



Niels Abel (1802-1829)

Abel et la lemniscate

FRIEDELMEYER Jean-Pierre
IREM de Strasbourg (France)

Abstract

Le problème de la division de la lemniscate est un lieu insolite mais "concret" et stratégique pour pénétrer par la petite porte dans quelques unes des théories marquantes du XIX^{ème} siècle, at par là d'en saisir l'origine :

- celle de la résolution des équations algébriques comme moteur de l'émergence du concept de groupe;
- celle des fonctions elliptiques au centre de l'élaboration des fonctions de variable complexe;
- celle des intégrales abéliennes.

C'est un bel exemple pour voir fonctionner la liaison de plus en plus étroite entre les domaines de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie, et même de l'arithmétique.

Nous nous baserons principalement sur le texte d'Abel : Recherches sur les fonctions elliptiques (1826), et nous apprendrons à diviser la lemniscate à la règle et au compas en 2, 3, 5 et 17 parties égales. De courtes "respirations" nous donnerons l'occasion de lire quelques unes des lettres écrites par Abel durant son voyage à Berlin et à Paris. Elles sont remarquables de jeunesse et d'émotion; elles décrivent avec verve et malice quelques personnalités mathématiques célèbres du siècle.

Introduction

Les problèmes que rencontre un historien des sciences varient beaucoup selon l'époque sur laquelle il travaille. Si celle-ci est très éloignée de l'époque actuelle, les difficultés tiennent principalement à la langue et à l'étrangeté d'une culture scientifique et philosophique qui se pense et s'exprime de manière très différente de la nôtre. Ce type de problème s'estompe au fur et à mesure que l'on se rapproche de la période actuelle : le langage, l'utilisation du symbolisme sont proches des nôtres, mais par contre les difficultés liées à la complexité et à l'abstraction des concepts deviennent dominantes. Ainsi les mathématiques du 19^{ème} siècle nous sont beaucoup plus proches dans leur style et leur écriture que celles des siècles précédents, mais la compréhension des idées et des méthodes qu'elles ont développées, demande un effort de réflexion important à quiconque n'est pas un professionnel de la recherche et de l'enseignement supérieur. Faut-il donc que le non professionnel en prenne son parti et renonce définitivement à accéder à la compréhension des plus belles théories mathématiques des 19^{ème} et 20^{ème} siècles, c'est-à-dire en fait de ce qui est considéré par de nombreux chercheurs d'aujourd'hui comme les seules mathématiques dignes de ce nom ? Nous pensons que non, et que l'histoire peut être une voie d'accès à ces théories, dont l'origine est souvent un problème plus "concret". De ce point de vue, le problème de la division de la lemniscate est un lieu stratégique pour pénétrer par la petite porte dans quelques unes des théories marquantes du 19^{ème} siècle, et par là d'en saisir l'origine :

- celle de la résolution des équations algébriques comme moteur de l'émergence du concept de groupe,
- celle des fonctions elliptiques au centre de l'élaboration des fonctions de variable complexe,
- celle des intégrales abéliennes.

C'est un bel exemple pour voir fonctionner la liaison de plus en plus étroite au 19^{ème} siècle entre les domaines de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie, et même de l'arithmétique.

C'est enfin un problème exemplaire de la création mathématique actuelle. Jusqu'au 18^{ème} siècle, l'invention mathématique se faisait par abstraction progressive d'une réalité ancrée d'abord dans l'activité quotidienne.

Pour prendre un exemple précis, l'astronomie et de multiples activités pratiques ont conduit à la trigonométrie. Celle-ci, en se développant, est fécondée par l'analyse des fonctions et aboutit à l'étude des fonctions circulaires et finalement à celle de leurs fonctions réciproques, lesquelles s'avèrent d'excellents outils d'intégration des fonctions algébriques de la forme $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, où R est une fonction rationnelle. Au 19^{ème} siècle, la démarche est inverse. Divers problèmes posent la question de l'intégration d'expressions du type $R(x, \sqrt{P(x)})$, où $P(x)$ est un polynôme de degré trois ou quatre. Or le matériel des fonctions disponibles pour traiter cette question est insuffisant. Que faire ? Le mathématicien va construire l'objet nécessaire à cette résolution à partir de la question posée et développer une théorie pour de nouvelles fonctions, sur le modèle des fonctions circulaires, mais en empruntant le chemin inverse. L'intégrale est première; elle donne lieu, par inversion, à une nouvelle classe de fonctions dites elliptiques, avec leur "trigonométrie" et de multiples applications en mathématiques, en physique, en mécanique; avec, bien-sûr, la rencontre de nouveaux problèmes inédits mais stimulant l'imagination des mathématiciens.

Chercher à diviser une lemniscate en parties égales, qui plus est, à la règle et au compas, peut apparaître comme une activité dérisoire, un peu folle aux yeux du grand public, au même titre

d'ailleurs que de diviser un cercle; encore que là, cela lui paraît déjà plus utile, peut-être aussi parce qu'il comprend mieux la question. Mais, c'est souvent à partir de petits problèmes de ce type que les mathématiques ont fait les avancées les plus significatives et les plus spectaculaires : les *Recherches arithmétiques* de Gauss qui se terminent par le problème de la division du cercle, sont l'un des chefs d'œuvres définitifs de la littérature mathématique. Dans l'introduction à un texte qui s'occupe justement de la lemniscate¹, Euler explique qu'il y a deux manières de considérer l'utilité de ce qu'il appelle les spéculations mathématiques :

D'une part celles qui offrent un intérêt marquant dans la vie ordinaire ou dans d'autres branches de la connaissance, et dont la valeur se mesure d'habitude à l'aune même de la grandeur de cet intérêt.

L'autre classe englobe les spéculations qui, sans présenter d'intérêt direct, sont cependant précieuses, car elles se proposent d'explorer les limites de l'Analyse et d'exercer les forces de notre esprit. Comme en effet un nombre important des recherches dont on peut attendre une grande utilité doivent cependant être abandonnées à cause des insuffisances de l'Analyse, il ne faut pas alors dévaloriser les spéculations qui promettent un progrès qui peut être considérable. De telles considérations semblent particulièrement utiles, qui pourtant étaient faites accidentellement et a posteriori, alors qu'elles avaient peu ou pas d'objectifs a priori. Mais lorsqu'on a reconnu leur exactitude, des méthodes plus simples se laissent trouver qui y conduisent, et il ne fait aucun doute que même dans la recherche de telles méthodes nouvelles, le champ de l'Analyse n'est pas peu agrandi. Des remarques de ce genre, qui ne reposent pas sur une méthode déterminée et dont le ressort interne semble caché, me sont apparues dans une publication toute récente².

De fait, beaucoup de travaux du 19^{ème} siècle se sont engagés à propos ou autour du problème de la division de la lemniscate sans objectif précis, mais qui ont dégagé un ressort interne extrêmement fécond :

- Parce que cette division met en jeu des équations de degré élevé, (la division par n conduit à une équation de degré $n^2 - 1$) elle suscite les questions théoriques sur leur résolubilité, et de ce fait sur la résolution générale des équations polynômes. Vous avez là l'une des sources de l'algèbre moderne avec la théorie des groupes, des corps, des extensions de corps.
- Parce que cette division concerne une courbe qui n'est pas très simple (comme l'est le cercle), et dont la longueur s'exprime par une fonction que l'on ne sait pas exprimer au moyen des fonctions usuelles, elle oblige à construire un nouvel objet, la fonction elliptique, dont la richesse et les applications se révèlent inépuisables.
- Un des éléments de cette richesse est que la division de la lemniscate est plus simple si l'on passe par les nombres complexes. Par exemple diviser par 5 donne une équation de degré 24. Or $5 = (2 + i)(2 - i)$, et diviser par $2 + i$ ou $2 - i$ conduit à une équation du 4^{ème} degré seulement. (En fait du premier degré en x^4). D'où deux conséquences : la nécessité de développer une théorie des fonctions de variable complexe; l'attention portée à des questions d'arithmétique. (Penser à l'arithmétique des courbes elliptiques).

Beaucoup d'auteurs ont contribué à ces recherches qui ont dominé le 19^{ème} siècle et ont développé leurs ramifications jusqu'à aujourd'hui. Elles ont été initialisées pour la plupart

¹EULER, *Nouveaux commentaires de Saint Petersburg* VI, 1761.

²Les travaux de Fagnano sur la lemniscate. (voir plus loin).

par un jeune mathématicien norvégien : Niels Henrik ABEL (1802-1829) dans son article : *Recherches sur les fonctions elliptiques*³.

Le terme *Recherches*, rare à l'époque où l'on rencontre plutôt les mots *Mémoires*, ou *Éléments*, fait pendant au titre de GAUSS *Disquisitiones*, lequel semble avoir exercé une véritable fascination sur le jeune ABEL, comme en témoigne le rapprochement suivant :

Dans ses *Recherches arithmétiques*, (traduction française des *Disquisitiones*) section VII, intitulée *Des équations qui déterminent les sections circulaires*⁴, GAUSS fait en effet la remarque que :

les principes de la théorie que nous entreprenons d'exposer, s'étendent bien plus loin que nous ne le faisons voir ici; ils peuvent en effet s'appliquer non seulement aux fonctions circulaires, mais aussi avec autant de succès à beaucoup d'autres fonctions transcendentes, par exemple à celles qui dépendent de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)^5}}$.

Cette remarque n'échappe pas à ABEL qui dans ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* annonce :

entre autres théorèmes je suis parvenu à celui-ci : On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en m parties égales par la règle et le compas seuls, si m est de la forme 2^n ou $2^n + 1$, ce dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes. Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au cercle⁶.

Dans l'article qui suit, nous nous proposons de dégager les idées principales d'ABEL pour réaliser cette "lemniscatonomie", de façon suffisamment élémentaire pour ne pas avoir à mettre en place l'immense arsenal de la théorie des fonctions elliptiques. Nous nous appuierons sur le texte d'ABEL cité ci-dessus, principalement les paragraphes I à V et le paragraphe VIII, mais limités et adaptés à ce qui concerne la lemniscate. Pour mieux comprendre les méthodes développées à ce sujet faisons le parallèle évoqué par ABEL avec le cercle.

1 La cyclotomie

La comparaison avec le cercle nous permet de dégager les ingrédients nécessaires pour diviser une lemniscate. Sur quoi en effet est basée la division du cercle ?

1) Sur l'existence d'une trigonométrie établissant une correspondance entre la longueur d'un arc de cercle et la longueur de la corde sous-jacente. Cette correspondance s'exprime au moyen des fonctions circulaires sinus, cosinus, ...

2) Sur la mise en place d'une formule d'addition pour ces fonctions qui permet d'exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En particulier il se trouve que $\cos(nx)$ est un polynôme en $X = \cos x$ pour tout entier n .

Pour des raisons évidentes de symétrie, on a pris l'habitude de repérer les arcs de cercles en relation avec l'angle au centre et de définir la fonction sinus comme exprimant la demi corde Mm dans un cercle de rayon $\Omega A = 1$. (Figure 1)

³ publiés en 1827 et 1828 dans les volumes II et III du *Journal de Crelle*.

⁴ Voir *L'Ouvret* n° 46 et 47, mars et juin 1987.

⁵ C.F. GAUSS, *Recherches arithmétiques*, traduites par A. C. M. Pouillet Delisle, Paris 1807.

⁶ N. H. ABEL, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, p. 314. Voir aussi la correspondance d'ABEL citée dans les numéros 90-91-92 et 94 de *L'Ouvret*, dans l'article : *L'histoire des mathématiques par correspondance*.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ s'exprime alors en radian par le même nombre que la mesure de l'angle $\widehat{A\Omega M}$. Cependant, pour la comparaison avec la lemniscate, il est plus judicieux d'établir une relation directe entre l'arc $\widehat{AM}$ et la corde AM . Pour ce faire, il suffit de prendre un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ ou de diamètre $OA = 1$. Alors, si l'angle $\widehat{AOM}$ mesure θ radian, l'arc $\widehat{AM}$ mesure aussi θ radian, avec l'avantage, dans ce cas, que $AM = \sin \theta$, et que $OM = \cos \theta$. (Figure 2)

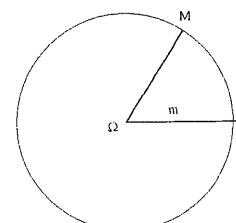


Figure 1

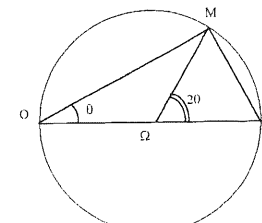


Figure 2

La division du cercle en N parties égales peut alors s'exprimer de deux manières :
- soit par le calcul de l'arc θ ,
- soit par le calcul de la corde OM ou AM , ce dernier étant celui qui permet la construction éventuelle à la règle et au compas. Précisons cela pour le cas $N = 5$, par exemple, avec la construction du pentagone régulier $OMNPQ$. (Figure 3)

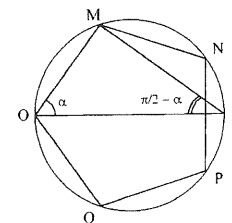


Figure 3

Posons $(\widehat{OA}, \widehat{OM}) = \alpha$. Alors :

$$\widehat{AM} = \alpha; OM = \cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

$$\widehat{ON} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right); \widehat{OP} = 3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right); \widehat{OQ} = 4 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right); \widehat{OO} = 5 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \pi$$

Et de façon corrélatrice :

$$ON = \sin 2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin 2\alpha; OP = \sin 3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right); OQ = \sin 4 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

et

$$OO = \sin 5 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos 5\alpha = 0.$$

Donc $5\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\alpha = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{10}$ (Première manière).

Ou bien : $\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha = 0$ dont la résolution donne :

$$OM = OQ = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

et

$$ON = OP = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

L'expression de ces deux longueurs ne fait intervenir que des racines carrées; elles sont donc constructibles à la règle et au compas.

Voyons maintenant comment mettre en place des outils analogues pour la lemniscate. L'analogie se fait très directement à une exception fondamentale près : il n'y a pas de relation de proportionnalité entre un arc de lemniscate et un angle, comme dans le cercle. Ce qui suppose un travail concentré sur une relation entre l'arc de courbe et la corde, sans passer par l'angle. Or une telle relation existe aussi pour le cercle utilisé plus haut : la longueur s de l'arc $\widehat{OM}$ correspondant à la corde $OM = r$, est donnée par

$$s(r) = \int_0^r \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

si x et y sont paramétrés en fonction de r . D'où le parallèle, en prenant comme repère orthonormal un repère avec $\vec{OA}$ comme vecteur unitaire sur l'axe des x :

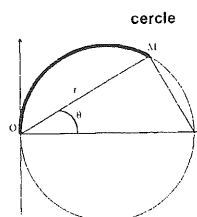


figure 4

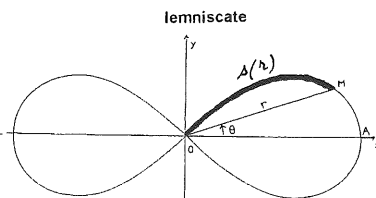


figure 5

équation polaire : $r = \cos \theta$

équation cartésienne : $x^2 + y^2 = x$

équations paramétriques : $\begin{cases} x = r^2 \\ y^2 = r^2 - r^4 \end{cases}$

$\widehat{OM} = s(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arcsin} r$

$\widehat{AM} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arccos} r$

$\widehat{OA} = s(1) = \frac{\pi}{2} = 1,57$

(une valeur de r fournit 2 valeurs de (x, y))

polaire : $r^2 = \cos 2\theta$

cartésienne : $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

paramétriques : $\begin{cases} 2x^2 = r^2 + r^4 \\ 2y^2 = r^2 - r^4 \end{cases}$

$\widehat{OM} = s(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

$\widehat{AM} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

$\widehat{OA} = s(1) = \frac{\pi}{2} = 1,31$

(une valeur de r fournit 2 valeurs de (x, y))

2 L' "invention" de la lemniscate (1694)

Si la courbe lemniscate avait déjà été rencontrée comme cas particulier d'ovale de Cassini (ensembles de points dont le produit des distances à deux points fixes est constant), elle ne fut

nommée ainsi qu'en 1694 par Jacques Bernoulli à partir du grec $\lambda\eta\mu\nu\iota\sigma\kappa\omicron\varsigma$ qui signifie *bandelette* ou *ruban*, et à l'occasion d'un problème posé quelques années auparavant par Leibniz et désigné par le problème de l'*isochrone paracentrique*. Il s'agit de trouver la trajectoire d'un point M dans un plan vertical, point soumis à la seule pesanteur et s'éloignant d'un point fixe C de telle façon que le rayon CM varie linéairement avec le temps. La résolution du problème conduit à la considération de l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{\sqrt{ar}} = \frac{adz}{\sqrt{az(a^2 - z^2)}} = \frac{2adu}{\sqrt{a^4 - u^4}}$$

(en posant $az = u^2$). Or aucune des deux dernières différentielles n'est intégrable par quadrature, c'est-à-dire au moyen d'une aire limitée par une courbe dont l'équation s'exprimerait à l'aide des fonctions élémentaires connues. Mais il y a d'autres moyens de penser cette intégration. Le frère de Jacques, Jean Bernoulli réalise l'intégration au moyen de la rectification d'une courbe, en posant l'élément différentiel égal à $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ et trouve, à un coefficient $\sqrt{2}$

près : $\begin{cases} x = \sqrt{az + z^2} \\ y = \sqrt{az - z^2} \end{cases}$, appliquant par là un principe déjà énoncé par Leibniz. Celui-ci

disait qu'il est préférable de réduire les quadratures aux rectifications à cause que la dimension de la ligne est plus simple que celle de la surface, et que de plus une ligne se mesure plus facilement qu'une aire : il suffit de poser une corde le long de la ligne à mesurer. En éliminant z entre x et y on trouve l'équation cartésienne de la lemniscate :

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Autrement dit, au lieu de penser l'intégrale comme une aire, Jean Bernoulli la pense comme une longueur de courbe. La lemniscate était née comme centre d'intérêt et nommée⁷. Si nous prenons $2a^2 = 1$, nous retrouvons les équations données ci-dessus.

3 La duplication de l'arc de lemniscate par le comte Fagnano (1718)

L'analogie entre le cercle et la lemniscate mise en évidence ci-dessus a très certainement inspiré un mathématicien italien, le comte Fagnano (1715-1797) qui découvrit une formule de duplication c'est-à-dire une formule reliant r_1 et r_2 tels que $s(r_1) = 2s(r_2)$. Dans le cas du cercle, une telle formule est connue.

Puisque

$$s(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arcsin} r,$$

posons $r_2 = \sin x$ ou $x = \text{Arcsin} r_2$ et $r_1 = \sin(2x)$ équivalent à

$$2x = \text{Arcsin} r_1 = 2\text{Arcsin} r_2,$$

ou encore $s(r_1) = 2s(r_2)$. Or $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, équivalente à

$$r_1 = 2r_2 \sqrt{1 - r_2^2}.$$

Y a-t-il une relation de duplication pour la lemniscate ? Par analogie avec l'intégration de

$$s(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

⁷H. BOS, *Lectures in the history of mathematics*, p. 101-111 et p. 23-36.

qui peut se faire au moyen du changement de variable $r = \frac{2t}{1+t^2}$. Fagnano utilise le changement

$$(1) r^2 = \frac{2t^2}{1+t^4}$$

pour le calcul de

$$(2) s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \sqrt{2} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

puis encore le changement

$$(3) t^2 = \frac{2u^2}{1-u^4}$$

qui donne alors l'égalité

$$(4) \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \sqrt{2} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

La combinaison de (2) et (4) donne alors

$$(5) s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = 2 \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$$

avec la relation déduite de (1) et (3) entre r et u :

$$(6) r = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}.$$

Autrement dit, si $OM = r$ et $ON = u$ tels que (5), alors l'arc $\widehat{OM}$ est le double de l'arc $\widehat{ON}$. En particulier si l'on prend $r = 1$ le quart de lemniscate OA est divisé par deux au point U tel que $OU = u$ avec u solution de l'équation

$$1 + u^4 = 2u\sqrt{1-u^4}.$$

L'équation en u est équivalente, pour u positif, à

$$u^8 + 4u^6 + 2u^4 - 4u^2 + 1 = (u^4 + 2u^2 - 1)^2;$$

soit

$$u = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

(voir Figure 9 plus loin).

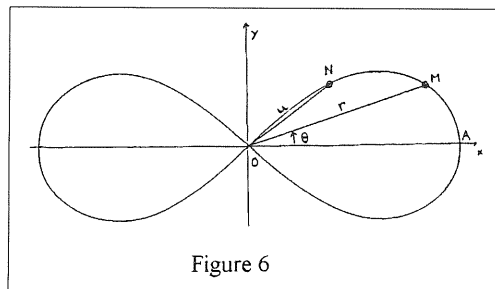


Figure 6

Ce qui est remarquable, mais ne sera évidemment découvert que bien après, c'est qu'en passant par les complexes, on comprend mieux la raison pour laquelle ces transformations donnent de si bons résultats.

Dans les égalités (1) et (2), remplaçons t par $t = \varepsilon v$ où $\varepsilon = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, racine huitième de l'unité ou racine quatrième de (-1) . Alors :

$$r^2 = \frac{2iv^2}{1-v^4}$$

et

$$(7) s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = (1+i) \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}.$$

Puis, si nous divisons à présent (4) par ε et remarquant que $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, on obtient pour (3) et (4) :

$$v^2 = \frac{-2iu^2}{1-u^4}$$

et

$$(8) \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = (1-i) \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Autrement dit, en passant par les complexes, toutes les intégrales restent lemniscatiques, c'est-à-dire avec le radical $\sqrt{1-x^4}$. La composition de (7) et (8) redonne alors bien les relations (5) et (6) puisque $(1-i)(1+i) = 2$. Mais cela suppose la mise en place d'une théorie des intégrales complexes⁸.

4 Le théorème d'addition par Euler (1753)

Chargé d'examiner les travaux de Fagnano qui postulait pour être membre de l'Académie de Berlin, Euler les expose avec quelques compléments de son propre fait. Restons dans l'analogie avec les fonctions circulaires. Nous avons :

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2 \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

lorsque

$$(9) r = 2u\sqrt{1-u^2},$$

relation qui provient de $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, lorsque l'on pose $u = \sin x$ et $r = \sin(2x)$. Celle-ci est elle-même un cas particulier de la relation $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ et se traduit sur les fonctions réciproques par

$$\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^v \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

lorsque

$$(10) r = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}.$$

⁸cf. C.L. SIEGEL, *Topics in complex function theory*, p. 1-11.

Euler se pose la question d'un théorème analogue pour

$$(11) \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^v \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

La relation (10) s'obtient à partir de (9) par une sorte de dédoublement de u en u et v . La même démarche par dédoublement de u et v dans (6) lui fait trouver :

$$(12) r = \frac{u\sqrt{1-u^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}$$

pour que (11) soit vérifiée.

5 Fonction sinus lemniscatique⁹

Soit α la fonction : $x \mapsto \alpha(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ donnant la longueur de l'arc $\widehat{OM}$ sur la lemniscate, pour une distance $OM = x$ donnée. En fait nous considérerons les variables dans leur généralité (donc affectée d'un signe). Posons la longueur du quart de lemniscate soit $\alpha(1) = \frac{\pi}{2} \cong 1,31$. La fonction α est continue, impaire, strictement croissante de $[-1; +1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$, ce qui permet de définir la fonction réciproque φ continue, impaire, strictement croissante, de $[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; +1]$. En remarquant que le changement formel $u = -it$ dans $\int_0^{ix} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \frac{idv}{\sqrt{1-v^4}}$ donne la relation $\alpha(ix) = i\alpha(x)$, ABEL définit φ également sur $[-\frac{i\pi}{2}; +\frac{i\pi}{2}]$ en posant $\varphi(ix) = i\varphi(\alpha)$ et introduit par ailleurs les fonctions f et F définies par $f(\alpha) = \sqrt{1-\varphi^2(\alpha)}$ et $F(\alpha) = \sqrt{1+\varphi^2(\alpha)}$. Le principal problème est alors de mettre en place les formules d'addition¹¹ : pour $u = \varphi(\alpha)$ et $v = \varphi(\beta)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta) + \varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1 + \varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1 + u^2v^2}; \\ f(\alpha + \beta) &= \frac{f(\alpha)f(\beta) - \varphi(\alpha)\varphi(\beta)F(\alpha)F(\beta)}{1 + \varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2} - uv\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}}{1 + u^2v^2}; \\ F(\alpha + \beta) &= \frac{F(\alpha)F(\beta) + \varphi(\alpha)\varphi(\beta)f(\alpha)f(\beta)}{1 + \varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2} + uv\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}{1 + u^2v^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ces relations permettent de définir la fonction φ sur le carré $[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}] \times [-\frac{i\pi}{2}; +\frac{i\pi}{2}]$ par

$$\varphi(\alpha + i\beta) = \frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta) + i\varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1 - \varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{u\sqrt{1-v^4} + iv\sqrt{1-u^4}}{1 - u^2v^2} \quad (2)$$

avec $u = \varphi(\alpha)$; $\varphi(i\beta) = i\varphi(\beta) = iv$, sauf pour $\alpha = \mp\frac{\pi}{2}$ et $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $uv = \pm 1$. D'autre part on a également $f(i\beta) = F(\beta)$ et $F(i\beta) = f(\beta)$.

6 Périodes

Comme $f(\frac{\pi}{2}) = F(\frac{i\pi}{2}) = 0$, la fonction φ n'est pas définie pour $uv = \mp 1$, c'est-à-dire pour $\mp\frac{\pi}{2}(1 \mp i)$. Par contre on obtient $\varphi(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \varphi(-\alpha + \frac{\pi}{2})$ par les relations (1). Ce qui donne : $\varphi(\pi + \alpha) = \varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$ et $\varphi(2\pi + \alpha) = \varphi(\alpha)$.

⁹ Terme utilisé par GAUSS dans des papiers qu'il a laissés à sa mort : Gauss Nachlass, Werke III p. 404. Nous n'utiliserons pas ce terme dans la suite, ni d'ailleurs les notations de GAUSS. Nous suivrons au plus près les notations et les idées d'ABEL.

¹⁰ c'est-à-dire les nombres imaginaires purs de la forme ix où x appartient à $[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$

¹¹ ABEL les démontre par différentiation.

La fonction φ ainsi prolongée au moyen des relations (1) est périodique de période 2π . On met de même en évidence la période imaginaire $2i\pi$ et plus généralement

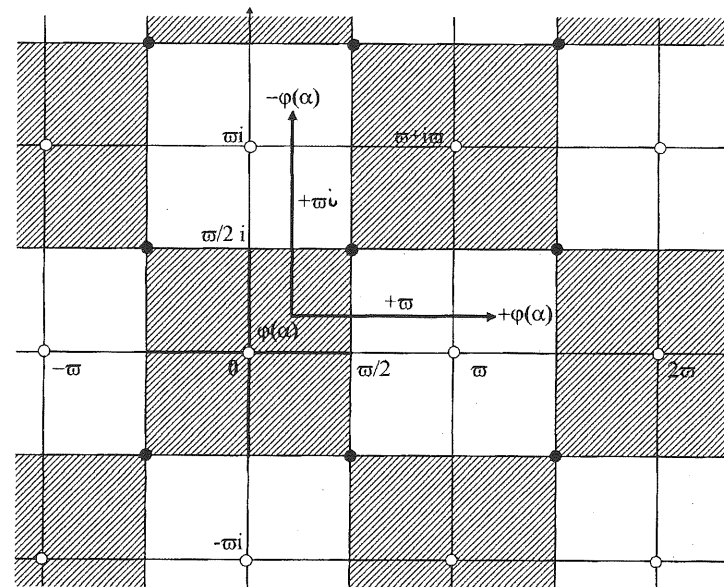


Figure 7

les périodes $2(m\pi + in\pi)$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. (Voir Figure 7). L'outil principal de la division de la lemniscate est maintenant en place.

N.B. Les points blancs sont ceux où la fonction φ est nulle; les points noirs ceux où elle n'est pas définie. Insistons par ailleurs sur le fait que ABEL ne fait aucune figure de ce type. Au moment où il écrit ce texte, la représentation géométrique des nombres complexes est loin d'être acquise, et ABEL, en tout cas ne l'évoque jamais¹².

7 Bissection d'un arc de lemniscate

Soient $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$; $v = u = \varphi(\frac{\pi}{2})$; alors par les relations (1) et en posant $x = \varphi(\frac{\pi}{2})$; $y = f(\frac{\pi}{2})$; $z = F(\frac{\pi}{2})$ nous avons :

$$f(s) = \frac{1 - 2x^2 - x^4}{1 + x^4}; F(s) = \frac{1 + 2x^2 - x^4}{1 + x^4}.$$

D'où l'on tire

$$x^2 = \frac{F(s) - 1}{f(s) + 1} = \frac{1 - f(s)}{1 + F(s)}$$

¹² Cf. *Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, par la Commission Inter-Irem d'histoire et d'épistémologie des mathématiques. Ellipses 1998.

et comme $y^2 = 1 - x^2$ et $z^2 = 1 + x^2$ on a aussi :

$$y^2 = \frac{F(s) + f(s)}{1 + F(s)}$$

et

$$z^2 = \frac{F(s) + f(s)}{1 + f(s)}.$$

En particulier pour $s = \frac{\pi}{2}$, le quart de lemniscate est partagé en deux. Dans ce cas : $f(s) = 0$; $F(s) = \sqrt{2}$ donc $x = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Cette longueur est constructible à la règle et au compas, de la manière suivante (Figure 9) : la lemniscate étant inscrite dans le carré d'axes de symétrie (BOA) et (COD) , tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon $BC = \sqrt{2}$, qui coupe (OA) en E . La perpendiculaire en E à (OA) coupe le cercle de diamètre $[OA]$ en F . OF est la longueur $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ cherchée.

(Rappelons que $OA = 1$).

D'une manière plus générale, pour s fixé, l'arc moitié, d'origine O est obtenu en construisant

$$x = \sqrt{\frac{F(s) - 1}{f(s) + 1}} = \sqrt{\frac{1 - f(s)}{1 + F(s)}}$$

avec $F(s) = \sqrt{1 + \varphi^2(s)}$ et $f(s) = \sqrt{1 - \varphi^2(s)}$.

Remarque

Cette construction suppose la lemniscate tracée et coupée par le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Mais il est clair que le point d'intersection est constructible indépendamment du tracé même de la lemniscate puisque le paramétrage de celle-ci sous la forme

$$\begin{cases} 2x^2 = r^2 + r^4 \\ 2y^2 = r^2 - r^4 \end{cases}$$

donne des valeurs constructibles des coordonnées :

$$x = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{3\sqrt{2} - 4}{2}}.$$

A titre d'application des formules de bisection, considérons la division par 4. Dans ce cas

$$F\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt[4]{2}; f\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Donc

$$x^2 = \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1} = \frac{1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{1 + \sqrt[4]{2}}.$$

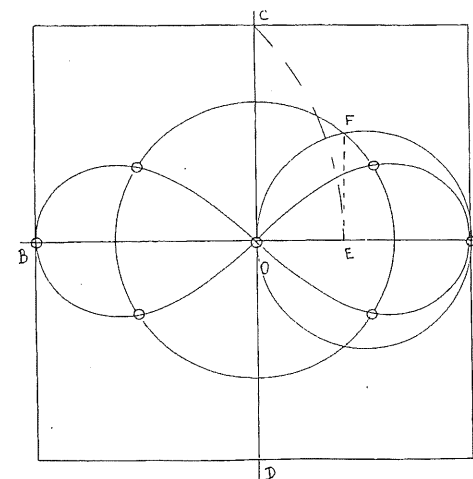


Figure 8

8 Trisection d'une demi lemniscate

En appliquant (1) à $\alpha = 2s$ et $\beta = s$ on obtient :

$$\varphi(3s) = \frac{u(3 - 6u^4 - u^8)}{1 + 6u^4 - 3u^8}$$

avec $u = \varphi(s)$. Prenant $3s = \pi$, on obtient $u = \varphi(s) = \varphi(\frac{\pi}{3})$ comme racine de l'équation (3) : $u^8 + 6u^4 - 3 = 0$, soit $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}$, constructible comme suit (Figure 10) : le cercle de centre S de rayon $SP = 2$ coupe $[BA]$ en G tel que $AG = 2 - \sqrt{3}$; $2\sqrt{3} - 3 = GH$ est la hauteur d'un triangle équilatéral de demi base AG . Il est alors facile de construire successivement les longueurs $OI = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ puis $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3} = OJ$. Remarquons que les huit solutions de l'équation (3) correspondent aux huit valeurs de $\varphi[\frac{\pi}{3}(1 + 2m + 2in)]$ déterminées par les solutions de $3s = \pi + 2\pi(m + in)$ m et n entiers : $0 \leq m \leq 2$; $0 \leq n \leq 2$; le couple $(1, 0)$ correspondant à la solution $u = 0$ étant laissé de côté, donc :

$$(m, n) \in [(0, 1); (0, 2); (0, 0); (1, 1); (1, 2); (2, 0); (2, 1); (2, 2)].$$

Nous laissons au lecteur le soin de calculer $\varphi(\frac{\pi}{6})$ pour la division de la demi lemniscate en six.

Indication :

$$\begin{aligned} x = \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \varphi\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) &\iff \varphi(3s) = 1, \text{ (avec } s = \frac{\pi}{2}) \\ &\iff u(3 - 6u^4 - u^8) = 1 + 6u^4 - 3u^8 \\ &\iff (u + 1)(t^2 - 2t - 2)^2 = 0 \text{ avec } t = u + \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

(Réponse : $\varphi(\frac{\varpi}{6}) = \frac{1}{2} [\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2\sqrt{3}}]$). On peut aussi réaliser la bissection de $s = \frac{\varpi}{3}$ par la méthode du § 8, qui donne

$$\varphi(\frac{\varpi}{6}) = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 3} - 3 - 1}}{\sqrt{1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3} - 3 + 1}}},$$

dont on vérifiera l'égalité avec l'autre expression ci-dessus.

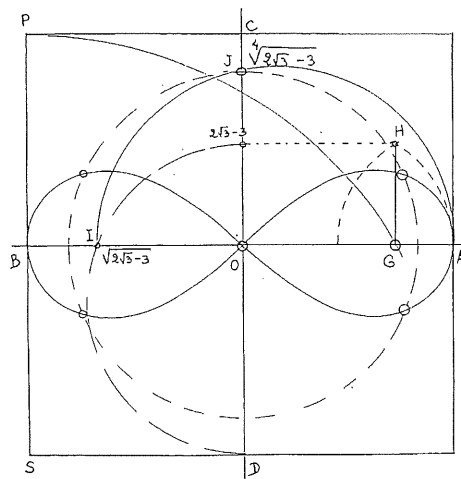


Figure 9

9 Division de la lemniscate en N parties égales

Les relations (1) nous montrent facilement que $\varphi(kd)$, $f(kd)$, $F(kd)$ sont, pour k entier, des fractions rationnelles en $x = \varphi(d)$, $y = f(d)$, $z = F(d)$, avec en plus les relations $y^2 = 1 - x^2$; $z^2 = 1 + x^2$. On a en effet les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \varphi[(n+1)d] &= -\varphi[(n-1)d] + \frac{2\varphi(nd)f(d)F(d)}{1 + \varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \\ f[(n+1)d] &= -f[(n-1)d] + \frac{2f(nd)f(d)}{1 + \varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \\ F[(n+1)d] &= -F[(n-1)d] + \frac{2F(nd)F(d)}{1 + \varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \end{cases}$$

Pour les premières valeurs de n on a de cette façon : $\varphi(2d) = \frac{2xyz}{1+x^4}$;

$$\begin{cases} \varphi(3d) &= \frac{x(3 - 6x^4 - x^8)}{1 + 6x^4 - 3x^8}; \\ \varphi(4d) &= 4xyz \frac{1 - 5x^4 - 3x^8 + x^{12}}{1 + 20x^4 - 26x^8 + 20x^{12} + x^{16}}^{13}; \\ \varphi(5d) &= \frac{x(5 - 2x^4 + 2x^8)(1 - 12x^4 - 26x^8 + 52x^{12} + x^{16})}{(1 - 2x^4 + 5x^8)(1 + 52x^4 - 26x^8 + 12x^{12} + x^{16})} \end{cases}$$

Appliquons la relation (2) au cas où $\alpha = md$ et $\beta = \mu d$, avec m et μ entiers naturels tels que $m + \mu$ soit impair. On calculera alors $\varphi[(m + \mu)d]$ par les formules (1) qui donneront une expression de la forme $x\Psi(x^2)$ où Ψ est une fonction rationnelle. En changeant d en id , $\varphi(d)$ deviendra $\varphi(id) = i\varphi(d) = ix$ et $\varphi[(m + \mu)id] = i\varphi[(m + \mu)d] = ix\Psi(-x^2)$ donc $\varphi[(m + \mu)i] = x\Psi(-x^2)$. Par conséquent $\Psi(x^2) = \Psi(-x^2) = T(x^4)$ où T est une fonction rationnelle de x . Le lecteur pourra par exemple vérifier que :

$$\varphi[(2+i)d] = \frac{x^2 - 2x^8 + i(1 - 6x^4 + x^8)}{1 - 2x^4 + 5x^8}, \quad (4)$$

qui se simplifie en $xi \frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}$ par le facteur commun $1 - (1 + 2i)x^4$.

Venons en alors à la division par N . Comme le cas de la division par deux a déjà été traité, on peut supposer dans la suite que N est impair. De plus, lorsque N est premier de la forme $N = 4n + 1$, on sait que N se décompose en somme de deux carrés : $N = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)$. Comme N est impair, il en est de même de $\alpha + \beta$, de sorte que :

$$\varphi[(\alpha + i\beta)d] = x \frac{T}{S} \quad (5)$$

où T et S sont des polynômes en x^4 . En prenant $d = \frac{\varpi}{\alpha + i\beta}$ le premier membre de (5) est nul, et par conséquent $x = \varphi\left(\frac{\varpi}{\alpha + i\beta}\right)$ sera une racine de l'équation : $T = 0$. ABEL démontre que cette équation est en fait de degré $4n = \alpha^2 + \beta^2 - 1$, que ses racines sont les nombres $\pm \varphi\left(\frac{k\varpi}{\alpha + i\beta}\right)$, avec $1 \leq k \leq 2n$ et qu'elle est résoluble par les mêmes méthodes que GAUSS a mises en place pour la division du cercle. En particulier si $N = 4n + 1$ est de la forme $1 + 2^n$, alors l'expression de $\varphi\left(\frac{\varpi}{4n+1}\right)$ ne contient que des racines carrées et donc est constructible à la règle et au compas. Voyons en l'illustration avec le cas $N = 5 = 2^2 + 1$.

Les égalités (4) nous fournissent les valeurs de $\varphi\left(\frac{k\varpi}{2+i}\right)$ pour $1 \leq k \leq 4$ comme racines de l'équation $1 - 2i - x^4 = 0$, c'est-à-dire comme racines quatrièmes de $1 - 2i$. L'une de celle-ci s'écrit :

$$x_0 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2\sqrt[4]{5} + \sqrt{2\sqrt{5} + 2}} - i\sqrt{2\sqrt[4]{5} + \sqrt{2\sqrt{5} + 2}} \right] = \frac{1}{2}(u - iv).$$

Alors :

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{5}\right) = \varphi\left(\frac{\varpi}{2+i} + \frac{\varpi}{2-i}\right) = \varphi\left(\frac{4\varpi}{5}\right) = \varphi\left(\varpi - \frac{4\varpi}{5}\right).$$

Par les formules (1) avec $\alpha = \frac{\varpi}{2+i}$ et $\beta = \frac{\varpi}{2-i}$, on a :

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{5}\right) = \frac{u-v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{5}+2} + \sqrt{2\sqrt{5}+2} - \sqrt{2\sqrt[4]{5}+2} + \sqrt{2\sqrt{5}+2}}{\sqrt{5}+1};$$

et de même :

$$\varphi\left(\frac{2\varpi}{5}\right) = \frac{u-v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{5}+2} + \sqrt{2\sqrt{5}+2} + \sqrt{2\sqrt[4]{5}+2} + \sqrt{2\sqrt{5}+2}}{\sqrt{5}+1}.$$

Remarque. L'équation $T = 0$ correspondant à $\varphi(\varpi) = 0$, donne le partage de la demi lemniscate en cinq parties égales. Mais lorsqu'on a ce partage là, on a immédiatement aussi le partage de la lemniscate entière, en prenant un point sur deux. Cependant le cas $N = 5$ est trop immédiat au niveau de la résolution de l'équation $T = 0$ pour manifester toute la puissance de l'outil algébrique mis en place par ABEL. Voyons celle-ci à l'œuvre dans le cas $N = 17$.

10 Partage de la lemniscate en dix-sept parties égales

Il s'agit de déterminer les valeurs de $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$; $1 \leq k \leq 16$. Or $\frac{2k\varpi}{17} = \frac{k\varpi}{1-4i} + \frac{k\varpi}{1+4i}$, de sorte qu'il suffit de calculer les $\varphi\left(\frac{k\varpi}{1+4i}\right)$ qui, combinés avec leurs conjugués, donneront les $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$. Définissons s par la relation :

$$\varphi(s) = \pm(4is) = \pm i\varphi(4s) \iff s = \pm 4is + 2(\lambda\varpi + i\mu\varpi), \quad (6)$$

ou $s = \frac{2\varpi(\lambda+i\mu)}{1+4i}$ (à $2\varpi(\lambda' + i\mu')$ près). Mais l'ensemble des valeurs $s_k = \frac{k\varpi}{1+4i}$ coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation (6). En effet, cette dernière a pour solutions les nombres $s_{(\lambda,\mu)} = \frac{2\varpi}{1+4i}(\lambda + i\mu)$, mais on peut toujours trouver k, λ et μ de telle façon que

$$\frac{2\varpi}{1+4i}(\lambda + i\mu) = \frac{k\varpi}{1+4i} + 2\varpi(\lambda' + i\mu').$$

Il suffit de vérifier les égalités $\begin{cases} 2\lambda = k + \lambda' - 8\mu' \\ 2\mu = 4\lambda' + 2\mu' \end{cases}$ (modulo 17). Par exemple

$$\frac{2\varpi}{1+4i}(3+5i) = \frac{12\varpi}{1+4i} + 2\varpi(1+i).$$

De même avec $\frac{\varpi}{1-4i}(\lambda + i\mu)$.

Il y a 32 valeurs du type $s_k = \frac{k\varpi}{1+4i}$; $1 \leq k \leq 16$. Mais à cause de (6) on a :

$$\varphi^2(s_k) = -\varphi^2(s_{4k}) = \varphi^2(s_{17-k}) = -\varphi^2(s_{17-4k})$$

pour¹⁴ $k = 1; 2; 3; 6$. Il n'y a par conséquent que huit valeurs distinctes de $\varphi^4(s)$. Cherchons en l'équation qui les admet comme racines.

Si $\varphi(s) = u$ alors

$$\varphi(2s) = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}; \varphi^2(2s) = \frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}; \varphi^2(4s) = \frac{4\varphi^2(2s)(1-\varphi^4(2s))}{[1+\varphi^4(2s)]^2}.$$

¹⁴pour $k = 6$ on prendra bien évidemment l'indice modulo 17, donc $34 - 4k = 10$.

La relation $\varphi^2(4s) = -\varphi^2(s)$ donne alors :

$$u^2 + \frac{16u^2(1-u^4)[(1+u^4)^4 - 16u^4(1-u^4)^2](1+u^4)^2}{[(1+u^4)^4 + 16u^4(1-u^4)^2]^2} = 0;$$

soit, en posant $u^4 = x$:

$$x^8 + 24x^7 + 524x^6 - 1400x^5 + 886x^4 - 408x^3 + 748x^2 - 136x + 17 = 0. \quad (7)$$

Cette équation se décompose, comme on le vérifiera également un peu plus bas, en les deux suivantes à coefficients et racines conjuguées :

$$x^4 + (12 - 20i)x^3 + (-10 + 28i)x^2 + (-20 - 12i)x + 1 + 4i = 0; \quad (8)$$

$$x^4 + (12 + 20i)x^3 + (-10 - 28i)x^2 + (-20 + 12i)x + 1 - 4i = 0. \quad (9)$$

Soit donc $x_1 = \varphi^4(s)$ l'une des racines de l'équation (7). Alors $x_2 = \varphi^4(2s)$ est aussi une racine (car s est un nombre de la forme $\frac{2k\varpi}{17}$).

Or

$$\varphi^2(2s) = \frac{4\varphi^2(s)(1-\varphi^4(s))}{(1+\varphi^4(s))^2}$$

et

$$\varphi^2(4s) = \frac{4\varphi^2(2s)(1-\varphi^4(2s))}{(1+\varphi^4(2s))^2} = -\varphi^2(s).$$

D'où :

$$\frac{\varphi^2(2s)}{\varphi^2(s)} = \frac{4(1-x_1)}{(1+x_1)^2} = \frac{(1+x_2)^2}{4(1-x_2)}$$

et

$$\varphi^2(s)\varphi^2(2s) = \frac{4x_1(1-x_1)}{(1+x_1)^2} = -\frac{4x_2(1-x_2)}{(1+x_2)^2}.$$

En posant $x_1 + x_2 = y$ et $x_1 x_2 = z$, on obtient y et z par élimination de z entre les deux équations :

$$\begin{cases} 16(1-y+z) + (1+y+z)^2 = 0 \\ y - y^2 + 6z - yz - 2z^2 = 0 \end{cases}$$

qui nous donne

$$z = \frac{-y^2 + 27y - 34}{3y + 42}$$

et $y^4 + 24y^3 + 488y^2 - 1632y + 1360 = 0$, laquelle se décompose en

$$\begin{cases} y^2 + (12 - 20i)y + (-28 + 24i) = 0 \\ y^2 + (12 + 20i)y + (-28 - 24i) = 0. \end{cases}$$

En posant $r = \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ l'une des racine carrée de $1 + 4i$, on aura pour y les quatre valeurs suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = -6 + 10i + 6ir; & y_2 = -6 + 10i - 6ir \\ y_3 = -6 - 10i - 6i\bar{r}; & y_4 = -6 - 10i + 6i\bar{r}, \end{cases}$$

où $\bar{r}$ est le conjugué de r .

Les valeurs correspondantes de z sont

$$\begin{cases} z_1 = 9 + 2i + (4 - 2i)r; & z_2 = 9 + 2i - (4 - 2i)r \\ z_3 = 9 - 2i + (4 + 2i)\bar{r}; & z_4 = 9 - 2i + (4 + 2i)\bar{r}. \end{cases}$$

Les deux équations $x^2 - y_1x + z_1 = 0$ et $x^2 - y_2x + z_2 = 0$ donnent par leur produit :

$$x^4 - (y_1 + y_2)x^3 + (y_1y_2 + z_1 + z_2)x^2 - (y_1z_2 + y_2z_1)x + z_1z_2 = 0,$$

soit justement l'équation

$$x^4 + (12 - 20i)x^3 + (-10 + 28i)x^2 + (-20 - 12i)x + 1 + 4i = 0. \quad (10)$$

Les racines de cette dernière sont donc données par

$$\begin{cases} \frac{y_1}{2} \pm \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - z_1} \\ \frac{y_2}{2} \pm \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - z_2}; \end{cases}$$

mais $\frac{y_1^2}{4} - z_1 = -34 - 68i + (-34 - 16i)r = [-34 - 16i + (-18 + 4i)r]r = [-1 + 4i + (1 + 2i)r]^2 \cdot r$.

De sorte que, en désignant par ρ une racine quatrième de $1 + 4i$:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2\sqrt[4]{17} + \sqrt{2\sqrt{17} + 2}} + i\sqrt{2\sqrt[4]{17} - \sqrt{2\sqrt{17} + 2}} \right],$$

les racines de l'équation (10) sont alors données par

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 5i + 3ir + \rho[-1 + 4i + (1 + 2i)r] \\ x_2 = -3 + 5i + 3ir - \rho[-1 + 4i + (1 + 2i)r] \\ x_3 = -3 + 5i - 3ir + i\rho[-1 + 4i - (1 + 2i)r] \\ x_4 = -3 + 5i - 3ir - i\rho[-1 + 4i - (1 + 2i)r] \end{cases}$$

et celles de l'équation (9) par leur conjuguées. Il reste maintenant à déterminer les expressions des $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$ à partir de la formule

$$\varphi(\alpha + \beta) = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1 + u^2v^2},$$

avec $u = \varphi\left(\frac{k\varpi}{1+4i}\right)$ et $v = \varphi\left(\frac{k\varpi}{1-4i}\right)$; donc si x est l'une quelconque des racines de (10) et $\bar{x}$ sa conjuguée, alors

$$\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right) = \frac{\sqrt[4]{x}\sqrt{1-\bar{x}} + \sqrt[4]{\bar{x}}\sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{x\bar{x}}}.$$

Ces expressions n'ont évidemment qu'un intérêt tout théorique. Elles ont été calculées par L. KIEPERT dans le *Journal de Crelle*, tome LXXV, en 1873. ABEL lui-même n'a jamais publié de calcul effectif pour le partage de la lemniscate, se contentant d'énoncer sa possibilité, et donnant la méthode générale. Celle-ci est un peu différente de celle de KIEPERT et généralise la

méthode que GAUSS avait développée pour la division du cercle, en s'appuyant sur ses propres recherches concernant la résolution des équations algébriques et développées dans le mémoire *Sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*¹⁵.

Exercice 1. Montrer que la division de la lemniscate en 13 parties égales se ramène à la résolution de deux équations du troisième degré :

$$x^3 - (11 \pm 10i)x^2 + (7 \pm 4i)x + 3 \mp 2i = 0.$$

Exercice 2. La division du cercle (équation polaire $r = \cos \theta$) amène à travailler sur l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et sa fonction réciproque. La division de la lemniscate (équation polaire $r^2 = \cos 2\theta$) conduit à travailler sur l'intégrale $\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ et sa fonction réciproque. De même la division du trifolium d'équation polaire $r^3 = \cos 3\theta$ (Fig. 10) nous conduit à l'intégrale $I = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^6}}$. Développer une théorie sur le modèle de la lemniscatisme qui traite de la division de ce trifolium en N parties égales. On pourra remarquer que le changement $u = \frac{1}{t^2}$ ramène I à une intégrale du type $\int_\alpha^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^3-1}}$, c'est-à-dire une intégrale elliptique.

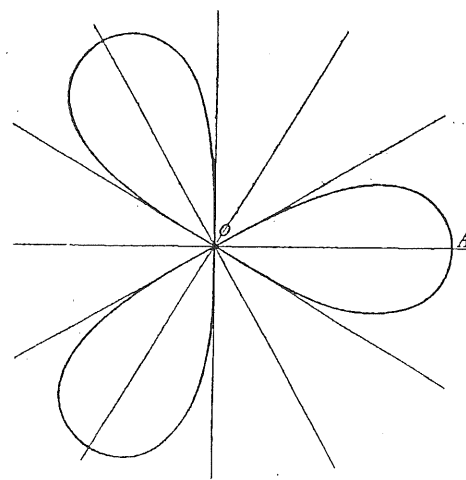


Figure 10

Bibliographie

- ABEL N.H., *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, Œuvres complètes, (SyLOW, Lie éd.s), Christiania, 1881, vol. I, p. 478-507.
 ABEL N.H., *Recherches sur les fonctions elliptiques*, Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 2, p.101-181, Bd.3, p.160-190. 1827-1828. Œuvres complètes (SyLOW, Lie

¹⁵Pour une étude de ce mémoire, cf. FRIEDELMEYER J-P, *Emergence du concept de groupe*, p. 85 à 97.

- éds), Christiania, 1881, vol. I, p. 263-388.
- BOS H., *Lectures in the history of mathematics*, in particular : *The lemniscate of Bernoulli*, pp. 101-111 et *The concept of construction and the representation of curves in seventeenth-century mathematics*, pp. 23-36, Hist. of Math. Series, vol. 7, American Mathematical Society, 1993.
- COOKE R., *Abel's Theorem*, in *The history of modern mathematics*, vol. I, p. 389-424, Ed. D. Rowe, J. McCleary, Academic Press, 1989.
- ENNEPER A., *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*, Halle, 1876.
- FRIEDELMEYER J-P., *Des équations qui déterminent les sections circulaires*, in *L'Ouvert*, n° 46 et 47, mars et juin 1987, Revue de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg.
- FRIEDELMEYER J-P., *Emergence du concept de groupe*, Fragments d'histoire des mathématiques III, Brochure A.P.M.E.P. n° 83, 1991.
- GAUSS C.F., *Recherches arithmétiques*, traduites par A.C.M. Pouillet Delisle, Paris, 1807.
- GAUSS C.F., *Elegantiores integralis $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ proprietates*, Gauss Nachlass, Werke, Göttingen, 1870-1927, Vol III.
- HOUZEL Ch., *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in *Abrégé d'histoire des mathématiques*, t. II, Paris Hermann, 1978, p. 1-113.
- KIEPERT L., *Siebzehntheilung des Lemniscatenumfangs durch alleinige Anwendung von Lineal und Cirkel*, Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd.75, p. 255-263, 1873.
- LORIA G., *Spezielle algebraische und transcendenten ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig, Teubner 1902.
- SIEGEL C.L., *Topics in complex function theory*. Wiley - Interscience, New-York 1969.

ANNEXE A L'ATELIER : ABEL ET LA LEMNISCATE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

IREM DE STRASBOURG

Le voyage d'Abel en Europe, vécu à travers sa correspondance.

Niels Henrik Abel est né le 5 août 1802 dans Finnø, petite île de la côte sud-ouest de la Norvège. Son père, pasteur, était un homme distingué, actif comme représentant élu aux deux premiers parlements de Norvège. Sa mère était louée pour son exceptionnelle beauté, bonne vivante, mais très tôt portée sur l'abus d'alcool. Niels Henrik était le second d'une famille de six enfants : cinq garçons et une fille. Leur enfance se situe dans la période la plus critique de l'histoire de la Norvège. Celle-ci avait à ce moment là son destin lié à celui du Danemark, ce qui l'entraîna dans les guerres napoléoniennes aux côtés de la France, subissant ainsi le blocage de ses côtes par la flotte britannique. Durant la guerre, un mouvement nationaliste se développa, dont l'un des premiers soucis était le ravitaillement du pays, mais qui fut aussi à l'origine de la création de l'Université de Christiania (aujourd'hui Oslo) grâce à une souscription nationale. L'épisode napoléonien tirant à sa fin au moment où la famille régnante en Suède s'éteignait, le gouvernement y choisit un des généraux de Napoléon pour assurer la succession : le maréchal Bernadotte qui, en bon émule de son empereur, envahit aussitôt le Danemark. Celui-ci dut céder la Norvège à son victorieux adversaire suédois, mais l'élection rapide d'une assemblée nationale, le *Storting*, permit de limiter la sujétion : le roi de Suède occupera le trône de Norvège, mais en lui accordant un gouvernement autonome. Le père d'Abel avait été élu représentant au *Storting* et y joua un rôle non négligeable pour garantir la liberté par un certain nombre d'articles inscrits dans la Constitution d'Eidsvoll, reconnue par Bernadotte.

C'est dans ce contexte difficile et agité que Abel passa son enfance à Gjerrestad la nouvelle paroisse de son père; celui-ci lui donna la première éducation, avant de l'envoyer, en 1815 à l'Ecole cathédrale de Christiania. Depuis l'ouverture de l'Université, en 1811, cette école était assez médiocre, ses meilleurs professeurs l'ayant quitté pour l'Université. Leurs remplaçants étaient moins qualifiés, souvent abrutis par l'alcool. Le professeur de mathématiques dut même donner sa démission après avoir cogné un de ses élèves tellement fort qu'il en mourut. A sa place fut nommé un jeune homme, ancien élève de l'Ecole, qui n'avait que sept ans de plus qu'Abel mais qui restera dans l'histoire comme celui qui a su éveiller le génie d'Abel: Berndt Michael Holmboe. Sans être lui-même un mathématicien de grand talent, il était cependant un excellent pédagogue, passionné de littérature et de musique, s'attachait à rendre son enseignement attrayant et laissant ses élèves travailler selon leur rythme. Voici comment lui-même évoque son rôle dans la formation mathématique qu'il procura à son élève, durant ses premières années :

"Il ne s'attira aucune attention particulière, jusqu'à ce qu'en 1818, époque d'où date ma nomination de professeur de mathématiques à ladite école, on accorda aux disciples quelques heures exprès pour les exercer à résoudre des problèmes algébriques ou géométriques. Ce fut alors que le talent d'Abel se développa d'une manière éclatante. Il fallut bientôt lui réserver des problèmes tout-express. Depuis ce temps il se voua aux mathématiques avec ardeur, et y fit des progrès énormes, et avec une rapidité qui n'appartient qu'au génie. Ayant rapidement passé le cours élémentaire, je lui donnais, sur sa demande, des leçons en particulier sur le calcul infinitésimal. Après l'avoir initié dans les éléments de cette science, je parcourus avec lui l'introduction et les institutions du calcul différentiel et intégral d'Euler. Dès-lors il commença à marcher seul. Il étudia les ouvrages de Lacroix, Francoeur, Poisson, Gauss et surtout ceux de Lagrange, et fit déjà lui-même quelques essais."

Lorsqu'en automne 1821 Abel entre à l'Université de Christiania il connaît l'essentiel des mathématiques de son temps et les problèmes que celles-ci posent aux mathématiciens d'alors. Encouragé par Holmboe mais sans ressources depuis la mort de son père en 1820, il obtient une place gratuite au dortoir de l'Université, et quelques professeurs se sont même concertés pour lui fournir, à leurs frais, une subvention, afin de "préserver ce rare

talent pour les sciences, talent d'autant plus digne d'attention qu'il s'accompagne de persévérance et de bonne conduite." L'Université n'avait rien à lui apprendre en mathématiques, mais favorisait le développement de ses propres recherches, quelque fois au détriment des autres cours. La tradition rapporte qu'un jour, pendant la leçon d'un certain professeur Sverdrup, il se leva brusquement, au grand étonnement de l'auditoire, et se précipita vers la porte en criant "Jeg har det!" ("Je la tiens", sous entendu : la solution)

Les professeurs de l'université de Christiania où étudiait Abel avaient bien compris que les capacités extraordinaires de celui-ci avaient besoin d'une stimulation qu'eux-mêmes étaient incapables de lui donner. Aussi deux d'entre eux, Hansteen et Rasmusen écrivirent au Conseil de l'université afin qu'il finance un voyage à l'étranger :

"Nous considérons qu'il est de notre devoir de recommander ce jeune homme, dont la moralité est au dessus de tout soupçon, pour une aide qui lui permette de continuer à cultiver une science où bien peu, à son âge, ont fait des progrès aussi remarquables que ceux dont il a donné des preuves. Le Conseil sait qu'il ne possède rien, et que c'est dans des conditions très précaires, et uniquement grâce aux souscriptions mensuelles de quelques uns, qu'il a pu vivre depuis son entrée à l'Université. Maintenant il lui faut une aide plus importante, afin qu'il puisse acquérir à son pays l'honneur que ses dons et ses progrès permettent d'espérer d'un tel savant. Nous estimons qu'un séjour à l'étranger dans les villes où se trouvent les mathématiciens les plus éminents contribuera de la manière la plus heureuse à son éducation scientifique. A Paris, il trouvera probablement l'occasion de faire insérer son travail sur l'intégration dans les Mémoires de l'Institut, et nous croyons que ce sera le moyen le plus rapide de le faire connaître."

Après quelques tergiversations, Abel obtint une bourse de 600 thalers pour un an de voyage, en même temps que trois autres camarades et amis de l'université : Christian Peter Boeck pour visiter les écoles vétérinaires afin de prendre la direction d'une telle école créée par le Storting sous l'impulsion du père d'Abel; les deux autres, Nicolas Benjamin Moller et Niels Otto Tank tous deux géologues, qui devaient faire des mesures du champ magnétique terrestre partout où ils se rendraient, et communiquer les résultats au professeur Hansteen. Abel avait dû envoyer un itinéraire détaillé de son voyage lequel devait se limiter à deux destinations : Göttingen pour y rencontrer Gauss; Paris qui représentait à ce moment là le pôle le plus important de la recherche mathématique avec Cauchy, Legendre, Lacroix, Fourier, Poisson, Laplace.

Mais Abel était trop dépendant de ses amis pour supporter l'idée de travailler seul à Paris. Boeck et Moller devaient passer tout l'hiver à Berlin, il décida de les y accompagner prenant ainsi dès le départ de sérieuses libertés avec l'itinéraire prévu. Ce fut sans aucun doute une des initiatives les plus heureuses que son caractère indépendant put prendre, car il y rencontra Crelle.

Avec ses amis, il passa la plus grande partie de l'hiver, y menant joyeuse vie au bal, au théâtre, en fêtes nocturnes au point de gêner leur locataire du dessus au n°4 Kupfergraber dans le voisinage de la Sprée. Un jour que le tapage devenait vraiment trop violent, celui-ci demanda à la logeuse quelle espèce de gens pouvaient bien faire un boucan pareil. "Des étudiants danois!" lui répondit-elle. "Des danois, que non! des ours russes oui!" répliqua-t-il furieux! Il faut dire, à la décharge du locataire ainsi dérangé qu'il était philosophe et s'appelait... Hegel!

Abel à Hansteen - Berlin (5 décembre 1825)

Professeur Hansteen!

J'aurais bien pu, et j'aurais dû, peut-être, vous écrire plus tôt, monsieur le Professeur; mais je désirais d'abord prendre quelques dispositions afin d'être en mesure de vous dire quel profit je tire et je tirerai de mon séjour ici. Vous aurez peut-être été surpris de ce que je suis venu d'abord en Allemagne; je l'ai fait, en partie parce qu'il se trouve que j'y vis avec des connaissances, et aussi parce que j'y suis moins exposé à ne pas employer mon temps le mieux possible, puisque je peux quitter l'Allemagne n'importe quand pour aller à Paris, qui doit être pour moi le lieu le plus important. Ici à Berlin, je n'ai pas trouvé grande ressource dans les bibliothèques publiques, car en ce qui concerne les mathématiques, elles sont étonnamment médiocres; il n'y a presque rien des travaux récents, et ce qui s'y trouve est très incomplet. Notre bibliothèque, si j'ose dire, est mieux pourvue. j'ai été assez heureux pour

faire la connaissance de deux mathématiciens distingués : le conseiller privé Crelle, et le professeur Dirksen. V. Schmidten m'avait parlé du premier comme d'un homme excellent à tous égards, et lorsque je suis arrivé à Berlin, je me suis rendu chez lui sans perdre de temps. Ce fut long, avant que je puisse lui faire bien comprendre le but de ma visite, et le résultat semblait devoir être lamentable, lorsque je pris courage à sa question sur ce que j'avais déjà étudié en mathématiques. Quand je lui eu cité quelques travaux des mathématiciens les plus éminents, il devint tout à fait empressé, et parut vraiment enchanté. Il engagea une longue conversation sur diverses questions difficiles qui n'étaient pas encore résolues, et nous en vinmes à parler des équations de degré supérieur; lorsque je lui dis que j'avais démontré l'impossibilité de résoudre l'équation générale du 5ème degré, il ne voulut pas le croire, et dit qu'il y ferait des objections. Je lui remis donc un exemplaire, mais il dit qu'il ne pouvait comprendre la raison de plusieurs de mes conclusions. Plusieurs autres m'ont dit la même chose, j'ai entrepris une refonte de ce travail.

Il parla beaucoup aussi du faible niveau des mathématiques en Allemagne, et dit que les connaissances de la plupart des mathématiciens se réduisaient à un peu de géométrie, et à quelque chose qu'ils appelaient Analyse, mais qui n'était rien d'autre que la théorie des combinaisons. Pourtant il semblait, à son avis, qu'une période plus heureuse pour les mathématiques allait commencer maintenant en Allemagne. Lorsque je lui exprimai mon étonnement qu'il n'existait pas ici de Journal de mathématiques, comme en France, il dit qu'il avait eu depuis longtemps l'intention d'entreprendre un pareil journal, et qu'il n'allait pas tarder à le lancer. Tout est prêt maintenant, et j'en suis très enchanté; car j'ai ainsi où faire paraître tel ou tel de mes petits travaux. - j'en ai déjà rédigé 4, qui doivent prendre place dans le premier fascicule, et comme je les ai écrits en français, Crelle est assez aimable pour les traduire. Mon peu de français m'est ainsi bien utile. Crelle, au sujet de la forme de mes articles, m'a dit qu'à son avis ils sont très clairs et bien écrits, ce qui me fait grand plaisir, car j'ai toujours craint d'avoir de la peine à développer mes idées d'une manière convenable. Mais il m'a conseillé de m'étendre davantage, surtout ici, en Allemagne. Il m'a aussi offert des honoraires pour mes articles, ce sur quoi je n'avais naturellement pas compté, aussi ai-je refusé; pourtant j'ai cru remarquer qu'il aurait préféré me voir accepter. Ce même Crelle a aussi une bibliothèque mathématique tout à fait remarquable, dont je me sers comme si elle était à moi, et qui m'est très utile, car elle contient toutes les choses les plus nouvelles, qu'il a aussi vite que possible. Il a entre autres la revue publiée à Paris sous la direction du baron de Ferrussac, le "Bulletin universel des sciences et de l'industrie", qui m'est d'une extrême utilité, car j'y trouve annoncés tous les livres et découvertes mathématiques. - Je suis invité chez Crelle une fois pour toutes le lundi soir. Il y a chez lui une sorte d'assemblée, et l'on s'y occupe principalement de musique, à quoi malheureusement je ne comprends pas grand chose. Je m'y amuse bien tout de même, car j'y rencontre toujours quelques jeunes mathématiciens avec qui je cause. Cela m'exerce aussi à l'allemand, ce dont j'ai grand besoin, et ce qui ne va guère bien. Chez Crelle il y avait aussi auparavant une réunion hebdomadaire de mathématiciens, mais il a été obligé de les interrompre, parce qu'il y avait un nommé Ohm avec qui personne ne pouvait s'entendre à cause de son effroyable arrogance. C'est vraiment une chose pénible qu'un seul homme se mette ainsi en travers, quand il s'agit de science. C'est extraordinaire à quel point les jeunes mathématiciens, ici à Berlin, et à ce que j'entends dire, partout en Allemagne, portent Gauss aux nues, pour ainsi dire. Il est pour eux la substance de toute perfection mathématique, mais, s'il est en effet certainement un grand génie, il est tout aussi sûr qu'il rédige mal. Crelle dit que tout Gauss écrit est une horreur¹, car c'est tellement obscur qu'il n'est presque pas possible de le comprendre. - Gauss travaille maintenant à un grand ouvrage sur l'astronomie physique, dont les trois premières parties sont prêtes à imprimer (à ce que me dit un de ses élèves qui est ici, à Berlin). Il s'y trouvera beaucoup de choses nouvelles. - Lorsque j'étais à Hambourg, j'ai rendu visite au Professeur Schumacher, qui m'a reçu avec beaucoup d'empressement, mais il ne se portait pas bien à ce moment là. J'y ai fait aussi connaissance avec T. Clausen, qui a certainement des dispositions remarquables pour les mathématiques; mais, autant que j'en ai pu juger, il n'avait pas étudié beaucoup. Le Professeur Encke, qui est maintenant nommé ici à l'Académie de Berlin, était aussi alors, à Hambourg, mais je ne l'ai pas vu. Il est bizarre

¹Gräuel en allemand, dans le texte.

qu'il n'y ait ici, à Berlin, aucune chaire d'astronomie. Encke ne donnera pas de leçons.

Je vois que je vais passer tout l'hiver à Berlin, et je n'ai pas encore bien décidé l'époque à laquelle je partirai. A cause de Crelle et du Journal, je resterais volontiers ici aussi longtemps que possible, et d'après ce que j'entends dire, il n'y a aucun autre endroit en Allemagne qui me sera plus profitable. Göttingen a, il est vrai, une bonne bibliothèque, mais c'est tout; car Gauss y est le seul qui sache quelque chose, et il est absolument inabordable. Pourtant, je dois aller à Göttingen, bien entendu. En somme, je voudrais visiter le plus d'universités que je pourrai, car je dois pouvoir récolter un peu dans chacune. -

Je vous prie, monsieur le Professeur, de saluer le professeur Rasmusen et B. Holmboe, et de dire à celui-ci que je lui écrirai bientôt une longue lettre mathématique.

Je souhaite de tout mon cœur que vous vous portiez bien, et je vous prie de continuer à me traiter avec la bonté que vous m'avez constamment témoignée. Je m'efforcerai de m'en rendre aussi digne que possible.

Respectueusement.

N. Abel.

Abel à Hansteen - Dresde 20 mars 1826

Très honoré monsieur le Professeur. Je vous remercie vivement, monsieur le Professeur, de vos salutations amicales dans la lettre de Boeck. Vraiment j'avais peur de m'être exprimé dans ma dernière lettre d'une manière un peu singulière, et peut-être l'ai-je fait. En général il faut que je vous prie de passer avec moi sur bien des choses, surtout en ce qui regarde la forme. - Vous m'avez complètement rassuré pour ce qui est de mon avenir, et vous m'avez par là rendu un vrai service, car j'avais quelques craintes, trop, peut-être. - J'éprouve une joie infinie de rentrer au pays, et de pouvoir être en mesure de travailler tranquillement. J'espère que tout ira bien, je ne manquerai pas de sujets d'ici plusieurs années, et il m'en viendra encore pendant le voyage car justement il me passe en ce moment beaucoup d'idées par la tête. La mathématique pure dans son sens le plus strict doit être à l'avenir mon étude exclusive. Je veux m'appliquer de toutes mes forces à apporter un peu plus de clarté dans la prodigieuse obscurité que l'on trouve incontestablement aujourd'hui dans l'analyse. Elle manque à tel point de plan et d'ensemble, qu'il est vraiment tout à fait merveilleux qu'elle puisse être étudiée par tant de gens, et le pis est qu'elle n'est pas du tout traitée avec rigueur. Il n'y a que très peu de propositions, dans l'analyse supérieure, qui soient démontrées avec une rigueur décisive. Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du particulier au général, et il est très singulier qu'avec une pareille méthode, il ne se trouve malgré tout que peu de ce qu'on appelle paradoxes. Il est vraiment très intéressant d'en rechercher la raison. - A mon avis cela provient de ce que les fonctions dont l'analyse s'est occupée jusqu'ici peuvent, la plupart, être exprimées au moyen de puissances. Aussitôt que d'autres interviennent, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, alors ça ne va plus, et de conclusions fausses découlent une foule de propositions incorrectes qui s'enchaînent. - J'en ai examiné plusieurs, et j'ai été assez heureux pour les tirer au clair [la plupart]. Pourvu qu'on emploie une méthode générale, ça va encore; mais j'ai dû être extrêmement circonspect, car les propositions une fois admises sans démonstration rigoureuse (c'est à dire, sans démonstration) se sont si fortement enracinées en moi, que je suis à chaque instant exposé à m'en servir sans y regarder de plus près. Ces menus travaux figureront dans le Journal publié par Crelle. - J'ai vraiment fait en cet homme une connaissance tout-à-fait excellente, et je ne puis assez louer mon heureuse étoile qui m'a conduit à Berlin. En vérité, je suis au fond un homme chanceux. Il y a peu de gens, il est vrai, qui s'intéressent à moi, mais ceux-là me sont infiniment précieux, parcequ'ils m'ont témoigné une si extrême bonté. Pourvu que je réponde en quelque mesure aux espérances qu'ils ont en moi; car ce doit être dur de voir la peine qu'on se donne en faveur de quelqu'un perdu. - Il faut que je vous raconte une offre que m'a faite Crelle avant mon départ de Berlin. Il voulait absolument me persuader de rester à Berlin pour toujours, et me décrivait les avantages que j'en pourrais avoir. Si je voulais, il m'offrait la direction du Journal, qui réussit bien, même pécuniairement. Il

semblait vraiment que cela lui tint à cœur, mais naturellement je refusai. Cependant je dus exprimer mon refus sous une forme voilée, disant que je le ferais si je ne trouvais pas de quoi vivre dans mon pays (ce que je ferais en effet). Comme conclusion, il dit qu'il renouvellerait son offre n'importe quand je voudrais. Je ne peux nier que cela m'a beaucoup flatté, mais n'étais-ce pas aussi bien joli ? Je dus au moins lui promettre une chose très formellement, savoir, de revenir à Berlin avant la fin de mon voyage à l'étranger, et je ne peux retirer du reste le plus grand profit. Il m'a donné en effet promesse tout-à-fait sûre de me procurer un éditeur pour mes mémoires plus étendus, et même, croiriez-vous ? avec des honoraires importants. Nous avons d'abord examiné entre nous si nous publierions ensemble de temps en temps une suite de travaux étendus, et cela devait commencer tout de suite; mais après un plus mûr examen, et après consultation avec un libraire à qui l'édition fut offerte, on considéra comme le mieux d'attendre jusqu'à ce que le Journal fût tout-à-fait lancé. Quand je reviendrai à Berlin, j'espère que notre plan pourra se réaliser. N'est-ce pas magnifique ? et n'ai-je pas raison de me féliciter d'être venu à Berlin ? Il est vrai que je n'ai rien appris des autres pendant mon séjour, mais je n'ai pas non plus considéré cela comme le but véritable de mon voyage. Les relations doivent être l'affaire principale en vue de l'avenir ? N'est-ce pas votre avis ? (...).

Vous écrivez dans votre lettre à Boeck, que vous vous demandez ce que je veux faire à Leipzig et aux bords du Rhin, mais j'aimerais savoir ce que vous direz si je vous raconte maintenant que je vais aller à Vienne et en Suisse ? J'avais d'abord pensé aller directement de Berlin à Paris, ce que j'espérais faire en compagnie de Crelle, mais il a eu des empêchements, et j'aurais donc voyagé seul. Or je suis ainsi fait que je ne supporte pas du tout, ou du moins très difficilement, d'être seul. Je deviens alors tout triste, et ne je suis pas alors dans la meilleure disposition pour faire quelque chose. Je me suis donc dit que le mieux était de partir avec Boeck etc. pour Vienne, et je peux aussi justifier cela, ce me semble, puisqu'à Vienne il y a Littrow, Burg et d'autres. Ce sont vraiment des mathématiciens distingués, et à cela s'ajoute que je ne voyagerai guère qu'une fois dans ma vie. Peut-on me reprocher de désirer aussi voir quelque chose de la vie et des manières du sud. Je peux aussi travailler assez bien pendant ce voyage. Une fois à Vienne, pour aller à Paris, la ligne droite traverse presque la Suisse. Pourquoi n'en verrais-je pas aussi quelque chose ? Pardieu ! Je ne suis pourtant pas tout-à-fait dénué du sens des beautés de la nature. Le voyage entier me fera arriver à Paris deux mois plus tard, et cela n'a pas d'importance. Je rattraperai bien cela. Ne croyez vous pas qu'un tel voyage me fera du bien ? De Vienne à Paris je voyagerai probablement en compagnie de Keihlau. Alors nous nous mettrons furieusement au travail. - Je pense que ça ira bien...

Comme on le voit, Abel continue à n'en faire qu'à sa tête, alors que la bourse de voyage qui lui était offerte par l'Université de Christiania devait le mener en priorité chez Gauss et à Paris. Gauss était à ce moment là au sommet de sa gloire. Installé à Göttingen, il y vivait, admiré mais assez isolé et sans doute peu compris des mathématiciens allemands de l'époque qu'il dépassait de très loin par son génie. Gauss n'éprouvait aucun désir de s'entourer d'élèves, préférait entretenir une correspondance scientifique avec quelques amis choisis et publiait de temps en temps, après des années de mise au point un de ses chefs-d'oeuvres incomparables de clarté et de profondeur.

Le jeune Abel était sûrement décidé à respecter la demande de l'Université de Christiania pour lui rendre visite, mais en même temps, il appréhendait beaucoup une telle rencontre. Gauss ne s'était pas manifesté après la publication d'Abel sur l'équation du 5e degré. De plus, le jeune étudiant avait eu le malheur de faire parvenir à l'ami et correspondant de Gauss, Schumacher, à Altona près de Hambourg, un petit article "Sur l'influence de la lune sur le mouvement du pendule" qui contenait une grossière erreur que Schumacher releva aussi tôt, et lui fit refuser la publication dans sa revue les "Astronomische Nachrichten". Schumacher en avait informé son collègue Gauss ajoutant néanmoins que "quiconque aurait jugé Abel sur la base de cet article, aurait commis une grossière erreur". On comprend que le jeune homme ne pouvait se sentir à l'aise en face du "princeps mathematicorum" et que tous les prétextes furent bons pour retarder le plus possible sa visite, peut être dans l'espoir secret que Gauss manifeste tôt ou tard son intérêt pour l'un ou l'autre article qu'Abel publiait maintenant régulièrement, dans chaque livraison du Journal de Crelle. Il n'en fut rien, non pas sans doute, que Gauss fut indifférent aux travaux d'Abel, on le verra, mais de tempérament réservé et prudent, il ne se manifestait guère en public. Toujours est-il que, jeune et

inexpérimenté, Abel se laissa effrayer par des récits sur son orgueil et son caractère inabordable "particularités que la sottise et le préjugé attribuaient alors, comme aujourd'hui et comme toujours, à l'homme vraiment supérieur". Longtemps et régulièrement, il écrivit aux professeurs de Christiania son intention prochaine d'accomplir sa visite.

"Göttingen a, il est vrai, une bonne bibliothèque, mais c'est tout; car Gauss y est le seul qui sache quelque chose, et il est absolument inabordable. Pourtant je dois aller à Göttingen, bien entendu."¹

"Il est probable que je reste ici à Berlin jusqu'à la fin de février ou jusqu'en mars, et que je passe ensuite par Leipzig et Halle pour aller à Göttingen (non pas pour Gauss car il est, paraît-il, insupportablement orgueilleux, mais pour la bibliothèque qui est, dit-on magnifique)."²

un peu plus tard, de nouveau à Hansteen :

"A Göttingen je ne resterai que peu de temps, puisqu'il n'y a rien à y gagner. Gauss est inabordable, et la bibliothèque ne peut être meilleure qu'à Paris."

Finalement Abel ira à Paris sans passer par Göttingen, remettant cette visite au voyage de retour.

"Je vais en effet bientôt quitter Paris où je n'ai plus rien à pêcher, et j'irai tout d'abord à Göttingen faire le siège de Gauss s'il n'est pas trop cuirassé d'orgueil."³

Mais il était trop tard, il lui restait juste assez d'argent de sa bourse pour atteindre Berlin, retrouver Crelle, son seul véritable soutien.

"L'imagination, dira Mittag-Leffler, se plaît à se représenter les résultats possibles d'un échange personnel de vues entre un Abel et un Gauss. Cependant, comme il devait mourir si jeune, une visite à Göttingen aurait probablement diminué sa place dans l'histoire des mathématiques. Il aurait trouvé Gauss depuis des années en possession de quelques-unes de ses propres découvertes (...) et la postérité n'aurait pu, après cela, savoir ce qui appartenait primitivement à Abel, et ce qu'il aurait appris de Gauss".

Lorsque Gauss eut connaissance de l'article d'Abel : "Recherches sur les fonctions elliptiques", il répondit à Crelle qui lui proposait de publier ses propres recherches sur le sujet :

"Abel m'a devancé pour un bon tiers de mon travail. Il a suivi exactement la même voie où je suis entré en 1798. Aussi ne suis-je pas surpris qu'il soit parvenu, pour la plus grande part, au même résultat. Comme de plus il montre dans sa composition une acuité, une profondeur et une élégance extrêmes, je me vois délié de l'obligation de rédiger mes propres recherches."

Arrivé le 10 juillet 1826 à Paris, c'est une existence toute nouvelle qui commence pour Abel, bien différente des heureuses rencontres faites à Berlin et de l'insouciance gaieté de son voyage. D'abord parce que, pour la première fois, il se retrouve seul, sans ses amis Boeck, Möller ou Keilhau, et dans un pays dont il maîtrise encore mal la langue. Ensuite, parce que c'est l'été et que l'activité est ralentie et les institutions en vacances. Alors Abel écrit, à ses amis, à sa famille, à ses professeurs, faisant part de sa nostalgie du pays, mais aussi de ses impressions et de son travail. Laissons lui la parole, car ses lettres sont tellement évocatrices de sa situation, de sa personnalité, de sa sensibilité, que rien d'autre ne saurait mieux les décrire. De plus, elles nous donnent un portrait caustique et plein de verve des savants parisiens du début du XIX^{ème} siècle.

¹Première Lettre à Hansteen; Berlin; fin 1825.

²Lettre à Hohmboe; Berlin; 16 janvier 1826.

³Lettre à Hohmboe; Paris; 24 octobre 1826.

Me voici enfin arrivé au foyer de tous mes vœux mathématiques, à Paris. J'y suis déjà depuis le 10 juillet. Vous trouvez que c'est un peu tard et que je n'aurais pas dû faire le long détour par Venise. Cher M. Le Professeur, cela me fait beaucoup de peine d'avoir fait quelque chose qui n'a pas votre approbation; maintenant que c'est fait, il faut que je me réfugie dans votre bonté, j'espère que Vous avez assez de confiance en moi pour croire qu'en somme j'emploierai bien mon voyage. Certes, je le ferai. Pour mon excuse je n'ai rien d'autre à dire, sinon que mon désir était grand de regarder un peu autour de moi; voyage-t-on uniquement pour étudier ce qui est étroitement scientifique ? Après cette excursion je travaille avec d'autant plus d'ardeur. A Botzen j'ai quitté Möller, Boeck et Keilhau, et je suis parti pour Paris le plus vite possible. (...) Pour me mettre mieux au français, je me suis logé dans une famille où j'ai tout pour 120 francs par mois. Le mari et la femme sont très aimables, et je suis bien, sauf que la chambre est très mauvaise et que je ne mange pas plus de deux fois par jour. J'ai eu beaucoup de peine à trouver cette installation; et je ne m'en serais peut-être pas tiré si par bonheur je ne m'étais rappelé le peintre Gorbitz dont vous avez parlé. Il s'est montré à mon égard aussi prévenant et obligeant qu'on peut le désirer. Je vais le voir souvent. Il vous présente ses compliments empressés. Il ira en Norvège l'été prochain. - J'ai été chez le Directeur de l'observatoire, M. Bouvard, et je lui ai remis une lettre de recommandation de Littrow. Il a été "très amical",¹ m'a montré l'observatoire, qui naturellement est excellent, et s'est offert pour me présenter aux mathématiciens les plus remarquables quand je voudrais me rendre à l'institut. Je n'ai cependant pas encore profité de cette offre, parce que j'aimerais d'abord pouvoir parler un peu français. En outre je veux avant tout avoir achevé un mémoire auquel je travaille, et que je veux présenter à l'Institut. Quand il sera fini, ce qui arrivera bientôt j'irai. J'ai très bien réussi dans ce mémoire, qui contient beaucoup de choses nouvelles, et qui mérite, je crois, d'être remarqué. C'est la première ébauche d'une théorie d'une infinité de fonctions transcendentes.² - J'ai l'espoir que l'Académie le fera imprimer dans les Mémoires des Savants étrangers. Sinon, je le ferai imprimer moi-même, ou je l'enverrai à Gergonne à Montpellier pour être inséré dans les Annales de mathématiques. - je lui enverrai bientôt autre chose. J'ai toute une série de mémoires prêts, dont les uns paraîtront dans lesdites Annales etc., d'autres dans le "Journal der Mathematik" de Crelle, d'autres dans les "Annalen der Wiener-Sternwarte" de Littrow, et enfin quelques uns seront présentés à l'Institut. Vous pouvez voir que je fais de mon mieux. - Du Journal de Crelle les trois premiers fascicules ont paru, et il semble qu'il marche bien, ce qui me fait grand plaisir, puisque j'ai une certaine part dans son succès. Dans ces trois fascicules il se trouve 6 articles de moi, si je ne me trompe pas; car je n'ai encore reçu que le premier numéro. Je recevrai bientôt de Crelle les deux autres. J'ai envoyé le premier de Trieste à Bohr par un bateau à poisson de Bergen, mais il ne sera pas de retour avant longtemps. - J'ai été chez Legendre avec mon hôte, qui est un brigand autodidacte en mathématiques. Il était sur le point de sortir en voiture, en sorte que je ne lui dit que quelques mots. Il paraît que c'est un vieillard tout-à-fait distingué. Comme mathématicien il est assez connu. - Une fois par semaine il y a des soirées chez lui. Je pense y être invité. J'ai été chez le baron de Ferussac, l'éditeur du Bulletin etc. il n'était pas chez lui. Je peux y aller en soirée une fois par semaine, et j'y ai l'occasion de voir toutes les revues possibles et les livres nouvellement parus, ce qui est une bonne chose en cette saison où toutes les bibliothèques possibles sont fermées. Je n'ai vu Poisson que sur une promenade publique; il m'a paru très épris de lui-même. Il paraît pourtant qu'il ne l'est pas. - "Voilà toutes mes connaissances"; mais ce ne sera pas long avant que j'en fasse davantage, maintenant que j'ai mis un peu en mouvement ma langue française. Les français me paraissent très difficiles à comprendre. (...) Möller rentrera bientôt au pays, il est fatigué de voyager, et je ne peux pas dire autrement : je commence à sentir fortement la nostalgie. D'autant plus que Paris ne sera certainement pas le séjour le plus agréable : il y est si difficile de faire sérieusement connaissance avec les gens. Ce n'est pas comme en Allemagne. -

J'ai acheté pas mal de livres mathématiques, et j'ai pensé à en acheter davantage, surtout des mémoires séparés

¹En allemand dans le texte; gar freundlich.

²En français dans le texte.

que l'on ne peut pas avoir si l'on n'est pas sur place; mais comme cela coûtera assez cher, j'ai pensé à proposer à Holmboe de les acheter ensemble. Entre autres il est nécessaire que j'aie la partie mathématique du Bulletin de Ferussac. -

Cela me sera extrêmement agréable, M. le Professeur, s'il y a quelque chose que je puisse faire pour vous ici à Paris. Je ferai certes de mon mieux. - Mon adresse est

M^e de Cotte Rue Ste Marguerite N^o 41. Faub. St. Germain

Abel à Holmboe

[Paris, 24 octobre]

Tu t'y entends à garder le silence, il faut le reconnaître. Il m'a tant tardé de recevoir quelques mots de toi, tu ne peux pas t'en faire une idée. La seule raison pour que tu n'aies pas écrit doit être que tu n'as pas reçu ma dernière lettre datée de Botzen (Bolzano). Il y a déjà 4 mois et plus qu'elle a été envoyée. Voyons, mon ami, ne me cause plus de déception, et envoie moi quelques mots qui me consolent et me réconfortent dans ma solitude. Car, bien que je sois dans la ville la plus bruyante du continent, je me trouve comme si j'étais dans un désert. - Je ne connais presque personne. Cela tient à ce que tout le monde pendant l'été habite à la campagne, et est par suite invisible. - Jusqu'à présent je n'ai fait connaissance qu'avec Legendre, Cauchy et Hachette, plus quelques mathématiciens secondaires, mais fort habiles, Monsieur Saigey, directeur du "Bulletin des sciences etc." et Herr Le-Jeune Dirichlet, un prussien, qui l'autre jour est venu me trouver, me considérant comme un compatriote. C'est un mathématicien très sagace. Il a démontré en même temps que Legendre l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^5 + y^5 = z^5$ et d'autres jolies choses. - Legendre est un homme extrêmement aimable, mais par malheur "vieux comme les pierres".¹ Cauchy est fou² et il n'y a rien à faire avec lui, bien qu'il soit en ce moment le mathématicien qui sait comment il faut traiter les mathématiques. Ses travaux sont excellents, mais il écrit d'une manière très confuse. Au commencement je ne comprenais presque rien à ce qu'il écrit, maintenant ça va mieux. Il fait imprimer à présent une série de mémoires sous le titre "Exercices des mathématiques".³ Je les achète et les lis assidûment. 9 fascicules ont paru depuis le commencement de l'année. Cauchy est extrêmement catholique, chose bien étrange pour un mathématicien. Il est d'ailleurs le seul qui travaille aujourd'hui dans les mathématiques pures. Poisson, Fourier, Ampère etc.etc. ne s'occupent absolument que de magnétisme et d'autres affaires de physique. Laplace n'écrit plus guère. La dernière chose qu'il ait faite était un supplément à la "Théorie des probabilités". Il dit que c'est son fils, mais en réalité c'est bien lui. Je l'ai vu souvent à l'Institut. Il a l'air alerte et petit, mais il a le défaut que le diable boiteux reproche à Zambullo, c'est à dire "la mauvaise habitude de couper la langue aux gens".⁴ Poisson est un petit homme avec un joli petit ventre. Il porte son corps avec dignité. De même Fourier: Lacroix est effroyablement chauve et remarquablement vieux. Lundi je serai présenté à la plupart de ces messieurs par Hachette. D'ailleurs je n'aime pas autant le français que l'allemand: le français est extrêmement réservé à l'égard des étrangers. Il est très difficile d'arriver à des relations intimes avec lui. Et je n'ose espérer y parvenir. Chacun travaille à part sans s'occuper des autres. Tous veulent instruire et personne ne veut apprendre. L'égoïsme le plus absolu règne partout. La seule chose que le français recherche chez les étrangers est le côté pratique; personne ne sait penser en dehors de lui. Il est le seul qui sache produire quelques chose de théorique. Telles sont ses idées, et dès lors tu peux comprendre qu'il est difficile d'attirer l'attention, surtout pour un débutant. - J'ai achevé un grand mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendentes pour le présenter à l'Institut. Cela aura lieu lundi. Je l'ai montré à Cauchy: mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter qu'il est bon. Je suis curieux d'entendre le jugement de l'Institut.

¹Steinalt, en allemand, dans le texte.

²En français dans le texte.

³En français dans le texte.

⁴En français dans le texte.

Tu en seras informé quand le moment sera venu. - J'ai écrit plusieurs autres mémoires particulièrement pour le Journal de Crelle dont 3 numéros ont paru. De même pour les Annales de Gergonne qui tombent de jour en jour. Il devient trop vieux. Il en est de lui comme de v. Zach, il est vrai que celui-ci n'a jamais rien valu. Un résumé de mon mémoire sur l'impossibilité de résoudre les équations algébriques est inséré dans le bulletin de Ferussac. Je l'ai écrit moi-même. J'ai fait et je continuerai à faire d'autres articles pour ce bulletin. - C'est un travail diablement ennuyeux quand on n'a pas écrit soi-même le mémoire, mais je le fait à cause de Crelle, le plus brave homme que l'on puisse imaginer. - Je correspond régulièrement avec lui, et j'ai de lui une masse de lettres, autant que j'en ai reçu de ma fiancée. Aujourd'hui j'ai écrit à un mathématicien, Kulp, de Darmstadt, qui m'a demandé des éclaircissements sur plusieurs passages de mes mémoires. Une relation par correspondance. - Je travaille à présent à la théorie des équations, mon sujet favori, et je suis enfin parvenu à ce point que je vois le moyen de résoudre le problème général suivant. "Déterminer la forme de toutes les équations algébriques qui peuvent être résolues algébriquement".⁵ J'en ai trouvé des quantités innombrables des 5ème, 6ème, 7ème degrés etc. qu'on n'a pas encore flairées jusqu'à présent. En même temps j'ai la solution la plus directe des équations des 4 premiers degrés, d'une manière qui met clairement en évidence pourquoi précisément celles-ci peuvent être résolues, et pas d'autres. En ce qui concerne l'équation du 5ème degré, j'ai trouvé que si une telle équation est résoluble algébriquement, la racine doit avoir la forme suivante

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''}$$

où R, R', R'', R''' sont les 4 racines d'une équation du 4ème degré, et qui peuvent être exprimées par des racines carrées seulement. - J'y ai éprouvé des difficultés pour les expressions et les signes. - En outre je m'occupe des quantités imaginaires pour lesquelles il y a beaucoup à faire, du calcul intégral et surtout de la théorie des séries infinies dont la base est si peu établie. - Je ne pourrai rien en tirer de développé avant d'avoir achevé mon voyage à l'étranger et d'être revenu au calme chez nous, si cela arrive. Je regrette d'avoir demandé une bourse de 2 ans, un an et demi aurait grandement suffi. J'ai fortement la nostalgie, et beaucoup moins d'avantage, à partir de maintenant, à rester ici et ailleurs, que l'on ne pourrait peut être croire. J'ai pris connaissance de tout ce qui existe d'important et d'insignifiant dans les mathématiques pures, et mon désir est maintenant de pouvoir consacrer mon temps à mettre en oeuvre ce que j'ai amassé. Il y tant de choses que j'ai en projet, mais tant que je serai à l'étranger, cela n'ira pas comme il faudrait. Si j'étais dans la peau de Keilhau pour le professorat! Je ne suis pas tranquille, mais je n'ai pas peur non plus; car si ça casse d'un côté, ça tiendra bon d'un autre. Quels appointements as-tu? Vas tu te marier, est-tu fiancé et avec qui, il faut me répondre à toutes ces questions; car mes pensées se reportent souvent vers toi et tout ce qui te concerne. Je n'ai pas une telle abondance d'amis que je cours le risque d'oublier ceux que j'ai.

Je mène d'ailleurs une existence très sage. Je travaille, je mange, je bois, je dors, et je vais parfois à la Comédie; c'est de tout ce qu'on appelle plaisir le seul que je m'accorde, mais c'en est un grand. Je ne connais pas de plus grand plaisir que de voir une pièce de Molière où joue Mlle Mars. Alors, je suis tout à fait ravi; elle a 40 ans, mais elle joue tout de même des rôles très jeunes. Talma le grand tragédien célèbre est mort il y a quelques jours. Le théâtre français a été fermé 2 soirs à cette occasion, et les autres théâtres aussi. - Une foule immense a suivi son cercueil. Celui-ci a été porté directement au cimetière sans passer d'abord par l'église, selon l'usage ordinaire; en qualité d'acteur il est exclu "de la communion des fidèles".¹ Ridicule mais indifférent. Il a fait élever ses enfants, qui sont tous naturels, dans la religion protestante. - Il eut de son vivant trois grands défauts. Il se laissait entraîner par le jeu, les femmes, et la manie de bâtir, les trois choses poussées très loin. - Les acteurs lui font élever un monument pour 12 000 fr. Je vais aussi de temps en temps au Palais royal que les parisiens appellent "un lieu de perdition".² On y voit en assez grand nombre "des femmes de bonne volonté".³ Elles ne sont nullement

⁵En français dans le texte.

¹En français dans le texte, écrit tel quel.

²En français dans le texte, écrit tel quel.

³En français dans le texte, écrit tel quel.

indiscrètes. Tout ce qu'on entend est "Voulez vous monter avec moi mon petit ami; petit méchant".⁴ Naturellement, en ma qualité de fiancé etc. je ne les écoute pas et je quitte le Palais royal "sans la moindre tentation".⁵ Il y en a beaucoup de fort jolies.-

L'autre jour j'ai été à un dîner diplomatique chez son Ex. le comte Löwenhjelm, où je me suis un petit peu grisé, ainsi que Keilhau, mais très légèrement. Il est marié avec une jeune française. Il a raconté que tous les ans le 24 décembre il fait rouler sous la table tous les compatriotes. - Notre "Monsieur"⁶ Skramstad est ici maintenant. Il habite avec 3 Suédois un faubourg de la ville. Il circule, vêtu en paysan du Hedemarken, bas de laine bleue et veste rayée. Je ne l'ai pas vu, mais on me l'a décrit. Il parle suédois. - J'habite ici dans une famille où j'ai "la chambre et la table et la blanchisseuse"⁷ pour 120 fr par moi. Le mari est un peu mathématicien mais très bête, et la femme très brouillonne, de 35 ans et plus. On parle toujours à table par équivoques, sur "les secrets du ménage etc."⁸ L'autre jour ça a été si loin qu'une dame a dit que l'oie qui était sur la table serait transformée le lendemain en un "étron".⁹ - Parler de pots de chambre etc. est parmi les choses les plus convenables. Je bois toujours le café dans "mon petit pot de nuit".¹⁰ - D'ailleurs je mange très bien, mais 2 fois par jour seulement. Le matin "un déjeuner à la fourchette"¹¹ et l'après-midi à 5 heures 1/2 un long dîner. Entre 1 bouteille de vin et 1 bouteille 1/2 tous les jours.-

Je suis maintenant absolument seul, Keilhau étant parti depuis peu (16 octobre) pour rentrer au pays par mer. Je l'ai chargé d'une quantité de livres dans une grande malle rouge adressée à toi, je te prie de me la garder avec le contenu. J'ai acheté ce que j'ai pensé que l'on n'avait pas chez nous. J'en ai d'autres que j'enverrai au printemps. Parmi les livres il y a le 5ème "Tome" de la "Mécanique céleste". Il est destiné au professeur Hansteen, parce que je sais qu'il a les 4 premiers volumes. Tu auras peut-être la bonté de le lui remettre avec tous mes compliments. - voilà donc la "Mécanique" achevée. Celui qui a écrit un pareil livre peut avec plaisir jeter un regard en arrière sur sa vie scientifique. - Legendre a fait imprimer un remaniement de ses "Exercices" (sic) mais cela n'a pas encore paru en librairie. - Les mathématiques subissent un vilain recul en France. - Les jésuites veulent gouverner et les journaux sont pleins de polémiques à propos d'eux. C'est une vermine du diable. Il y a quelques jours un jeune jésuite a dénoncé un grand nombre d'entre eux et va encore en dénoncer 300 autres. D'après ce qu'il raconte ils doivent être les gens les plus affreux de la terre. On a voulu l'assassiner tout récemment, mais il a échappé. - J'ai prêté à Keilhau 180 marcs banco.¹ - Je l'ai prié de te les remettre. Tu auras la bonté de les recevoir. Peut-être serai-je obligé de t'importuner en te priant de me les envoyer en une traite sur Hambourg; Encore ceci, rien qu'une humble question : pourrais-tu me prêter 220 marcs,² en sorte que ça ferait 400 en tout. Tu me rendrais un très grand service. Car j'aurais diablement envie de passer par Berlin avant de rentrer au pays, et d'acheter ici plusieurs choses que je ne pourrais avoir chez nous, ou qui coûteraient trois fois plus cher. Ne te fâche pas de ma question, et réponds y tout de suite. N'oublie pas : le plus vite possible. Une longue lettre avec beaucoup de nouvelles. Salue tous les bons amis et n'oublie pas ton ami.

N. Abel

⁴En français dans le texte, écrit tel quel.

⁵En français dans le texte, écrit tel quel.

⁶En français dans le texte, écrit tel quel.

⁷En français dans le texte, écrit tel quel.

⁸En français dans le texte, écrit tel quel.

⁹En français dans le texte, écrit tel quel.

¹⁰En français dans le texte, écrit tel quel.

¹¹En français dans le texte, écrit tel quel.

¹Environ 225 f.

²Environ 275 f.

[Paris décembre 1826]

Cher ami! Mille remerciements pour tes deux lettres, les biens venues, et aussi parceque tu as été si exact. Si j'avais su que tu avais écrit, je n'aurais pas osé demander un grand sacrifice. - Ne te fâche pas de ma demande d'argent. J'ai deux véritables amis, et je suis bien obligé de les importuner malgré moi. - Peut-être je pourrai t'épargner, mais il est probable que je ferai appel à ta bonté. Pas tout de suite, mais quand j'arriverai à Berlin. Je vais en effet d'ici peu quitter Paris où je n'ai rien à pêcher, et j'irai tout d'abord à Göttingen pour faire le blocus de Gauss s'il n'est pas trop fortifié d'orgueil. Et je préfère être maintenant en Allemagne pour y apprendre un peu plus d'allemand, ce qui sera pour moi de la plus grande importance plus tard. - Je me tire d'affaire avec le français autant qu'il faut pour écrire un Mémoire et je voudrais bien pouvoir en faire autant en allemand. Tu écris que tu as lu les deux premiers fascicules du Journal de Crelle. Les mémoires que j'y ai publiés, "excepté"¹ celui sur les équations, n'ont pas grande importance, mais tu verras, cela viendra. J'espère que tu seras content d'un mémoire sur une intégrale, qui se trouve dans le troisième fascicule, un long mémoire; mais surtout je suis content d'un qui s'imprime en ce moment pour le 4ème fascicule, sur la simple série $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots$ J'ose dire que c'est la première démonstration parfaitement rigoureuse de la formule du binôme dans tous les cas possibles, en même temps que d'une quantité d'autres formules en partie connues, mais insuffisamment établies. Dans le prochain numéro (janvier) des Annales de Gergonne paraîtra un petit mémoire de moi sur l'élimination. C'était un essai pour voir s'il voudrait imprimer. J'en enverrai ces jours-ci un meilleur sur le développement de fonctions ("continues ou discontinues") selon des cos. ou sin. d'arcs multiples.² J'y démontre une formule connue que l'on a jusqu'ici démontrée d'une manière inexacte. Item j'envoie à Gergonne un grand mémoire sur les "fonctions elliptiques"³ où sont exposées beaucoup de choses curieuses qui, je m'en flatte, vont piquer la curiosité de plus d'un. -

J'ai trouvé que l'on peut partager la lemniscate avec la règle et le compas en $2^n + 1$ parties lorsque ce nombre est premier. La division dépend d'une équation dont le degré est $(2^n + 1)^2 - 1$. Mais j'en ai trouvé la solution complète par des radicaux carrés. J'ai découvert du même coup le mystère qui enveloppait la théorie de Gauss sur la division du cercle. Je vois clair comme le jour comment il y est parvenu. - Ce que je dis là de la lemniscate est un des résultats que j'ai tirés de mes études sur la théorie des équations. Tu ne peux pas t'imaginer combien de jolies propositions j'y ai trouvées, par ex. : Si une équation $P = 0$, dont le degré est $\mu\nu$ où μ et ν sont des nombres premiers entre eux, est résoluble d'une manière quelconque par des radicaux, P est ou bien "décomposable en μ facteurs du degré ν "⁴ dont les coefficients dépendent d'une équation du μ degré, ou en " ν facteurs de degré μ "⁵ dont les coefficients dépendent d'une équation du degré ν .

Le voyage à Paris s'est révélé plutôt décevant pour Abel, qui quitte la capitale française sans regret à la fin de 1826. "J'aurais diablement envie de passer par Berlin avant de rentrer au pays" écrit-il à son ami Holmboe, car là il se sentait bien mieux apprécié et soutenu, en particulier par Crelle. Il aurait aussi dû passer chez Gauss à Göttingen, mais décidément ce ne sera pas encore pour cette fois-ci, faute d'argent. Abel a pratiquement épuisé les ressources de sa bourse, après avoir différé au maximum son départ de Paris, dans l'espoir toujours déçu d'une réponse de Cauchy ou de Legendre, au sujet de son grand mémoire "sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes"⁶

¹En français dans le texte.

²En français dans le texte.

³En français dans le texte.

⁴En français dans le texte.

⁵En français dans le texte.

⁶voir l'Ouvert n° 92, p. 25.

[Berlin, 15 janvier 1827]

Cher ami Boeck,

Tu seras sans doute étonné que je sois déjà à Berlin. Mais je ne pouvais pas tenir plus longtemps, faute d'argent. J'ai donc dû me hâter de partir au plus tôt tandis que j'avais encore de quoi faire le voyage jusqu'ici. Lorsque je suis arrivé ici il y a 5 jours, ma fortune entière s'élevait à 14 thalers. De Backer j'en ai reçu 50. Je suis obligé de te demander au plus vite ce que tu me dois.

J'ai vraiment peur de l'avenir. J'aurais presque envie de rester pour toujours ici en Allemagne, ce que je peux faire sans difficulté. Crelle m'a terriblement poussé dans mes retranchements pour me faire rester ici. Il est un peu fâché contre moi parce que je refuse. Il ne comprend pas ce que je veux faire en Norvège, qui lui paraît être une autre Sibérie.

Mon voyage de Paris ici a été terriblement vide. Je suis parti de Paris par la diligence pour Bruxelles par Valenciennes. J'ai été tout le temps seul avec une danseuse, non du grand opéra mais d'un des théâtres secondaires. - Dangereux voisinage, la nuit. Elle a dormi dans mes bras, bien entendu, mais c'est tout. D'ailleurs j'ai tenu avec elle une conversation très édifiante sur l'instabilité des choses en ce monde. A Bruxelles, qui est une très jolie ville, je ne suis resté qu'une nuit et un jour et j'ai couru tout le temps par la ville. J'en suis parti de même avec la diligence pour Aix la Chapelle par Liège. J'étais en compagnie d'un garçon fort poli de Francfort sur le Main. Jusqu'à Liège tout le monde parle français. A Aix il me semblait être comme un peu plus chez nous. Puis séjour à Cologne sur le Rhin; ville extrêmement vieille et laide avec beaucoup de filles. J'y suis resté un jour et deux nuits, et suis parti avec la Poste pour Cassel par Elberfeld et Arnberg. Il paraît que cette région est extraordinairement belle, mais la nuit et l'hiver m'on empêché de la remarquer. Entre Elberfeld et Arnberg nous eûmes le malheur de passer sur le corps d'un garçon de 7 à 8 ans. Il est resté mort sur place. La voiture lui avait roulé sur le ventre. - On continua la route sans s'arrêter. - A Cassel, qui est une très jolie ville, j'ai passé la nuit et j'ai été à la Comédie. Le théâtre est très joli et on y jouait bien. - A Cologne j'ai aussi été au théâtre, mais [il était] mauvais. De Cassel je suis parti avec la voiture de poste spéciale (Extrapost) pour Magdebourg en compagnie d'un négociant qui allait à Berlin et à Königsberg. Nous traversâmes le Harz. Ça doit être très beau l'été. De Quedlinburg à Magdebourg, la route est la plus détestable que j'aie suivie. Nous étions deux dans la voiture et bien que nous eussions fait atteler 4 chevaux, nous n'avancions qu'à grand peine. A Magdebourg je passai encore la nuit, et j'en partis pour Berlin avec un cocher de louage. La route est excellente, mais la compagnie fut affreuse, un cordonnier, un gantier et un soldat libéré. Constamment ils buvaient de l'eau de vie. Je m'ennuyais, et personne n'a été plus heureux que moi, lorsqu'après deux jours de voyage, je suis entré dans Berlin par la Porte de Potsdam. - Je n'ai pas entendu parler avant mon départ du mémoire que j'ai déposé à l'Académie de Paris.

Abel à Holmboe

[Berlin, 20 janvier 1827]

Je te remercie vivement de tes deux lettres; tu auras appris sans doute par Skjelderup que je les ai reçues. Certes, j'aurai dû t'écrire depuis longtemps, mais j'attendais d'abord la solution au sujet de mon mémoire que j'ai déposé à l'Institut. Mais ces hommes lents n'en finissaient pas. Legendre et Cauchy étaient juges. Cauchy "rapporteur".¹ Legendre a dit "ça prendra".² La-dessus mon voyage de Berlin m'est arrivé comme la Noël sur la bonne femme. - Cette fois-ci encore tu n'auras pas grand chose de moi; j'ai si terriblement à faire pour le Bulletin de Ferussac et le Journal de Crelle. A bientôt davantage.

¹En français dans le texte.²En français dans le texte.

Et maintenant ce que je voulais surtout - de l'argent. Tu as été assez bon pour me promettre de m'aider. Comme je me trouve dans un embarras du diable, je voudrais naturellement avoir tout ce que tu pourras et le plus possible. - Quand à la remise, le mieux est que tu en parles au professeur Maschmann. Il a un commissionnaire à Hambourg. Ici son fils a promis d'en écrire deux mots à son père. C'est bien le plus commode que tout soit adressé en Hamburger-Banco. - Ne te fâche pas si je t'importune tellement, mais que veux tu que je fasse, moi "pauvre diable" ?

Abel à Holmboe

[Berlin, 4 mars 1827]

Le résultat de ton dévouement, excellent Holmboe, et de mon bout de lettre, je l'ai appris déjà depuis plusieurs jours, en recevant par l'intermédiaire de Cordes, de Hambourg, 293 B 10. Mille fois merci de ta générosité. Cela m'a rendu un grand service, car j'étais plus pauvre qu'un rat d'église. Maintenant je vais vivre ici là-dessus aussi longtemps que je pourrai, puis je filerai vers le nord. Je resterai un moment à Copenhague, où ma fiancée viendra me rejoindre, puis au pays, où j'arriverai si dénué que je serai bien obligé de tendre la main à la porte de l'église. Je ne me laisse pourtant pas abattre; je suis si bien habitué à la misère et au dénuement. Ça ira toujours. Je t'ai envoyé par Peckel il y a un mois le 3e numéro du Journal de Crelle et un peu plus de la moitié du quatrième, qui est achevé maintenant. Que te semble de mon mémoire ? Je me suis efforcé d'être si rigoureux qu'on ne puisse faire aucune objection fondée.

J'ai déjà préparé un mémoire considérable où l'on voit beaucoup de choses curieuses ("Fonctions elliptiques").³ Mais ce que j'ai de plus beau, c'est dans la "Théorie des fonctions transcendentes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier".⁴ Mais cela, il faut que je le garde jusqu'à mon retour pour te le faire connaître. Au total j'ai fait une masse effrayante de découvertes. Si seulement je les avais mises en ordre et rédigées, car la plupart ne sont encore que dans ma tête. Il n'y a pas à penser à quoi que ce soit avant que je me sois installé convenablement chez nous. Alors il me faudra travailler dur comme un cheval de fiacre; mais avec plaisir, bien entendu. - Je mène une vie assez ennuyeuse, car elle est sans variété. Etudier, manger, dormir, et pas grand chose de plus. Je joue aux cartes deux ou trois fois par semaine chez le pharmacien Monrad, de Bergen, qui est ici avec sa mère et sa femme. Je plume les gens. Crelle est toujours extrêmement obligeant. J'ai été malade et suis resté au lit pendant quelques jours, je suis remis et je parle allemand mieux que l'an dernier. Il a fait un froid de chien cet hiver, mais il semble que ce soit fini. On a eu à Munich - 24° R. - Il me tarde de rentrer au pays, car je ne peux guère avoir d'avantage à rester ici. Quand on est chez soi ou se fait de l'étranger de diables d'idées, autres qu'il ne faudrait. Il ne sont pas si forts. - Les gens en général sont mous, mais assez droits et honnêtes. Nulle part il n'est plus facile d'arriver qu'en Allemagne et en France, chez nous c'est 10 fois plus difficile.

Ton Abel

Nous ne savons pas combien de temps les ressources d'Abel lui auront permis de rester à Berlin. Le 20 mai en tout cas, il est de retour à Christiania. Crelle aurait aimé le garder auprès de lui, mais Abel se faisait un honneur de rentrer au pays et de respecter en priorité ses devoirs envers l'Etat Norvégien qui lui avait permis ce voyage si riche en expériences pour lui.

Il informe rapidement le Conseil de l'Université de son retour, précisant qu'il avait fait de son mieux pour atteindre les objectifs fixés pour ce voyage, et profitant de l'occasion pour solliciter l'examen de sa situation.

Le Conseil était prêt à l'aider mais regrettait que "la situation financière de l'Université la mette dans l'impossibilité absolue d'offrir à M. Abel l'aide dont il a besoin, étant pour le moment sans situation".

³En français dans le texte.⁴En français dans le texte.

Ne pouvant obtenir un poste, Abel ne se décourage pas et fait une nouvelle demande d'aide provisoire en ces termes :

Déjà depuis longtemps j'avais l'idée, en me consacrant complètement à l'étude des mathématiques, de me rendre digne un jour d'être nommé professeur à l'Université. J'ose me flatter, maintenant que j'ai terminé mon voyage à l'étranger, d'avoir acquis des connaissances qui peuvent être considérées comme suffisantes pour une situation à l'Université, lorsque les circonstances le permettront. Mais dans l'attente du jour où une telle situation pourra m'échoir, je suis absolument sans ressources pour me procurer même le simple nécessaire, et il en a été ainsi depuis mon retour. Pour pouvoir vivre, je vais me voir obligé d'abandonner complètement mes études, ce qui me serait excessivement douloureux, au moment où j'espérais justement pouvoir rédiger plusieurs travaux mathématiques commencés. Cela me ferait d'autant plus de tort que je serais alors obligé d'interrompre une carrière d'auteur déjà commencée à l'étranger, comme collaborateur du Journal der reinen und angewandten Mathematik, de Crelle, paraissant à Berlin, dont je me permets de joindre les livraisons parues jusqu'à présent. J'ose donc demander au Conseil une subvention, aux conditions que le Conseil trouvera convenables."

Après beaucoup de discussion et de renvois d'une administration à l'autre, le Conseil accorde une bourse de 200 Thalers prélevés sur son propre budget, sans obligation de remboursement.

De son côté, Crelle continue à se préoccuper du sort d'Abel et cherche à lui procurer un poste à Berlin. Les deux hommes correspondent régulièrement sur des questions mathématiques, et chaque livraison du "Journal" voit la publication des nombreux articles du mathématicien norvégien : pas moins de quinze articles, sur les quatre premiers volumes.

Le 8 avril 1829, Crelle peut enfin annoncer à Abel l'obtention d'un poste à l'Université de Berlin :

"Enfin, mon cher, très cher ami, je peux vous donner de bonnes nouvelles. Le Ministère de l'Instruction a décidé de vous appeler à Berlin et de vous y nommer. Je viens de l'entendre à l'instant même de la bouche de l'homme qui s'occupe de cette affaire au Ministère. Il n'y a donc à ce sujet aucun doute (...) Vous pouvez être dorénavant sans souci pour ce qui est de votre avenir. Vous êtes des nôtres, et en sécurité. Je m'en suis réjoui comme si cela avait répondu à mes propres souhaits. Cela n'a pas été sans beaucoup d'efforts mais, Dieu merci, cela a réussi (...). Avant tout, faites en sorte de retrouver une bonne santé, et que le Ciel fasse que cette lettre vous trouve rétabli. (...) Soyez heureux et rassurez-vous tout à fait. Vous venez dans un bon pays, où le climat est meilleur, plus près de la science et d'amis sincères qui vous apprécient et vous aiment."

Il était hélas trop tard. Abel était mort, deux jours auparavant le 6 avril 1829, des suites d'une phtisie, de celles que l'on appelle galopante. Il avait 26 ans. Crelle écrira dans son "Journal" :

"Tous les travaux d'Abel portent l'empreinte d'une sagacité et d'une puissance d'esprit extraordinaires et vraiment étonnantes, même sans considérer sa jeunesse. Il pénétrait son sujet à fond avec une vigueur qui semblait irrésistible, il le saisissait avec une si extraordinaire énergie et de si haut, et il s'est élevé à tel point au-dessus du niveau de son époque, que les difficultés semblaient s'évanouir devant son génie victorieux."

"Il était également distingué par la pureté et la noblesse de son caractère, et par une rare modestie, qui le rendait aussi aimable que son génie était extraordinaire. La jalousie des mérites d'autrui lui était chose tout-à-fait étrangère. Il était bien éloigné de cette avidité d'argent ou de titres, ou même de renommée, qui porte souvent à se servir de la science comme d'un moyen de parvenir. Il estimait trop haut les vérités qu'il cherchait pour les vendre à si bas prix. Il trouvait la récompense de ses efforts dans leur résultat même, il était presque aussi heureux d'une découverte nouvelle, qu'elle eût été faite par lui ou par un autre. Les moyens de se faire valoir étaient pour lui chose inconnue; il ne faisait rien pour lui-même, mais tout pour sa chère science. Tout ce qui a été fait pour lui provient exclusivement de ses amis, sans la moindre intervention de sa part... Il a sacrifié sa vie pour la science, sans songer à sa propre conservation... Gloire à la mémoire de cet homme également remarquable par ses talents extraordinaires et la pureté de son caractère. Il a été un de ces êtres rares dont il apparaît à peine un par siècle."

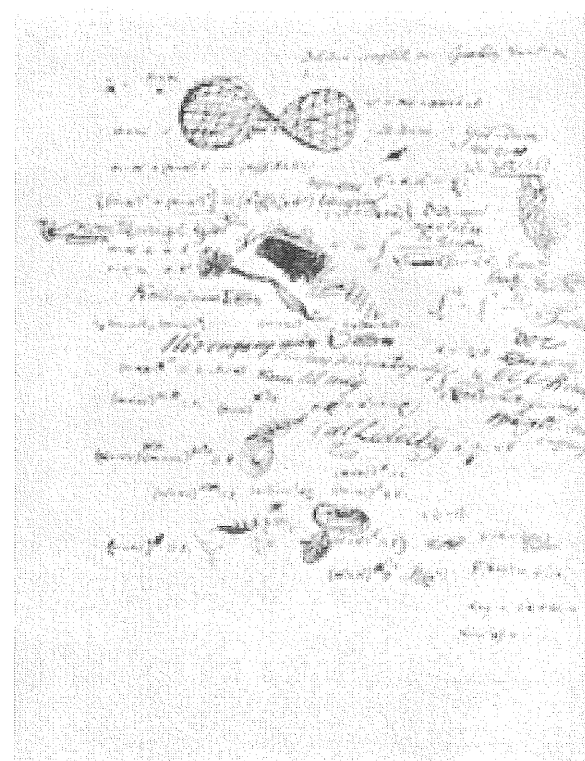
Indications bibliographiques

- Les extraits des lettres d'Abel ont été pris dans : Niels Henrik ABEL, "Mémoire publié à l'occasion du centenaire de sa naissance", Jacob Dybwad, Kristiania, 1902, qui contient l'ensemble de la correspondance d'Abel, traduite pour l'essentiel en français, et précédée d'une "Introduction historique à sa correspondance" par Elling HOLST.

- Ore Oystein : *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*, University of Minnesota, 1957 : traduit en français par Gilles Châtelet, dans la collection "Un savant, une époque" sous le titre "Abel, un mathématicien romantique", Belin 1989.

BJERKNES C.A. : *Niels Henrik Abel, Tableau de sa vie et de son action scientifique*, Paris 1885.

Pour ceux qui lisent le norvégien, une nouvelle biographie très complète et détaillée vient d'être publiée récemment, par Arild STUBHAUG, sous le titre *Et torauskudt lyn, Niels Henrik Abel og hans tid*, ASCEHOUG 1996 (598 pages).



Page manuscrite d'Abel tirée du livre de Oystein Ore
Niels Henrik Abel : Mathematician Extraordinary, New York 1957