La phase arabe de l'histoire de l'algèbre
(VIII^{ème}-XV^{ème} siècles)

DJEBBAR Ahmed,
Université Paris-Sud (France)

Abstract

Depuis la seconde moitié du XIX^{ème} siècle, de nombreuses études, souvent très documentées et très minutieuses, ont été réalisées sur l'Algèbre arabe[1], sur ses débuts, sur son contenu et sa terminologie, sur les différents aspects de son développement (en relation avec d'autres disciplines mathématiques ou avec son environnement), et enfin sur sa transmission partielle à l'Europe médiévale. Grâce aux résultats de ces recherches (dont certaines sont très récentes), nous allons tenter de faire le point sur ce qui est connu aujourd'hui du contenu de cette tradition algébrique, de ses grandes orientations et des obstacles auxquels elle s'est heurtée au cours de son développement.

Certains points précis de l'histoire de l'algèbre arabe, comme ceux qui sont relatifs à ses origines et à ses débuts, continuent de susciter des interrogations et des débats et font encore l'objet de recherche. Il ne nous a donc pas semblé utile de les aborder ici. Nous nous sommes plutôt intéressé à des aspects plus tangibles qu'il est possible de lire, directement, dans les écrits algébriques qui ont été produits, entre le IX^{ème} et le XV^{ème} siècle, par les différents scientifiques de l'Empire musulman.

[1]Dans la suite du texte, cette tradition algébrique sera dite "*Algèbre arabe*" dans le sens où elle a englobé tous les écrits algébriques écrits en langue arabe, entre le IX^{ème} et le XVI^{ème} siècle, qu'ils aient été produits par des mathématiciens arabes ou par des non-arabes.

Le premier livre d'algèbre

Il est admis par tous les spécialistes d'Histoire des Mathématiques que l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline (avec, à la fois, un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application), a été la publication du petit traité d'AL-KHWÂRIZMÎ (m. 850), intitulé le *Livre abrégé du calcul par le jabr et la muqâbala*[2]. On sait, grâce à la préface de son auteur, que ce livre a été rédigé avant 833 et dédié au calife al-Ma'mûn (813-833) qui s'était rendu célèbre par son mécénat en faveur des sciences et de la philosophie.

Il est peut-être utile, avant d'aller plus loin, et pour mieux suivre l'évolution ultérieure de l'algèbre, de présenter brièvement le contenu de ce livre tel qu'il nous a été transmis à travers les copies arabes manuscrites qui nous sont parvenues.

Le livre d'AL-KHWÂRIZMÎ est divisé en deux grandes parties, précédées d'une introduction consacrée à la traditionnelle doxologie, à la dédicace et à un exposé très clair de la nature et des buts de l'ouvrage. Voici d'ailleurs en quels termes l'auteur y présente son contenu :

> J'ai rédigé sur le calcul par le jabr et la muqâbala un livre abrégé englobant ce qu'il y a de plus fin et de plus noble en calcul et dont les hommes ont besoin pour leurs héritages et leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs commerces et pour toutes les transactions qu'ils ont entre eux, parmi lesquelles l'arpentage des terres, le creusement des canaux, l'architecture, ainsi que d'autres formes et techniques. [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 16][3].

La première partie de ce livre, qui est en fait la partie la plus importante, au regard de l'histoire de l'algèbre, se subdivise elle-même en plusieurs chapitres : dans le premier, AL-KHWÂRIZMÎ, après avoir rappelé brièvement la définition du système décimal, définit les objets de l'algèbre : les nombres, la racine (jidhr) et le bien (mâl) qui est le carré de la racine. Puis, il donne les six équations canoniques en les faisant suivre d'exemples. Pour respecter la terminologie de l'auteur, nous écrirons les six équations sous cette forme :

$$\begin{array}{lll} (1) ax = b; & (2) ax = c; & (3) b = c \\ (4) ax + b = c & (5) ax + c = b; & (6) b + c = ax \end{array}$$

avec a, b, c des entiers ou des rationnels strictement positifs (exceptionnellement des irrationnels quadratiques) et x le bien.
Au sujet de la terminologie utilisée, AL-KHWÂRIZMÎ dit ceci :

> J'ai trouvé que les nombres dont on a besoin, dans le calcul par le *jabr* et la *muqâbala*, sont de trois sortes qui sont les *racines*, les *biens* et le *nombre* seul qui n'est rapporté ni à la *racine* ni au *bien*. La *racine* est tout ce qui est multiplié par lui-même, comme un, les nombres 'entiers' qui lui sont supérieurs et les fractions qui lui sont inférieures. Le *bien* est tout ce qui résulte de la *racine* multipliée par elle-même. Le *nombre* seul est tout ce qui, parmi les nombres, est exprimable et qui n'est rapporté ni à une *racine* ni à un *bien*. [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 17-18]

[2]Pour AL-KHWÂRIZMÎ, le passage de $x^2 + 3 = 5 - 10x$ à $x^2 + 3 + 10x = 5$ se fait par la *restauration (jabr)* de l'équation dans le but de n'avoir que des monômes *ajoutés*. Quant au passage de $x^2 + 3 + 10x = 5$ à $x^2 + 10x = 2$, il se fait par la *comparaison (muqâbala)* des termes de même espèce se trouvant dans chacun des deux membres, pour pouvoir *simplifier* et aboutir à l'une des six équations canoniques, exposées ci-dessous.

[3]Les informations entre crochets droits renvoient à la bibliographie générale, en fin d'article. En l'absence de mention, les traductions françaises des extraits arabes ont été réalisées par nous.

Comme on le constate, le bien est le produit de la racine par elle-même, mais la notion de degré n'apparaît pas dans ce livre. Elle mettra d'ailleurs beaucoup de temps à se dégager. Quant aux six équations, elles sont en réalité exprimées sous une forme rhétorique. Par exemple, la quatrième est formulée ainsi :

> Quant aux biens et aux racines qui sont égaux au nombre, c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égalent trente neuf dirhams. [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 18]

Dans le second chapitre, il fournit, pour chacun des six types précédents, son algorithme de résolution. Chaque étape de cet algorithme est exprimée une première fois, d'une manière générale, puis explicitée à l'aide des coefficients numériques de l'équation qui illustre le type étudié. Ces équations à coefficients numériques déterminés deviendront elles-mêmes canoniques et, pendant des siècles, serviront de modèles dans l'enseignement de l'algèbre.

Dans le troisième chapitre, AL-KHWÂRIZMÎ explique le procédé "*d'algébrisation*" d'un pro- blème donné afin de le ramener à l'une des équations canoniques précédentes. Dans le quatrième, il expose l'extension des opérations arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée) aux objets de l'algèbre (nombres, racines, biens) et à leurs combinaisons par l'addition et la soustraction. Mais, il a quelques fois des difficultés à justifier ses résultats. Voici, à titre d'exemple, ce qu'il dit à propos de l'expression : $(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2)$:

> Il n'y a pas de figure 'géométrique' qui lui convienne car elle est constituée de trois genres différents -des biens, des racines et un nombre- qui ne sont pas égalés à quelque chose qui aurait permis qu'elle soit figurée. Nous avons abouti, pour elle, à une figure; mais, elle n'est pas satisfaisante. Quant à sa validité rhétorique, elle est évidente. [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 34]

Dans ce même chapitre, Il formule ce qui correspondra plus tard à la règle des signes, mais sans en donner une justification. Il s'agit en fait pour lui d'opérations sur les monômes "*ajoutés*" ou "*retranchés*" et non d'opérations sur les signes proprement dits.

Le cinquième et dernier chapitre de cette première partie est constituée d'une quarantaine de problèmes d'application, groupés en trois thèmes (problèmes des dizaines, des biens et des hommes), et résolus à l'aide des outils des chapitres précédents. Voici un exemple de chacun de ces trois thèmes [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 42, 47, 51] :

(1) Problème des dizaines : "*<Si> tu divises dix en deux parties et <que> tu multiplies l'une des deux parties par elle-même, <le résultat> est égal à quatre vingt une fois l'autre partie*".

(2) Problème des biens : "*<Etant donné> un bien, <si> tu lui ôtes son tiers et trois dirhams et que tu multiplies le reste par lui-même, tu retrouves le bien*".

(3) Problème des hommes : "*<Si> tu partages un dirham entre des hommes, chacun reçoit une chose; puis, <si> tu leur ajoutes un homme et que tu partages entre eux un dirham, chacun reçoit alors <une part> inférieure à la première part d'un sixième de dirham*".

La seconde partie du livre, quantitativement la plus importante, est consacrée exclusivement à la résolution de problèmes de transactions commerciales, d'arpentage et de répartition des héritages (selon la législation islamique), à l'aide des outils de l'algèbre exposés dans la première partie.

Compte tenu de ce que nous savons aujourd'hui des procédés algébriques utilisés dans les traditions scientifiques babylonienne, grecque et indienne, nous pouvons constater, à la seule description du contenu des différents chapitres du livre d'AL-KHWÂRIZMÎ que, pour la première fois, nous trouvons rassemblés, dans un même ouvrage, un ensemble d'éléments (définitions, opérations, algorithmes, démonstrations) qui étaient soit éparpillés et sans lien entre eux, soit non formulés explicitement et indépendamment des problèmes d'application. De plus, tous ces éléments sont assemblés selon une logique qui vise à distinguer clairement ce procédé de résolution des autres procédés de la *"Science du calcul"*, comme la méthode de fausse position [CHABERT 1999, 83-112].

La tradition d'AL-KHWÂRIZMÎ

Le caractère encore très lacunaire de nos connaissances relatives aux activités algébriques du IX$^{\text{ème}}$ siècle, ne nous permet pas de dater les contributions nouvelles qui s'inscrivent dans ce que l'on pourrait appeler la tradition d'AL-KHWÂRIZMÎ (pour la distinguer des traditions algébriques arabes postérieures). Nous nous contenterons donc d'évoquer les travaux connus, mais plus tardifs, dans lesquels ces contributions se manifestent à nous pour la première fois.

Il faut tout d'abord noter la publication, au cours de la seconde moitié du IX$^{\text{ème}}$ siècle et du début du X$^{\text{ème}}$, d'une série d'ouvrages consacrés exclusivement à l'algèbre. Il s'agit des écrits d'ad-Dînawarî (m. 895), d'as-Sarakhsî (m. 899), d'Ibn al-Fath (X$^{\text{ème}}$ siècle) et d'as-Saydanânî (X$^{\text{ème}}$ siècle). Certains de ces écrits sont d'ailleurs des commentaires du livre d'AL-KHWÂRIZMÎ [SEZGIN 1974, 262-263]. Malheureusement aucun de ces traités n'a encore été retrouvé. Mais, le contenu des publications ultérieures nous autorise à penser que ces écrits devaient intégrer les premiers progrès internes à l'Algèbre et quelques applications intéressant d'autres domaines.

A côté de ces commentaires, on remarque la production de deux types d'écrits dont la caractéristique commune a été de réaliser l'interpénétration entre l'Algèbre et la Géométrie grecque, reflétant par la même occasion les progrès enregistrés dans l'assimilation du corpus euclidien. C'est ainsi que Thâbit Ibn Qurra (m. 901) rédige un opuscule dans lequel il utilise les propositions 5 et 6 du Livre II des *Éléments*, pour justifier l'existence des solutions des trois équations quadratiques d'AL-KHWÂRIZMÎ [IBN QURRA, Istanbul Aya Sofya 2457, ff. 39a-41a]. Avec al-Ahwâzî (X$^{\text{ème}}$ siècle), c'est plutôt la démarche inverse puisque c'est l'algèbre qui est utilisée dans son commentaire du Livre X de ces mêmes *Éléments* pour expliciter la racine carrée de certaines grandeurs irrationnelles [AL-AHWÂZÎ, Ms. Tunis 16167, ff. 61b-65a].

A l'extérieur du domaine de l'algèbre, les innovations suscitées par elles voient également le jour à partir du IX$^{\text{ème}}$ siècle. En premier lieu, il y a eu la lecture "algébrisée" de certaines propositions des Livres II et VI des *Éléments* d'Euclide et "l'arithmétisation" des propositions du Livre X qui définissent certaines grandeurs incommensurables, comme les binômes, les apotômes ainsi que leurs racines carrées[4]. Ces grandeurs deviendront chez le mathématicien al-Mâhânî (m. 888) et chez ses successeurs, une sous-classe de nombres (celle des irrationnels quadratiques et biquadratiques). Ces nouveaux nombres, qui généralisaient les irrationnels quadratiques empruntés aux indiens et probablement aussi à la tradition babylonienne, étaient eux mêmes enrichis par une classe de nombres d'un genre différent (selon le point de vue euclidien), puisqu'ils ne s'obtiennent pas par les techniques géométriques des *Éléments*. Il s'agit des racines nièmes avec n un entier quelconque ainsi que leurs combinaisons par addition et soustraction. [AL-MÂHÂNÎ, Ms. Paris 2457, ff. 180b-181b]

En second lieu, on assiste à une nouvelle forme d'intervention de l'algèbre, en géométrie et en trigonométrie, par la mise en équation de certains problèmes. Une des premières tentatives de ce type a été la mise en équation, par al-Mâhânî, du lemme de la proposition 4 du Livre II du traité de *la Sphère et du cylindre* d'Archimède. Il obtint une équation cubique qu'il ne parvint

[4] Un binôme s'écrirait aujourd'hui : $m + n^{1/2}$ ou $m^{1/2} + n^{1/2}$. Un apotôme s'obtient en remplaçant l'addition par la soustraction.

pas à résoudre et qu'il finit par considérer comme impossible. [DJEBBAR & RASHED 1981, 11] Cela ouvrira la voie à un ensemble de recherches qui aboutiront à l'étude géométrique de toutes les équations cubiques.

Plus tard, des mathématiciens astronomes, comme al-Bîrûnî (m. 1048) ou son contemporain Abû l-Jûd, préoccupés par la détermination de la trisection d'un angle et de la longueur des côtés de certains polygones réguliers non constructibles (comme l'heptagone et l'ennéagone), aboutiront eux aussi à des équations cubiques. [YOUSCHKEVITCH 1976, 93-94]

La tradition d'Abû Kâmil et d'Al-Karajî

Cette tradition englobe un ensemble de mathématiciens dont les contributions vont concerner deux domaines déjà présents dans le livre d'al-Khwârizmî : celui des objets de l'algèbre et celui des opérations qui leurs sont appliquées. On voit ainsi apparaître, dans les équations du premier et du second degré, des coefficients et des racines qui sont pas uniquement des entiers ou des fractions, mais également des irrationnels quadratiques et biquadratiques, comme cela est le cas dans un grand nombre de problèmes résolus par Abû Kâmil (m. 930) dans son important traité d'algèbre. [ABÛ KÂMIL, Ms. Istanbul, Kara Mustafa Pasha 379]

Cela a été rendu possible par les travaux de la période antérieure, relatifs au livre X des *Éléments*, et qui seront enrichis et systématisés au X$^{\text{ème}}$ et au XI$^{\text{ème}}$ siècle. C'est ainsi que le mathématicien Ibn al-Baghdâdî (XI$^{\text{ème}}$ siècle) consacre toute une épître à l'exposé de nombreuses règles permettant de simplifier les opérations arithmétiques (en particulier la division) appliquées aux irrationnels qui sont sommes ou différences de racines carrées et de racines quatrièmes. [IBN AL-BAGHDÂDÎ 1947]

Cette orientation sera poursuivie au XI$^{\text{ème}}$ siècle par al-Karajî (m. 1029) [ANBOUBA 1964] et au XII$^{\text{ème}}$ siècle par as-Samaw'al (m. 1175). [AS-SAMAW'AL 1972] Ces auteurs justifieront l'extension de certaines opérations arithmétiques aux irrationnels, octroyant ainsi, de fait, un statut de nombre aux grandeurs issues du Livre X des *Éléments* d'Euclide, ainsi qu'à des grandeurs plus complexes mais toujours constructibles.

Les progrès enregistrés dans ce domaine, et qui ne doivent pas, selon nous, être dissociés des progrès de l'algèbre elle-même, ont ainsi permis une extension importante de la notion de nombre et ont probablement favorisé la réflexion et les recherches qui seront menées jusqu'aux XII$^{\text{ème}}$ siècle autour du concept de nombre réel positif, en particulier par Umar al-Khayyâm. [DJEBBAR 1997]

La théorie des polynômes

Le second sujet étudié ou simplement effleuré par certains mathématiciens de cette période, et qui s'avérera d'une grande fécondité, est celui de l'extension de la notion de monôme et de polynôme et son application à l'étude des équations. Si l'on en croit Sinân Ibn al-Fath (X$^{\text{ème}}$ siècle), il serait le premier à avoir rédigé un exposé systématique sur cette question et avoir ainsi étendu le domaine des équations résolubles par radicaux. Son étude, qui nous est heureusement parvenue, contient en effet pour la première fois, à notre connaissance, la notion générale de monôme de degré quelconque ainsi que le procédé de génération de ces monômes, les noms affectés à chaque degré et la généralisation des six équations canoniques à des équations de degré inférieur ou égale à $2n + p$, obtenues à partir des équations d'AL-KHWÂRIZMÎ en y remplaçant les monômes x^2, x et 1, respectivement par x^p, x^{n+p} et x^{2n+p}. [IBN AL-FATH, Ms. Le Caire Dar Riyada 260/4, ff. 95a-104a]

Nous n'avons aucun élément d'information sur l'impact immédiat qu'a pu avoir cette extension des monômes et des équations et il faudra attendre la fin du X$^{\text{ème}}$ siècle ou le début du XI$^{\text{ème}}$ pour en mesurer l'aboutissement en quelque sorte à travers les travaux d'al-Karajî (m. 1029). C'est en effet dans ses livres que l'on trouve un exposé des premiers éléments d'une théorie des polynômes, avec la règle de multiplication et de division des monômes et des inverses de monômes, basée sur l'utilisation explicite de la notion de puissance (en arabe : *uss*) et des opérations d'addition et de soustraction de ces puissances associées, respectivement aux produits et aux rapports de monômes. On y trouve également une justification partielle de l'extension des quatre opérations arithmétiques aux polynômes de degré quelconque. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'al-Karajî expose le procédé de construction du triangle arithmétique et la manière de l'utiliser pour déterminer le développement du binôme. [ANBOUBA 1964]

Cette étude d'al-Karajî sera poursuivie par as-Samaw'al (m. 1175) qui justifiera la division d'un polynôme par un autre polynôme, composés tous deux de monômes ajoutés ou retranchés, et qui ajoutera aux quatre opérations arithmétiques classiques un algorithme d'extraction de la racine carrée d'un polynôme carré parfait.

Toutes ces études vont être facilitées par l'introduction du symbolisme des tableaux qui permettra aux algébristes de cette époque de représenter chaque polynôme par ce que nous appelons aujourd'hui la suite de ses coefficients disposés dans les colonnes correspondants à leurs monômes respectifs, comme le montre l'exemple suivant : multiplier les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ suivants :

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^8 + 28x^7 + 6x^6 - 80x^5 + 38x^4 + 92x^3 - 200x^2 + 20x \ ; \\ Q(x) &= 2x^5 + 8x^4 - 20x^2 \end{aligned}$$

L'auteur dispose ainsi les coefficients :

Choses	carrés	Cubes	Carré-carré	carré-cube	Cubo-cubes	carré-carré-cube	carré-cubo-cubes
20	moins 200	92	38	moins 80	6	28	6
	moins 20	0	8	2			

Puis, il effectue la division en mettant les quotients partiels correspondants à leurs monômes respectifs, dans les cases laissées vides. [AS-SAMAW'AL 1972, 48-50]

Les systèmes d'équations

Malgré la présence, dans la troisième partie du livre d'al-Khwârizmî, de quelques problèmes d'héritage pouvant aboutir à des systèmes d'équations [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 74, 104], il ne semble pas que le livre soit à l'origine de ce chapitre de l'Algèbre. La forme de certains problèmes, comme ceux relatifs aux oiseaux, suggérerait plutôt une origine chinoise ou indienne[5]. Mais, les sources arabes concernant la période des traductions (VIII$^{\text{ème}}$-IX$^{\text{ème}}$ siècles) sont sur ce point silencieuses et les premiers ouvrages mathématiques qui ont abordé l'étude des systèmes d'équations n'ont pas encore été retrouvés. Ceux qui nous sont parvenus, et qui sont du X$^{\text{ème}}$ ou du XI$^{\text{ème}}$ siècle, ont une facture assez élaborée qui confirme l'existence d'une activité antérieure.

[5] Voici un exemple de ce type de problèmes : on voudrait acheter, avec 100 dirhams, 100 volatiles de trois espèces différentes : étourneaux, poulets et canards. Sachant que le prix des étourneaux est de 1 dirham les 20, celui des poulets de 1 dirham l'unité et celui des canards de 5 dirhams l'unité, on demande combien on peut acheter de volatiles de chaque espèce.

Il y a tout d'abord le livre d'algèbre d'Abû Kâmil qui traite, dans sa troisième partie, quelques problèmes de ce type sans souci de classification ou de systématisation, mais plutôt comme des exemples d'application des procédés de l'algèbre. [ABÛ KÂMIL, Ms. Istanbul, Kara Mustafa Pasha 379, ff. 95a-101a] Le second livre d'Abû Kâmil, intitulé *Les 'choses' rares en calcul*, est tout entier consacré aux systèmes d'équations : six problèmes seulement y sont traités, mais dans une perspective qui dépasse le simple exposé des algorithmes de résolution puisqu'il s'agit, pour l'auteur, de montrer l'existence des systèmes impossibles, de ceux ayant une et une seule solution et, enfin, de ceux qui peuvent avoir plusieurs solutions. Il illustre ce dernier cas par quatre systèmes aboutissant respectivement à 6, 98, 304 et 2676 solutions. [ABÛ KÂMIL, Ms. Paris B.N. 4946, ff. 3b-15a]

Il faut enfin signaler un petit traité encore inédit du mathématicien et physicien Ibn al-Haytham (m. 1039), consacré exclusivement aux systèmes d'équations à n inconnues, n quelconque, qui sont du type :

$$n_i x_i = m_j x_j \ , \qquad 1 < i, j < n.$$

Dans cette étude, la démarche d'Ibn al-Haytham tranche avec celle de ses prédécesseurs, à la fois au niveau de l'exposé des différentes problèmes et au niveau de leur résolution qui est présentée selon une démarche générale accompagnée de justifications mathématiques; l'auteur précise d'ailleurs qu'il est le premier à avoir donné ces justifications. [WIEDEMANN 1926-27]

Nous ne savons pas si ce chapitre a fait l'objet de recherches originales, en pays d'Islam, après le XI$^{\text{ème}}$ siècle. Cela n'est pas confirmé par les livres d'algèbre connus postérieurs à l'étude d'Ibn al-Haytham, puisqu'ils ne font que reprendre tel ou tel type de problèmes déjà traités aux X$^{\text{ème}}$-XI$^{\text{ème}}$ siècles. Mais, cette observation n'est pas décisive compte tenu du caractère très lacunaire de nos connaissances actuelles relatives aux sources orientales et surtout andalouses.

L'analyse indéterminée

Contrairement au chapitre précédent sur les systèmes d'équations, celui de l'analyse indéterminée semble devoir beaucoup à la tradition grecque. C'est du moins ce que laisse supposer le contenu des problèmes qui nous sont parvenus et dont les auteurs sont encore Abû Kâmil et al-Karajî.

Le premier expose et résout, dans son livre d'algèbre, 38 équations ou systèmes d'équations du premier ou de second degré et dont le second membre est toujours un carré. [SÉSIANO 1977a, 91-93] La forme de ces problèmes fait penser naturellement au contenu des *Arithmétiques* de Diophante. Mais, cette filiation est contrariée par deux éléments importants : le premier est mathématique et concerne l'utilisation par Abû Kâmil de méthodes inexistantes dans les dix livres connus des *Arithmétiques*, comme celles qui permettent de résoudre les systèmes de la forme :

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c = \square_1 \\ &ax^2 + bx + c + c(ax^2 + bx + c)^{1/2} = \square_2, \text{a, b, c, donnés.} \end{aligned}$$

ou de la forme :

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1x + c &= \square_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c &= \square_2, a_1, a_2, b_1, b_2, \text{donnés.} \end{aligned}$$

dont le traitement suppose d'ailleurs une grande maîtrise des outils algébriques. [SÉSIANO 1977a, 99-102]

On pourrait évidemment penser que ces méthodes ont été empruntées aux trois livres encore perdus de l'ouvrage de Diophante, mais le second élément rend cette dernière hypothèse très improbable : on sait en effet que seuls les livres IV à VII des *Arithmétiques* ont bénéficié d'une traduction en arabe par Qustâ Ibn Lûqâ (m. 910). [SÉSIANO 1975] Abû Kâmil était un contemporain de notre traducteur mais n'a pas eu, semble-t-il, connaissance de sa traduction. Il a probablement repris, comme à son habitude, des problèmes anciens en leur ajoutant de nouveaux problèmes et peut-être de nouveaux procédés de résolution. Cette hypothèse est renforcée par les allusions de l'auteur à une tradition vivante dans ce domaine, et par conséquent antérieure à la traduction des *Arithmétiques*, ainsi qu'à l'existence de deux termes pour désigner les problèmes de ce chapitre (problèmes "*indéterminés*" pour certains mathématiciens et "*à plusieurs solutions*" pour d'autres).

Cela dit, et quelle que soit la source d'Abû Kâmil et de ses prédécesseurs ou contemporains, on constate que ces problèmes seront appréhendés comme des problèmes d'algèbre et constitueront le troisième chapitre de cette discipline, aux côtés des équations quadratiques et des polynômes.

Mais, il est indiscutable que c'est la traduction des livres de Diophante, retrouvés à la fin du IX$^{\text{ème}}$ siècle, qui vont accélérer le développement de ce chapitre. Des mathématiciens prestigieux, comme Abû l-Wafâ' (m. 998) vont d'abord étudier puis commenter les problèmes de Diophante, créant ainsi les conditions de deux orientations, l'une arithmétique et l'autre algébrique. Cette dernière est illustrée par les chapitres de deux ouvrages d'al-Karajî : le *Fakhrî* dont la plus grande partie est consacrée à des problèmes indéterminés, et surtout le *Merveilleux en calcul* qui comprend une classification des problèmes traités, un exposé des méthodes de résolution et des commentaires sur le champ d'application de chacune de ces méthodes. [ANBOUBA 1964; SÉSIANO 1977b]

La résolution géométrique des équations cubiques

Parallèlement aux recherches entreprises par les mathématiciens de la tradition d'Abû Kâmil et d'al-Karajî, on observe la naissance et la consolidation d'une orientation nouvelle en Algèbre, celle de la résolution des équations de degré supérieur ou égal à trois. On peut dater cette naissance par l'échec d'al-Mâhânî dans sa tentative de résoudre, par radicaux, l'équation suivante :

$$x^3 + c = x^2; c > 0$$

qui découle de la "traduction" algébrique de la proposition 4 du Livre II du traité d'Archimède *De la sphère et du cylindre* que nous avons déjà évoqué à propos des débuts de l'Algèbre.

Cet échec d'al-Mâhânî va stimuler les recherches qui aboutiront à la résolution d'un certain nombre d'équations du 3e ou du 4e degré (à coefficients positifs). C'est ainsi que, d'une manière indépendante, al-Khâzin (X$^{\text{ème}}$ siècle) et Ibn al-Haytham établiront l'existence de la solution positive de l'équation précédente à l'aide de l'intersection de deux coniques.

A peu près à la même époque, le mathématicien al-Kûhî (X$^{\text{ème}}$ siècle) a posé et résolu un nouveau problème géométrique qui aboutissait à une équation du troisième degré. Il s'agit de trouver une portion de sphère de volume égal à celui d'une portion de sphère donnée et de surface égale à celle d'une autre portion de sphère donnée. [YOUSCHKEVITCH 1976, 90-94]

Parallèlement, il semble que certains mathématiciens aient poursuivi leurs recherches en vue de résoudre, par radicaux, les équations cubiques. Al-Khayyâm (m. 1131) est de ceux-là. Il le dit lui-même, reconnaît l'échec des ses tentatives et laisse entendre que c'est bien cette raison qui l'a amené à systématiser les démarches de ses prédécesseurs et à élaborer une

théorie géométrique des équations cubiques : dans son traité d'algèbre, il donne une classification des 25 équations (à coefficients tous positifs) de degré inférieur ou égal à trois, en distinguant celles dont l'existence des solutions (positives) ne repose que sur des propositions des *Éléments* d'Euclide (c'est-à-dire celles dont les solutions sont constructibles) et celles dont les solutions (positives), lorsqu'elles existent, s'obtiennent par intersection de deux coniques (en fait paraboles, hyperboles ou cercles). [AL-KHAYYÂM 1981]

Quelques décennies plus tard, le mathématicien Sharaf ad-Dîn at-Tûsî (m. 1213) reprend l'étude des équations cubiques, mais selon une perspective qui complète et dépasse à la fois celle d'al-Khayyâm. On constate en effet des modifications importantes dans la classification des équations et dans la justification de l'existence des solutions positives.

Tout en conservant la distinction entre équations quadratiques et équations cubiques, at-Tûsî ordonne ces dernières en tenant compte du nombre de leurs solutions et non des degrés de leurs monômes. Pour établir l'existence des solutions, il commence par rechercher la condition que doivent vérifier, dans ce cas, les coefficients de l'équation. Pour ce faire, il utilise la notion de maximum d'un polynôme et, pour déterminer ce maximum, il introduit une équation auxiliaire qui correspond exactement à celle que l'on obtiendrait aujourd'hui en dérivant un polynôme du 3e degré associé à une équation cubique et en annulant cette dérivée.

Parallèlement à ces travaux de type géométrique, deux autres orientations ont continué à intéresser les algébristes de cette époque. La première concerne la recherche de formules donnant les solutions exactes des équations cubiques. Mais, si l'on exclut la résolution d'équations cubiques particulières que l'on a pu ramener, par changement d'inconnue, à l'extraction d'une racine cubique, il semble qu'aucune tentative n'ait abouti. En tout cas, après le XIII$^{\text{ème}}$ siècle, on continuait encore à chercher des procédés de résolution algébriques pour des équations cubiques.

La seconde orientation est celle de l'élaboration ou de la généralisation de procédés permettant d'obtenir des solutions approchées de ces mêmes équations. C'est vraisemblablement l'échec des tentatives de résolution algébrique qui a contraint certains mathématiciens à recourir à des procédés d'approximation. Ils ont d'abord tenté d'adapter les anciens algorithmes puis ils ont en élaborés de nouveaux. C'est ce qu'ont fait, par exemple, al-Bîrûnî (m. 1050) et son contemporain Abû l-Jûd pour déterminer les solutions approchées des équations suivantes : $x^3 + 1 = x$ et $x^3 = x + 1$.

Mais, il faudra attendre le traité de Sharaf ad-Dîn at-Tûsî pour trouver l'exposé d'un procédé général permettant d'approcher une solution positive d'une équation cubique générale. Ce procédé est d'ailleurs valable pour une équation de degré quelconque. [RASHED 1984, 147-193]

L'algèbre après le XII$^{\text{ème}}$ siècle

Malgré de grands progrès enregistrés ces deux dernières décennies, les recherches sur les Mathématiques arabes ne sont pas assez avancées pour permettre de cerner avec précision les aspects essentiels de l'activité algébrique postérieure au XII$^{\text{ème}}$ siècle. Parmi les questions qui n'ont pas encore de réponse satisfaisante, il y a celle qui concerne le contenu réel de la pratique algébrique en Asie Centrale et en Andalus. Il y a également la question de la circulation des ouvrages d'algèbre et des outils algébriques entre les différents foyers scientifiques de l'empire musulman. Il y a enfin la question qui se pose pour d'autres disciplines scientifiques et qui a trait au ralentissement de leur production et au rétrécissement de leurs domaines de recherche. Dans ce qui suit, nous allons nous contenter de résumer les éléments essentiels de l'activité algébrique postérieure au XII$^{\text{ème}}$ siècle, sans tenter de répondre aux questions que nous venons d'évoquer.

L'algèbre en Orient musulman

Pour ce qui est du centre et de l'est de l'Empire musulman, quelques éléments épars nous renseignent sur certaines recherches qui ne semblent pas avoir abouti et sur des incursions timides dans des domaines nouveaux. C'est ainsi que le mathématicien Ibn al-Khawwâm (XIII$^{\text{ème}}$ siècle) nous fournit les énoncés de 36 problèmes que ses prédécesseurs et lui-même ont tenté vainement de résoudre. La plupart d'entre eux correspond à des équations du 3e et du 4e degré ou à des systèmes d'équations non linéaires. [ABDELJAOUAD & HADFI 1986]

Au XIV$^{\text{ème}}$ siècle, de nouvelles tentatives sont faites. A Samarcande, al-Kâshî (m. 1429) entreprend l'étude des équations de degré supérieur ou égal à 4, sans que l'on sache s'il a abouti à des résultats tangibles [AL-KÂSHÎ 1967, 198-199] puisque l'ouvrage qu'il projetait de publier n'a pas encore été retrouvé. En Egypte, Ibn al-Hâ'im (m. 1412) s'attaque à nouveau à la résolution algébrique de l'équation cubique, à travers un cas particulier. Mais sa méthode est manifestement erronée. [DJEBBAR 1980, 37] Toujours en Egypte, et à défaut de pouvoir exhiber un algorithme pour les équations, le mathématicien Ibn al-Majdî (m. 1447) expose la solution d'un problème de combinatoire concernant les équations polynomiales à n monômes additifs. Dans son livre, le *Recueil de la moelle*, il donne et justifie une relation de récurrence permettant de déterminer le nombre d'équations à n monômes, lorsque l'on connaît le nombre des équations à (n-1) monômes. [DJEBBAR 1980, 107-111]

Il faut également signaler une autre orientation qui n'a pas eu, à notre connaissance, un développement significatif. Elle concerne l'étude des relations entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré. Deux auteurs ont abordé cette question, d'une manière indépendante, sans l'approfondir. Le premier est Ibn al-Jallâd (m. 1390), un mathématicien du Yémen. Dans son petit mémoire, il s'attribue l'idée de construire une équation ayant des solutions choisies par avance. Il montre également comment faire pour qu'un nombre donné soit solution de l'une ou l'autre des trois équations canoniques du second degré. Il donne aussi une série d'exemples où, partant de deux nombres, il détermine les coefficients de chacune des équations par produit, somme et différence de ces deux nombres. [AL-JALLÂD, Ms. Sanaa, Recueil, ff. 249b-256a]

Le second mathématicien est encore Ibn al-Majdî. Il se contente, à propos de cette question de remarquer, sans en tirer de conséquence, que la somme des racines de son équation correspond exactement à l'un des coefficients de cette équation. [IBN AL-MAJDÎ, Ms. Londres, Brit. Mus. Add. 7469ff. 165a] La brièveté de sa remarque permet de penser qu'il n'a pas connu l'ouvrage d'al-Jallâd.

Ces remarques concernant les relations entres les coefficients et les racines d'une équation se semblent pas avoir attiré l'attention des mathématiciens postérieurs et ce pour deux raisons au moins. L'une d'elles est peut-être liée au fait que ce sujet a été abordé à un moment où la recherche en mathématique s'était considérablement ralentie dans certains foyers scientifiques d'Orient et s'était même interrompue définitivement dans d'autres. L'autre raison est à chercher dans les perturbations profondes qui ont touché certaines régions de l'Orient musulman et qui ont influé négativement sur la circulation des idées, des livres et des hommes entre les foyers scientifiques de ces différentes régions.

L'algèbre en Occident musulman

Pendant longtemps, le poème mathématique d'Ibn al-Yâsamîn (m. 1204), un scientifique du Maghreb, était le seul témoignage concret en faveur d'une production algébrique, en Occident musulman, distincte de l'arithmétique et du calcul des transactions. Ce poème résume les algorithmes de résolution des six équations canoniques et les accompagne de quelques opérations sur les irrationnels quadratiques et sur les monômes. Son niveau est bien en deçà du niveau atteint par l'algèbre arabe de son époque. Il est donc loin d'être représentatif des écrits algébriques des XII$^{\text{ème}}$-XIII$^{\text{ème}}$ siècles et doit être considéré plutôt comme un aide-mémoire, à la fois pour les enseignants et pour les étudiants en algèbre. C'est en tout cas le rôle qu'il a joué durant les trois siècles suivants. Cela lui a d'ailleurs valu d'être souvent cité par les mathématiciens tardifs, de l'Orient et de l'Occident musulmans, qui ont écrit sur le sujet.

Le second ouvrage qui nous est parvenu est celui d'Ibn Badr. Nous ne connaissons absolument rien de cet auteur, si ce n'est qu'il a écrit son livre, intitulé *l'Abrégé de l'algèbre et de la muqâbala*, avant 1343, date à laquelle a été réalisée l'unique copie qui nous en est parvenue. Comme l'indique bien son titre, le livre est un résumé des procédés de l'algèbre tels qu'on les trouve dans les ouvrages d'al-Khwârizmî et d'Abû Kâmil, avec quelques ajouts reflétant les progrès ultérieurs de cette discipline. On y trouve en effet, la définition des objets de l'algèbre (les nombres, les inconnues et leurs puissances), l'exposé des six équations canoniques selon l'ordre du livre d'AL-KHWÂRIZMÎ, la résolution de ces équations sur des exemples qui sont parfois exactement ceux donnés par Abû Kâmil (avec, comme chez ce dernier, les différents cas où le coefficient de x^2 est égal, plus grand ou plus petit que 1), l'application des objets et des algorithmes algébriques à la résolution des mêmes types de problèmes: ceux des dizaines, des biens, des céréales, des butins, des courriers et des rencontres. La plupart de ces problèmes sont repris, avec parfois les mêmes coefficients, soit du livre d'algèbre d'AL-KHWÂRIZMÎ, soit de celui d'Abû Kâmil. Cela dit, l'analyse comparative des méthodes et des problèmes traités par Ibn Badr révèle quelques particularités qu'il est difficile d'attribuer à telle ou telle tradition algébrique d'Orient et qui pourraient provenir de la tradition algébrique andalouse.

Le troisième écrit algébrique qui nous est parvenu est le *Livre de fondements et des prémisses de l'algèbre* d'Ibn al-Bannâ (m. 1321). Son contenu se présente en deux parties : la première, qui a donné son titre à l'ouvrage, traite des fondements et des préliminaires relatifs aux nombres (entiers, rationnels et irrationnels positifs) et aux outils de l'Algèbre (polynômes et équations). Dans cette partie, l'auteur ne se réfère à aucun ouvrage d'algèbre de la tradition de l'Occident musulman; ce qui nous interdit de lui dénier, comme l'ont fait certains de ses successeurs, toute originalité dans le contenu, dans l'agencement ou dans la formulation des différents chapitres.

Cela dit, nous constatons que les trois chapitres de cette partie, tout en étant beaucoup plus développées, suivent exactement l'ordre d'exposition du livre d'Ibn Badr : d'abord l'arithmétique des irrationnels puis celle des polynômes et, enfin, la résolution des équations canoniques et de celles qui s'y ramènent. On y remarque, comme éléments nouveaux par rapport au livre d'Abû Kâmil une extension de la division à l'aide des quantités irrationnelles de la forme $n + m^{1/2} + p^{1/2}$, la réduction des trois équations canoniques du second degré à une même forme : $[x + b/2]^2 = (b/2)^2 + c$, la résolution d'équations polynômiales de degré supérieur à 2 qui se ramène, par changement d'inconnues, soit à l'équation $X^3 = a$, soit à l'une des équations canoniques du second degré.

La seconde partie traite de la résolution des différents types de problèmes à l'aide des méthodes algébriques (problèmes des dizaines, des hommes et des biens), en exposant et en résolvant d'abord ceux qui sont à solutions entières ou rationnelles puis, dans un dernier chapitre, ceux à solutions irrationnelles. L'analyse des énoncés et des solutions montre qu'à de rares exceptions, il s'agit d'une reprise des problèmes d'Abû Kâmil (avec parfois exactement les mêmes coefficients), regroupés selon une autre logique, plus thématique que mathématique d'ailleurs.

Quant aux ajouts, ils sont peu nombreux et consistent soit en des problèmes d'algèbre auxquels nous n'avons pas trouvé d'équivalents dans le livre d'Abû Kâmil (mais qui ne sortent pas de la problématique traitée dans son livre), soit en des problèmes de théorie des nombres concernant essentiellement la décomposition d'un entier en somme de deux carrés d'entiers ou de rationnels. [DJEBBAR 1990]

En plus de ce livre, Ibn al-Bannâ a traité de l'algèbre dans deux autres ouvrages, *l'Abrégé* [IBN AL-BANNÂ 1969] et le *Soulèvement du voile* [ABALLAGH 1988]. Le premier, qui sera le livre mathématique le plus commenté entre le XIV$^{\text{ème}}$ et le XVI$^{\text{ème}}$ siècle, à la fois au Maghreb et en Égypte, ne contient que les règles et les algorithmes de base de l'algèbre, sans démonstrations et sans applications. A cause de cela probablement, et grâce à sa diffusion et aux commentaires qui en ont été faits, il a permis à l'algèbre d'être présente, pendant longtemps, dans les programmes d'enseignement des grandes villes du Maghreb.

Le second ouvrage contient quelques éléments nouveaux. En premier lieu, l'auteur expose des preuves purement algébriques, sans relation avec les démonstrations géométriques de la tradition d'AL-KHWÂRIZMÎ et d'Abû Kâmil, pour justifier l'existence et le calcul des solutions (positives) des équations du second degré. [DJEBBAR 1980, 25-32] En second lieu, il avance une hypothèse nouvelle, malheureusement non appliquée, concernant l'unification de la notion de puissance en algèbre (pour les puissances de l'inconnue), en arithmétique (pour les puissances de 10) et en trigonométrie (pour les degrés, minutes, secondes, etc.). En troisième lieu, Ibn al-Bannâ donne une démonstration de la validité de la fameuse règle des signes, en utilisant une démarche purement algébrique.

Quant aux écrits relatifs à l'Algèbre qui ont été publiés après le traité d'Ibn al-Bannâ, ils sont de trois sortes : des commentaires sur les ouvrages antérieurs, des opuscules autonomes et des chapitres dans des ouvrages de calcul. Comme on va le voir, le contenu de ces écrits n'est pas toujours une simple répétition des méthodes déjà traitées dans les livres connus de la période antérieure.

A notre connaissance, les seuls commentaires qui nous sont parvenus concernent le poème algébrique d'Ibn al-Yâsamîn. Il s'agit d'un opuscule d'Ibn Qunfudh (m. 1407) et d'un autre d'al-Qalasâdî (m. 1486) dont l'analyse ne révèle rien de nouveau si ce n'est la confirmation de l'utilisation intensive du symbolisme algébrique dans l'enseignement mathématique du Maghreb des XIV$^{\text{ème}}$-XV$^{\text{ème}}$ siècles. [DJEBBAR 1980, 41-54] Ce symbolisme permettait d'exprimer les équations du premier et du second degré avec leurs algorithmes de résolution ainsi que les polynômes et les opérations arithmétiques qui leur étaient appliquées. On a longtemps pensé que ce symbolisme était une invention de l'époque d'al-Qalasâdî [WOEPCKE 1854]. Mais la découverte de plusieurs écrits d'Ibn Qunfudh a permis de reculer, de plus d'un siècle, la date de son apparition dans les manuels mathématiques maghrébins. A présent, nous pouvons même dire, grâce à un passage de l'ouvrage d'Ibn al-Yâsamîn, *le Livre de la fécondation des esprits*, que des symboles algébriques étaient déjà utilisés au XIIIe siècle et peut-être même avant. [ZEMOULI 1993]

Le seul ouvrage consacré exclusivement à des problèmes d'algèbre et qui ne soit pas un commentaire d'ouvrages antérieurs, est celui qu'aurait consacré Ibn Haydûr (m. 1413) aux systèmes d'équations du premier degré exprimés sous forme d'achat de volatiles. [IBN HAYDÛR, Ms. Vatican 1403, f. 115b] Mais cet écrit n'a pas encore été retrouvé.

A partir du XIV$^{\text{ème}}$ siècle, et à l'exception du traité d'al-Qatrawânî (que nous évoquerons plus loin), tous les autres livres de calcul de la tradition maghrébine qui nous sont parvenus sont des commentaires de l'*Abrégé* d'Ibn al-Bannâ. Ils contiennent donc tous un chapitre relatif à

l'algèbre. Le premier d'entre eux, *l'Abaissement de la voilette* d'Ibn Qunfudh, a manifestement utilisé, en plus des ouvrages d'Ibn al-Bannâ, d'autres sources non encore identifiées. Cela est évident pour le chapitre de l'Algèbre où l'on trouve, comme éléments nouveaux, un procédé de construction des équations canoniques composée, une évocation rapide d'une formulation différente du concept de puissance d'un monôme et l'écriture d'une équation avec, pour la première fois à notre connaissance, un zéro au second membre. [GUERGOUR 1990]

Le second livre est celui d'Ibn Zakariyyâ (XIV$^{\text{ème}}$ siècle). On y trouve, en plus des six équations canoniques, neuf autres qui se ramènent en fait aux précédentes, soit par élévation au carré des deux membres de l'équation, soit après changement d'inconnue ($X = x^2$). [IBN ZAKARIYYÂ, Ms. Tunis B.N. 561, ff. 148a-151b] Dans la partie de son chapitre d'algèbre réservée aux applications, Ibn Zakariyyâ' reprend les thèmes traités par Ibn al-Bannâ en y ajoutant les problèmes de butin, de rencontre, d'aumône, de courrier, de salaires et de mesure. Les quatre premiers thèmes se retrouvent dans l'*Abrégé* d'Ibn Badr. Les autres pourraient avoir été empruntés au livre, non encore retrouvé, d'al-Qurashî, un mathématicien d'al-Andalus qui a enseigné à Bougie, au XII$^{\text{ème}}$ siècle.

Le troisième et dernier livre a été écrit à Tunis par al-Qatrawânî, un mathématicien du XIV$^{\text{ème}}$ siècle d'origine égyptienne. On y découvre un chapitre d'algèbre à la fois très classique dans la résolution des équations canoniques et tout à fait original, dans le traitement des polynômes (au vu de la tradition maghrébine connue). On trouve en effet, et pour la première fois dans un écrit maghrébin, le calcul de la racine carrée et de la racine cubique d'un polynôme. [AL-QATRAWÂNÎ, Ms. Rabat B.G., 416 Q, pp. 123-128] Pour la racine carrée, il utilise le procédé arithmétique de multiplication par semi-translation. Concrètement, al-Qatrawânî considère le polynôme :

$$81x^6 + 72x^5 + 106x^4 + 184x^3 + 89x^2 + 80x + 64$$

qu'il écrit ainsi :

$$81 \quad 72 \quad 106 \quad 184 \quad 89 \quad 80 \quad 64.$$

Puis, il cherche un polynôme de degré 3 :

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

dont le carré sera implicitement décomposé ainsi :

$$a_3x^3 + (2a_3x^3 + a_2x^2)a_2x^2 + (2a_3x^3 + 2a_2x^2 + a_1x)a_1x + (2a_3x^3 + 2a_2x^2 + 2a_1x + a_0)a_0.$$

Dans le deuxième cas, il considère le polynôme :

$$8x^9 + 48x^8 + 132x^7 + 208x^6 + 198x^5 + 108x^4 + 27x^3$$

qu'il écrit ainsi :

$$8 \quad 48 \quad 132 \quad 208 \quad 198 \quad 108 \quad 27.$$

Puis, il cherche sa racine cubique sous la forme : $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$, en utilisant implicitement la formule du binôme à l'ordre 3, pour exprimer son cube ainsi :

$$(a_3x^3 + a_2x^2)^3 + 3(a_1x + a_2x^2)^2 + 3(a_1x)^2(a_3x^3 + a_2x^2) + (a_1x)^3.$$

Ce chapitre du livre, et la manière dont son contenu est traité, suggèrent plusieurs remarques. Il faut rappeler tout d'abord que l'extraction de la racine carrée d'un polynôme à coefficients entiers ou rationnels positifs apparaît, pour la première fois, dans un ouvrage d'al-Karajî [ANBOUBA 1964, 39-41] et qu'elle sera étendue, par as-Samaw'al, dans son *Livre flamboyant en algèbre*, aux éléments de l'ensemble $P[x; 1/x]$, à coefficients positifs.

D'autre part, sa manière de présenter les calculs diffère quelque peu de la démarche orientale. En effet, dans les deux ouvrages que nous venons d'évoquer, c'est le symbolisme des tableaux qui constitue le support de l'algorithme, alors qu'al-Qatrawânî utilise les symboles maghrébins pour écrire les données, les résultats et la présentation de la multiplication par semi-translation.

Il faut enfin remarquer que le livre d'al-Qatrawânî est le premier traité de Mathématique arabe connu dans lequel est exposé un procédé d'extraction de la racine cubique d'un polynôme[6]. Les sources orientales qui contiennent ce type de traitement des polynômes n'évoquent pas l'extraction de la racine cubique d'un polynôme quelconque. Il est donc possible qu'al-Qatrawânî ait généralisé la méthode de la racine carrée. Mais il est également possible qu'il ait emprunté la méthode à un auteur postérieur à as-Samaw'al.

Bibliographie

ABALLAGH, M. 1988 : *Le Raf^c al-hijâb d'Ibn al-Bannâ*, Thèse de Doctorat, Université de Paris I Pantheon-Sorbonne.

ABDELJAOUAD, M. & HADFI, H. 1986 : *Vers une étude des aspects historiques et mathématiques des problèmes ouverts d'Ibn al-Khawwâm (XIII^{ème} s.)*, Actes du 1er Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Alger, 1-3/12/1986), version française, Alger, La Maison du livre, 1988, pp. 157-178.

ABÛ KÂMIL : *al-Kitâb al-kâmil fî l-jabr* [Le Livre complet en algèbre], Ms. Istanbul, Kara Mustafa Pasha 379.

ABÛ KÂMIL : *Kitâb at-tarâ'if fî l-hisâb* [Le Livre des choses rares en calcul], Ms. Paris B.N. 4946, ff. 3b-15a.

AHWÂZÎ (AL-) : *Ikhtisâr sharh al-maqâla al-^{c}âshira min kitâb Uqlîdis* [Abrégé du commentaire sur le dixième Livre du traité d'Euclide], Ms. Tunis 16167, ff. 61b-65a.

ANBOUBA, A. 1964 : *L'Algèbre al-Badi ^{c} d'al-Karajî*, Beyrouth, Publications de l'Université libanaise.

CHABERT J.-L. & all : 1994 : *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Paris, Belin, 1994; traduction anglaise par C. Weeks, Berlin, Springer-Verlag, 1999.

DJEBBAR, A. & RASHED, R. 1981 : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm*, Alep, Institut for the History of Arabic Sciences.

DJEBBAR, A. 1980 : *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^{ème}-XIV^{ème} siècles*, Paris, Publications Mathématiques d'Orsay, n° 81-02.

DJEBBAR, A. 1986a=1988 : *Quelques aspects de l'Algèbre dans la tradition mathématique arabe d'Orient*, Actes de l'Université d'été du Groupe Inter-IREM Epistémologie (Toulouse, 6-12 Juillet 1986), Toulouse, IREM, 1988. pp. 259-286.

DJEBBAR, A. 1986b=1988 : *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman*, Actes du 1e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Alger, 1-3/12/1986), version française, Alger, La Maison du livre, 1988, pp. 99-123.

[6]Pour plus de détails concernant les activités algébriques arabe en Orient et en Occident musulman, voir [DJEBBAR 1986a et 1986b].

DJEBBAR, A. : *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'épître d'al-Khayyâm (1048-1131) "Sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide"*, introduction et traduction française, Paris, Université Paris-Sud, Prépublications Mathématiques d'Orsay, 1997, n° 97-38.

GUERGOUR, Y. 1990 : *Les écrits mathématiques d'Ibn Qunfudh (1339-1407)*, Magister d'Histoire des Mathématiques, Alger, E.N.S., 1990.

IBN AL-BAGHDÂDÎ : *Risâla fî l-maqâdîr al-mushtaraka wa l-mutabâyina* [Epître sur les grandeurs commensurables et incommensurables], Hayderabad, 1947.

IBN AL-BANNÂ 1969 : *Ibn al-Bannâ' al-Murrâkushî, Talkhîs a^{c}mâl al-hisâb*, M. Souissi (édit), Tunis, Publications de l'Université de Tunis.

IBN AL-FATH : *Risâla fî l-ka^{c}b wa mâl al-mâl wa'l-a^{c}dâd al-mutanâsiba* [Epître sur le cube, le carré-carré et les nombres proportionnels], Ms. Le Caire Dar Riyada 260/4, ff. 95a-104a.

IBN AL-MAJDÎ : [Le recueil de la moelle et le commentaire de l'abrégé des opérations du calcul], Ms. Londres, Brit. Mus. Add. 7469.

IBN HAYDÛR : *Tuhfat al-tullâb fî ^{c}ilm al-hisâb* [La parure des étudiants sur la science du calcul], Ms. Vatican 1403.

IBN QURRA : *La justification des problèmes de l'Algèbre par les preuves géométriques*, Ms. Istanbul Aya Sofya 2457, ff. 39a-41a.

IBN ZAKARIYYÂ : *Sharh at-Talkhîs* [Commentaire de l'Abrégé <d'Ibn al-Bannâ>], Ms. Tunis B. N. 561.

JALLÂD (AL-) : *al-Muqaddima ad-durriyya al-jabriyya* [L'introduction de perle sur l'invention de l'art de l'algèbre], Ms. Sanaa, Maison des manuscrits, Recueil, ff. 249b-256a.

KHWÂRIZMÎ (AL-) 1968 : *al-Kitâb al-mukhtasar fi hisâb al-jabr wa l-muqâbala* [Le Livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison], A. M. Mushrarafa et M.M. Ahmad (édit.), Le Caire, 1968.

MÂHÂNÎ (AL-) : *Tafsîr al-maqâla al-^{c}ashira min kitâb Uqlîdis* [Explication du dixième Livre du traité d'Euclide], Ms. Paris B. N. 2457, ff. 180b-181b.

QATRAWÂNÎ (AL-) : *Rashfat ar-rudâb* [La succion du nectar], Ms. Rabat B.G., 416 Q.

RASHED, R. 1984 : *Entre Arithmétique et Algèbre*, Paris, Les Belles Lettres, 1984.

SAMAW'AL (AS-) 1972 : *al-Bâhir fi l-jabr d'as-Samaw'al* [Le <Livre> flamboyant en algèbre d'as-Samaw'al], S. Ahmad & R. Rashed (édit), Damas, Université de Damas.

SANCHEZ-PEREZ, J. A. 1916 : *Compendio de Algebra de Abenbeder*, édition, traduction espagnole et analyse mathématique, Madrid.

SÉSIANO, J. 1977a : Les méthodes d'analyse indéterminée chez Abû Kâmil, *Centaurus*, Vol. 21, n° 2, pp. 89-105.

SÉSIANO, J. 1977b : Le traitement des équations indéterminées dans le Badîc fî l-hisâb d'Abû Bakr al-Karajî, *Archive of History of Exact Sciences.* Vol. 17, n° 4. pp. 297-379.

SÉSIANO, J. 1981 : *The Arabic Text of Books IV to VII of Dophantus' Arithmetica in the translation of Qusta ibn Luqa*, New York, Speringer Verlag, 1981.

SEZGIN, F. 1974 : *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V, Mathematik bis ca. 430 H. Leide, Brill.

WIEDEMANN, E. 1926-27 : Uber eine besondere Art des Gesellschaftsrechnens nach Ibn al-Haitam. *Sitzungsberichte der Physikalisch-medezinischen Societät zu Eslangen*, 1926-27, 58-59, pp. 191-196.

WOEPCKE, F. 1854 : *Note sur des notations algébriques employées par les Arabes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Vol. 39, pp. 162-165.

YOUSCHKEVITCH, A.P. 1976 : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)*, Paris, Vrin.