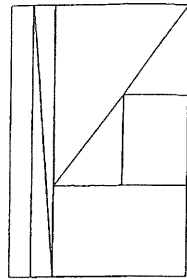
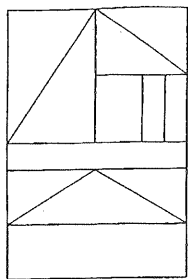


(4) famille $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{20}$

forme non conventionnelle pour $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{20}$ est l'intrus

¹Ce texte a été rédigé par MARTINE COQUETTE, PATRICIA COUNIOT, MARTINE DE TERWANGNE et ANNE WARNIER.



(5) deux familles $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{20}$

$\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{32}$

(6) famille $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$

les quarts représentés ne peuvent reconstituer

l'unité par simple assemblage.

Ces 6 puzzles sont travaillés au sein d'une même classe. L'expérience a déjà été vécue aux divers niveaux de l'école primaire. Dans la suite du texte, nous parlerons du travail réalisé avec des enfants de 7 ans.

Chaque enfant reçoit les pièces prédécoupées d'un seul puzzle. A lui de le refaire sans modèle. Ensuite, il nommera chaque pièce par un nom de fraction, la feuille A4 étant l'unité.

Les fractions d'une même famille sont intéressantes à étudier car elles ont des rapports simples entre elles, tandis qu'on ne sait quel rapport trouver entre des fractions "prises à la sauvage" comme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{5}$... Plutôt que de se limiter à quelques fractions simples ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$) avec les débutants, nous optons pour l'étude de familles de fractions.

L'activité se déroule en trois temps :

- reconstituer le puzzle
- rechercher le nom à donner à chaque pièce
- vérifier les noms de fractions choisis

Les deux premiers temps se vivent consécutivement et prennent ensemble une demi-matinée. Le troisième temps prend environ 50 minutes pour un puzzle.

2 Reconstituer le puzzle

L'Institutrice donne la consigne suivante : "La feuille A4, c'est le gâteau entier, l'unité. A vous de reformer le gâteau grâce à toutes les pièces que vous avez reçues. Quand votre puzzle sera réalisé, il faudra coller chaque pièce et repasser sur les contours pour qu'on puisse les voir de loin. Après 5 minutes, ceux qui ont des trouvailles à partager avec les autres auront la parole, mais pour l'instant, cherchez tout seuls."

Les enfants n'ont pas le modèle de leur puzzle et doivent donc "anticiper" son plan, l'imaginer dans la tête. Le fait de manipuler les pièces du puzzle plutôt que de les recevoir déjà agencées aide l'enfant dans ses mouvements mentaux (translation, rotation...), mouvements qu'il utilisera par la suite. C'est pourquoi nous choisissons de donner un puzzle à reconstituer plutôt qu'un partage dessiné.

L'institutrice invite les enfants à partager leurs réflexions et à améliorer leurs assemblages par comparaisons. Elle organise les échanges sans jamais donner de solutions.

Pour ne pas handicaper la suite de l'activité, elle vérifie chaque puzzle avant le collage. Elle veille à ce que la disposition des pièces soit éclairante pour la recherche des noms de fractions. Il y a en outre beaucoup de découvertes géométriques.

3 Nommer les pièces

La consigne est la suivante : "Nommez chaque pièce de l'entier par un nom de fraction c'est-à-dire un nom de morceau. Faites votre recherche individuellement dans un premier temps."

Les enfants ne maîtrisent pas le mot "fraction". Celui-ci a été traduit par "morceau", ce qui leur rappelle les morceaux, les parts des gâteaux d'anniversaire.

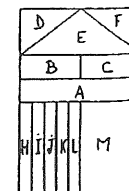
Lors de la mise en commun, une véritable construction collective du savoir prend forme : un enfant arrive à mettre en mots une explication logique qui convainc le reste de la classe. Certains s'en trouvent confirmés dans leurs tâtonnements et d'autres ont enfin une piste qui les satisfait.

Suivons pas à pas les stratégies utilisées par les enfants.

Premier puzzle : famille $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{20}$ (intrus)

Nommons chaque pièce.

Comment commencer ? Prendre le A. On voit qu'il va 8 fois dans l'unité. A vaut donc $\frac{1}{8}$. On peut prendre ensuite le $\frac{1}{16}$ rectangulaire, B ou C, $\frac{1}{2}$ du huitième A.



Ensuite, remarquons que D, E et F forment un rectangle et, de plus, que D et F sont ensemble égales à E. Ces 3 pièces forment donc 2 parts E. On compte combien de fois ces 2 parts vont ensemble dans l'unité ou dans la demi-unité. On voit, en déplaçant mentalement les 3 pièces, que ces 2 parts E vont 4 fois dans l'unité et donc que la part E y va 8 fois. Donc, la part E vaut $\frac{1}{8}$ et les parts D et F valent chacune un demi-huitième, soit $\frac{1}{16}$.

Cette activité permet aux enfants de comprendre pourquoi une fraction porte un tel nom et pas un autre. Ce n'est pas un nom arbitraire.

Une part triangulaire a la même valeur qu'une part rectangulaire ! Deux formes différentes peuvent avoir la même aire ou représenter la même fraction de la même unité. C'est un choc pour certains enfants.

On joue avec double et moitié.

Le support provoque le calcul : ces formes ensemble sont égales à celle-là. On additionne $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{16}$ et on obtient $\frac{1}{8}$ et non $\frac{1}{32}$! Pour certains, c'est d'abord faux... et puis, c'est un "calcul avec des morceaux" (différent d'un calcul avec des nombres entiers).

Certains enfants expriment spontanément $\frac{1}{8}$ sous la forme un demi-quart qu'ils écrivent ainsi : $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$. Dans ce cas, "quart" est une nouvelle unité. Ils ne disent pas " $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ ". Les enfants n'éprouvent aucune difficulté à voir l'égalité entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$. Remarquons que le demi est la seule fraction qu'on peut utiliser sans "de".

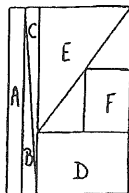
Remarquons ensuite qu'on peut regrouper H, I, J, K, L et qu'ensemble ils prennent la même place qu'un quart comme M.

Il est donc important d'avoir bien placé les pièces !

3.2 Deuxième puzzle : puzzle spécial pour ceux qui "voient loin" en 2^{ème} année primaire (1/4, 1/8, 1/16)

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; première soustraction avec une fraction !

Retour au sens du nom de la fraction : non seulement $\frac{1}{4}$ va 4 fois dans l'unité, mais aussi, dans l'unité, il y a quatre quarts ! "J'ai des quarts. Combien vais-je en manger si je veux manger tout le gâteau ?"



C'est autre chose que de voir combien de fois un morceau peut aller dans le gâteau et en conclure que s'il y va 4 fois, c'est $\frac{1}{4}$. De la même manière, si $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, est-il donc vrai que $1 = \frac{2}{2}$? Ce n'est pas sûr pour tous les enfants de cet âge (7 ans). Ils ne perçoivent pas bien les fractions dont le numérateur est différent de 1. Suivant l'âge des enfants auxquels on s'adresse, on constatera ou non cette difficulté.

$$\frac{3}{4} : 3 =$$

Les enfants perçoivent cette division ainsi : 3 morceaux : 3 = 1 morceau et non comme la division d'une fraction par un nombre.

Ils prennent également conscience de l'invariance du quart. Un quart peut prendre des formes différentes.

Comme les pièces sont inamovibles, il faut faire les transformations mentalement ou les imaginer à l'aide des mains.

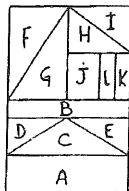
Le rôle de l'institutrice est de faire se rencontrer ceux qui peuvent donner des indices et ceux qui doivent en recevoir.

Dans ce puzzle, le $\frac{1}{8}$ est trouvé par $\frac{1}{4}$ quart parce qu'il est impossible de voir, sans le découper, qu'il va 8 fois dans le gâteau comme dans le puzzle précédent. Donc, ici, l'unique chemin pour nommer la pièce F est $\frac{1}{4} : 2$. Ce n'est donc plus la forme de la pièce qui est importante. Cette complexité ne se retrouvera jamais dans un partage de tarte habituel. Notons toutefois que c'est la deuxième fois dans ce puzzle que les enfants constatent que le quart coupé en 2 est $\frac{1}{8}$; la première fois, le report du huitième huit fois dans l'unité était possible.

3.3 Puzzle avec 2 familles (1/5, 1/10, 1/20 et 1/8, 1/16, 1/32)

Les enfants ont des difficultés à retourner à l'unité de référence. Contrairement à une initiation traditionnelle aux fractions, nous attirons, au travers de l'activité, leur attention sur l'importance de cette unité de référence.

La stratégie des enfants fait penser au calcul de l'aire du rectangle : on compte combien de fois l'unité d'aire "va" le long de la largeur. Cette première bande étant comptée, on la multiplie par le nombre de bandes du grand rectangle.

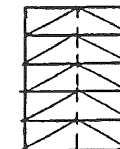


Dans leur démarche, les enfants miment le report des différentes pièces dans l'unité pour vérifier les noms des fractions trouvés. Certains "reportent" jusqu'au demi-puzzle puis multiplient par 2, d'autres ont besoin d'aller jusqu'à l'unité.

4 Vérification des noms de fraction choisis

Le lendemain, les 3 ou 4 puzzles ayant les mêmes pièces sont exposés au tableau.

C'est l'occasion pour tous de remarquer qu'une même fraction peut avoir plusieurs noms. Les enfants remarquent à nouveau que des mêmes pièces peuvent s'agencer différemment.



Quand il y a une erreur, l'adulte ne tranche pas mais demande une explication, une justification convainquante pour le groupe.

Chaque auteur vient justifier sa proposition et la correction s'opère.

Lorsqu'on semble tous d'accord sur les noms des pièces, on procède à la vérification : la somme des fractions du puzzle vaut-elle bien l'unité ?

Vérifions-le pour le puzzle (4)

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{1}{16} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{20} & + & \frac{1}{20} & + & \frac{1}{20} & + & \frac{1}{20} & + & \frac{1}{20} & + & \frac{1}{20} & = & 1 \\ & & & & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{4} & + & & & & & & \frac{5}{20} & & & & & & & = & 1 \\ & & & & & & \frac{1}{4} & + & & & & & \frac{1}{4} & + & & & & & & \frac{1}{4} & & & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & & & & \frac{1}{2} & & & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & & & \frac{2}{2} & & & & & & & & & & & & & & & = & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & = & 1 \end{array}$$

On peut faire le lien avec les longues additions d'entiers où on doit se débrouiller pour regrouper efficacement.

On écrit le calcul qu'on voit sur le puzzle.

On voit les fractions équivalentes plus qu'on ne les calcule : ainsi B et C recouvrent parfaitement A (soit $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$). On donne un sens géométrique à l'équivalence des fractions.

Plus on fait de vérifications de puzzles, plus chacun fait ses propres regroupements, avec ou sans support concret. Certains se sentent prêts à lâcher le support, d'autres pas. Il n'y a pas d'obligation à le faire. Certains aussi restent dans de mauvaises habitudes : pour eux, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Là, l'institutrice les oblige à retourner au support (envie ou pas !).

Il s'agit d'une phase importante de structuration. Les découvertes individuelles sont partagées collectivement et acquièrent le statut de connaissances savantes. Cette vérification se fait collectivement pour les 2, 3 premiers puzzles et chacun procède individuellement par la suite.

Cette troisième phase de l'activité permet à chacun de s'approprier les différentes stratégies mises en œuvre par l'un ou l'autre lors du travail antérieur. Elle permet également de fixer les

acquis nouveaux en les formulant aux autres.

5 Commentaires

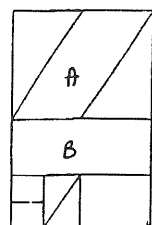
A ce stade-ci, il nous semble intéressant de s'attarder sur quelques réflexions de fond.

Les familles de fractions sont des ensembles de formes qui présentent une structure et qui provoquent une réflexion mathématique en suivant une loi, un rythme. Cette régularité permet aux élèves d'approcher avec plaisir des notions relativement complexes.

Dans ces familles de fractions, nous avons toujours privilégié les fractions dont le numérateur est 1, fractions qui nous paraissent les plus naturelles. Historiquement, elles ont déjà été privilégiées par les Égyptiens.

Plutôt que de proposer aux enfants de partager l'unité en n morceaux (démarche classique), l'activité puzzle leur demande le travail inverse : recomposer l'unité en reportant n fois le $n^{\text{ième}}$, c'est-à-dire le morceau qui, multiplié par n , donne l'unité. Ce qui implique qu'on travaille essentiellement la division contenance plutôt que la division partage, et ce dans un contexte de mesures.

De plus, cette option provoque la multiplicité des symboles pour un seul objet : des formes différentes représentent la même fraction, des écritures différentes parlent de la même forme, de la même fraction.



$$A = B$$

Lors de la vérification, l'addition de toutes les fractions trouvées se fait naturellement, sans règle abstraite, grâce au support géométrique qu'est le puzzle (cfr. 4).

La plupart du temps, cette démarche ne demande qu'une estimation à vue et l'emploi d'étalons naturels (la gomme, les doigts, ...). Elle demande pourtant une grande précision : on peut penser avoir réalisé un puzzle correctement alors que l'agencement s'avère faux. Ainsi, dans le puzzle (1), les deux rectangles A et B peuvent être mal positionnés (voir pointillés sur le puzzle de la Figure 5.1).

$$\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$

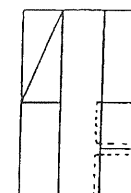


Fig. 5.1

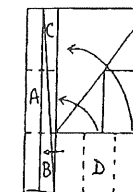


Fig 5.2

Les enfants qui ont passé le cap "pratique" du découpage en trois, peuvent se permettre de voir la transformation efficace d'un quart en une autre forme (ainsi la pièce D recouvre en 3 morceaux les pièces A, B, C de la Figure 5.2 ci-dessus). De jeunes enfants n'y arrivent pas encore et donc éprouvent plus de difficulté à se convaincre que D est $1/4$. Ils doivent pour cela aller plus loin dans leur raisonnement.

Tous les enfants n'arrivent pas aux mises en commun avec les mêmes éléments, les mêmes trouvailles, les mêmes supports, ... Il ne s'agit donc pas de vérifier que tout le monde ait la bonne réponse.

A ce moment, il y a une véritable interaction : un enfant arrive à mettre en mots une explication logique qui convainc le reste de la classe (cfr. 3). Une collaboration s'établit entre ceux qui abstraient facilement et ceux qui éprouvent le besoin de manipuler jusqu'au bout. Ainsi, les deuxièmes font la preuve pour les premiers. Dans la recherche de la valeur des pièces H, I, J, K, L du puzzle 4 (cfr. 3.1), certains enfants reportent 20 fois une de ces pièces en dénombrant, justifiant ainsi la réponse trouvée rapidement par les autres.

Individuellement et collectivement, les enfants reproduisent plusieurs fois les mêmes démarches dans des contextes différents, entre autres, celle du report d'une pièce à l'intérieur de l'unité. La répétition des démarches, sans pour autant parler de drill, permet à chacun de fixer les notions découvertes. Parlons de "variations sur un thème connu".

Les puzzles sont de difficultés variables. C'est l'institutrice qui décide qui va faire tel ou tel puzzle. Parfois, elle se trompe : certains élèves "bloquent" dans la réalisation du puzzle, ne perçoivent pas la pièce dans l'ensemble ou peinent dans les noms de fraction à donner. L'institutrice n'enlève pas leur puzzle mais les fait rencontrer un compère qui a reçu les mêmes pièces. Il ne faut donc jamais donner un seul exemplaire d'un puzzle dans la classe.

Cette activité remet chaque enfant face à ses questionnements mentaux, personne n'est gagnant au départ... et ceux qui le seront à l'arrivée ne sont pas toujours ceux qu'on croit. L'enfant est donc confronté à lui-même, ceci provoque parfois une insécurité "dramatique" pour certains enfants très scolaires voire premiers de classe. Après l'activité, chacun est encouragé, voire poussé à exprimer ce qu'il a vécu, comment il l'a vécu. C'est l'occasion de mettre en valeur des enfants moins "scolaires" dans des activités plus classiques.

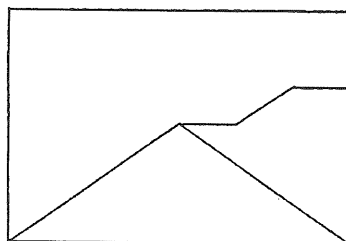
D'autre part, certains enfants sont obligés d'abandonner leur propre disposition de pièces au profit d'une autre plus efficace et doivent donc prendre du recul, se dégager de l'affectif mis dans leur travail... Démarche ô combien difficile chez de jeunes enfants !

6 Prolongements

Après ce premier travail avec des puzzles de fractions, les enfants savent, intuitivement et avec des pièces de puzzles comme support concret, simplifier des fractions (notion de fractions équivalentes) et additionner des fractions de même dénominateur ou de dénominateurs multiples l'un de l'autre. Comment amener la nécessité de mettre des fractions quelconques au même dénominateur ?

Il nous paraît évident que cette recherche ne s'adresse plus à des enfants de 7 ans. Elle pourrait trouver sa place en 4^{ème} ou 5^{ème} année primaire.

Nous avons eu l'occasion de tester une activité visant ce but avec de futurs instituteurs (étudiants de 2^{ème} normale) et avec des enfants de 4^{ème} et 5^{ème} primaire. A chaque fois, nous avons distribué un rectangle partagé en trois morceaux.



6.1 Compte-rendu de l'expérience avec les normaliens

A l'école normale, ce puzzle a été intégré dans une réflexion méthodologique plus large.

"Réalisez le calcul $\frac{5}{6} + \frac{7}{15}$."

Tous les étudiants appliquent la règle de réduction au même dénominateur.

Le professeur: "Imaginez que vous avez devant vous quelqu'un qui ne sait pas additionner les fractions. Comment allez-vous pouvoir lui permettre de comprendre comment ça se passe? Je ne veux pas une explication de la règle. Mais que vous permettiez à la personne de se construire sa règle."

- "Comment peut-on trouver une chose qu'on n'a pas apprise soi-même?"

Certains étudiants refusent obstinément de croire qu'ils sont capables de penser une démarche dont ils ont eux-mêmes été privés.

Ces réflexions sont typiques d'étudiants, mais aussi d'enseignants qui sont invités à réaliser une rupture avec leur propre histoire d'apprentissage et doivent affronter l'angoisse de l'inconnu.

6.1.1 Nommer les pièces

"Pour chaque pièce du puzzle reçu (cf. Fig. 6.1), trouvez des noms de morceaux (pas des

noms de forme) de deux sortes différentes (ordre sans importance):

- ce nom est une seule fraction
- ce nom se présente sous une autre forme qui vous paraît intéressante."

Par exemple :

noms donnés à la pièce (1)

$$\frac{42}{72}, \frac{21}{36}, \frac{7}{12}, \frac{14}{24}, \frac{10 + \frac{1}{2}}{18},$$

$$\frac{10}{18} + \frac{1}{36}, \frac{1}{9} + \frac{1}{54} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right), \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{12}, \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

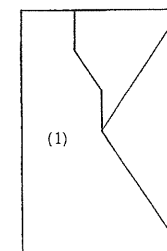
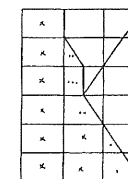


Fig 6.1

"Est-ce que ces écritures sont correctes? Comment vérifier et comment visualiser cela?"

La vérification des écritures une à une amène des constructions.

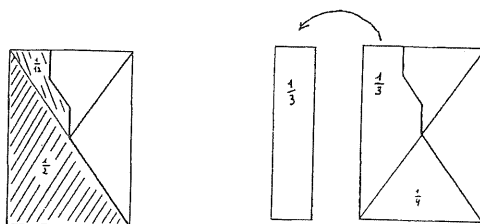
Avec les 18°, ça ne tombe pas juste : $\frac{10 + \frac{1}{2}}{18}$.



- le quadrillage en 72^{es} permet de ne pas avoir à "coller des morceaux". . .



- la représentation de $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ donne une forme surprenante au $\frac{1}{12}$. De même, $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ au $\frac{1}{3}$.



Certains étudiants n'arrivent pas à se convaincre qu'il s'agit bien là de $1/3$.

La difficulté est la suivante: une part "ne va pas" $\times$ fois dans l'unité. Certains éprouvent la nécessité de recouper cette part. "Ça fait bête". Cette difficulté du retour à la manipulation s'observe déjà dès l'école primaire!

- des 24^{es}, 54^{es}, 36^{es}, 144^{es} apparaissent.

La notion de fraction équivalente est particulièrement mise en évidence dans cette activité :

$$\frac{7}{12} = \frac{14}{24} = \frac{21}{36} = \frac{42}{72} = \frac{84}{144}$$

Pour la pièce (1), nous clôturons l'activité après avoir dressé le tableau suivant, reprenant 4 de ses noms significatifs :

	une seule fraction	une somme de 2 fractions
clair au niveau de la manipulation	$\frac{42}{72}$	$\frac{10}{18} + \frac{1}{36}$
Fractions irréductibles	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Ce tableau permet de mettre en évidence que le support du puzzle et les découpages qu'il engendre n'induit pas la notion de PPCM : le découpage en 12^{es} ne figure pas parmi les découpages "significatifs" (c'est-à-dire clairs au niveau de la manipulation).

6.1.2 Vers l'abstraction

"D'un autre puzzle, je n'ai gardé, pour identifier une pièce, que le nom $\ll \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \gg$. Comment faire pour trouver le nom de cette pièce en une seule fraction irréductible?"

Propositions:

- Pour trouver $\frac{7}{12}$, on a fait $3 \times 4 = 12$ et $3 + 4 = 7$. Ici, on peut faire: $4 \times 5 = 20$. Cela donne un bon dénominateur.

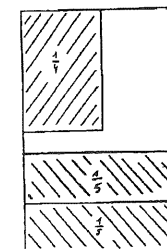
- $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21} = \dots$ et $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ et dès que je trouve $\frac{3}{12}$, je fais $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$.

De même ici, je fais: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \dots$ et $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20}$ et dès que je trouve $\frac{8}{20}$, je fais $\frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$.

En fait, on a cherché le nom d'une pièce commune qui convient (ici, $\frac{1}{20}$) et par le jeu des fractions équivalentes, nous avons pu déterminer le nombre de fois que cette pièce commune entre dans $\frac{2}{5}$, dans $\frac{1}{4}$, et enfin dans $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

- Les diverses tentatives de construction de la pièce $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ pour trouver un seul nom échouent, sauf celle qui travaille explicitement sur les deux dimensions du rectangle unité.

* "J'ai mis les $2/5$ horizontalement, et le $1/4$ verticalement; comme ils se superposent, je remonte deux bouts du $1/4$ à côté de la pièce verticale. Chaque petit bout représente $1/20$ de l'unité; pour m'en convaincre, il suffit que je prolonge les lignes de construction et que j'en quadrille toute l'unité. Si je pense à réaliser ce quadrillage, je découvre la réponse: $13/20$, et je vois effectivement qu'elle est correcte."



6.1.3 Est-il nécessaire d'aller plus loin?

"Refaites la même démarche avec la pièce $\frac{5}{6} + \frac{7}{15}$. Trouvez le plus vite possible le nom irréductible en une seule fraction".

Ceux qui ont encore envie ou besoin de construire un puzzle vont se rendre compte qu'ils débordent de l'unité, et qu'ils vont donc avoir à en utiliser plusieurs. Les étudiants en formation n'ont plus besoin du support des puzzles pour justifier leur démarche:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \dots \text{ et } \frac{7}{15} = \frac{14}{30},$$

d'où la réponse:

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{15} = \frac{25}{30} + \frac{14}{30} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10} = 1 + \frac{3}{10}.$$

Certains procèdent comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccc} 6 & 12 & 6 & 12 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \\ 15 & \rightarrow & 15 & 30 & \rightarrow & 15 & 30 & & & \rightarrow & 15 & 30 & & \end{array}$$

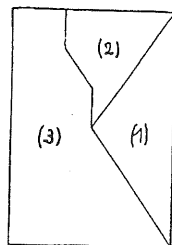
Cette démarche est une méthode artisanale pour trouver le PPCM.

Tout ceci met en évidence le fait que le PPCM n'est pas "un prérequis nécessaire" à la construction de la somme des fractions, quelles qu'elles soient. On peut aisément mener ce travail sans jamais le mettre en évidence en tant que tel.

Par contre, il est intéressant d'observer, au moment de ce travail ou à un autre, que rechercher le "dénominateur commun le plus petit" correspond à une démarche mathématique qu'on retrouve également dans d'autres contextes où elle permet de résoudre des problèmes "d'optimisation".

6.2 Compte-rendu de l'expérience avec des enfants

Un rectangle partagé de la même façon a été proposé à des enfants de fin de 4^{ème} année primaire, enfants qui n'ont jamais travaillé les puzzles de fractions auparavant. Ils ont travaillé en alternance, de manière individuelle, à deux et collectivement. Certains enfants se sont passionnés pour l'activité, d'autres ont eu beaucoup de difficulté à chercher individuellement ou à deux. Ils ont toutefois, pour la plupart, participé activement à la mise en commun.



Le professeur a donné la consigne suivante : "Recherchez le nom de fraction de chaque morceau."

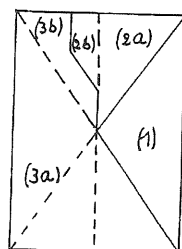
Les enfants ont rapidement trouvé le nom de la pièce (1) : $1/4$

Comment trouver les 2 autres fractions ?

En traçant certaines lignes, les enfants dégagent la valeur d'une partie de ces morceaux. Ainsi, en prolongeant les deux diagonales du rectangle et en traçant les deux médianes, il est clair que la pièce (3a) vaut $1/4$ et la pièce (2a) $1/8$. Au passage, un enfant remarque que la pièce (1) vaut également $2/8$.

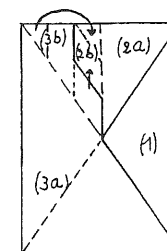
Il reste à évaluer deux petits morceaux, (3b) et (2b). Comment faire ?

Quelques enfants proposent des pistes "géométriques".



Un enfant voit trois fois le trapèze (2b) dans le triangle formé par (2b) et (3b). En effet, (2b) peut se placer entièrement une fois en (3b) et lorsqu'on déplace sur (2b) les morceaux restant de (3b), ils recouvrent parfaitement le trapèze.

Il conclut que la pièce (2b) vaut le tiers du huitième. Il éprouve des difficultés pour la nommer en une seule fraction. En proposant aux enfants de regarder combien de fois la pièce (2b) va dans le rectangle, le professeur débloque la situation. Par dénombrement, les enfants constatent que cette pièce rentre 24 fois dans le rectangle et en vaut donc le vingt-quatrième.



Toujours pour découvrir la valeur de cette pièce (2b), un autre imagine de transformer le trapèze (2b) en un triangle (Fig. 6.4). Il explique que le triangle A recouvre parfaitement le triangle B. Il suffit de le "retourner" (geste à l'appui). Lorsqu'on a transformé le trapèze (2b) en triangle (2c), il constate que le triangle (2c) va 12 fois dans un demi-rectangle (Fig. 6.5). Il vaut donc $1/24$. Et le trapèze aussi. La pièce (2) vaut donc $1/24 + 1/8$.

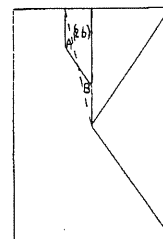


Fig. 6.4

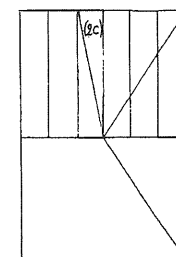
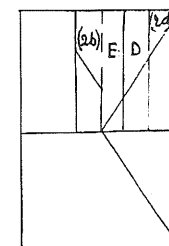


Fig. 6.5

Une autre manière de trouver la valeur de la pièce (2) est de remarquer que cette pièce couvre "deux bandelettes". Il suffit de déplacer la pièce (2b) en la tournant. Elle complète la bandelette D. De la même manière, (2d) complète la bandelette E. La pièce (2) vaut donc $1/6$ ou $2/12$.



Remarquons que certains enfants s'appuient intuitivement sur les isométries. Notons également que quelques-uns ont partagé le rectangle en douzièmes, contrairement aux normaliens.

Certains enfants proposent de quadriller le rectangle.

Très influencés par les mesures conventionnelles d'aires, ils travaillent en cm^2 . Le rectangle complet compte 54 cm^2 . La pièce (1) compte $13,5 \text{ cm}^2$, nombre venant, pour certains enfants, de la division de 54 par 4. Les nombres de centimètres carrés comptés dans les deux autres parties sont compris entre 7,5 et 16 pour la pièce (2) et valent 34 ou 36 pour la pièce (3). Comment donner ensuite le nom de fraction de ces deux pièces ? Les enfants en sont incapables.

Les dimensions du rectangle sont entières (6 et 9 cm). Cela facilite le quadrillage en unités conventionnelles. Toutefois, ce dernier réalisé, la tâche se complique : il y a beaucoup de carrés et surtout beaucoup de carrés morcelés. Cela provoque une difficulté de comptage. Les enfants ont été bloqués par l'usage des unités conventionnelles et n'ont pas profité d'unités plus adéquates. De plus, ils manquent de précision dans leur tracé, ce qui induit quelques erreurs.

Rassemblons ces différents noms de fractions donnés à la pièce (2) :

$$1/6 = 2/12 = 4/24 = 1/8 + 1/24.$$

Les égalités entre ces fractions ne font aucun doute pour les enfants. Ils ne savent pourtant pas additionner des fractions. La dernière égalité n'a pas été trouvée par calcul mais par observation des différents découpages proposés.

La valeur de la pièce (3) ne pose plus de problème. On observe qu'elle vaut :

$$1/2 + (1/8 - 1/24) = 7/12.$$

On peut se baser sur des exemples d'égalité comme celles-là pour trouver ensuite des règles de calcul.

L'activité se termine par un retour au quadrillage en cm^2 . Il est enfin possible de connaître les "bonnes réponses" ! Les enfants maîtrisant déjà la notion de fraction équivalente, ils peuvent transformer $1/6$ en $9/54$ (par calcul). Le nombre correct de cm^2 de la pièce (3) s'obtient par soustraction : $54 - 13,5 - 9$.

7 Conclusion

Il nous semble que l'approche des fractions ici donne - ou redonne - du sens à la fraction en tant que telle autant qu'aux opérations des fractions entre elles.

Le contexte sert à visualiser des fractions et des opérations avant de et pour les comprendre. Que ce soit à l'école primaire ou en deuxième normale, l'égalité visible géométriquement ne pose aucun doute.

Ce support géométrique a un sens purement pédagogique, "gratuit", mais indispensable pour ancrer les intuitions de manière durable. Plus tard... bien plus tard, lors de l'étude des probabilités par exemple, une non compréhension du fonctionnement des opérations sur les

fractions (compréhension que la géométrie permet) obligerait à s'attarder à nouveau sur les bases.

Ce travail de puzzle permet d'approcher des fractions dans un seul contexte. Notre enthousiasme à vous partager ces expériences ne doit pas vous enfermer dans cette seule approche. Par exemple, nous n'avons pas du tout envisagé l'aspect ordinal des fractions. Mais ce contexte géométrique provoque le passage au calcul comme une économie de temps, d'énergie face à des manipulations qui deviennent lourdes.

Bibliographie

FLORENCE Pascale, *Apprendre les fractions, comment? Pourquoi?*, travail de fin d'étude, ENCBW, LLN, juin 88

GEM primaire, *Partager sans compter*, in *Mathématique et Pédagogie*, n°94, SBPM, 1993, p. 15-25

ROUCHE Nicolas, *Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels*, Didier Hatier, Bruxelles, 1992

2. Rapports et proportions¹

1^e partie : A partir de rectangles

A. Activités

Voici une série de questions proposées à des élèves du premier degré. Nous vous invitons à y répondre et à relever les différentes facettes des fractions ainsi que les opérations sur les fractions.

1. Des rectangles

1.1. Dessine plusieurs rectangles dont la largeur vaut les $\frac{2}{5}$ de la longueur.

1.2. Rassemble les dimensions de ces rectangles (et de ceux des autres élèves) dans le tableau ci-dessous :

Longueur ou L							
largeur ou l							

Tab.1

1.3. Ce tableau traduit-il une situation de proportionnalité ? Explique.

2. Une famille de rectangles dans un repère

Dessine ces différents rectangles dans un système d'axes avec un sommet à l'origine et les deux côtés issus de ce sommet alignés le long des axes.

Que peux-tu observer à propos des quatrièmes sommets ? Comment peux-tu caractériser leurs coordonnées ?

3. D'un tableau vers des formules

3.1. Reprends les données du tableau 1 dans le tableau 2 et complète-le en donnant pour chaque rectangle, son périmètre et son aire.

1	Longueur ou L						
2	largeur ou l						
3	Périmètre ou P						
4	Aire ou A						

Tab.2

3.2. Ce tableau traduit-il aussi une situation de proportionnalité ?

3.3. Dans ce tableau, on passe de la ligne 1 à la ligne 3 en multipliant par $\frac{14}{5}$ et de la ligne 2 à la ligne 3 en multipliant par le nombre 7. D'où viennent ces nombres ?

3.4. Par contre, l'aire n'est pas proportionnelle à la longueur. Quelle formule lie les nombres de la ligne 1 à ceux de la ligne 4 ?

3.5. Qu'en est-il entre les nombres des lignes 2 et 4 ?

4. Visualiser des formules par des dessins

4.1. Interprète géométriquement les résultats relatifs aux aires obtenus en 3.4 et 3.5.

4.2. Combien de fois le carré construit sur la largeur du rectangle est-il contenu dans le carré construit sur la longueur de ce rectangle ? Vérifie le résultat algébriquement.

B. Solutions et commentaires²

1.1. On donne un rapport entre deux dimensions. Ce rapport doit être utilisé comme *fraction-opérateur* dans la construction effective d'un rectangle.

On engendre ainsi sans le dire une famille de rectangles semblables.

1.2.

Longueur ou L	5	2,5	7,5	1	4	10	6,5
largeur ou l	2	1	3	0,4	1,6	4	2,6

Tab.3

1.3. On trouve aisément que le tableau 3 est un tableau de proportionnalité : en effet, tous les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant les nombres correspondant de la première par $\frac{2}{5}$. On retrouve la relation

¹Cet atelier a été conçu et le texte rédigé par ANNE CHEVALIER, LUCIE DE LAET, CHRISTINE DOCQ et ANDRÉ MALO

²Les différentes facettes des fractions et les opérations sur les fractions sont en italique dans tous les commentaires de ce document.

$$l = \frac{2}{5}L.$$

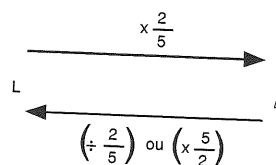
Par ailleurs, on peut aussi observer que quelle que soit la valeur L et son correspondant l , on a

$$\frac{L}{l} = \frac{5}{2},$$

ce qui peut également s'écrire sous la forme

$$L = \frac{5}{2}l.$$

C'est l'occasion de mettre en évidence que $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{2}$ sont deux *opérateurs inverses*. On peut schématiser la situation de la façon suivante :



On conclut ainsi que *diviser par $\frac{2}{5}$ revient à multiplier par $\frac{5}{2}$* .

2. Cette question permet de faire le lien entre similitude, proportionnalité et équation de droite. En effet, si on place tous les rectangles avec une longueur le long de l'axe des x , tous les quatrièmes sommets sont alignés sur une demi-droite issue de l'origine qui se superpose avec les diagonales des rectangles.

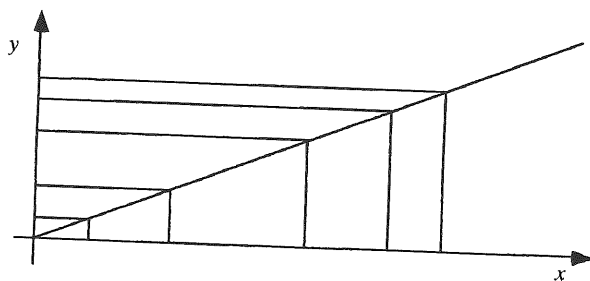


Fig.1

Les coordonnées de chaque point de cette demi-droite correspondent aux dimensions d'un rectangle de cette famille. On passe ainsi

$$\text{de la formule } l = \frac{2}{5}L \text{ à l'équation } y = \frac{2}{5}x$$

qui caractérise tous les points de cette demi-droite. On a un lieu géométrique de points caractérisé par une formule algébrique.

Si par contre, on place tous les rectangles avec une largeur sur l'axe des x , on est amené à exprimer L en fonction de l et on passe

$$\text{de la formule } L = \frac{5}{2}l \text{ à l'équation } y = \frac{5}{2}x.$$

Dans le passage de la formule $l = \frac{2}{5}L$ à l'équation $y = \frac{2}{5}x$, le coefficient $\frac{2}{5}$ passe du statut d'*opérateur agissant sur des longueurs* à celui d'*opérateur agissant sur des nombres*. Ainsi son statut se rapproche de celui de nombre.

Par ailleurs, les représentations graphiques donnent l'occasion de travailler le concept de *pente* et d'interpréter ainsi les coefficients $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{2}$ comme des *rapports*.

3.1.

1	Longueur ou L	5	2,5	7,5	1	4	10
2	largeur ou l	2	1	3	0,4	1,6	4
3	Périmètre ou P	14	7	21	2,8	11,2	28
4	Aire ou A	10	2,5	22,5	0,4	6,4	40

Tab.4

3.2. Pour comparer les éléments des lignes 1 et 3, on peut, par exemple *calculer les rapports* suivants :

$$\frac{5}{14}; \frac{2,5}{7} = \frac{5}{14}; \frac{7,5}{21} = \frac{15}{42} = \frac{5}{14}; \frac{1}{2,8} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}; \frac{4}{11,2} = \frac{40}{112} = \frac{5}{14}; \frac{10}{28} = \frac{5}{14};$$

Il y a donc proportionnalité entre les lignes 1 et 3.

Il en va de même entre les lignes 2 et 3 car en faisant des calculs du même type, on trouve :

$$\frac{2}{14} = \frac{3}{21} = \frac{0,4}{2,8} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

Par contre, on s'aperçoit rapidement qu'il n'y a pas proportionnalité entre les lignes 1 et 4. En effet,

$$\frac{5}{10} \neq \frac{2,5}{2,5}$$

3.3. Pour retrouver le coefficient $\frac{14}{5}$, il faut exprimer le périmètre P en fonction de la longueur L :

$$\begin{aligned} P &= 2(L + l) = 2\left(L + \frac{2}{5}L\right) = 2\left(l + \frac{2}{5}l\right)L = 2\left(\frac{5}{5} + \frac{2}{5}\right)L = 2 \cdot \frac{7}{5}L = \frac{14}{5}L \\ P &= 2\left(L + \frac{2}{5}L\right) = 2\left(\frac{5}{5}L + \frac{2}{5}L\right) = 2\left(\frac{7}{5}L\right) = \frac{14}{5}L. \end{aligned}$$

Dans cette démarche, les élèves sont invités, pour la première fois, à utiliser des *expressions algébriques contenant des coefficients fractionnaires*. De plus ils doivent *réduire au même*

dénominateur, additionner deux fractions, multiplier une fraction par un nombre. Dans la première résolution, on travaille sur des *nombre*s et dans la deuxième sur des *grandeurs*. Dans les deux cas, il faut *fractionner l'unité*, ce qui est peu usuel.

Pour retrouver le coefficient 7, il faut exprimer le périmètre en fonction de la largeur l :

$$P = 2(L + l) = 2\left(\frac{5}{2}l + l\right) = 2\left(\frac{5}{2}l + \frac{2}{2}l\right) = 2\left(\frac{7}{2}l\right) = 7l.$$

3.4. Pour trouver la formule qui permet d'exprimer l'aire A en fonction de la longueur L , on passe par les étapes :

$$A = L \cdot l = L \cdot \frac{2}{5}L = \frac{2}{5}L^2.$$

On peut dire que l'aire est proportionnelle au carré de la longueur. On retrouve le facteur $\frac{2}{5}$ qui lie la largeur à la longueur.

3.5. De la même façon, on obtient la relation

$$A = L \cdot l = \frac{5}{2}l \cdot l = \frac{5}{2}l^2.$$

4.1. Géométriquement, ces deux relations peuvent être interprétées par les Figures 2 à 5.

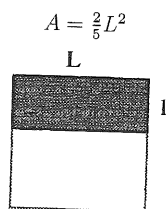


Fig. 2

Le rectangle donné est contenu deux fois et demi dans le carré d'aire L^2 .

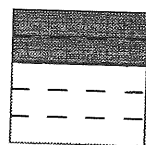


Fig. 3

L'aire du rectangle vaut les $\frac{2}{5}$ de l'aire du carré d'aire L^2 .

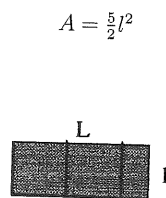


Fig. 4

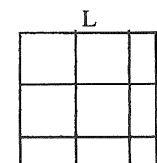
Le rectangle donné contient deux fois et demi le petit carré d'aire l^2 .



Fig. 5

L'aire du rectangle vaut les $\frac{5}{2}$ de l'aire du carré d'aire l^2 .

4.2. Géométriquement, en associant les Figures 2 et 4, on obtient la Figure 6



Le carré de côté l est contenu six fois et un quart dans le carré de côté L .

Algébriquement, on peut retrouver ce résultat soit en égalant les deux formules de l'aire :

$$\frac{2}{5}L^2 = \frac{5}{2}l^2,$$

et donc,

$$L^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}l^2 = \frac{25}{4}l^2,$$

soit en partant de la relation initiale

$$L = \frac{5}{2}l,$$

ce qui conduit à l'aire du carré de côté L :

$$L^2 = \left(\frac{5}{2}l\right)^2 = \frac{25}{4}l^2.$$

Or, 25 quarts correspondent à 6 unités et un quart.

Nous avons *multiplié une fraction par elle-même*. Par ailleurs, nous avons *décomposé une fraction en une partie entière et une partie fractionnaire*.

2^e partie : les engrenages

1. Activité autour des vélos

1.1. Dans la salle, il y a deux vélos dont un avec trois plateaux à l'avant et six à l'arrière (vélo vert) et un autre avec un plateau à l'avant et six à l'arrière (vélo gris)³. Nous indiquons au tableau la réflexion suivante :

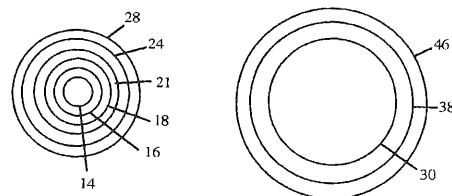
"Tous ces plateaux, c'est du bluff !"

1.2. Voici deux représentations qui peuvent vous aider⁴ :

³Il va de soi qu'il faut adapter cette séquence aux vélos disponibles.

⁴Cette représentation n'est fournie qu'au moment où les participants manifestent le besoin de compter le nombre de dents de chaque roue.

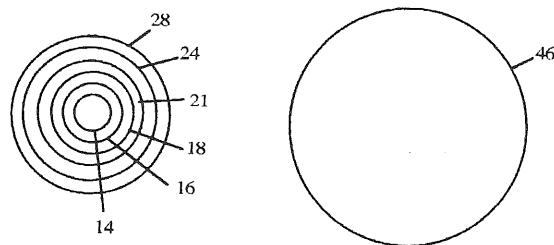
Schéma du vélo vert



Arrière

Avant

Schéma du vélo gris



Arrière

Avant

Fig.7

Solutions et commentaires

1.1. Les élèves sont invités à former des petits groupes, à s'approcher des vélos, à les observer, les manipuler afin de réagir le plus objectivement possible à la phrase écrite au tableau.

Pour certains, c'est déjà une découverte de constater le nombre de plateaux différents et d'observer que ceux de devant sont plus grands que ceux de derrière.

Pour avancer dans la réflexion, il faut fixer son attention sur une association possible d'un plateau avant et d'un plateau arrière et essayer de comprendre ou observer ce qui se passe quand on se met à tourner le pédalier.

Certains peuvent essayer concrètement en mesurant la distance parcourue au sol par tour de pédale (appelée développement), d'autres vont calculer ce développement à partir du diamètre de la roue et du nombre de dents des plateaux. C'est le moment de fournir les informations relatives au nombre de dents des plateaux des deux vélos.

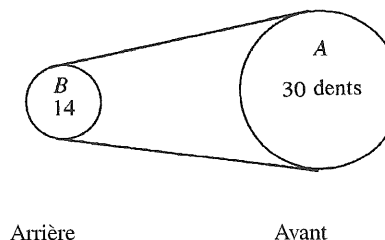
1.2. Pour comprendre le fonctionnement d'un dérailleur, il faut passer par les observations suivantes :

- les dents des plateaux avant et arrière ont la même forme et la même taille quel que soit leur diamètre de façon à pouvoir s'emboîter dans les maillons d'une même chaîne ;

- lorsque le plateau du pédalier fait un tour :

- il tourne d'un certain nombre de dents d_A et le plateau entraîné tourne du même nombre de dents d_B ;
- le nombre de tours réalisés par le plateau arrière dépend aussi du nombre de dents d_B de la roue arrière. Il est d'autant plus élevé que d_B est petit et que d_A est grand.

Considérons le cas particulier où $d_A = 30$ et $d_B = 14$.



Arrière

Avant

Fig.8

Pendant que le plateau avant réalise un tour complet, 30 dents sont engrenées. Puisque qu'une chaîne relie les deux roues, un même nombre de dents sont engrenées au plateau arrière, ce qui fait tourner le plateau arrière de 2 tours et $\frac{2}{14}$ de tour, qui correspond à $\frac{30}{14}$ de tours.

Ce raisonnement nous permet de conclure que chaque fois que le plateau du pédalier fait un tour, le plateau arrière fait un nombre de tours égal à $\frac{d_A}{d_B}$, qui n'est évidemment pas toujours entier. Le plateau arrière étant lié à la roue arrière, celle-ci réalise donc ce même nombre de tours.

Par tour de pédalier, on avance d'une distance d'autant plus grande que :

- le rapport $\frac{d_A}{d_B}$ est élevé ;
- le diamètre de la roue arrière du vélo est grand.

Pour connaître toutes les possibilités qui nous sont offertes pour un vélo donné, il faut envisager tous les rapports $\frac{d_A}{d_B}$ possibles. Les cyclistes parlent de "braquets"⁵ ou de "vitesses"⁶ à propos de ces rapports. Le tableau ci-dessous reprend ces différents rapports pour le vélo vert. Remarquons que toutes les possibilités du vélo gris se retrouvent dans la dernière colonne.

⁵On peut s'étonner du fait que, dans les médias, les braquets soient présentés sous forme de produits $d_A \times d_B$ au lieu de rapport $\frac{d_A}{d_B}$.

⁶Le terme est mal choisi dans la mesure où il n'est pas question ici de distance parcourue par unité de temps.

d_B	d_A	30	38	46
14		$\frac{30}{14} = \frac{15}{7}$	$\frac{38}{14} = \frac{19}{7}$	$\frac{46}{14} = \frac{23}{7}$
16		$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$	$\frac{38}{16} = \frac{19}{8}$	$\frac{46}{16} = \frac{23}{8}$
18		$\frac{30}{18} = \frac{5}{3}$	$\frac{38}{18} = \frac{19}{9}$	$\frac{46}{18} = \frac{23}{9}$
21		$\frac{30}{21} = \frac{10}{7}$	$\frac{38}{21}$	$\frac{46}{21}$
24		$\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$	$\frac{38}{24} = \frac{19}{12}$	$\frac{46}{24} = \frac{23}{12}$
28		$\frac{30}{28} = \frac{15}{14}$	$\frac{38}{28} = \frac{19}{14}$	$\frac{46}{28} = \frac{23}{14}$

Tab.5

Pour analyser un tel tableau, il faut comparer et ordonner ces différents rapports qui sont ici tous fractionnaires.

Le plus petit rapport est celui qu'on obtient en choisissant le plus petit numérateur et le plus grand dénominateur c.-à-d. $\frac{30}{28}$; tandis que le plus grand s'obtient à partir du plus grand numérateur et du plus petit dénominateur c.-à-d. $\frac{46}{14}$.

La classification par ordre croissant des rapports $\frac{d_A}{d_B}$ est la suivante :

$$\frac{15}{14} \frac{5}{4} \frac{19}{14} \frac{10}{7} \frac{19}{12} \frac{23}{14} \frac{5}{3} \frac{38}{21} \frac{15}{8} \frac{23}{12} \frac{19}{9} \frac{46}{21} \frac{15}{7} \frac{23}{8} \frac{19}{21} \frac{23}{9} \frac{23}{7} \frac{23}{7}$$

Pour procéder à cette mise en ordre des différents rapports, il faut comparer les rapports deux par deux.

Toutes les fractions d'une même colonne ont même numérateur. La plus petite aura le plus grand dénominateur. Elles s'ordonnent par ordre décroissant de dénominateur.

Toutes les fractions d'une même ligne ont même dénominateur. La plus petite aura le plus petit numérateur. Elles s'ordonnent par ordre croissant de numérateur.

Malheureusement (pour les élèves !) l'ordre de toutes ces fractions ne correspond ni à celui

des colonnes, ni à celui des lignes. On est donc amené à comparer des fractions n'ayant ni même numérateur, ni même dénominateur. Plusieurs techniques sont possibles :

- On réduit facilement au même dénominateur :

$\frac{10}{7}$ et $\frac{19}{14}$ correspondent à $\frac{20}{14}$ et $\frac{19}{14}$. Donc, $\frac{10}{7} > \frac{19}{14}$.

- On décompose les fractions à partir d'un entier proche :

$\frac{19}{9}$ et $\frac{23}{9}$ correspondent à $\frac{19}{9} = 2 + \frac{1}{9}$ et $\frac{23}{9} = 2 + \frac{5}{9}$; Or $\frac{1}{9} < \frac{5}{9}$, donc $\frac{19}{9} < \frac{23}{9}$.
 $\frac{23}{14}$ et $\frac{5}{3}$ correspondent à $\frac{23}{14} = 1 + \frac{9}{14}$ et $\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{3}$; Or $\frac{9}{14} > \frac{1}{3}$, donc $\frac{23}{14} > \frac{5}{3}$.

La succession des 18 rapports sous forme de fractions permet difficilement de cerner leurs positions relatives. A ce stade, on est amené à exprimer ces rapports à l'aide de nombres décimaux. Les situer sur trois droites graduées (une par plateau, placée l'une en dessous de l'autre) peut aussi aider à visualiser les positions relatives des rapports.

Les questions suivantes permettent de poursuivre la réflexion à propos du fonctionnement d'un vélo avec différents plateaux.

- Pour mieux se rendre compte des variations des "vitesses", calculez le rapport entre la plus grande et la plus petite, calculez les écarts absolus et relatifs d'une "vitesse" à l'autre.
- Un vendeur donne le conseil d'utilisation suivant : "Associez le grand plateau avant avec les trois plus petits plateaux arrière, le plateau du milieu avec les quatre plateaux du milieu à l'arrière et le petit plateau avant avec les trois grands plateaux arrière". Comment ce conseil se justifie-t-il d'un point de vue technique ? De cette façon, nos dix-huit "vitesses" annoncées se réduisent à dix. Est-ce vraiment grave ? (Pour y voir plus clair, on peut barrer sur la droite graduée les "vitesses" dont on n'a pas usage.)
- Comment se passent les changements de "vitesse" en pratique ? Passe-t-on toujours d'une "vitesse" à celle qui lui est directement supérieure ou inférieure ?
- Pour chacune de ces "vitesses", calculez la distance parcourue en un tour de pédale (appelée "développement") ?

2. Activité autour des horloges

Pour donner suite au travail sur les engrenages, on peut s'intéresser au fonctionnement d'une horloge mécanique. Le modèle sous forme de jeu à construire "Horloge 2000"⁷ permet de s'interroger à propos des questions suivantes :

Comment peut-on expliquer que l'aiguille des heures et celle des minutes tournent correctement ?

Quelle est la période (temps d'aller-retour) du balancier ?

L'intérêt de cette nouvelle situation réside dans un enchaînement d'engrenages qui amène des produits de rapports.

⁷réf.2085000, JOUSTRA 67 402 ILLFIRCH CEDEX.

Références bibliographiques

ROUCHE, N., *Le sens de la mesure*, Bruxelles, Didier-Hatier, 1992.

ROUCHE, N., *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?*, Paris, Ellipses, 1998.

3. Modèles pour calculer avec des fractions¹

Dans le présent atelier, il s'agit de se pencher sur les calculs de fractions pratiqués dans deux domaines particuliers, les probabilités et les exposants rationnels.

1 Introduction. Julie et le paradoxe du Chevalier de Méré.

Regardons les calculs effectués par une étudiante en dernière année d'études secondaires dans la résolution du paradoxe du Chevalier de Méré. Faut-il rappeler de quoi il s'agit ? La probabilité d'amener 1 au moins une fois en jetant quatre fois un dé cubique est la même que celle d'amener une paire de 1 en jetant vingt-quatre fois deux dés cubiques, pensait le Chevalier. Et vous, quel est votre avis ?

Julie, qui n'en est pas au premier problème de probabilité et qui se débrouille plutôt bien dans le domaine, fait un arbre (Figure 1) en indiquant sur chaque génération de branches les probabilités 0,167 et 0,833.

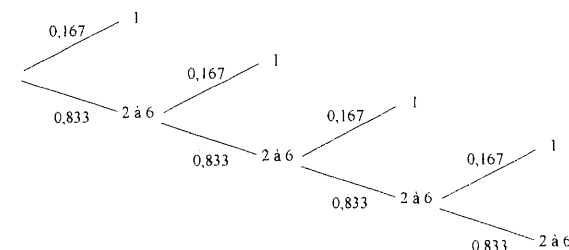


Fig. 1

Elle calcule alors la probabilité de l'événement "ne pas avoir 1 en quatre lancers", complémentaire de l'événement considéré :

$$0,833 \cdot 0,833 \cdot 0,833 \cdot 0,833 \approx 0,48$$

J'interviens : "tu pourrais peut-être considérer que la probabilité est de $1/6$ et $5/6$ plutôt que 0,167 et 0,833".

- "Oui !? Mais je n'aime pas les fractions".

Pour faire plaisir au prof ou je ne sais quoi d'autre, elle modifie son arbre puis calcule :

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$

A ma réaction "Ah, bon !", Julie efface sa réponse sans pouvoir en donner d'autre. J'ai essayé de lui expliquer ce que valait le produit de deux fractions en retournant au modèle de

¹ Ce texte a été rédigé par BENOÎT JADIN

l'aire d'un rectangle. Un comble ! Pour une fois que le calcul des fractions sert vraiment, je suis incapable d'en montrer le sens à l'intérieur même du contexte. Et vous ?

Problème 1. Espoir de vie¹

Avertissement : justifier toutes les étapes de votre résolution en n'utilisant que des arguments compréhensibles par un débutant qui serait ignorant du langage ensembliste et de tout résultat de la théorie des probabilités ?

La durée de vie est imprévisible. Beaucoup de contrats comme ceux d'assurance vie, de rente viagère, par exemple, reposent sur l'estimation de celle-ci.

A partir du nombre de naissances (tableau 1) en Belgique de 1982 à 1992 et des tables de mortalité (tableau 2), qui reprennent pour un million de naissances et selon le sexe, le nombre de survivants, à chaque âge :

- Est-il possible de déterminer les chances pour un nouveau-né d'atteindre 85 ans ?
- Qui a le plus de chances d'atteindre 85 ans : une fille de 16 ans ou une femme de 75 ans ?
- Ma fille de dix ans a une angoisse, celle de perdre son père et sa mère. Croyez-vous que je puisse la rassurer en calculant les risques qu'elle a de se retrouver orpheline de père et de mère à 20 ans sachant que j'ai 41 ans et mon épouse 38 ans ?

Année	Nombre de naissances		
	total	garçons	filles
1982	120 241	61 831	58 410
1983	117 145	60 209	56 936
1984	115 651	59 331	56 320
1985	114 092	58 572	55 520
1986	117 114	60 493	56 621
1987	117 354	60 390	56 964
1988	119 779	61 520	58 259
1989	120 904	61 948	58 956
1990	123 776	63 421	60 355
1991	125 924	64 586	61 338
1992	124 774	63 883	60 891

Tab. 1

Avant d'envisager les décès, il faut considérer les naissances. La naissance d'un enfant, c'est un peu comme jouer à pile ou face, si ce n'est qu'on ne répète pas l'expérience autant de fois qu'on veut. Au départ, on peut estimer qu'il y a autant de chance d'avoir une fille que d'avoir un garçon. La probabilité *a priori* de l'un et de l'autre est de 1/2. La fraction rappelle le nombre des cas favorables et des cas possibles ou "les chances" de vérifier l'événement.

On peut également s'intéresser à la fréquence des naissances de filles (tableau 3). Celle-ci fluctue au cours du temps. D'où l'idée de cumuler ces fréquences sur 2 ans, puis 3 ans, ..., et ainsi de suite. On observe une relative stabilisation de la fréquence et on peut considérer que la probabilité empirique ou *a posteriori* d'avoir une fille est de 0,4865. Ce dernier nombre est plus évocatif que la fraction 640570/1316734 même s'il fait perdre le sens premier du rapport. Pour garder l'idée de rapport, on peut l'exprimer en pourcentage : 48,65 %.

¹Il s'agit d'un problème posé en cinquième année de l'enseignement secondaire.

Nombre de survivants à l'âge x								
x	Homme	Femme	x	Homme	Femme	x	Homme	Femme
0	1 000 000	1 000 000						
1	999 415	999 664	41	964 210	982 167	81	498 950	670 315
2	998 827	999 328	42	962 327	981 327	82	466 949	641 506
3	998 237	998 990	43	960 312	980 427	83	434 106	610 817
4	997 644	998 653	44	958 152	979 461	84	400 631	578 299
5	997 047	998 314	45	955 834	978 421	85	366 772	544 045
6	996 447	997 974	46	953 341	977 299	86	332 810	508 203
7	995 843	997 634	47	950 658	976 084	87	299 058	470 977
8	995 234	997 292	48	947 766	974 768	88	265 855	432 633
9	994 621	996 949	49	944 645	973 337	89	233 556	393 505
10	994 002	996 605	50	941 273	971 779	90	202 525	353 988
11	993 377	996 258	51	937 628	970 079	91	173 113	314 540
12	992 745	995 910	52	933 683	968 222	92	145 653	275 668
13	992 106	995 560	53	929 411	966 190	93	120 434	237 916
14	991 459	995 208	54	924 782	963 962	94	97 692	201 840
15	990 802	994 852	55	919 763	961 517	95	77 591	167 983
16	990 136	994 494	56	914 321	958 831	96	60 210	136 845
17	989 459	994 133	57	908 417	955 877	97	45 543	108 845
18	988 769	993 768	58	902 011	952 625	98	33 492	84 294
19	988 067	993 398	59	895 060	949 044	99	23 878	63 363
20	987 349	993 024	60	887 519	945 096	100	16 452	46 069
21	986 616	992 645	61	879 339	940 744	101	10 917	32 273
22	985 864	992 260	62	870 468	935 942	102	6 951	21 688
23	985 093	991 868	63	860 853	930 645	103	4 228	13 915
24	984 300	991 469	64	850 437	924 800	104	2 446	8 477
25	983 483	991 062	65	839 161	918 351	105	1 339	4 874
26	982 640	990 646	66	826 964	911 238	106	690	2 627
27	981 768	990 220	67	813 786	903 393	107	332	1 317
28	980 864	989 782	68	799 564	894 747	108	149	609
29	979 925	989 331	69	784 236	885 223	109	61	258
30	978 947	988 866	70	767 741	874 740	110	23	99
31	977 927	988 386	71	750 022	863 213	111	8	34
32	976 860	987 887	72	731 027	850 551	112	2	10
33	975 742	987 369	73	710 708	836 663	113	1	3
34	974 567	986 828	74	689 026	821 452	114	0	1
35	973 330	986 263	75	665 955	804 822	115	0	0
36	972 024	985 671	76	641 480	786 678	116	0	0
37	970 644	985 047	77	615 606	766 928	117	0	0
38	969 181	984 389	78	588 355	745 485	118	0	0
39	967 627	983 693	79	559 774	722 274	119	0	0
40	965 973	982 954	80	529 938	697 231	120	0	0

Tab. 2

Année	Nombre de filles	Total	Pourcentage de filles	Nombre cumulé de filles	Total cumulé	Fréquence cumulée de filles
1982	58410	120241	48,58	58410	120241	48,58
1983	56936	117145	48,60	115346	237386	48,59
1984	56320	115651	48,70	171666	353037	48,63
1985	55520	114092	48,66	227186	467129	48,63
1986	56621	117114	48,35	283807	584243	48,58
1987	56964	117354	48,54	340771	701597	48,57
1988	58259	119779	48,64	399030	821376	48,58
1989	58956	120904	48,76	457986	942280	48,60
1990	60355	123776	48,76	518341	1066056	48,62
1991	61338	125924	48,71	579679	1191980	48,63
1992	60891	124774	48,80	640570	1316754	48,65

Tab. 3

Le tableau 2 nous indique que sur un million de garçons qui naissent, il n'en reste, 85 ans plus tard, que 366772; ce qui veut dire que la proportion d'hommes atteignant l'âge de 85 ans vaut

$$\frac{366772}{1000000} = 0,366772 \cong 37\%.$$

Puisque ces tables de mortalité ont été élaborées à partir d'un très grand nombre d'observations, on peut considérer que 0,366772 est la probabilité qu'un nouveau-né de sexe masculin vive jusqu'à 85 ans. De même, la probabilité qu'une fille qui vient de naître atteigne l'âge de 85 ans est de 0,544045.

Pour répondre à la question posée, une manière de procéder est de déterminer le nombre de survivants à l'âge de 85 ans pour un très grand nombre de nouveaux-nés, par exemple, un million. Il faut d'abord distinguer combien il y a de filles et de garçons. Si on admet que la probabilité de naître fille est de 48,65 %, il y a de fortes chances d'avoir 486500 filles et 513500 garçons. Parmi ces garçons, combien reste-t-il d'hommes de 85 ans ? On peut calculer de diverses façons. Soit, faire

$$0,366772 \times 513500 = 188337,$$

0,366772 qui est un rapport au départ devient opérateur.

Ou, faire une règle de trois :

sur 1000000 au départ, il y en reste 366772 à 85 ans;
sur 100, il en restera 36,6772
(avec un effort d'imagination pour les morceaux d'homme);
sur 513500, il en restera $5135 \times 36,6772$ ou à peu près 188337.

Enfin, on peut chercher le nombre x tel que

$$\frac{x}{513500} = \frac{366772}{1000000},$$

ce qui revient à une égalité de rapports.

En procédant de la même façon pour les 486500 filles, on obtient 264678 femmes de 85 ans. Au total, sur un million de nouveaux-nés, on a donc de fortes chances de retrouver $188337 + 264678 = 453015$ personnes de 85 ans. Ces calculs peuvent être organisés sous forme d'un diagramme (Figure 2).

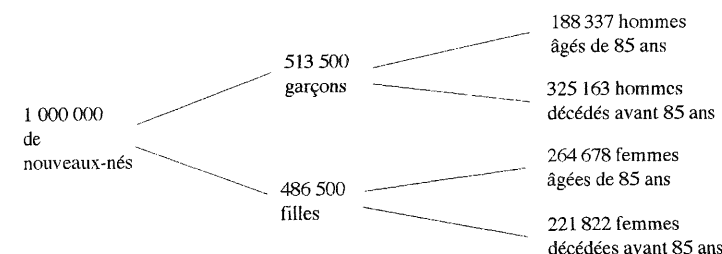


Fig. 2

Le nombre d'un million que nous avons choisi pour la facilité les calculs est arbitraire. Quel que soit le nombre N de nouveaux-nés au départ, nous retrouvons le même type d'arbre (Figure 3).

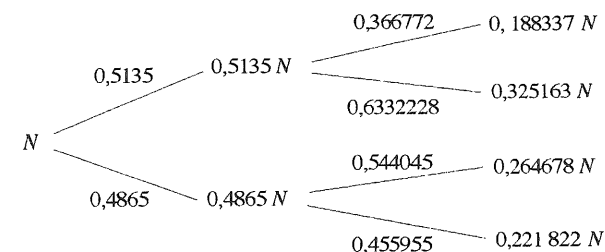


Fig. 3

Sur les branches, on a noté les probabilités respectives qui agissent comme opérateurs pour la détermination des nombres. Dans cette approche fréquentiste, la probabilité pour qu'un nouveau-né atteigne l'âge de 85 ans, vaut

$$\frac{0,366772 \times (0,5135 \times N) + 0,544045 \times (0,4865 \times N)}{\frac{0,188337N + 0,264678N}{N}} = 0,453015.$$

La réponse ne dépend donc pas du nombre N arbitraire choisi au départ. On voit que les probabilités suffisent.

La probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon et atteigne l'âge de 85 ans vaut 0,188337 et est obtenue par le produit $0,513500 \times 0,366772$. Il s'agit d'une probabilité composée. De

même, la probabilité qu'un nouveau-né soit une fille et atteigne l'âge de 85 ans vaut $0,264678 = 0,486500 \times 0,544045$. Enfin, la probabilité recherchée vaut $0,453015$ et est obtenue par la somme $0,188337 + 0,264678$. Il s'agit d'une probabilité totale. Ces calculs nous inspirent un diagramme plus simple encore (Figure 4), il s'agit d'un arbre de probabilités.

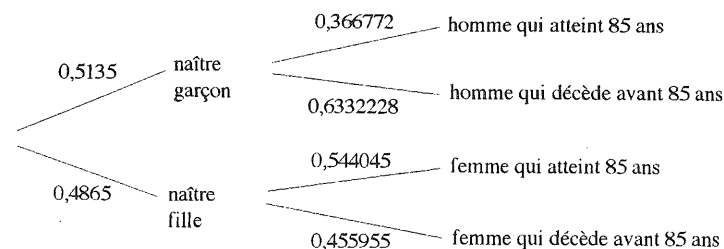


Fig. 4

On peut en déduire deux règles fondamentales du calcul des probabilités. L'une d'elles, appelée règle de multiplication s'énonce comme suit :

Lorsque l'on parcourt un chemin (branches consécutives) d'un arbre, la probabilité composée est obtenue en multipliant les probabilités écrites au-dessus de chacune des branches rencontrées.

L'autre est appelée règle d'addition et s'énonce comme suit :

Lorsque l'on doit parcourir plusieurs chemins d'un même arbre pour rencontrer tous les cas d'un événement, la probabilité totale de celui-ci est égale à la somme des probabilités correspondant à chacun des chemins.

Problème 2. Tirages

Avertissement : justifier toutes les étapes de votre résolution sans recourir aux règles du calcul des fractions.

2.1. Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires

- Si on tire une boule, quelle est la probabilité de tirer 1 blanche ?
- Si on tire deux boules successivement en remplaçant la première dans l'urne avant de tirer la seconde, quelle est la probabilité de tirer deux blanches ?
- Si on tire deux boules successivement sans replacer la première dans l'urne avant de tirer la seconde, quelle est la probabilité de tirer deux blanches ?
- Qu'y a-t-il de plus probable, dans chacun des deux modes de tirage : tirer deux boules de même couleur ou tirer deux boules de couleurs différentes ?

2.2. Deux sacs identiques contiennent respectivement 6 et 8 boules, le premier 2 blanches et 4 noires, le second 2 blanches et 6 noires. Si on tire une boule au hasard dans l'un des deux

sacs, quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche ? Est-ce la même probabilité que si toutes les boules étaient dans le même sac ?

Si toutes les boules sont identiques en dehors de la couleur, on peut considérer pour la question a) que la probabilité à priori de tirer une boule blanche, vaut $3/5$.

Pour la question b), faisons un arbre de probabilité (Figure 5a).

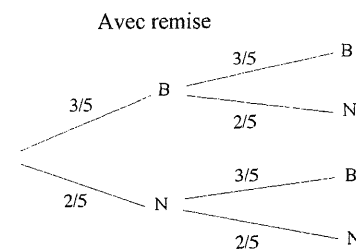


Fig. 5a

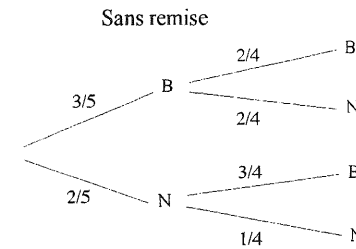


Fig. 5b

En appliquant les règles de multiplication sur cet arbre, on peut dire que la probabilité de tirer deux blanches vaut

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \quad (1)$$

Que vaut ce produit ? Pour le calculer on peut faire une autre expérience mentale, considérer un autre arbre qu'on peut appeler arbre des possibilités (Figure 6a).

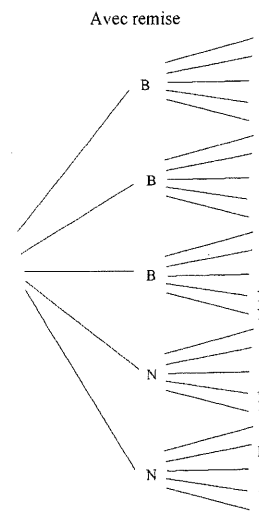


Fig. 6a

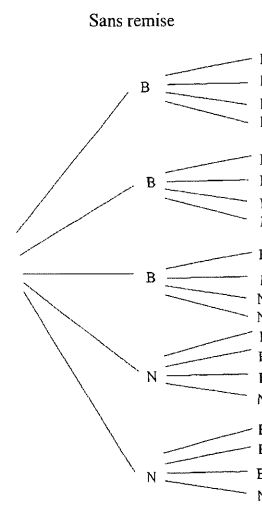


Fig. 6b

Sur ce nouvel arbre, on a une première génération de branches qui correspondent aux cinq choix possibles pour l'extraction de la première boule. Pour chacune de ces possibilités du premier tirage, il y a cinq possibilités au second tirage. En tout, cela fait donc 5×5 ou 25 cas possibles, tous équiprobables. Regardons parmi tous ces cas, ceux qui sont favorables à l'événement "tirer deux boules blanches". Au premier tirage, il faut retenir 3 cas sur les 5. Pour chacun de ces trois cas il y a trois cas possibles au second tirage. Cela porte le nombre de cas favorables à 3×3 ou 9 cas possibles. La probabilité a priori de "tirer deux blanches" est alors de

$$\frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{9}{25}. \quad (2)$$

En faisant le lien entre les expressions (1) et (2) qui expriment la même probabilité, on donne une (nouvelle) perception de la règle du produit de deux fractions :

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{9}{25}.$$

Le produit de deux fractions est la fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs des fractions et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs. De la même façon pour le tirage sans remise, à partir des arbres des Figures 5b et 6b, on peut écrire que

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{6}{20}.$$

Pour la question 2.2., on a représenté à la Figure 7a l'arbre des probabilités correspondant au problème énoncé.

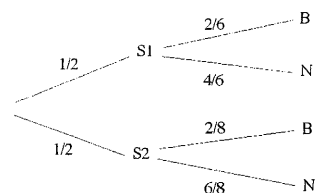


Fig. 7a

En appliquant cette fois les règles d'addition et de multiplication sur l'arbre, on calcule la probabilité de tirer une boule blanche :

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{8}.$$

Ce qui se simplifie en utilisant la règle du produit qu'on vient d'énoncer :

$$\frac{2}{12} + \frac{2}{16}. \quad (3)$$

Que vaut cette somme ? Imaginons une autre expérience, une expérience ad hoc, et son arbre de probabilités (Figure 7b). Dans le premier sac, il y a douze boules dont 4 blanches ;

dans le second, il y a douze boules dont 3 blanches. La probabilité de l'événement «tirer une blanche» est dans ce cas :

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{12} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24}.$$

Ici, il n'y a pas de problème pour effectuer la somme puis qu'on a des $1/24$. La probabilité vaut finalement

$$\frac{7}{24}. \quad (4)$$

Il reste à se convaincre que les deux expériences sont tout à fait similaires du point de vue des probabilités pour en conclure que les expressions (3) et (4) sont égales, ce qui donne :

$$\frac{2}{12} + \frac{2}{16} = \frac{7}{24}.$$

Vous n'êtes pas convaincus ? Nous non plus ! Cela veut dire qu'il n'y a pas d'idée de commune mesure dans ce contexte des probabilités et qu'il faut connaître la façon d'additionner deux fractions avec le recours au plus petit commun multiple des dénominateurs pour penser à cette deuxième expérience sensée justifier le procédé.

Problème 3. Croissance²

Un biologiste observe une croissance bactérienne. Il constate qu'à un moment qu'il choisit comme origine des temps, le nombre de bactéries est d'un million et que ce nombre double toutes les heures.

3.1. Combien y a-t-il de bactéries après une heure ? Deux heures ? Dix heures ?

Combien y a-t-il de bactéries après une demi-heure ? Après un quart d'heure ? Après vingt minutes ?

Justifiez votre solution.

Combien y a-t-il de bactéries après trois quarts d'heure ?

Combien y avait-il de bactéries une heure auparavant ? Trente minutes auparavant ?

Quel est le nombre de bactéries après un temps t quelconque ?

3.2. Etes-vous sûr d'avoir le bon modèle ? Y en a-t-il d'autres que celui (ceux) que vous avez trouvé(s) ?

Le problème a été posé en quatrième année secondaire pour aborder les exposants rationnels, les exposants entiers et leurs propriétés étant connus des élèves (ou supposés comme tel). Après dix minutes de réflexion personnelle et cinq minutes d'échange en groupe, on relève les premières solutions.

Une grande majorité des élèves propose des solutions correspondant au tableau 4. Au départ, il y a 1 million de bactéries, après 1 heure, il y en a 2 millions, après 2 heures il y en a 4 millions, et ainsi de suite. Pour $1/2$ heure, ils font la moyenne arithmétique des nombres à 0 et 1 heure. Fidèle à un modèle de proportionnalité, ils proposent 1,25 million pour un quart d'heure, 1,33 million pour 20 minutes. Il faut encore vérifier la cohérence du modèle. La population double-t-elle toutes les heures quel que soit le temps de départ choisi ? On essaie pour quelques valeurs, par exemple entre les temps $1/2$ et $3/2$, la population passe de 1,5 à 3. C'est bon. On met ces valeurs en graphique (Figure 8) pour observer que la fonction est affine par morceaux.

²Il s'agit d'un problème posé en quatrième année de l'enseignement secondaire.

Temps (en heures)	Nombre de bactéries (en millions)
0	1
1/4	1,25
1/3	1,33
1/2	1,5
1	2
3/2	3
2	4
10	1024

Tab. 4

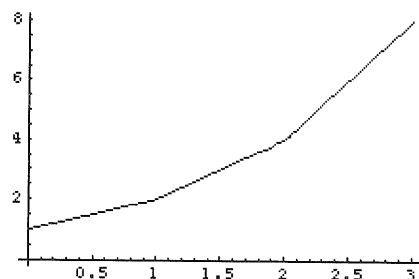


Fig. 8

Certains ont proposé les solutions du tableau 5. A la question, comment avez-vous procédé, ils répondent : "on a remarqué que pour 2 heures, le nombre de bactéries est de 2^2 , pour 10 heures, de 2^{10} ; alors on a fait pareil pour 1/2 heure, c'est-à-dire $2^{1/2}$ et la machine donne 1,41".³ On met ces valeurs en graphique (Figure 9), on compare et on discute les deux modèles proposés.

Temps (en heures)	Nombre de bactéries (en millions)
0	1
1/4	1,19
1/3	1,26
1/2	1,41
1	2
3/2	2,83
2	4
10	1024

Tab. 5

Pour le premier modèle, on constate que l'augmentation pour une période donnée, 1/2 heure par exemple, est la même entre 0 et 1 heure, la même entre 1 et 2 heures mais change d'heure en heure (tableau 9).

³Rappelons que ces élèves sont en quatrième année secondaire et n'ont jamais entendu parler d'exposants rationnels.

Temps (en heures)	Nombre de bactéries (en millions)
0	1
1/4	1,25
1/2	1,5
3/4	1,75
1	2
5/4	2,5
3/2	3
7/4	3,5
2	4

Tab. 9

Pour le second modèle, c'est moins clair... Jusqu'à ce qu'un élève⁴ fasse le rapprochement entre 1,41 et $\sqrt{2}$. D'où vient ce $\sqrt{2}$? Ah, mais

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

On constate dès lors, qu'en 1/2 heure, le nombre de bactéries est toujours multiplié par $\sqrt{2}$, quel que soit le moment choisi (tableau 10). Et en un quart d'heure ?

Certains proposent $\sqrt{\sqrt{2}}$ étant donné que 1/4 d'heure est la moitié de 1/2 heure. Cela fonctionne, $\sqrt{\sqrt{2}}$ vaut à peu près 1,19. On peut aussi dire que 1/4 d'heure, c'est le quart d'une heure et qu'il y a quatre quart d'heures dans l'heure. Il faut trouver une nombre a qui multiplié à lui-même "trois fois" donne 2. C'est-à-dire que

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = 2 \text{ ou } a^4 = 2.$$

Il s'agit de

$$a = \sqrt[4]{2}.$$

Ce qui vaut encore et à peu près 1,19.

Dans ce deuxième modèle, on multiplie toujours le nombre de bactéries par un même nombre quand "on ajoute un même temps" : par 2 pour 1 heure, par $\sqrt{2}$ pour 1/2 heure, par $\sqrt[4]{2}$ pour 1/4 d'heure.

Temps (en heures)	Nombre de bactéries (en millions)
0	1
1/4	1,19
1/2	1,41
3/4	1,68
1	2
5/4	2,38
3/2	2,83
7/4	3,36
2	4

Tab. 10

⁴Quelquefois avec un bon coup de pouce du prof. Il arrive cependant que des élèves optent pour un modèle multiplicatif et obtiennent directement cette valeur.

Si on introduit les écritures suivantes

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}, \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \text{ si } n \in \mathbb{N},$$

on peut constater, par exemple, que 1/4 d'heure étant la moitié d'1/2 heure ou le quart d'une heure, on a

$$(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}.$$

Et, tout naturellement,

$$(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}.$$

Voilà une propriété connue des exposants naturels $((a^n)^m = a^{nm})$ qui reste vraie avec ces "nouveaux" exposants.

Deux quarts d'heure, c'est une demi-heure, d'où

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Et, tout naturellement,

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}.$$

Voilà une autre propriété connue des exposants naturels $(a^n \cdot a^m = a^{n+m})$ qui reste vraie.

Pour trois quarts d'heure, en utilisant cette deuxième propriété, on a

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}.$$

2 heures et 1/4, c'est 2 heures puis 1/4 d'heure ou neuf quarts d'heure :

$$2^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{9}{4}} = 2^{2 + \frac{1}{4}}.$$

Pour 35 minutes, on peut considérer qu'il s'agit de sept douzièmes d'heure ou de 20 et 15 minutes. Dès lors

$$2^{\frac{7}{12}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}.$$

En généralisant, on peut finalement écrire qu'après n'importe quel temps t rationnel positif, le nombre de bactéries (en millions) est de

$$2^t.$$

Il reste à envisager les temps négatifs, à reprendre les exposants rationnels dans leur généralité et à faire le tour de leurs propriétés pour constater la conservation des propriétés vues pour les exposants entiers. Ce faisant, on utilise le calcul fractionnaire.

Conclusion

Dans l'annonce de l'atelier, nous avons indiqué "Mieux vaut tard que jamais" à propos d'une "occasion donnée aux élèves en fin de secondaire de (re)comprendre les opérations sur les fractions et de progresser dans l'idée qu'ils se font de nombre". Au moment de conclure, on pourrait ajouter "Mieux vaut tôt que tard".

Dans un livre consacré aux fractions⁵, Nicolas Rouche écrit : "On l'aura remarqué, nous avons peu parlé jusqu'ici du calcul sur les fractions, qui occupe pourtant une place importante dans l'enseignement et s'avère difficile à comprendre, sinon à

⁵N. ROUCHE, Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?, Paris, Ellipses, 1998.

apprendre. Ce n'est pas là l'effet du hasard. C'est que beaucoup de phénomènes relatifs aux fractions précèdent pratiquement et logiquement les questions de calcul. Nous commenterons ci-après l'intérêt des additions et multiplications de fractions à petits numérateur et dénominateur.

Par ailleurs le premier usage important des additions et produits de fractions se situe sans doute dans le calcul des probabilités. Ces opérations sont aussi indispensables dans le calcul des exposants rationnels."

Au terme de notre atelier et des ateliers 1 et 2 du groupe GEM, on pourrait ajouter que

- des contextes géométriques comme les puzzles et les rectangles semblables sont riches et nourrissent de sens et d'intuitions l'apprentissage des fractions et le calcul sur les fractions?

Mais l'utilité du calcul s'avère relativement restreinte dans ces mêmes contextes.

- des contextes comme les probabilités et les exposants fractionnaires sont riches au niveau de l'utilisation du calcul fractionnaire mais insuffisants pour permettre une bonne compréhension des règles de ce calcul.

Ce qui voudrait dire que même si "le premier usage important des additions et produits de fractions se situe sans doute dans le calcul des probabilités" et les exposants rationnels, il faut en commencer l'apprentissage bien avant à partir d'autres contextes.

4. Des décimaux aux nombres¹

Parmi les fractions les plus faciles à apprivoiser se trouvent les fractions décimales, commodément représentées en écriture décimale finie. Nous les appellerons aussi familièrement les décimaux finis. Ils sont incontestablement des nombres, et peut-être même pour beaucoup de personnes sont-ils les seuls nombres.

Mais une simple opération comme de diviser 1 par 3 engendre une écriture infinie. Et d'ailleurs l'imagination ne peut s'empêcher de rêver à ces cousins à la fois proches et excentriques des décimaux finis que sont les décimaux infinis.

Les décimaux finis peuvent être considérés comme des résultats de mesures, en particulier de mesures de longueurs, et c'est pourquoi ils s'alignent sagement sur la droite des nombres. Mais on sait qu'ils ne la remplissent pas. La droite en elle-même est régulière, continue, lisse, tout point y joue le même rôle que n'importe quel autre. Et pourtant, pour la décrire avec des nombres, avec "du discret", il va falloir mettre des chiffres à la queue leu leu, jusqu'à l'infini, mobiliser des monstres.

Dans ce quatrième atelier de la série "De la fraction-tarte au nombre", nous nous intéressons aux problèmes posés par cette correspondance entre les nombres et la droite. Nous traiterons successivement deux questions. La première nous amènera à regarder de très près autour du nombre 1. Dans la seconde, nous étudierons une fonction particulièrement intrigante.

1 Le mystérieux nombre 1

Nous présentons ci-dessous un dialogue entre un étudiant et son professeur. Chacun est libre d'en imaginer d'autres, illustrant des voies de pensée différentes. Celui-ci est inspiré de discussions réelles avec diverses personnes qui ne possédaient pas toutes les notions élémentaires d'analyse, telles que par exemple le concept de limite. Nous avons poussé plus loin qu'à l'habitude certains arguments qui, de prime abord, nous avaient surpris.

Que pensez-vous des arguments intervenant dans le dialogue suivant ? Imaginez-en la suite.

LE PROFESSEUR. Le nombre s'écrivant 0,999... , avec une infinité de 9, est égal à 1.

L'ÉTUDIANT. Non, ce n'est pas possible ! Ce sont deux nombres différents. Cela se voit : ils ont des écritures différentes.

PROF. S'ils sont différents, donnez-moi leur différence.

ÉT. La différence est le nombre qui s'écrit 0,000...1, avec une infinité de zéros avant le 1.

PROF. Mais s'il y a une infinité de zéros, vous n'arriverez jamais à la dernière décimale, à savoir 1.

ÉT. C'est comme pour votre 0,999... , vous n'arriverez jamais au bout de votre infinité de 9. Donc, le dernier 9 n'apparaissant pas, 0,999... ne sera "jamais" égal à 1.

PROF. Moui... Autre chose : si ces deux nombres sont différents, vous devez pouvoir trouver un nombre entre les deux, et même une infinité de nombres...

¹Ce texte a été rédigé par THÉRÈSE GILBERT et NICOLAS ROUCHE. Il est à peu de choses près extrait de la thèse de doctorat de T. GILBERT [5].

ÉT. Il suffit, par exemple, de calculer la moyenne des deux. Leur somme valant 1,999..., la moyenne sera 0,999...5, avec une infinité de 9 avant le 5. En effet $\frac{1,9}{2} = 0,95$, $\frac{1,99}{2} = 0,995$, etc.

Voici une suite possible pour ce dialogue.

PROF. Une infinité de 9 avant le 5, qu'est-ce que ça signifie ?

ÉT. C'est vous qui avez parlé d'une infinité de 9, en premier.

PROF. J'ai parlé d'une infinité de 9 et non d'une infinité de 9 suivie de quelque chose.

ÉT. Où est la différence ? Avec vous, c'est toujours la même chose : il y a ce que vous faites, qui est bon, que l'on peut faire, et ce que je fais, qui est mauvais, qu'on ne peut pas faire.

PROF. Intuitivement, vous devez bien admettre que si on écrit une infinité de 9 suivie d'un 5, le 5 va mettre du temps à apparaître. Mieux, il n'apparaîtra jamais. De toute façon, une infinité et encore un, ça ne fait jamais qu'une infinité.

ÉT. Connaissez-vous les ensembles dérivés de CANTOR ?

PROF. Plaît-il ?

Petit intermède. Les ensembles dérivés et les nombres transfinis. (Exposé de l'étudiant, très inspiré par² BOREL [1].)

La théorie exposée ci-après est due à Georg CANTOR, mathématicien (1845 - 1918) dont les travaux ont eu une influence considérable sur les fondements des mathématiques.

Considérons l'ensemble

$$E_1 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\} = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

représenté à la Figure 1 et qui, en base deux, s'écrit

$$\{0,1; 0,01; 0,001; \dots\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des nombres entre 0 et 1 s'écrivant avec un seul chiffre 1 derrière la virgule. On trouve des éléments de E_1 aussi près que l'on veut de 0. Le nombre 0 est donc un point d'accumulation de E_1 . L'ensemble des points d'accumulation de E est appelé le *dérivé* de E et noté E' .

Ici, $E'_1 = \{0\}$.

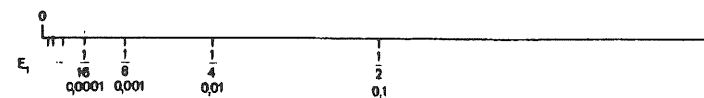


Fig. 1

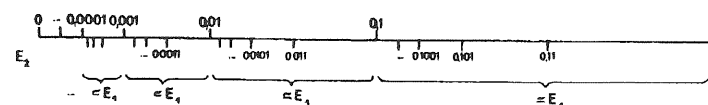


Fig. 2

²Voir aussi CANTOR [2].

Construisons maintenant l'ensemble E_2 (Figure 2) en insérant dans chaque intervalle $] \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}[$ ($n \in \mathbb{N}^*$) c'est-à-dire, en écriture binaire, $]0, 1^n; 0, 1^{n-1}[$, une copie réduite³ de E_1 :

$$E_2 = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Comme la base deux se prête bien à ce type de nombres, nous n'emploierons plus que celle-là dans la suite. Ainsi, E_2 est l'ensemble des nombres de $]0, 1[$ s'écrivant avec exactement deux chiffres 1 derrière la virgule. Cet ensemble est parfaitement déterminé : on peut dire, d'un nombre quelconque donné, s'il appartient ou non à l'ensemble.

Et on a $E_2' = E_1$ et $(E_2')' = \{0\}$. Ce dernier ensemble est appelé le *dérivé d'ordre 2* de E_2 et noté $E_2^{(2)}$.

Continuons en insérant dans chaque intervalle dont les extrémités sont deux nombres consécutifs de $E_2 \cup E_1 \cup \{1\}$, une copie réduite de E_1 pour former l'ensemble E_3 (Figure 3). Dans ce cas, nous aurons $E_3' = E_2$, $E_3^{(2)} = E_1$ et $E_3^{(3)} = \{0\}$. Et E_3 est l'ensemble des nombres de $]0, 1[$ s'écrivant avec exactement trois chiffres 1 derrière la virgule.

Ce procédé de construction peut être répété un nombre fini quelconque de fois. Ainsi, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on peut construire E_α ayant des dérivés successifs non vides $E_\alpha', E_\alpha^{(2)}, E_\alpha^{(3)}, \dots$ $E_\alpha^{(\alpha)}$ avec $E_\alpha^{(\alpha)} = \{0\}$. Et E_α est l'ensemble des nombres de $]0, 1[$ s'écrivant avec exactement α chiffres 1 après la virgule.

Repartons maintenant de l'ensemble E_1 et insérons dans chaque intervalle

$$]0, 1^n; 0, 1^{n-1}[\quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

une copie réduite de E_n pour former l'ensemble J (Figure 4). Nous obtenons l'ensemble des nombres de $]0, 1[$ s'écrivant avec n chiffres 1 après la virgule ($n \geq 2$), dont le premier est au $(n-1)^{\text{e}}$ rang. Cet ensemble admet des dérivés non vides d'ordre quelconque $\beta \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, on note $J^{(\omega)}$ l'ensemble des points communs à tous les $J^{(\beta)}$, $\beta \in \mathbb{N}^*$, que l'on note

$$J^{(\omega)} = \bigcap_{\beta \in \mathbb{N}^*} J^{(\beta)}.$$

Ici, $J^{(\omega)} = \{0\}$.

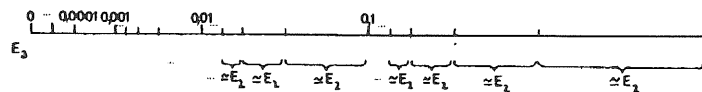


Fig.3

³Nous donnons "l'expression algébrique" de l'ensemble, car cela permet de s'assurer qu'il est bien défini. Néanmoins cette expression n'a aucune importance pour la compréhension de l'exposé. Le lecteur que ces calculs ennui peuvent donc les ignorer.

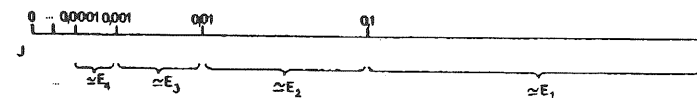


Fig.4

Intuitivement, $J^{(\omega)}$ correspond à ce que l'on obtient si on dérive une infinité de fois J . Mais ne nous arrêtons pas là.

Repartons à nouveau de l'ensemble E_1 et insérons dans chaque intervalle

$$]0, 1^n; 0, 1^{n-1}[$$

une copie réduite de J pour former l'ensemble J_1 (Figure 5). Nous obtenons l'ensemble des nombres de $]0, 1[$ s'écrivant avec n chiffres 1 après la virgule ($n \geq 3$), dont les deux premiers sont espacés de $(n-2)$ rangs. Nous avons $J_1^{(\omega)} = E$. Le dérivé de $J_1^{(\omega)}$, noté naturellement $J_1^{(\omega+1)}$, est $\{0\}$.

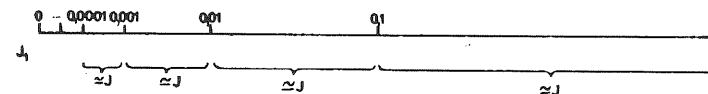


Fig.5

On pourrait itérer le processus pour construire des ensembles ayant des dérivés d'ordre $\omega + 2, \omega + 3, \dots$ ou même 2ω et plus. Ces "nombres" sont dits *transfinis*.

Mais ce qui va surtout nous servir dans notre discussion est qu'intuitivement, nous avons construit un ensemble J_1 que nous pouvons dériver une infinité de fois, puis encore une fois. Et cela ne revient pas au même que si nous ne l'avions dérivé qu'une infinité de fois ! La théorie de CANTOR donne ainsi un sens à un "infini plus un" différent de l'infini. (Fin de l'intermède)

ÉT. Vous voyez bien qu'en mathématiques on peut faire certaines choses une infinité de fois et encore une fois. Moi, je mets une infinité de 9 derrière la virgule, puis un 5 !

PROF. Ici, c'est différent, il s'agit d'écrire un nombre, quelque chose qui représente la mesure d'un segment. Les écritures $0,000 \dots 1$ et $0,999 \dots 5$ ne représentent pas des nombres, puisqu'ils ne représentent aucune mesure.

ÉT. $0,999 \dots$ ne correspond pas non plus à une mesure ; pourtant vous l'acceptez comme nombre.

Là, on peut imaginer que le professeur parle de limite si l'étudiant est à même de comprendre. En effet, $0,999 \dots$ est une manière d'écrire la limite de la série géométrique

$$0,9 \quad 0,99 \quad 0,999 \quad \dots,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{i+1},$$

qui vaut $\frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = 1$. Mais il peut aussi tenter de convaincre l'étudiant en utilisant des arguments de type calculatoire :

PROF. On peut engendrer 0,333... en appliquant l'algorithme de division habituel à "1 divisé par 3". Donc $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, puis en multipliant par 3 le résultat, on obtient $1 = 0,999\dots$; l'écriture 0,999... est donc le résultat d'opérations sur des entiers. Et on peut aussi l'utiliser dans des opérations. Par exemple, on peut écrire : si

$$x = 0,999\dots,$$

alors

$$10x = 9,999\dots,$$

donc

$$9x = 10x - x = 9,000\dots = 9,$$

et

$$x = 1.$$

On peut définir les opérations sur ces écritures illimitées (ayant une seule infinité de décimales) pour qu'elles vérifient les propriétés habituelles, qui permettent notamment de justifier le raisonnement ci-dessus. Pouvez-vous faire de même avec vos écritures ? Par exemple, comment faites-vous $0,999\dots + 0,000\dots 1$?

ÉT. C'est facile, cela donne 0,999... 6.

PROF. Mais alors puisque

$$0,999\dots < 0,999\dots 5,$$

vous aurez

$$0,999\dots + 0,000\dots 1 < 0,999\dots 5 + 0,000\dots 1.$$

Ce qui donne

$$1 < 0,999\dots 6.$$

Cela vous convient-il ?

L'égalité de 0,999... et 1 est choquante. En l'écrivant, on a l'impression de négliger quelque chose, à savoir leur différence, que l'étudiant exprime par 0,000... 1. C'est peut-être pareil lorsqu'on écrit $\frac{1}{3} = 0,333\dots$. En effet, la division de 1 par 3 ne finit jamais. À chaque étape de celle-ci, il reste un 1 à diviser. Cela peut être rapproché du problème de la limite de la suite

$$0,95 \quad 0,995 \quad 0,9995 \quad \dots,$$

que l'étudiant décide d'écrire 0,999... 5. Toutes ces difficultés illustrent la tendance à appliquer un certain principe de continuité : "ce qui est vrai de tous les termes d'une suite est vrai de sa limite", principe dont l'origine est attribuée à Leibniz⁴. Ce principe paraît naturel, mais possède de nombreux contre-exemples, dont ceux exprimés ci-dessus ne sont pas les plus connus.

Remarquons que, tant dans le dialogue de départ que dans sa suite, c'est l'étudiant qui tient le beau rôle : il arrive à réfuter les arguments du professeur sur son propre terrain. Ainsi, si le professeur propose d'accepter l'infinité (actuelle) des 9 dans l'écriture 0,999..., l'étudiant

⁴Cf. LAKATOS [7]

fabrique une différence avec une infinité (actuelle) de 0 suivie d'un 1. Si par contre le professeur en revient à l'infini potentiel en soutenant que l'on n'arrivera jamais au bout de la suite de 0 dans 0,000... 1, l'étudiant embraye et applique cet argument à 0,999...

En outre, nous avons attribué l'exposé sur les nombres transfinis à l'étudiant parce que le dialogue s'y prêtait bien. Il serait pourtant étonnant qu'un étudiant dont on met en doute les connaissances sur les limites connaisse cette théorie de CANTOR. Peu importe ! Disons, par exemple, que l'étudiant a un ami plus âgé qui lui a parlé de cela... De toute façon, l'exposé est là pour rappeler que l'argument cité auparavant par le professeur, à savoir "on ne peut pas faire suivre de quelque chose une infinité de chiffres", et qui apparaît aux yeux de l'étudiant comme un argument d'autorité, n'est effectivement pas défendable jusqu'au bout par un mathématicien. Par contre, comme le professeur le propose ensuite, on peut réfuter les écritures du type 0,999... 5, ou éventuellement les identifier à 1, en se référant à ce que doit être ou représenter un nombre (un point sur une droite, une mesure...), à ce qu'il doit pouvoir faire (se prêter au calcul avec ses propriétés habituelles).

2 Saisir le continu avec des décimaux

Considérons l'ensemble des nombres positifs ayant une écriture décimale limitée ou illimitée, à l'exclusion de ceux "se terminant" par une suite infinie de 9. Sur cet ensemble, définissons la fonction⁵ suivante : à tout nombre a , faisons correspondre le nombre $f(a)$ en intercalant un "0" devant chacun des chiffres de a apparaissant après la virgule. Par exemple, nous faisons correspondre au nombre

$$13,141592\dots$$

le nombre

$$13,010401050902\dots$$

Étudiez la continuité, la dérivabilité et la croissance de la fonction f . Rédigez précisément les preuves de vos affirmations.

La fonction f est strictement croissante. Cette propriété s'établit aisément.

Pour étudier la continuité et la dérivabilité, une première idée serait de représenter cette fonction par un graphe pour voir si "on peut le tracer sans lever le crayon" et "s'il n'y a pas de point anguleux". Hélas, toute tentative dans ce sens nous convainc que la fonction est difficile à représenter et qu'en tout cas les notions intuitives de continuité et de dérivabilité liées au graphe ne suffiront pas à résoudre le problème. Il nous faut au contraire nous baser sur des concepts précis. Nous nous baserons sur la caractérisation suivante de la continuité.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue en un point a de son domaine si, pour toute suite (u_i) dans $\text{dom } f$ qui converge vers a , la suite $(f(u_i))$ converge vers $f(a)$. Elle est continue à droite (respectivement à gauche) en a si, pour toute suite (u_i) dans $\text{dom } f$ dont tous les termes sont supérieurs (resp. inférieurs) ou égaux à a et qui converge vers a , la suite $(f(u_i))$ converge vers $f(a)$.

Notons $\mathbb{D}^+$ l'ensemble des décimaux limités positifs.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{D}^+$, discontinue à gauche et continue à droite sur $\mathbb{D}^+$.

En effet, si une suite (u_i) tend vers un nombre illimité b , les n premières décimales de u_i "deviennent égales" aux n premières décimales de b , et ce pour n'importe quel n . Et donc les

⁵Cette fonction a été étudiée par E. BOREL dans [1].

$2n$ premières décimales de $f(u_i)$ deviennent égales aux $2n$ premières décimales de $f(b)$. Ce qui entraîne que $(f(u_i))$ converge vers $f(b)$.

Si b est un nombre limité, la situation est quelque peu différente. Examinons par exemple la continuité au point 1. Si (u_i) tend vers 1 par valeurs supérieures, les premières décimales de u_i deviennent égales à celles de 1,000... et, comme pour les illimités, $(f(u_i))$ converge vers $f(1)$. La fonction f est donc continue à droite en ce point, ainsi qu'en tout nombre limité. Par contre, si (u_i) tend vers 1 par valeurs inférieures, les premières décimales de u_i deviendront égales à celles de 0,999... Le schéma suivant montre l'écart, noté ϵ , entre $f(1)$ et la limite de la "suite-image" $(f(u_i))$:

$$\left. \begin{array}{l} 0,999 \dots \mapsto 0,090909 \dots \\ 1 \mapsto 1 \end{array} \right| \epsilon = 0,90909090 \dots = \frac{10}{11}$$

Nous dirons que la *discontinuité* à gauche de 1, c'est-à-dire

$$f(1) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x),$$

est de $\frac{10}{11}$.

De même, comme le montre le schéma suivant, la discontinuité à gauche de 0,123 est de $\frac{10}{11} \cdot 10^{-6}$.

$$\left. \begin{array}{l} 0,122999 \dots \mapsto 0,010202090909 \dots \\ 0,123 \mapsto 0,010203 \end{array} \right| \epsilon > 0,00000090909 \dots = \frac{10}{11} \cdot 10^{-6}$$

Remarquons que l'ampleur de la discontinuité à gauche en a est fonction du rang de sa dernière décimale. Plus précisément, un nombre limité de n décimales après la virgule a une discontinuité à gauche de $\frac{10}{11} \cdot 10^{-2n}$.

En ce qui concerne la dérivabilité de la fonction f , on pourrait croire à première vue que la fonction f n'est dérivable en aucun point de son domaine, l'ensemble de ses points de discontinuité y étant *dense*.

À mieux y regarder et après avoir calculé quelques quotients différentiels, l'impression s'inverse : les accroissements de la fonction diminuent beaucoup plus vite que ceux de la variable. La fonction semble être dérivable sur tout son domaine de continuité et sa dérivée semble y être nulle, ce qui par ailleurs est choquant pour une fonction strictement croissante ! Le tableau suivant donne les quotients différentiels $\frac{f(u_i) - f(b)}{u_i - b}$ liés à des augmentations $\delta_i = u_i - b$ de valeurs $\pm 0,1$, $\pm 0,01$ et $\pm 10^{-n}$ d'un réel illimité b dont les décimales sont toutes différentes de 9 et de 0.

$\delta_i = u_i - b \mapsto \epsilon_i = f(u_i) - f(b)$	quotient différentiel = $\frac{\epsilon_i}{\delta_i}$
0,1 $\mapsto$ 0,01	$\frac{1}{10}$
-0,1 $\mapsto$ -0,01	$\frac{1}{10}$
0,01 $\mapsto$ 0,0001	$\frac{1}{100}$
-0,01 $\mapsto$ -0,0001	$\frac{1}{100}$
$10^{-n} \mapsto 10^{-2n}$	10^{-n}
$-10^{-n} \mapsto -10^{-2n}$	10^{-n}

La suite de quotients différentiels correspondant à des accroissements de $\pm 10^{-n}$ tend vers 0. Et pour une augmentation ou une diminution δ comprise entre $10^{-(n+1)}$ et 10^{-n} , le quotient différentiel est inférieur à

$$\frac{10^{-2n}}{10^{-(n+1)}} = 10^{n-1},$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En ces réels s'écrivant sans 9 et sans 0 derrière la virgule, la fonction f est donc dérivable, de dérivée nulle.

Et pour les autres ? Comme un réel illimité ne peut pas se terminer par une suite de 9 (resp. de 0), on sait que, quel que soit le rang N que l'on se fixe, il existe un rang n plus élevé dont la décimale correspondante est différente de 9 (resp. de 0).

Considérons alors une valeur δ_i positive (resp. négative) comprise entre $10^{-n_{i+1}}$ et 10^{-n_i} , où n_i et n_{i+1} représentent respectivement les rangs des i^{e} et $(i+1)^{\text{e}}$ décimales différentes de 9 (resp. de 0) d'un réel illimité b . On aura (pour les δ_i positifs)

$$10^{-n_{i+1}} < \delta_i < 10^{-n_i} \text{ et } 10^{-2n_{i+1}} < \epsilon_i < 10^{-2n_i},$$

donc

$$10^{n_i - 2n_{i+1}} = \frac{10^{-2n_{i+1}}}{10^{-n_i}} < \frac{\epsilon_i}{\delta_i} < \frac{10^{-2n_i}}{10^{-n_{i+1}}} = 10^{n_{i+1} - 2n_i}.$$

Si la suite (u_i) est telle que $n_{i+1} - 2n_i$ tend vers $-\infty$, alors le quotient différentiel $\frac{\epsilon_i}{\delta_i}$ tend vers 0. Mais il arrive que le réel b considéré soit tel que $n_{i+1} - 2n_i$ ne tende pas vers $-\infty$. C'est le cas, par exemple, pour le nombre

$$c = 0,09099909999999099 \dots 909 \dots 909 \dots$$

où le nombre de 9 successifs dans un bloc est égal au nombre de chiffres séparant cette série de la virgule. Dans ce cas, le quotient différentiel correspondant à un accroissement du nombre c de $\delta = 10^{-n}$ est égal à 10^{-n} si n est égal au rang d'un 0 et supérieur à 0,9 si n correspond à un rang précédent un 0. On peut donc construire une suite (u_i) correspondant à une suite de quotients différentiels tendant vers 0, et une autre correspondant à une suite de quotients différentiels tous supérieurs à 0,9. La fonction f n'est donc pas dérivable à droite au point c .

On peut raisonner de la même façon pour la dérivabilité à gauche et trouver des nombres comportant un nombre infini de blocs suffisamment grands de 0 successifs et pour lesquels la fonction f n'est pas dérivable à gauche.

Par ailleurs, on peut aussi déduire que si la dérivée existe, elle est égale à 0, du fait que, pour n'importe quel illimité, le quotient différentiel est "régulièrement" égal à 10^{-n} , avec des n aussi grands que l'on veut. Cela peut sembler étonnant vu que la fonction est strictement croissante, mais rappelons-nous qu'elle est discontinue en tout point limité.

Comment peut-on interpréter les irrégularités de la fonction quant à la dérivabilité ? En quel sens les points de non dérivabilité sont-ils mal situés dans la myriade des décimaux limités ?

Considérons un nombre illimité où la fonction est dérivable. Pour fixer les idées, prenons le nombre

$$d = 0,123123123 \dots$$

Étudions le comportement du quotient différentiel $\frac{f(x_i)-f(d)}{x_i-d}$ lorsque x_i parcourt les éléments de la suite des décimaux tronqués par défaut

0 0,1 0,12 0,123 0,1231 ...

Cette suite est constituée de nombres où la fonction est discontinue et elle s'approche indéfiniment de d . La suite des distances de ses éléments à d est

0,123123... 0,023123... 0,003123... 0,000123... 0,000023... ...

Mais si ces distances sont de l'ordre de 10^{-n} où n est le nombre de décimales après la virgule des décimaux tronqués, on sait que la discontinuité en chacun de ces points⁶ est égale à $\frac{10}{11} \cdot 10^{-2n}$. Aux points x_i de cette suite, le quotient différentiel $\frac{f(x_i)-f(d)}{x_i-d}$ fait des "sauts". Sa variation n'est pas continue. Mais on voit que la discontinuité en un point x_i décroît beaucoup plus vite que sa distance au nombre d . En fait, le rapport de la discontinuité en un point à sa distance au nombre d est de l'ordre de 10^{-n} et tend vers 0. Les "sauts" du quotient différentiel sont donc de plus en plus petits, proportionnellement à celui-ci. On peut raisonner de même pour la suite des valeurs arrondies par excès de d .

Considérons maintenant la suite des valeurs arrondies par excès pour le nombre $c = 0,09099909999999099...909...909...$, c'est-à-dire

1 0,1 0,1 0,091 0,091 0,091 0,091 0,0909991 0,0909991
0,0909991 0,0909991 0,0909991 0,0909991 0,0909991 0,0909991
0,090999099999991 0,090999099999991...

Pour alléger l'écriture, considérons la sous-suite obtenue en éliminant les répétitions de termes. Nous obtenons la suite

1 0,1 0,091 0,0909991 0,090999099999991 ...

La suite des distances de ces éléments à c est

0,9090009000000090... 0,0090009000000090...
0,0000009000000090... 0,0000000000000090...

Cette fois, si n est le nombre de décimales après la virgule d'une des valeurs arrondies, la distance de celle-ci au nombre c est inférieure à $\frac{10}{11} \cdot 10^{-2n}$. Le rapport de la discontinuité en un élément de la suite à sa distance au nombre c est donc toujours supérieur à 1 ! La variation du quotient différentiel $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ lorsque x tend vers c continue donc à faire des sauts importants lorsque x passe par un élément de cette suite.

Nous avons raisonné jusqu'ici sans évoquer l'allure du graphe de f . Pourtant un tel graphe pourrait nous aider à comprendre les caractéristiques de cette fonction, au moins en ce qui concerne sa continuité à droite, sa discontinuité à gauche aux décimaux limités et sa dérivée nulle. Essayons de le construire en transformant légèrement la fonction : elle intercalera des 0 entre chaque chiffre après la virgule des nombres exprimés cette fois en base deux. Cela ne change pas beaucoup la nature de la fonction, sa continuité et sa dérivabilité, mais nous permettra de mieux distinguer les discontinuités sur le graphe.

⁶En termes d'ordre de grandeur, ces calculs restent corrects pour d'autres suites de limités tendant vers d .

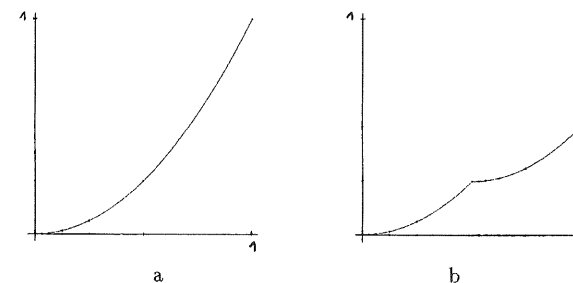


Fig. 6

Intéressons-nous tout d'abord aux puissances de 0,1. Le schéma suivant donne leurs images.

$$\begin{aligned} 0,1 &\mapsto 0,01 = 0,1^2 \\ 0,01 &\mapsto 0,0001 = 0,01^2 \\ 10^{-n} &\mapsto 10^{-2n} \end{aligned}$$

Reportons déjà les points correspondant sur un graphe (Figure 6a) ; ils sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2$.

Pour compléter le graphe, calculons les images des points 0,11, 0,101, 0,1001, ..., sommes de 0,1 et d'une autre puissance de 0,1.

$$\begin{aligned} 0,11 &= 0,1 + 0,01 \mapsto 0,0101 = 0,01 + 0,01^2 \\ 0,101 &= 0,1 + 0,001 \mapsto 0,010001 = 0,01 + 0,001^2 \\ 0,1 + 10^{-n} &\mapsto 0,01 + 10^{-2n} \end{aligned}$$

Pour les placer sur le graphe, on peut translater un morceau de parabole (Figure 6b) en la faisant démarrer au point $(0,1; 0,01)$. Les nouveaux points y sont inclus.

Continuons pour les sommes de 0,01 ou de 0,11 et d'une autre puissance de 0,1 (d'exposant supérieur à 3). À nouveau, nous pouvons dessiner (Figure 7a) un morceau de parabole (qui se fait de plus en plus court, de plus en plus "horizontal") à partir des points $(0,01; 0,0001)$ et $(0,11; 0,0101)$.

Ainsi, à la droite de chaque nombre limité, nous faisons démarrer, à une certaine étape du tracé, un bout de parabole dont nous remplaçons encore une partie, à une étape ultérieure, par un autre bout de parabole plus court encore (Figure 7b). Et ainsi de suite.

Cette construction suffit à nous convaincre qu'en tout décimal limité, la fonction est discontinue à gauche, dérivable à droite et de dérivée nulle.

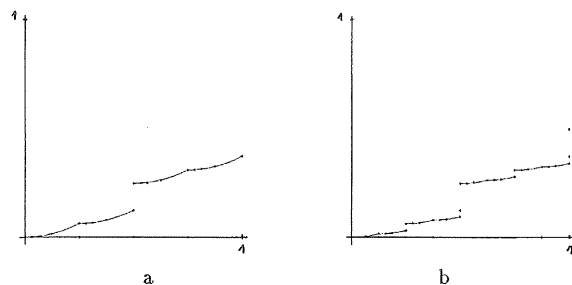


Fig.7

3 Conclusions

Lors du dialogue sur le mystérieux nombre 1 nous avons cité les principales intuitions complémentaires sur les réels et des diverses facettes de ceux-ci :

- les réels sont une écriture, une suite de chiffres éventuellement infinie avec une virgule ;
- les réels servent à mesurer des longueurs, ils peuvent être représentés par des points sur une droite ;
- les réels servent à calculer ; et il faut que les propriétés des opérations et les résultats des calculs soient en accord avec l'idée de grandeurs (mesurées) et d'opérations sur les grandeurs.

Chacune de ces intuitions peut servir de base à une définition des réels : H. G. GARNIR [4] et J. LELONG-FERRAND [8] définissent⁷ les réels à partir des écritures, D. HILBERT [6] les a définis comme des segments, en se basant sur sa géométrie, et la méthode axiomatique (dont la première version est également due à HILBERT) présente les réels comme des objets de calcul – ce terme recouvrant aussi le calcul des limites.

Remarquons par ailleurs que nous aurions pu écrire “le mystérieux” nombre 0,43, ou prendre n'importe quel décimal d'écriture finie. Ce sont (déjà) tous les décimaux limités qui nous causent problème.

Ensuite l'étude de la fonction agissant sur les écritures a montré à quel point l'intuition qui associe les réels aux points d'une droite est différente de celle représentant les réels par une suite de chiffres. Grâce à cette étude, nous nous sommes rendus compte que la “continuité” de l'ensemble $\mathbb{R}$, le fait qu'on peut le parcourir entièrement sans devoir faire de “bond”, est perçue très différemment selon qu'on le représente par une droite ou qu'on le considère comme l'ensemble de toutes les écritures possibles.

Sur la droite tous les points sont pareils. On les parcourt tous mentalement sans difficulté en laissant glisser son regard. Aucun point ne demande qu'on s'y arrête plus qu'un autre.

Le parcours de l'ensemble des écritures semble plus chaotique, et le fait que celles-ci constituent une façon de faire du continu à l'aide du discret (les chiffres) est choquant. On peut

⁷Voir aussi J. DHOMBRES [3].

imaginer un compteur formé d'une infinité de roulettes portant les chiffres de 0 à 9. Pour parcourir l'ensemble $\mathbb{R}$, le compteur doit de temps en temps – et même très souvent – faire des “bonds”. Plus une roulette est située à droite, plus elle tourne vite. Mais aucune n'a un mouvement continu comparable à celui de la dernière roulette d'un compteur fini. En fait, chacune de ces roulettes n'avance d'un cran que lorsque que le compteur passe à une écriture limitée (ou suivie d'une suite infinie de 0). Ainsi les limites ont un caractère particulier dans le parcours continu de l'ensemble. Mais que se passe-t-il juste avant ou juste après ? On ne peut l'imaginer. Mais cela nous ramène au parcours continu de la droite : que peut-on imaginer juste avant ou juste après un point ?

Les décimaux constituent une façon de faire du continu avec du discret, ce qui est également choquant.

Avec cette fonction agissant sur les écritures, on navigue dans un univers à structure hyper-microscopique sur lequel on essaie d'embrancher une loupe qui dégage autour de chaque nombre un voisinage où on verrait clair, où on n'aurait plus qu'un nombre fini de choses à considérer. Mais c'est impossible. L'intuition touche une limite de sa puissance : elle ne peut décoller complètement du “normal quotidien”.

References

- [1] E. BOREL, *Éléments de la théorie des ensembles*, Albin Michel, Paris, 1949.
- [2] G. CANTOR, Sur les ensembles linéaires infinis de points (Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten), in *Mathematische Annalen* 17, 1880, pp. 355-358. Trad. franç. in *Acta Mathematica* 2, 1883, pp.357-360.
- [3] J. DHOMBRES, à l'article Réels nombres, in *Encyclopædia Universalis, Dictionnaire des mathématiques, fondements, probabilités, applications*, Albin Michel, Paris, 1998.
- [4] H. C. GARNIR, *Fonctions de variables réelles*, Tome I, Gauthier-Villars, Louvain, 1963.
- [5] T. GILBERT, *Évolution des concepts d'infini et de continu de la pensée commune aux mathématiques*, Thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve, 1999.
- [6] D. HILBERT, Les principes fondamentaux de la géométrie, trad. L. LAUGEL, in *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, III.s.-17 (1900), pp.103-209.
- [7] I. LAKATOS, *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann, Paris, 1984.
- [8] J. LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, PUF, Paris, 1985.

5. Conclusions

Sur la progression de la fraction-tarte au nombre.

Quels sont les principales étapes à franchir lors de l'acquisition progressive du concept de nombre, et plus particulièrement de celui de fraction (de rationnel) en tant que nombre ?

Extraction du concept de fraction de plusieurs contextes. Si les premiers apprentissages sur les fractions passent forcément par une étape où elles apparaissent dans un contexte de partage (de tarte, par exemple), on sait que les fractions ont de multiples facettes : opérateurs, rapports, mesures, proportions, ... Ces quatre exposés proposent divers contextes où les fractions se présentent sous des visages différents. Mais au fil des exposés, le rôle du contexte évolue. Cette évolution est commentée dans la deuxième partie de ces conclusions.

Mesure avec des fractions. Dès la première situation (puzzle), les fractions servent à mesurer. Il ne s'agit pas ici de couper une unité pour obtenir par exemple des quarts, mais bien d'associer une fraction à chacun des morceaux déjà découpés. On retrouve aussi cet aspect dans le problème de croissance de population (voir : Modèles pour calculer avec des fractions), où les fractions servent à mesurer une durée.

Positionnement sur une droite et écriture décimale. Une des images les plus fécondes de l'ensemble des nombres est celle d'une droite. Le fait de positionner les fractions sur une droite est donc important pour que l'idée de fraction-morceau évolue vers celle de fraction-nombre. Cette représentation est utilisée dans les trois derniers exposés. Elle se combine avec la conversion des fractions en écriture décimale, écriture utilisée lors de l'activité sur les engrenages (voir : Rapports et proportions) et travaillée dans les deux activités du dernier exposé (Des décimaux aux nombres).

Calcul avec des fractions. Le fait de pouvoir calculer avec des fractions est un élément fondamental pour progresser vers le concept de nombre. De même que les naturels précédés d'un signe négatif, qui servent à exprimer une altitude sous la mer ou une température en dessous de zéro, n'ont pas grand chose à voir avec les nombres tant qu'on n'a pas introduit d'opération sur eux, les fractions ne peuvent acquérir le statut de nombre tant qu'elles ne sont vues que comme une "façon de parler". Ce calcul est développé dans chacun des exposés et y prend son sens dans divers contextes.

Volonté de compléter le système des nombres. Dans le troisième exposé (Modèles pour calculer avec des fractions), le problème de croissance pousse à élargir l'ensemble des nombres à celui des rationnels, pour mesurer la durée, puis – mais nous n'avons pas approfondi la question ici – à celui des réels.

La question "0,999... est-il égal à 1" (voir : Des décimaux aux nombres) propose un essai de construction de nouveaux nombres : ceux qui correspondraient à une écriture "plus qu'infinie", comme par exemple 0,000...1 ou 0,999...5. Essai qui s'avère infructueux, du moins si l'on veut étendre à ces nombres les règles de calcul et les propriétés des opérations qui s'appliquent aux décimaux limités : par exemple, $0,999...5 + 0,000...1 = 0,999...6$ et la compatibilité de l'addition avec l'ordre.

Distanciation par rapport au modèle des naturels et transfert partiel de ce modèle. Une certaine rupture avec le modèle des naturels est déjà annoncée dès l'activité sur les puzzles : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$: avec les fractions, ça ne marche pas comme avec les nombres (naturels) ! Le troisième exposé montre, lui, comment on peut transférer les règles sur les puissances à des exposants rationnels, en concordance avec l'interprétation que l'on a donnée de ces puissances

dans le contexte du problème.

Emergence d'une structure. Progresser vers le concept de nombre, c'est aussi – et c'est peut-être une des dernières étapes – arriver à extraire des différentes interprétations des nombres une structure commune : les opérations nécessaires à leur utilisation dans une théorie, et leur propriétés. C'est un travail qui reste à faire après la mise en évidence des images mentales évoquées dans le quatrième exposé.

Sur l'évolution du rôle du contexte

Dans l'activité sur les puzzles de fractions (voir : Savants partages), les enfants restent presque d'un bout à l'autre de l'activité dans du concret. Celui-ci est plus qu'un support aux fractions et aux calculs. Pour les enfants qui découvrent les fractions par cette activité, elles n'ont un sens que dans ce contexte. Elles sont directement associées aux morceaux de puzzle. L'écriture $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ne représente pas encore une somme de nombres, mais bien un assemblage de morceaux. La remarque d'un enfant à ce propos est significative : "avec des fractions, il ne faut pas *calculer*, il faut *regarder*". Schématisons le rôle du contexte dans cette activité de la façon suivante :

CONTEXTE
(Questions, réponses, justifications)

Le problème des rectangles semblables (voir : Rapports et proportions) constitue un contexte concret pour les fractions. Cependant la plupart des questions posées porte sur des nombres, plus précisément sur des tableaux de nombres. Les élèves recherchent (par induction) une relation entre les lignes de nombres. Les justifications de ces lois se font d'une part en utilisant le langage algébrique, d'autre part par retour au contexte. Celui-ci fournit donc un moyen d'interpréter les expressions algébriques et de retrouver le sens (ou un des sens) des fractions. Voici le schéma correspondant :

CONTEXTE	→	NOMBRES	→	CONTEXTE
		(questions, recherche de lois)		(interprétation, justification des lois)

Les problèmes d'engrenages (voir : Rapports et proportions) sont concrets. Ils se situent dans le contexte des vélos et des horloges. Cependant, leur résolution se fait en manipulant des nombres (comparaisons et produits de fractions, conversion en écriture décimale). Mais les règles qui régissent ces opérations (comparaison et produit) peuvent éventuellement être recomprises grâce au contexte. Ceci peut se schématiser comme suit :

CONTEXTE	→	NOMBRES	(→	CONTEXTE)
(problèmes)		(résolution)		(réponses, possibilité de recomprendre les règles sur les fractions)

En outre, on évoque un autre modèle (représentation des fractions sur la droite) pour visualiser la comparaison de rapports.

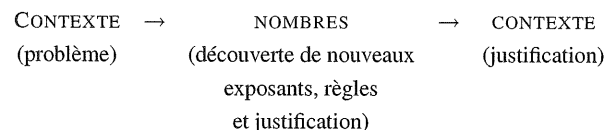
Le rôle du contexte dans les situations de probabilités (voir : Modèles pour calculer avec des fractions) est à peu près similaire : la situation sert de base et d'arrivée, mais la résolution se fait au niveau des nombres. Le contexte permet-il ici de recomprendre les règles de calcul sur les fractions ? Le professeur peut-il évoquer la situation de départ pour redonner un sens à

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} ?$$

Il semble que oui : il "suffit" de faire le lien entre la réponse donnée par "l'arbre des probabilités" et celle donnée par "l'arbre des possibilités".

Et pour l'addition de fractions ? La résolution du deuxième problème de tirage montre le sens de la recherche d'un dénominateur commun dans le contexte des probabilités. Mais peut-on imaginer qu'un élève de 16 ans qui n'a pas compris la règle d'addition des fractions songe à imaginer cette expérience ? Celle-ci ne permet sans doute que de donner un sens supplémentaire à la règle d'addition des fractions pour ceux qui l'avaient déjà acquise. Quand aux autres, mieux vaut peut-être leur reparler de tarte... Ainsi, et cela nous paraît curieux, dans un contexte où les fractions sont absolument inévitables, à savoir les probabilités, là où leur utilisation prend tout son sens, il semblerait assez difficile d'introduire (de faire découvrir pour la première fois) les opérations sur les fractions. Pour cela, les contextes où leur utilisation reste plus gratuite (comme les puzzles de fractions) semblent mieux convenir. N'empêche, il n'est jamais superflu de proposer des situations où les fractions peuvent acquérir un sens "supplémentaire".

Dans le problème de croissance (voir : Modèles pour calculer avec des fractions), le rôle du contexte se schématise à peu près de la même façon :



Cependant, ici les rationnels apparaissent comme une extension des naturels. De plus, la justification des règles de calcul sur les expressions avec exposants se fait d'une part de façon concrète, à l'aide du contexte, d'autre part de façon abstraite, pour conserver une structure, celle de la fonction exponentielle et de ses propriétés, déjà connues sur les naturels. D'où le nouveau schéma :

$$\text{NOMBRES} \rightarrow \text{STRUCTURE}$$

Les deux problèmes proposés dans le quatrième exposé (Des décimaux aux nombres) se placent dans un contexte... mathématique uniquement (et pourquoi pas ?). La première situation concerne des écritures. Devrions-nous dire qu'elle concerne des nombres ? Toute la question est là. Les nombres sont-ils des écritures ? Les écritures sont-elles des nombres ? L'objectif de cette situation est de provoquer le retour aux sens intuitifs des nombres, aux contextes dans lesquels ils apparaissent, aux différentes interprétations possibles des écritures. Et les écritures ne mènent aux nombres (du moins d'un point de vue pédagogique) qu'à travers ces interprétations. Nous avons schématisé cela de la façon suivante :



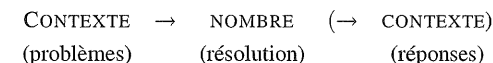
Dans le dernier problème (la fonction bizarre), on se situe à un niveau abstrait et on y reste, mais la particularité de la fonction étudiée provoque des "paradoxes" dans la visualisation des nombres considérés comme des écritures : même si les diverses interprétations associées aux nombres (mesures, points sur une droite, écritures, objets de calcul) ont des liens évidents entre elles, elles provoquent des intuitions parfois bien différentes.

En outre, on dira un mot de la façon dont on peut utiliser les différentes intuitions pour définir les réels :

NOMBRES
(Questions, réponses, justifications)

INTUITIONS → STRUCTURE

Atelier 3a (probas)



Idem que pour l'atelier 2b.

Atelier 3b (croissance)

Pour le reste, les points que nous avons déjà relevés se retrouvent dans plusieurs ateliers. Il me semble que chacun peut faire le relevé. On peut en reprendre certains dans un papier ou un discours commun. Je les ai repris ci-dessous en les enrichissant de réflexions de Nicolas (que j'ai un peu déformées par endroit...). Les ** sont évoquées dans ce qui précède.

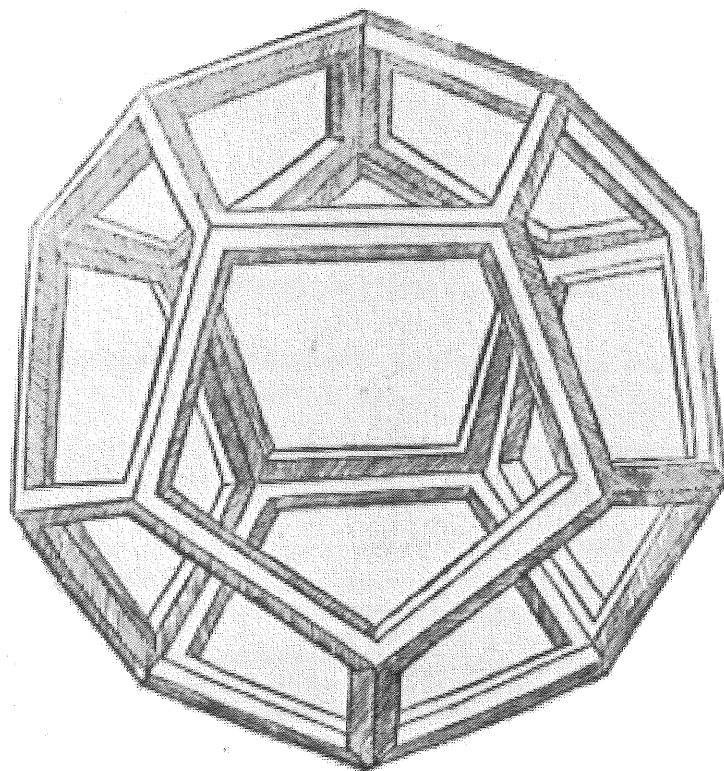
Comment faire progresser de la fraction-tarte à la fraction-nombre ?

- l'abstraction passe par l'extraction du concept de plusieurs contextes ;
- mesurer avec des fractions ; les placer sur une droite ;
- calculer avec des fractions ;
- l'écriture décimale.

Quelques principes épistémologiques (ou méthodologiques)

- ***"des phénomènes aux structures" et "de la structure aux (à la recherche des) phénomènes" : des intuitions enracinées dans des contextes et qui deviennent les soutiens intuitifs de la pensée abstraite (apprendre à évoquer le bon modèle),
- "des questions aux notions",
- "des choses aux symboles" : trop souvent, dans l'enseignement, on s'installe dans les symboles trop tôt ; faire une juste part aux choses qui précèdent les nombres ;
- les pattern ;

- le sens étroit et le sens large : les fractions sont plus que des rationnels;
- point de vue heuristique de Lakatos : ne pas conceptualiser trop tôt. Introduire les concepts au moment où on en a besoin;
- **"l'histoire est utile", quelle histoire ? On a besoin d'une histoire personnelle;
- **il faut ancrer les nouvelles connaissances dans cette histoire personnelle.



Histoire des mathématiques : constructions géométriques

GUICHARD Jean-Paul
IREM de Poitiers (France)

Abstract

Pourquoi réinterroger l'histoire des mathématiques à propos des constructions géométriques ? Notre motivation initiale est essentiellement didactique : depuis une vingtaine d'années, les problèmes de construction ont quasi disparu du cursus de l'enseignement des mathématiques en France, mais, paradoxalement, les logiciels de constructions géométriques se multiplient et se perfectionnent. Et les nouveaux programmes incitent fortement les enseignants à utiliser ces logiciels dans leur enseignement. Mais qu'y a-t-il de commun entre la construction d'une figure géométrique simple et les fameux problèmes de construction où l'on supposait le problème résolu et où les lieux géométriques tenaient une place importante ? La première proposition du premier livre des *Éléments* d'Euclide n'est-elle pas la construction du triangle équilatéral ? Qu'est-ce qui peut transformer les activités de construction bien présentes dans les programmes, mais traitées comme des recettes de constructions particulières, qu'est-ce qui peut donc les transformer en réels problèmes ? Rechercher et retrouver certains de ces problèmes dans l'histoire de notre discipline devrait nous permettre de mieux cerner ce type de problème et donner sens et intérêt à cette activité géométrique.

Par rapport à cela, notre projet est modeste. Nous proposons de nous focaliser sur de grands problèmes classiques qui ont marqué l'histoire. Pour chacun, nous avons proposé aux participants à l'atelier un certain nombre de textes historiques : l'objectif était de les transformer en textes de problèmes pour nos élèves de collège et de lycée. Nous donnerons donc en illustration un certain nombre de ces textes et de leurs transpositions.