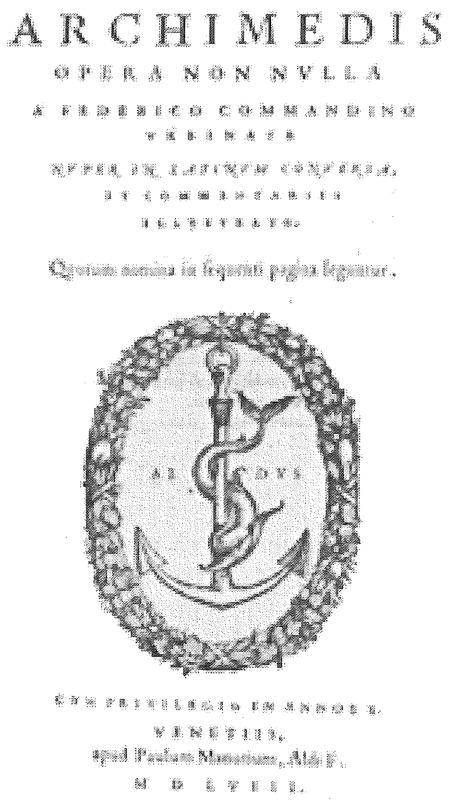

ARCHIMEDIS
OPERA NON NVLLA
A FEDERICO COMMANDINO
VRBINATE
NVPER IN LATINVM CONVERSA,
ET COMMENTARIIS
ILLVSTRATA.
Quorum nomina in sequenti pagina leguntur.

CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.
VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D LVIII.

1, 2, 3 ··· etc
de l'induction à la récurrence

DAUMAS Denis
GUILLEMOT Michel
IREM de Toulouse (France)

Abstract

Introduction

L'Un, c'est l'Être unique. Avec l'Autre, second, on ne sort pas du duo où l'autre renvoie l'image de l'Un et réciproquement, on n'est toujours pas dans l'ordre du pluriel, et certaines grammaires en gardent la trace avec, entre singulier et pluriel, le "duel". Au delà il y a la multitude, pas nécessairement nombrée, c'est le domaine du "beaucoup", "très" que l'on ne peut manquer de rapprocher avec notre "trois". L'aventure commence quand on passe de l'Un à l'unité, ou plutôt aux unités : quand on dispose d'un stock d'unités, on peut les rassembler, les compter. Pour EUCLIDE, le nombre est une *multitude composée d'unités*[1]. A cette idée de multitude, ici nécessairement déterminée puisqu'il s'agit de nombre, NICOMAQUE DE GÉRASE ajoute l'idée de *flux* que nous pouvons associer à celle de progression : on passe d'un nombre au suivant en ajoutant une unité (il faut alors envisager un stock inépuisable d'unités), et c'est sans fin. Nous voilà en présence de l'infini, potentiel car un nombre entier est toujours fini, mais néanmoins redoutable lorsqu'il s'agit de démonstration : l'observation de nombres permet de dégager des régularités, des lois, mais cette induction ne suffit pas à fonder une théorie mathématique. De la conjecture au théorème, il y a l'espace de la démonstration.

Le but de cet atelier était précisément d'explorer, à partir de quelques textes, comment une démarche inductive peut trouver sa place dans une démonstration mathématique. Ce point de vue nous a conduit au choix de ne pas aller au delà de PASCAL qui, en formulant très clairement le principe de ce que nous appelons "démonstration par récurrence" tourne une page dans l'histoire des relations induction/démonstration.

L'arithmétique, qui revient en force dans nos programmes, est un terrain incontournable, mais nous avons fait un autre choix, celui de ne pas nous y cantonner : les procédés itératifs illimités ne manquent pas et certains problèmes de géométrie conduisent également à une démarche inductive.

Nos auteurs seront, par ordre d'entrée en scène : NICOMAQUE DE GÉRASE, PASCAL DE CLERMONT FERRAND, MAUROLYCUS DE MESSINE, EUCLIDE D'ALEXANDRIE et PAPPUS D'ALEXANDRIE, avec la participation d'Archimède de Syracuse.

L'induction chez NICOMAQUE

NICOMAQUE, originaire de Gérase, est un philosophe néopythagoricien du 1^er^ siècle de notre ère. La philosophie pythagoricienne est basée sur le nombre et l'Unité est son principe ultime. Les nombres organisent l'Univers, et c'est en étudiant les harmonies numériques que l'on peut accéder à la connaissance profonde de notre monde. Quand il écrit l'*Introduction arithmétique*, NICOMAQUE ne cherche pas à rédiger un traité d'arithmétique théorique, et l'architecture de son ouvrage n'est pas guidée par la logique démonstrative comme c'est le cas avec les *Éléments* d'EUCLIDE, mais a plutôt un but didactique : familiariser ses lecteurs avec l'arithmétique pythagoricienne. Ainsi il mêle considérations mathématiques et commentaires philosophiques, et ne se préoccupe pas de démonstrations, au sens que l'on donne à ce terme depuis les *Éléments d'Euclide*.

Le premier extrait concerne les nombres parfaits. NICOMAQUE a d'abord traité des "nombres déficients" et des "nombres redondants" dont la somme des diviseurs propres (les "parties rassemblées") est respectivement inférieure et supérieure au nombre considéré: 4 est déficient ($1+2=3$ et $3<4$), 12 est redondant ($1+2+3+4+6=16$ et $16>12$). Il en vient

[1]EUCLIDE, *Les Éléments*, Livre VII, définition 2, page 247.

alors aux nombres parfaits :

> Lors donc qu'un nombre dont toutes les parties qui peuvent être en lui ont été rassemblées et récapitulées en comparaison avec lui-même ni ne les excède par sa multiplicité ni n'est excédé par elles, alors un nombre de ce genre est dit parfait au sens propre, lui qui est égal à toutes ses parties; par exemple 6 [...]; car 6 a comme parties une moitié, un tiers, un sixième qui sont 3, 2, 1, lesquels récapitulés ensemble font 6 égal au nombre initial, ni plus ni moins.

Après la définition, il poursuit :

> Il se fait que, comme les choses belles et conformes à la vertu sont rares et faciles à nombrer, mais les choses laides et sans valeur fréquentes, ainsi les nombres redondants et déficients apparaissent nombreux et mal répartis, leur découverte se faisant dans le désordre, tandis que les nombres parfaits sont faciles à nombrer et agencés selon un ordre convenable; dans les unités, il s'en trouve un seul, 6, un autre seulement dans les dizaines, 28, un troisième seulement dans le degré des centaines, 496, un quatrième dans le domaine des chiliades, c'est-à-dire à l'intérieur des myriades, 8 128; ils ont pour caractère de se terminer alternativement par le nombre 6 ou le nombre 8, et d'être entièrement parmi les pairs.[2]

Autrement dit, pour NICOMAQUE :

1- les nombres parfaits sont pairs (c'est toujours une conjecture, on n'a encore pas trouvé de nombre parfait impair).

2- il y a un nombre parfait et un seul dans chaque intervalle $[10^n\ ;\ 10^{n+1}[$ (en fait, après 8 128 cité par NICOMAQUE, le suivant est 33 550 336) il n'y en a aucun dans $[10^4; 10^5[$ ni dans $[10^5; 10^6[$.

3- les nombres parfaits pairs se terminent par 6 ou par 8 : vrai.

4- les terminaisons 6 et 8 apparaissent alternativement : faux, après 33 550 336 vient 8 589 869 056 qui est aussi terminé par 6.

Il est clair que NICOMAQUE s'est contenté d'observer les premiers nombres parfaits pour en tirer des conclusions générales. Il disposait d'un procédé général pour obtenir des nombres parfaits, mais il est vrai que sa mise en œuvre devient très vite une épreuve, du fait de la taille des nombres. L'observation des premiers nombres parfaits révélant, en opposition avec les nombres déficients et redondants, des dispositions conformes à quelques idées générales sur le beau et le laid, le désir l'emporte sur les tracas d'une expérimentation plus poussée ... et d'une démonstration !

Un second extrait concerne les nombres figurés. La deuxième partie de l'*Introduction arithmétique* est consacrée à ces nombres qui occupent une grande place dans l'arithmétique pythagoricienne. Nous allons nous intéresser au chapitre concernant les nombres triangulaires.

NICOMAQUE annonce la configuration triangulaire de ces nombres, donne les six premiers (3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; 28) auxquels il ajoute l'unité qualifiée de "triangle en puissance", les précédents étant des "triangles en acte", mais il ne les représentera qu'en fin de chapitre: pour lui, l'arithmétique est première, les nombres rythment les figures et non l'inverse.

Observons plus en détail la génération de ces nombres :

[2]NICOMAQUE DE GÉRASE, *Introduction arithmétique*, Livre I, chapitre XVI, pages 75-76.

Il s'engendre quand le nombre naturel est exposé en ligne et que, toujours depuis le début, les nombres successifs sont ajoutés un à un, car les triangles bien ordonnés se réalisent à chaque addition et entassement par exemple à partir de cette ligne naturelle :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,

en prenant le premier nombre, j'ai le premier triangle en puissance, l'unité, ensuite en entassant sur lui le suivant, j'ai le premier triangle en acte, car 3 est 2 et 1, et dans la représentation figurée, il se constitue ainsi : sous la première unité on appose deux unités côte à côte, et le nombre 3 est triangulé; ensuite 3, qui est le nombre suivant, entassé sur ceux-ci, déployé en unités et réuni, produit 6, second nombre triangle en acte, et lui donne aussi une configuration; et à son tour, le nombre qui suit naturellement, 4, entassé sur ceux-ci et noté en unités, donne le nombre 10, bien ordonné après ceux dont on vient de parler, et il prend une configuration triangulaire; et 5 après lui, puis 6, puis 7, et tous les suivants, de sorte que les côtés de chacun compteront harmonieusement autant d'unités que de nombres de la ligne naturelle réunis pour sa constitution.[3]

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \alpha \\
 & & & & & \alpha & \alpha\alpha \\
 & & & & \alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha \\
 & & & \alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha \\
 & & \alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\
 & \alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\
\alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha
\end{array}$$[4]

Les nombres triangulaires se construisent donc successivement, le passage d'un nombre au suivant se faisant dans la représentation par ajout d'une ligne supplémentaire, d'une barre de alphas (dans la numération grecque, la lettre α désigne l'unité). Si nous notons T_1 l'unité, triangle en puissance, alors le principe de la construction des nombres triangulaires T_n peut s'écrire :

$$T_{n+1} = T_n + (n+1).$$

Parlant en général des nombres polygones, NICOMAQUE généralise cette technique et observe que les nombres successifs qu'il faut ajouter à un nombre polygone pour obtenir le suivant peuvent eux mêmes se déduire les uns des autres :

> c'est une règle générale que les gnomons[5] de chaque polygone diffèrent les uns des autres d'une dyade de moins que la quotité liée au nom des angles, à savoir le triangle, d'une unité, le tétragone, d'une dyade, le pentagone, d'une triade, l'hexagone, d'une tétrade, l'heptagone, d'une pentade, et toujours selon un accroissement semblable[6].

Nous pouvons énoncer cette propriété des nombres polygones en notant P_n^k le n$^{\text{ième}}$ polygone de k côtés (le premier étant l'unité) :

$$P_{n+1}^k = P_n^k + (1 + (k - -2)n).$$

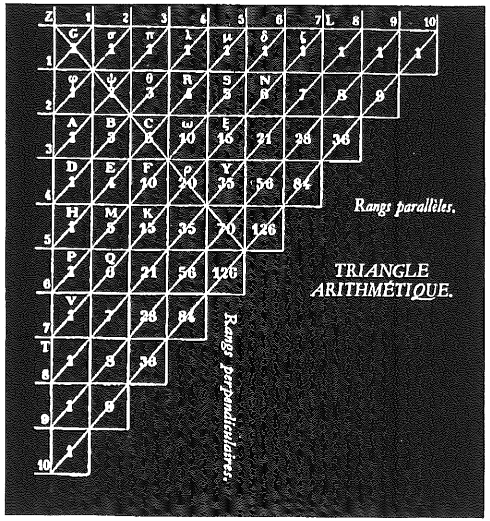
[3]NICOMAQUE DE GÉRASE, *Introduction Arithmétique*, Livre II, Chapitre VIII, p. 105.

[5]"Gnomon", terme qui désigne d'abord le cadran solaire, puis l'équerre, est utilisé par les mathématiciens grecs dans le sens donné par Héron d'Alexandrie, et rappelé par J. Bertier dans ses notes à l'*Introduction arithmétique* : "en général, un gnomon est tout ce qui, en se joignant à quoi que ce soit -nombre ou figure-, rend le tout semblable à ce à quoi il est joint."

[6]NICOMAQUE DE GÉRASE, *Introduction Arithmétique*, Livre II, Chapitre XI, p. 108.

Cela revient donc à considérer les nombres polygones de k côtés comme des sommes de termes successifs, à partir de l'unité, d'une suite arithmétique de raison $k - 2$. Cette idée de somme, sous la forme d'entassement, est centrale dans l'*Introduction arithmétique* et les résultats relèvent, chez NICOMAQUE, uniquement de l'induction. Les mathématiciens grecs avaient-ils résolu le problème de leur démonstration ? On peut constater que cet aspect de l'arithmétique est absent des *Éléments* d'EUCLIDE : était-il considéré comme purement conjectural ?

PASCAL et l'induction mathématique



C'est dans le *Traité du triangle arithmétique*, écrit en français en 1654, que BLAISE PASCAL décrit ainsi la méthode de démonstration de la douzième conséquence :

> Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.
>
> Le 1, qui est évident de soi-même, que cette proposition se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 est à 1.
>
> Le 2, que si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.
>
> D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.[7]

[7]PASCAL, B. *Traité du triangle arithmétique* in *Œuvres complètes*, La Pléiade, page 103.

Cet énoncé est le premier qui expose clairement la méthode de démonstration dite aujourd'hui "raisonnement par récurrence" ou "induction mathématique". Revenons au début du traité, quand PASCAL construit ce triangle :

- dans la première cellule (en haut, à gauche) on met un nombre arbitraire : le générateur G ($G = 1$ dans le triangle représenté).
- ensuite : *le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui le précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui le précède dans son rang parallèle*[8].

C'est la seule règle donnée par PASCAL, mais il précise dans la conséquence première, qu'il faut considérer pour les cellules du premier rang perpendiculaire (respectivement parallèle) qui n'ont aucune cellule qui les précède dans leur rang parallèle (respectivement perpendiculaire) qu'il faut ajouter 0 : les cellules de ces deux rangs sont donc égales au générateur.
PASCAL met ainsi l'accent sur deux choses :

- la généralité du triangle : de nombreux énoncés commencent par "dans tout triangle arithmétique . . . ", (ce n'est qu'au stade des applications que le générateur est posé égal à 1) ;
- sa structure additive, mais au prix d'un défaut d'initialisation pour les premiers rangs, qu'il ne corrige pas toujours dans ses démonstrations.

Précisons que PASCAL appelle "bases" les hypoténuses des triangles successifs, tracées sur la figure. Enfin, PASCAL utilise des lettres pour noter les nombres de différentes cellules, mais ces lettres ne permettent que de respecter le choix arbitraire du générateur, elles restent inscrites dans des cellules particulières. Il ne dispose pas d'un moyen, comme les indices ou les exposants, pour accéder à une notation générale. Par commodité, nous allons nous donner une notation générale, mais pour éviter toute confusion avec les combinaisons, nous n'utiliserons pas la lettre C : nous désignerons par x_n^p la cellule de rang parallèle n et de rang perpendiculaire p. Nous pouvons donc écrire

$$x_n^1 = x_1^p = G,$$

et traduire la construction additive du triangle par

$$x_{n+1}^{p+1} = x_{n+1}^p + x_n^{p+1}.$$

La cellule x_n^p appartient à la base $n + p + 1$.
L'énoncé de la douzième conséquence est :

En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.[9]

Avec nos notations, cela se traduit par : n et p étant deux naturels non nuls quelconques,

$$\frac{x_n^{p+1}}{x_{n+1}^p} = \frac{n}{p}.$$

Mais cette traduction laisse de côté la "base" des cellules : une cellule de rang parallèle n et de rang perpendiculaire p est dans la base $n + p - 1$, la base commune des cellules est donc ici

[8]PASCAL, B. *Traité du triangle arithmétique*, page 98.
[9]PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, page 103.

de rang $n + p$, et la base initiale est la deuxième où, comme l'affirme PASCAL, la proposition se vérifie sans difficulté. Reste à prouver le "deuxième lemme".

PASCAL fait ce que nous pouvons appeler une "démonstration quasi-générale" : prenant la quatrième base comme base quelconque, il démontre que si la proposition est vraie dans cette base, alors elle est vraie dans la suivante, en l'occurrence, la cinquième. Et encore, il ne prend dans cette cinquième base que le rapport de C à E : *on le montrera de même dans tout le reste*.
En substance, la démonstration de PASCAL est la suivante :

si la proposition est vraie dans la base des cellules $D, B, \theta \cdots$, alors $\frac{D}{B} = \frac{1}{3}$ et $\frac{B}{\theta} = \frac{2}{2}$.
On en déduit $\frac{D+B}{B} = \frac{1+3}{3}$ et $\frac{B+\theta}{B} = \frac{2+2}{2}$.
Mais $D + B = E$ et $B + \theta = C$, donc $\frac{C}{E} = \frac{B+\theta}{B} \times \frac{B}{D+B} = \frac{4}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$: la proposition est vraie pour les cellules C et E.

On peut s'étonner qu'après avoir brillamment exposé le principe de l'induction mathématique, PASCAL soit obligé d'avoir recours à une autre forme d'induction : ce qui a été fait sur un cas particulier peut se faire de la même manière dans les autres cas. Si nous qualifions ce type de démonstration de "quasi-générale", c'est que la démonstration générale se mène exactement de la même manière, la seule différence étant dans le recours à des notations permettant de se situer dans le cas général. Autrement dit, la carence de la notation n'altère pas la rigueur de la démonstration. Il suffit de la faire pour s'en convaincre :

		x_{n-1}^{p+1}
	x_n^p	x_n^{p+1}
x_{n+1}^{p-1}	x_{n+1}^p	

la clef de la démonstration est dans la structure additive du triangle :

$$x_n^{p+1} = x_n^p + x_{n-1}^{p+1} \text{ et } x_{n+1}^p = x_{n+1}^{p-1} + x_n^p,$$

et dans la charnière occupée par la cellule x_n^p:

$$\text{si } \frac{x_n^p}{x_{n+1}^{p-1}} = \frac{n}{p-1} \text{ et } \frac{x_{n-1}^{p+1}}{x_n^p}, \text{ alors}$$

$$\frac{x_n^{p+1}}{x_{n+1}^p} = \frac{x_{n-1}^{p+1}}{x_n^p} \times \frac{x_n^p}{x_n^p + x_{n+1}^{p-1}} = \frac{p + (n-1)}{p} \times \frac{n}{(p-1)+n} = \frac{n}{p}.$$

On peut cependant remarquer que PASCAL a omis d'envisager le cas où une des deux cellules occupe le premier rang parallèle ou le premier rang perpendiculaire.

Pourquoi PASCAL a-t-il attendu la conséquence douzième pour exposer le principe de la démonstration par récurrence ? Prenons par exemple la conséquence cinquième :

En tout triangle arithmétique, chaque cellule est égale à sa réciproque.[10]

[10]PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, page 100. La réciproque d'une cellule est, dans la même base, la symétrique par rapport au milieu de la base. Avec nos notations, la réciproque de x_n^p est x_p^n.

Pour la démonstration, PASCAL n'envisage pas le cas où une cellule est sa propre réciproque et commence donc à la seconde base. Dans celle-ci, comme dans la troisième, les seules cellules concernées sont égales au générateur et le résultat est "évident". Dans la quatrième base, les cellules extrêmes sont aussi égales au générateur. Restent B et θ :

$B = A + \Psi$, $\theta = \Psi + \pi$ et, comme A et π sont réciproques dans la troisième base, on a bien $B = \theta$. Et PASCAL conclut :

> Ainsi l'on montrera dans toutes les bases que les réciproques sont égales, parce que les extrêmes sont égales à G, et que les autres s'interpréteront toujours par d'autres égales dans la base précédente qui sont réciproques entre elles.

PASCAL ne fait pas ici une démonstration par récurrence, en dégageant clairement le premier lemme et le second. S'il traite d'abord des bases 2 et 3, c'est davantage pour leur spécificité (les cellules concernées sont toutes égales au générateur), et ce n'est qu'à partir de la quatrième base qu'il met en route un procédé qui pourra s'appliquer aux suivantes. Nous parlerons ici de "démonstration de proche en proche", avec l'idée que c'est une démonstration que l'on peut poursuivre jusqu'à une base donnée, quelle qu'elle soit. On pourrait alors penser que la rigueur de PASCAL est incertaine, mais le problème n'est certainement pas là : pour PASCAL, démontrer consiste avant tout à éclairer, à rendre évident. Ainsi, il rejette par principe le raisonnement par l'absurde qui n'éclaire pas mais oblige à admettre quelque chose parce que son contraire est impossible. La cinquième conséquence est simple et s'impose aisément quand on a observé ce qui est en œuvre dans les premières bases, la douzième est beaucoup plus compliquée et PASCAL lui réserve un type de raisonnement plus élaboré.

Autre question : PASCAL est-il le premier a avoir dégagé clairement les deux temps d'un raisonnement par récurrence ? Dans cette recherche de l'antériorité, un débat, lui-même récurrent, oppose des chercheurs. Nous n'allons pas présenter ces divergences, mais nous pouvons citer par exemple, Freudenthal s'opposant à Vacca au sujet de MAUROLYCUS, Vitrac à Itard à propos d'EUCLIDE[11]... et faire une rapide incursion chez MAUROLYCUS, puis chez EUCLIDE.

MAUROLYCUS : retour aux nombres figurés

En écrivant, sous le pseudonyme de Monsieur Dettonville, une lettre à Carcavi traitant de la roulette, PASCAL lui-même donne la piste de MAUROLYCUS :

> Or tout nombre triangulaire, pris deux fois et diminué de son exposant, est le même que le carré de son exposant; comme, par exemple, le troisième nombre triangulaire 6, étant doublé, est 12, qui diminué de l'exposant 3, il reste 9, qui est le carré de 3.
> Cela est aisé par Maurolic et de là paraît la vérité de ma proposition.[12]

MAUROLYCUS (ou Maurolyco), mathématicien (et abbé) sicilien (Messine, 1494-1575) écrit en 1557 une arithmétique en deux Livres, publiée à Venise en 1575.[13] Dans les prolégomènes, MAUROLYCUS précise que son traité est consacré aux figures numériques planes et

[11]G. VACCA, Sur le principe d'induction mathématique, *Revue de Métaphysique et de morale*, dix-neuvième année - 1911, pp. 30-33.
H. FREUDENTHAL, Zur Geschichte des vollständigen induktion, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 6, 1953, pp. 18-37.
J. ITARD, *Les livres arithmétiques d'*EUCLIDE, Hermann, Paris, 1961, pp. 73-75.
B. VITRAC, EUCLIDE, *Les Éléments*, volume 2, PUF, Paris, 1994, pp. 467-472.

[12]PASCAL, *La roulette et traités connexes*, in *Œuvres complètes*, page 237.

[13]Nous remercions Jean Cassinet de nous avoir procuré des extraits de cet ouvrage qui avait connu une notoriété certaine, comme en témoigne PASCAL.

solides (triangles, carrés, pentagones, hexagones...), et annonce une méthode de démonstration nouvelle et plus simple que celles de ses prédécesseurs. Parmi les propositions que l'on peut associer au problème de la démonstration par récurrence, prenons le couple des propositions 13 et 15.

La treizième proposition est

> Tout carré forme avec l'impair suivant le carré suivant.

Si l'on note C_n le $n^{\text{ième}}$ carré et I_n le $n^{\text{ième}}$ nombre impair, la proposition devient

$$C_n + I_{n+1} = C_{n+1},$$

et renvoie à une de nos "identités"

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

La démonstration, qui est menée sur un cas particulier (démonstration "quasi-générale") n'a pas de rapport avec l'induction, mais la proposition 13 intervient dans la démonstration de la proposition 15 :

Quinzième

> De la réunion des nombres impairs pris successivement dans l'ordre à partir de l'unité sont construits les nombres carrés, sans interruption à partir de l'unité, eux-mêmes collatéraux à ces impairs. En effet, d'après l'avant dernière proposition, l'unité pour commencer, avec l'impair suivant donne le carré suivant, à savoir 4. Et 4 lui-même, avec le troisième impair, 5, donne le troisième carré, 9. De même que 9, troisième carré , donne avec le quatrième impair, 7, le quatrième carré, 16 et ainsi de suite à l'infini, la proposition est démontrée par l'application répétée de la 13ème proposition.

Il s'agit donc de démontrer que la somme des n premiers nombres impairs est le $n^{\text{ième}}$ carré. MAUROLYCUS commence avec $n = 2$, certainement parce qu'un seul nombre ne fait pas une "réunion", mais implicitement, il est dit que l'unité est à la fois le premier impair et le premier carré.

Le schéma de la démonstration est le suivant :

$I_1 = 1 = C_1$ et $C_1 + I_2 = C_2$, d'après 13, donc $I_1 + I_2 = C_2 (= 4)$.
$I_1 + I_2 + I_3 = (I_1 + I_2) + I_3 = C_2 + I_3 = C_3 (= 9)$, d'après 13.
$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (I_1 + I_2 + I_3) + I_4 = C_3 + I_4 = C_4 (= 16)$ d'après 13,
...

et ainsi de suite à l'infini. Et MAUROLYCUS précise que ce qui permet de passer d'un rang au suivant est toujours la proposition 13.

Rédigeons, pour comparer, une démonstration par récurrence de la proposition :

$$\text{quel que soit le naturel } n (n \geq 2), \sum_{p=1}^{n} I_p = C_n.$$

1) La proposition est vérifiée au rang initial 2 : $I_1 + I_2 = 1 + 3 = 4 = C_2$.

2) Si elle est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$:

si, pour $n \geq 2, \sum_{p=1}^{n} I_p = C_n$, alors $\sum_{p=1}^{n+1} I_p = \sum_{p=1}^{n} I_p + I_{n+1} = C_n + I_{n+1}$ et, d'après 13, $C_n + I_{n+1} = C_{n+1}$, donc $\sum_{p=1}^{n+1} I_p = C_{n+1}$.

Dans la démonstration de MAUROLYCUS nous ne trouvons pas les deux lemmes de PASCAL :

- pour le premier, nul besoin d'invoquer la proposition 13 pour vérifier la proposition au rang initial, 2.
- quand au deuxième lemme de PASCAL, n'est-il pas fait précisément pour éviter la répétition à portée inductive à laquelle se livre MAUROLYCUS ?

EUCLIDE et la quantité des nombres premiers

Bien que ne traitant pas des nombres figurés, EUCLIDE utilise quelques démarches inductives dans ses *Éléments*. Citons l'application de la division euclidienne à la recherche de la plus grande commune mesure de deux nombres (connue sous le nom d'"algorithme d'Euclide"), la construction de proche en proche de la plus grande commune mesure de trois nombres ou davantage, la même chose concernant cette fois le plus grand multiple commun, l'étude de certains aspects des proportions continues (suites géométriques). C'est la proposition 20 du Livre 9 que nous avons choisie :

> Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombre premiers proposée.[14]

On dit aujourd'hui que l'ensemble des nombres premiers est infini, l'infini étant réalisé, en acte, dans l'ensemble des nombres premiers. EUCLIDE dans son énoncé reste, comme les mathématiciens grecs, dans le domaine de l'infini potentiel, et donc dans le fini. Mais ce qui nous intéresse dans cette proposition, c'est qu'EUCLIDE démontre que si on se donne une quantité quelconque de nombres premiers, alors on peut en construire un de plus. Et on ne peut s'empêcher de penser au deuxième lemme de PASCAL où le passage de n à $n+1$ assure dans l'infinité des nombres naturels une proposition vérifiée pour le premier.

Nous allons présenter la démonstration d'EUCLIDE sur trois colonnes : dans la première le texte d'EUCLIDE (sa traduction par Vitrac), dans la seconde un commentaire pas à pas de ce texte, et dans la troisième un essai de démonstration générale qui respecte les grandes articulations de la démonstration d'EUCLIDE.

[14]EUCLIDE, Les Éléments, page 444.

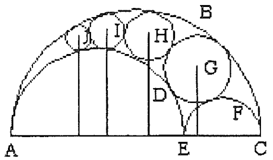
Soient les nombres premiers proposés A. B. C. Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que A. B. C.	Comme nous l'avons déjà observé, la proposition générale est démontrée en utilisant seulement trois nombres premiers.	Soient A_1, A_2, ...A_n des nombres premiers (distincts), je dis qu'il y a plus de n nombres premiers.
En effet, que soit pris le plus petit [nombre] mesuré par A. B. C. et que ce soit DE et que l'unité DF soit ajoutée à DE. Alors ou bien EF est premier ou bien non.	Le plus petit nombre mesuré par A,B,C (nous disons aujourd'hui le plus petit commun multiple de A,B,C) est le produit ABC car ces trois nombres sont premiers, mais Euclide évite la multiplication, problématique chez les Grecs pour lesquels le produit de deux nombres est plan, de trois nombres, solide, mais que peut être le produit de deux plans ? Posons D = PPCM(A,B,C)+1.(ici D = ABC+1).	Soit $X = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n + 1$.
D'abord qu'il soit premier ; donc sont trouvés les nombres premiers A. B. C. EF plus nombreux que A. B. C.	1) si D est premier, D étant par construction distinct de A, de B et de C (Euclide n'éprouve pas ici le besoin de préciser ce point), nous avons maintenant quatre nombres premiers distincts : A, B, C et D.	1) Si X est premier, on a les nombres premiers A_1, A_2, ...,A_n, X, plus nombreux que les nombres premiers A_1, A_2, ...,A_n puisque X est, par construction, distinct de chacun des nombres A_1, A_2, ...,A_n.
Mais alors que EF ne soit pas premier ; il est donc mesuré par un certain nombre premier (VII.32). Qu'il soit mesuré par le [nombre] premier G. Je dis que G n'est pas le même que l'un quelconque des A. B. C.	2) si D n'est pas premier, D admet au moins un diviseur premier (Euclide démontre cela aux propositions VII-31 et 32). Soit donc E un diviseur premier de D : démontrons, par l'absurde, que E est distinct de A, de B et de C.	2) Si X n'est pas premier, il a au moins un diviseur premier Y. De plus, Y n'est aucun des nombres premier A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
En effet, si c'est possible, qu'il le soit. Or A. B. C mesurent DE ; donc G mesurera aussi DE. Mais il mesure aussi EF : il mesurera aussi l'unité DF restante tout en étant un nombre ; ce qui est absurde. G n'est donc pas le même que l'un des A. B. C. Et il est supposé premier. *Donc sont trouvés les nombres premiers A. B. C. G. plus nombreux que la multitude proposée des A. B. C.* *Ce qu'il fallait démontrer.*	Supposons en effet que E = A ou E = B ou E = C. E est alors un diviseur de ABC et de D, et par conséquent un diviseur de la différence D - ABC qui vaut 1. Or un nombre ne peut diviser 1, on a donc E ≠ A et E ≠ B et E ≠ C. A, B, C, E sont donc quatre nombres premiers distincts. Il y a donc plus de trois nombres premiers.	En effet, s'il existe au moins un i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tels que $Y = A_i$, Y divise à la fois X et $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Y divise donc $X - A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ qui vaut 1, ce qui est impossible. Nous avons donc dans les deux cas n+1 nombres premiers distincts : il y a donc plus de n nombres premiers..

Nous étions partis du problème que pose l'infinité des nombres pour débusquer, entre induction conjecturale et récurrence des pratiques démonstratives (par itération, de proche en proche) propres à établir des propositions vraies pour tout nombre entier. Ici nous avons un changement important : nous pouvons opposer une démarche "de proche en proche" comme par exemple celle du crible d'Eratosthène à celle d'EUCLIDE. Ce crible permet de trouver des nombres premiers, mais trouverons-nous toujours de nouveaux nombres premiers ? Avec PAPPUS, nous allons passer de l'arithmétique à la géométrie et voir qu'établir une proposition au rang initial n'est pas toujours chose facile.

PAPPUS D'ALEXANDRIE : **l'arbelon**

Nous ne savons presque rien sur PAPPUS D'ALEXANDRIE, un des derniers grands mathématiciens de l'antiquité grecque. Il a vécu à une période que l'on situe généralement entre la fin du troisième et le début du quatrième siècle. Son œuvre principale, la *Collection Mathématique* qui nous est parvenue de manière incomplète, est un témoignage important concernant les mathématiques grecques. PAPPUS y expose les travaux de ses prédécesseurs en les complétant, les généralisant ou simplifiant certaines démonstrations. Il propose aussi des résultats nouveaux tout en se préoccupant de la démarche analytique conduisant à leurs preuves. La traduction latine de la *Collection Mathématique* effectuée par Commandin (1509-1575) a beaucoup contribué au développement des mathématiques au dix-septième siècle : pour notre propos, elle ne pouvait être ignorée ni de PASCAL ni de FERMAT.

L'objet de notre étude concerne ici les chapitres XIV à XX du quatrième livre : nous utilisons la traduction de Paul Ver Eecke en transformant, pour une meilleure compréhension, les lettres grecques en les lettres latines et en gardant, dans la mesure du possible, les mêmes notations tout le long de notre exposé. Écoutons ce que nous dit PAPPUS au chapitre XIV que nous citons en entier:

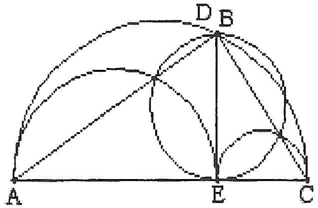


> La proposition suivante est rapportée dans certains ouvrages anciens. Supposons trois demi-cercles ABC[15], ADE, EFC, tangents entre eux, et inscrivons, dans l'espace compris entre leurs arcs, qu'on appelle l'**Arbelon**, tant de cercles qu'on voudra, tangents aux demi-cercles et tangents entre eux, tels que ceux qui sont décrits autour des centres G, H, I, J.
>
> On démontrera que la perpendiculaire menée du centre G sur la droite AC est égale au diamètre du cercle décrit autour de G; que la perpendiculaire menée du point H est le double diamètre du cercle décrit autour de H; que la perpendiculaire menée du point I est le triple, et que l'inscription de cercles étant faite à l'infini, les perpendiculaires successives seront des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent continuellement d'une unité. Mais nous allons démontrer d'abord les choses qui seront admises pour cela (pp. 158-159).

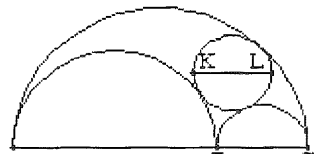
Que nous dit PAPPUS ? Que la proposition en question "est rapportée dans certains ouvrages anciens". La *Collection Mathématique* comporte de nombreux témoignages du même genre.

[15]PAPPUS désigne un cercle par trois de ses points ou aussi parfois par son centre.

En l'absence d'autres écrits qui ne nous sont pas parvenus nous sommes amenés à attribuer à PAPPUS peut être plus que ce qui lui est dû. En fait, la figure de base "trois demi-cercles ABC, ADE, EFC tangents entre eux" et "l'espace compris entre leurs arcs" sont connus : il s'agit de l'arbelon qui ressemble au tranchet du cordonnier. Le mot grec, arbelon, a été conservé par Commandin dans sa version latine et par Ver Eecke dans la traduction française.



On retrouve cet *arbelon* dans *Le Livre des Lemmes* d'Archimède (vers 287-212 avant Jésus-Christ) ouvrage qui nous a été seulement transmis dans sa version arabe. Nous considérons seulement ici les propositions IV et VI. Dans la proposition IV Archimède démontre que l'aire de l'*arbelon* $ABCD$ est égale à l'aire du cercle tangent en E au diamètre AC et passant par B, point du cercle ABC tel que BE soit orthogonal à AC[16]. Dans la proposition VI Archimède prend une position particulière du point E et considère le cercle tangent aux trois demi-cercles : désignons son diamètre parallèle à AC par KL.



> prenons sur son diamètre, un point E tel que AE soit égal à une fois et demie EC.[. . .]. Il s'agit de trouver le rapport du diamètre AC au diamètre KL.[. . .]
>
> Nous avons donc trouvé le rapport en question. Si AC était à KL dans un rapport quelconque tel que celui de quatre à trois, ou de cinq à quatre ou dans un autre, on procéderait et raisonnerait comme nous venons de le faire (p. 531).

Autrement dit, Archimède traite le cas particulier de "une fois et demie" c'est-à-dire du rapport de 3 à 2 pour engager le lecteur à procéder de même lors de la considération de tout autre rapport d'entiers[17].

On mesure mieux la distance qui sépare ce texte d'Archimède de l'écrit de PAPPUS en traduisant celui-ci sous une forme plus moderne. Dans l'*arbelon* PAPPUS inscrit une suite de cercles dont le premier de centre C_1 est tangent aux demi-cercles délimitant l'*arbelon* et dont le second est tangent à ce cercle et aux demi-cercles ABC et ADE. Désignons par C_2 son centre.

[16]L'aire de l'arbelon est $\frac{\pi}{8}(AC^2 - AE^2 - EC^2)$ soit $\frac{\pi}{4}AE.AC$ ou encore $\frac{\pi}{4}BD^2$ qui est l'aire du cercle de diamètre BE.

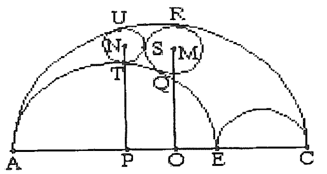
[17]Si $\frac{AC}{AE} = r$, alors $\frac{AC}{KL} = \frac{r^2+r+1}{r}$. Par exemple si $r = \frac{3}{2}$, alors $\frac{AC}{KL} = \frac{19}{6}$.

Plus généralement, on peut définir par récurrence la suite des cercles (C_n) de centre C_n tels que (C_{n+1}) soit tangent au cercle (C_n) et aux demi-cercles ABC et ADE. Si nous désignons par h_n la distance de C_n au diamètre AC et par d_n la mesure du diamètre de (C_n), nous pouvons traduire la proposition rapportée par PAPPUS sous la forme suivante :

$$h_1 = d_1, h_2 = 2d_2, h_3 = 3d_3$$

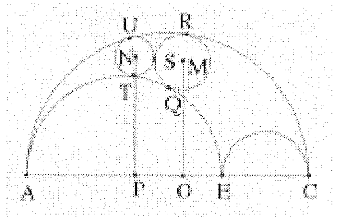
et "l'inscription des cercles étant faite à l'infini", si n est un entier naturel quelconque

$$(1)\ \ h_n = nd_n$$



Autrement dit, à la différence d'Archimède, PAPPUS ou un de ses prédécesseurs ne se contente pas d'un cas particulier qu'il suffit de répéter pour tout autre cas. Ici, en quelque sorte, avec nos notations d'aujourd'hui, la construction par récurrence de la suite (C_n) et la nature de la relation (1) imposent un changement de type démonstratif : le raisonnement par récurrence rentre alors en jeu.

PAPPUS ne met pas en évidence ce mode de preuve mathématique. Mais, comme l'a remarqué Hussein Tahir dans son article "PAPPUS and the mathematical induction" paru en 1995 dans *Australian Mathematical Gazette*, il en précise les étapes essentielles[18]



- rang initial : *"la perpendiculaire menée du centre G sur la droite AC est égale au diamètre du cercle décrit autour de G"* (p. 158)

- passage du rang n à $n+1$: *"Proposition 15 : les mêmes choses étant posées... je dis que la droite NP est au diamètre du cercle STU comme la droite MO, conjointement avec le diamètre du cercle QR est au diamètre de ce cercle"*. (pp. 166-167)

PAPPUS démontre ce passage de n à $n+1$ dans un cadre plus général que celui de la suite des cercles (C_n). Plus précisément, dans l'*arbelon*, il considère deux cercles tangents entre eux et tangents aux demi-cercles ABC et ADE. Le premier de centre M est tangent respectivement à ABC et ADE aux points R et Q tandis que le second, de centre N, l'est respectivement en

[18] Thus, it seems to me that PAPPUS understood the essential ideas in the mathematical induction.

U et T, ces deux cercles étant tangents en S. Si O et P désignent les projections respectives de M et N sur le diamètre AC et si nous notons par d et d' les diamètres respectifs des cercles de centre M et N, nous pouvons traduire l'affirmation de PAPPUS sous la forme de l'égalité suivante

$$(2)\ \ \frac{NP}{d'} = \frac{MO + d}{d}$$

d'où, nous déduisons aisément que, pour la suite des cercles (C_n),

$$\frac{h_{n+1}}{d_{n+1}} = \frac{h_n + d_n}{d_n}.$$

Il est alors clair que de

$$(1)\ \ h_n = nd_n$$

on déduit

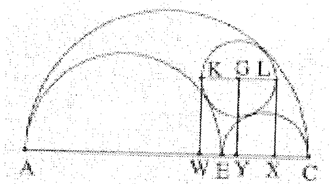
$$h_{n+1} = (n+1)d_{n+1}$$

d'où le passage de "n à $n+1$".
Il n'est pas question d'examiner ici toutes les démonstrations proposées par PAPPUS pour aboutir à ses fins : nous renvoyons, pour une étude plus complète, à la brochure que prépare notre collègue Fréderique Pasturel à l'I. R. E. M de Toulouse. Nous nous contentons de préciser les outils mis en jeu par PAPPUS. Tout d'abord, puisque (2) se présente sous la forme d'une proportion, les transformations de celles ci, bien connues des mathématiciens de l'Antiquité, sont abondamment utilisées. Par exemple, avec nos notations d'aujourd'hui, les égalités

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

sont équivalentes.

S'agissant de cercles, l'inscription de l'angle droit à l'aide d'un diamètre et la puissance d'un point par rapport à un cercle sont aussi repris par PAPPUS. Enfin, les perpendiculaires au diamètre sont parallèles entre elles. Dès lors, les relations de Thalès, les angles alternes-internes, les triangles semblables et enfin les alignements sont des objets démonstratifs très utiles.



Il reste à démontrer la propriété au rang initial. Nous donnons en annexe le début de la proposition 16 avec quelques commentaires afin d'aider à sa compréhension. Contentons nous, ici, d'en préciser quelques étapes. Soient W, X et Y les projections respectives de K, G et L sur AC, K et L désignant les extrémités du diamètre parallèle à AC. Il faut donc démontrer que :

$$GY = KL.$$

D'après la proposition 14, on a,

$$AC \cdot AW = AX \cdot AE,$$

d'où, avec nos notations d'aujourd'hui,

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AX}{AW} = \frac{AE + EC}{AE} = \frac{AW + WX}{AW},$$

d'où, d'après les propriétés des rapports

$$(3)\ \frac{EC}{AE} = \frac{WX}{AW}.$$

On obtient de même, toujours d'après la proposition 14 :

$$CA \cdot CX = CW \cdot CE,$$

d'où

$$(4)\ \frac{EC}{AE} = \frac{CX}{WX}.$$

Par conséquent de (3) et (4) on déduit

$$(5)\ \frac{WX}{AW} = \frac{CX}{WX} \quad \text{ou} \quad AW \cdot CX = WX^2.$$

Mais dans le chapitre XVI où est prouvée la proposition 14 PAPPUS démontre, en plus, que

$$(6)\ AW \cdot CX = GY^2.$$

Les égalités (5) et (6) fournissent l'égalité cherchée.

Contrairement aux cas habituels, la démonstration du "rang initial" n'est pas immédiate. Il en est de même du "passage de n à $n+1$" que nous n'avons pas, ici, explicité longuement. En fait, ces points essentiels de ce que nous nommons, aujourd'hui, le raisonnement par récurrence, sont, chez PAPPUS, une partie d'un corpus beaucoup plus vaste où les résultats sont formulés et démontrés dans le cadre le plus général possible. Peut être que ceci explique la découverte tardive de ce type de démonstration dans la *Collection Mathématique*.

Bibliography

ARCHIMÈDE, *Le Livre des Lemmes* ⋯ , trad. C. Mugler, Paris, Les Belles Lettres, 1971, pp. 131-164.

EUCLIDE, *Les Éléments*, volume 2. Livres V à IX, Éd. Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1994.

NICOMAQUE DE GÉRASE, *Introduction arithmétique*, Éd. Janine Bertier, VRIN, Paris, 1978.

PASCAL, *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléïade, nrf, Gallimard, Paris, 1954.

PAPPUS D'ALEXANDRIE, *La Collection Mathématique*, trad. P, Ver Eecke, rééd. Paris, Blanchard, 1982.

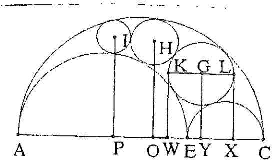
TAHIR, H., Pappus and Mathematical Induction, *Australian Mathematical Gazette* 22 (1995) 166-167.

Annexe : proposition 16

Proposition 16.

" Ces choses étant démontrées au préalable, posons le demi-cercle ABC et posons un point quelconque E sur sa base ; décrivons les demi-cercles ADE et EFC sur les droites AE et EC ; inscrivons dans l'espace situé entre les trois arcs appelé l'Arbelon, des cercles tant qu'on voudra, tangents aux demi-cercles et tangents entre eux tels que ceux décrits autour des centres G, H, I et menons de leurs centres, perpendiculairement sur la droite AC, les droites GY, HO, IP. Je dis que la droite GY est égale au diamètre du cercle décrit autour du point G que la droite HO est le double du diamètre du cercle décrit autour du point H, que la droite IP est le triple du diamètre du cercle décrit autour du point I, et que les perpendiculaires suivantes sont des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent continuellement d'une unité.

Menons le diamètre KL parallèle à la droite AC et les perpendiculaires KW et LX. Dès lors, en vertu de ce qui a été démontré antérieurement, le rectangle compris sous les droites AC, AW équivaut au rectangle compris sous les droites AX, AE et le rectangle compris sous les droites CA, CX équivaut au rectangle compris sous les droites CW, CE. Par conséquent, la droite WX est à la droite XC comme la droite AW est à la droite WX ; car l'un et l'autre rapport sont les mêmes que celui de la droite AE à la droite EC. En effet, puisque le rectangle compris sous AC, AW équivaut au rectangle compris sous AX, AE, il s'en suit que AE est à AW comme AC est à AX ; que, par division, WX est à AW comme EC est à AE, et que inversement, AW est à WX comme AE est à EC. Derechef, puisque le rectangle compris sous AC et XC équivaut au rectangle compris sous WC, EC, il s'ensuit que EC est à XC comme AC est à WC ; que par division WX est à XC comme AE est à EC. Or, AW est aussi à WX comme AE est à EC ; donc WX est à XC comme AW est à WX. En conséquence, le rectangle



Les cercles : $C_1(G, d_1)$ $GY = d_1$

$C_2(H, d_2)$ $HO = 2d_2$

$C_3(I, d_5)$ $IP = 3d_3$

$\vdots$

$C_n(O_n, d_n)$ $O_nH_n = nd_n.$

Pappus commence par démontrer que :

$$GY = KL$$

De la proposition 14 il déduit

(1) AC.AW = AX.AE et

(2) (2) CA.CX = CW.CE

Par "rectangle sous les droites AC, AW" nous entendons aujourd'hui le produit AC . AW.

Pappus affirme une conséquence de (1)

$$(3)\ \frac{WX}{XC} = \frac{AW}{WC}$$

qu'il démontre comme conséquence de

$$(4)\ \frac{WX}{XC} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{et } (5)\ \frac{AW}{WX} = \frac{AE}{EC}.$$

En effet de (1) on a : $\frac{AE}{AW} = \frac{AC}{AX}$

implicitement, $\frac{AX}{AW} = \frac{AC}{AE}$, d'où

$$\frac{(AW + WX)}{AW} = \frac{(AE + EC)}{AE}$$

et "par division" $\frac{WX}{AW} = \frac{EC}{AE}$

et par suite (4).

De même de (2) on obtient (5) et par

compris sous les droites AW, XC équivaut au carré de la droite WX.
Or on a démontré (Prop.14) que le rectangle compris sous les droites AW, XC équivaut aussi au carré de la droite GY; donc la droite GY est égale à la droite WX, c'est-à-dire au diamètre KL du cercle décrit autour du point G
Et puisqu'il a été démontré précédemment que la droite HO est au diamètre du cercle décrit autour du point H comme la droite GY conjointement avec la droite KL est à la droite KL et puisque la droite GY, conjointement avec la droite KL est le double de la droite KL il s'ensuit que la droite HO sera aussi le double du diamètre du cercle décrit autour du point O
En conséquence, la droite HO, conjointement avec le diamètre du cercle décrit autour du point H est le triple de ce diamètre. De plus, la droite IP est dans le même rapport avec le diamètre du cercle décrit autour du point I ; par conséquent, la droite IP est aussi le triple du diamètre du cercle décrit autour du point I
Et pareillement, la perpendiculaire relative au cercle suivant est le quadruple de son diamètre ; les perpendiculaires suivantes seront trouvées des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent successivement l'un l'autre d'une unité, et l'on démontrera que cela se présente ainsi à l'infini. "

conséquent (3).
De (3) on déduit : $AW \,.\, XC = WX^2$.
De la proposition 14, Pappus déduit aussi

$$AW \,.\, XC = GY^2.$$

d'où l'égalité cherchée :

$$GY = WX = KL = d_1.$$

Pappus démontre ensuite que : $HO = 2d_2$.
De la proposition 15, il déduit

$$\frac{HO}{d_2} = \frac{(GY + d_1)}{d_1} = \frac{2d_1}{d_1}$$

d'où : $h_2 = HO = 2d_2$.

Pappus opère aussi avec le troisième cercle

$$HO + d_2 = 2d_2 + d_2 = 3d_2$$

et d'après la proposition 15

$$\frac{IP}{d_3} = \frac{(HO + d_2)}{d_2} = \frac{3d_2}{d_2} = 3$$

d'où : $h_3 = 3d_3$

Il affirme que, de même, nous obtenons ce que nous notons :

$$h_4 = 4d_4$$

et, plus généralement, que

$$h_n = nd_n.$$

Avec ou sans maître ?
Modes d'appropriation du savoir mathématique
(quelques traitements historiques des coniques)

With or without a teacher ?
How to capitalize mathematical knowledge
(Historical variations on conics)

Atelier pluridisciplinaire
BESSOT Didier, DHOMBRES Jean, RADELET-DE GRAVE Patricia
IREM de Basse-Normandie
EHESS, Paris
Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve

Abstract

Au cours de l'histoire, la nécessité d'un maître en mathématiques fut soumise à question. Car il y a souvent scandale pour la raison que la mathématique n'aille pas de soi; comme il y a scandale que la mathématique en impose au bon sens et au réel. Si l'enseignement des mathématiques fut néanmoins maintenu, son obligation dans les cursus secondaires ne date que du début du XIX^{ème} siècle, et fut de temps à autre contestée, ou mollement appliquée. On n'a pas toujours enseigné les mathématiques dans les classes; on ne l'a pas toujours fait pour les mêmes raisons, et l'obligation actuelle, apparemment universelle, ne répond pas partout aux mêmes nécessités intellectuelle, culturelle, politique ou sociale. La mise en perspective historique des différents modes d'appropriation du savoir mathématique permet donc de questionner les priorités intellectuelles d'une société. Et parce qu'elle interroge en profondeur son rôle, elle donne à l'enseignant la possibilité de dépasser le consensus de sa profession pour découvrir les antécédents et les filiations de sa pratique d'enseignement. Ce sont des filiations intellectuelles et déontologiques qui ne résultent pas du seul jeu de la mathématique.

Comment favoriser auprès d'enseignants la mise en perspective historique de leurs savoirs et de leurs pratiques afin de leur permettre un recul réflexif et une appréciation de leur place dans un processus général ? L'histoire des mathématiques, qui est devenue à la mode, est souvent un bon prétexte pour faire des mathématiques autrement, c'est-à-dire d'une façon autre que celle requise par le programme. Or, celui-ci représente un consensus. Aussi, l'histoire proprement historienne des mathématiques ne peut-elle pas recevoir auprès des enseignants le succès escompté. La fidélité à une situation historique donnée exige d'envelopper les mathématiques de considérations très diverses qui tiennent aux raisons mêmes d'enseigner telles mathématiques plutôt que telles autres. Ces considérations paraissent le plus souvent inutiles à l'enseignant. Car il est placé dans une situation historique et