Bibliographie

BELHOSTE, GISPERT, HULIN, *Les sciences au lycée*, Vuibert, Paris, 1996.

BKOUCHE, CHARLOT, ROUCHE, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris, 1991.

COMBETTE, *Cours d'arithmétique*, Félix Alcan, Paris, 1893.

DE BOUVELLES, *Livre singulier touchant l'art et practique de géométrie, composé nouvellement en français par maître Charles de Bouvelles*, chanoine de Noyon.

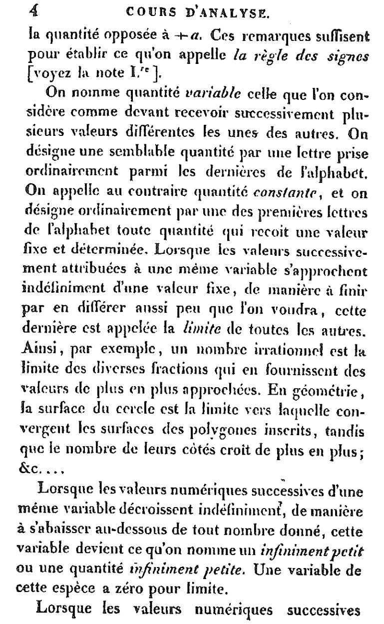
DE COMBEROUSSE, *Cours de mathématiques*, tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1900.

F. LEGENDRE, *L'arithmétique en sa perfection*, 1745.

FITZ-PATRICK, CHEVREL, *Exercices d'arithmétique*, Hermann, Paris, 1900.

FOURNIER, *Eléments d'arithmétique et d'algèbre à l'usage des écoles royales et de navigation*, 1842,

GAUSS, *Reherches arithmétiques*, 1801.



4 COURS D'ANALYSE.

la quantité opposée à $+a$. Ces remarques suffisent pour établir ce qu'on appelle *la règle des signes* [voyez la note I.re].

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui recoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus; &c. ...

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives

Conceptions et obstacles épistémologiques à propos du concept de limite d'une fonction et son influence sur l'enseignement et sur l'apprentissage de la notion

CONTRERAS DE LA FUENTE Ángel
SÁNCHEZ GÓMEZ Carmen
Université de Jaén (Espagne)

Abstract

Dans le développement du concept de limite d'une fonction et du point de vue épistémologique, on peut distinguer plusieurs étapes dans sa construction jusqu'à ce qu'il devienne objet de connaissance. C'est-à-dire, depuis la conception géométrique, liée aux principes d'Archimède et d'Eudoxe jusqu'à la conception métrico-analytique ($\varepsilon - \delta$) de Weierstrass, les conflits Socio-cognitifs qui ont jalonné l'évolution de la notion furent nombreux. Nous poserons les questions suivantes :

Est-il pertinent de poursuivre fidèlement l'enseignement de cette évolution historique ?

Quels obstacles épistémologiques sont apparus au cours de la progression du concept ?

Quels sont ceux qui se manifestent au moment de son enseignement et de son apprentissage ?

Comment envisager cet enseignement en fonction des élèves auxquels il s'adresse ?

Quels doivent être le temps employé à son enseignement et celui destiné à son apprentissage ?

En général, quelle en la transposition didactique appropriée à la notion de limite, qui convertirait le savoir scientifique en savoir scolaire ?

Durant l'atelier conformément aux idées de Contreras y Sanchez (1998) et Sanchez (1997), nous proposerons de travailler diverses situations extraites de l'analyse de manuels et des résultats obtenus à partir de questionnaires distribués aux étudiants sur l'enseignement du concept de limite où sont impliqués aussi bien les conceptions que les obstacles occasionnés par la dite notion.

Introduction

Dans un sens large, toute notion mathématique a une double dimension : une de type scientifique, comme élément conforme d'une théorie mathématique déterminée et l'autre liée à son statut comme objet d'enseignement, généralement dans les divers niveaux du système éducatif. Bien qu'il existe une relation entre ces deux dimensions, elles n'occupent pas le même espace social. Alors que la première concerne la communauté de chercheurs définie par un paradigme déterminé, restreint et donc un nombre réduit d'experts, la seconde concerne, avec plus ou moins d'extension, selon le niveau éducatif, une grande population scolaire inexperte. Par conséquent, au moment de réaliser l'enseignement de la notion il faut tenir compte de ces considérations, de telle façon que les énormes et significatives différences entre les dimensions scientifiques et celles de l'enseignement se reflètent dans la réalité, en évitant de tomber dans une conception "naïve" par rapport à l'enseignement qui est celle de croire que "ce qui s'explique clairement doit être compris par l'étudiant". En tenant compte des apports de Chevallard et Cols (1997), nous considérons que la connaissance mathématique est substantivement problématique et donc discutable au moment de son enseignement, étant très loin de "l'illusion de transparence" dans laquelle se trouvent de nombreux professeurs.

Un concept mathématique basique, aussi bien dans sa dimension scientifique que dans l'enseignement, est celui de limite d'une fonction. L'élaboration de cette notion a été très lente, jusqu'à tel point où il a fallu attendre le XIX$^{\text{ème}}$ siècle avec Weierstrass, pour que l'expression "aussi petit que nous voulons" acquière une forme mathématique libérée de toute ambiguïté. C'est alors évident que cette notion mathématique dont l'épistémologie historique nous montre que sa constitution eut un chemin rempli d'embûches doit être enseignée à travers une analyse profonde qui implique de façon systématique les trois éléments suivants de l'enseignement : l'épistémologie du concept pour son développement historique, les étudiants par rapport à leurs conceptions et leurs obstacles; et les manuels, quant aux conceptions, obstacles et actes de compréhension qu'ils induisent. Ce travail a commencé avec l'observation de ses auteurs, premièrement dans les classes de "bachillerato" et ensuite dans les classes de Calcul d'ingénierie Technique de l'Université. Nombreux étaient les étudiants qui, à la fin de la première année et malgré le changement de niveau scolaire et l'accroissement de contenu, maintenaient et même augmentaient leurs conceptions erronées, des obstacles, et des difficultés et ceci malgré le fait d'avoir réalisé de nombreuses techniques de calculs de limites de fonctions. Ceci conduit à une réflexion profonde sur l'importance pour l'enseignement d'être conscient de l'abîme qui existe entre ce que le professeur croit que l'élève a appris et ce qu'il a réellement compris; c'est ce qui, en termes techniques, représente, d'une part, le "savoir enseigné" et d'autre part, le "savoir de l'élève".

Les questions sous-jacentes à cette réflexion étaient : d'où viennent ces deux savoirs? Quelle est "l'histoire" de leur constitution? La réponse à ces questions était évidemment très complexe puisqu'elle demandait tout un processus de recherche dans laquelle il fallait analyser les manuels, les conceptions des professeurs et celles des élèves. Notre recherche s'orienta alors vers l'examen des textes mathématiques qui traitaient la notion de limite selon la méthodologie de Weber (1986) et Schubring (1988), et nous avons observé que ce traitement utilisé aux deux niveaux de l'enseignement - Bachillerato et Université- ne semblait pas suivre un développement analogue. A certaines périodes la rigueur avec laquelle on traitait ce concept dans certains livres dirigés à des élèves de l'enseignement secondaire était identique, voire supérieur, à celui que l'on trouvait dans les livres de Première année d'Ingénierie Technique. Ces faits liés à la

néfaste réalité de l'échec scolaire à l'Université dans la matière de Calcul motivèrent la formulation des trois conjectures suivantes :

"Les difficultés que les élèves rencontrent à propos de la compréhension du concept de limite d'une fonction sont dues fondamentalement à l'existence d'obstacles épistémologiques et didactiques, inhérents à la notion et à la transposition didactique. Ainsi, si au moment de l'instruction on ne facilite pas des situations d' enseignement qui provoquent l'émergence des actes de compréhension nécessaires pour que les élèves surmontent les obstacles, on n'arrivera pas à l'assimilation de ce concept."

"L'enseignement du concept de limite d'une fonction, en première année d'Ingénierie Technique, ne se réalise pas selon une réflexion basée sur la recherche de situations d'enseignements capables d'engendrer des actes de compréhension nécessaires pour que les étudiants surmontent les obstacles épistémologiques qui apparaissent tout au long du développement du concept."

"En général, les manuels de mathématiques de l'Enseignement Secondaire du Cours d'Orientation Universitaire et de la première année d'Ingénierie Technique ne tiennent pas compte des différentes conceptions historiques ni des obstacles épistémologiques du concept de limite et ne facilitent donc pas la production d'actes de compréhension nécessaires à la résolution de ces obstacles."

L'étude de la vérification ou non de ces conjectures nous a donc conduite à l'analyse de la notion de limite d'une fonction depuis une double perspective : celle des conceptions et celle des obstacles associés au concept.

Le terme conception

Dans la Didactique des Mathématiques ce terme a une importante spéciale dans la recherche, ce travail a donc pris en compte les apports suivants : EL BOUAZZOUI (1988) dit que malgré les différents termes existants pour désigner la manière avec laquelle un individu comprend et utilise un concept, dont il cite conception, représentation (mentale), modèle (conceptuel), concept-image, etc., et que le choix entre ces termes est difficile, le terme conception doit se considérer dans le sens suivant : "Une conception est un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs qui permettent ensemble de résoudre un type de situations et de problèmes de manière plus ou moins satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations dans laquelle cette conception échoue, soit parce qu'elle suggère des fausses réponses, soit parce que les résultats sont obtenus avec plus de difficulté et dans des situations plus défavorables." Il distingue : Les conceptions identifiées à l'origine historique de la notion, qui sont collectives, dans le sens où elles sont reconnues par une communauté de mathématiciens et correspondent au type de problèmes à résoudre à une époque déterminée. Les conceptions transmises par les manuels, dans la mesure où, dans le processus de la transposition didactique depuis le "savoir enseigné" jusqu'au "savoir scolaire" (CHEVALLARD & JOSHUA, 1991), le manuel transmet un contenu mathématique déterminé que peut provoquer la création et l'insertion dans l'enseignement d'objets didactiques qui ne figurent pas dans la Mathématique crée par les mathématiciens, comme : Les illustrations, les dessins, les représentations graphiques, etc.

La limite et les conceptions

Parmi les recherches qui traitent de la notion de limite d'une fonction depuis la perspective des conceptions, on considère comme spécialement remarquables les apports sur la limite et la conception de VINNER & TALL (1981), CORNU (1983) et WILLIANS (1991).

VINNER & TALL (1981) se réfèrent au terme conception à travers ce qu'ils appellent "concept image" qui décrit la structure cognitive totale de l'individu associée à un concept et qui inclut toutes ses images mentales, propriétés associées et tous les processus, et parlent de "concept définition" lorsqu'ils se réfèrent au concept mathématique défini formellement, en observant que pour chaque individu un "concept définition" génère son propre "concept image". En ayant recours au cas particulier de limite d'une fonction ils signalent que le "concept image" contient des facteurs qui peuvent entrer en contradiction avec le "concept définition", par exemple, dans certains cas on introduit le concept quand on est en train d'étudier la différentiation et avec lequel le "concept image" dans ce cas précis, peut inclure un dessin mental associé à une corde variable, une courbe ou une tangente. La dérivation peut affecter le "concept image" à travers un facteur associé à la vitesse instantanée. Dans les deux cas on traite la limite d'une fonction et on le considère comme un processus dynamique où "x" s'approche de "a" et ceci implique que "$f(x)$" s'approche de "l". L'effet est que l'étudiant associe le concept à l'idée que $f(x) = l$, alors que la définition formelle contredit cette idée. De cette recherche on tire la conséquence que le "concept image" (conception) des étudiants est variable et soumis à leur propre expérience selon les diverses situations à laquelle ils se confrontent. Ainsi, la recherche est pertinente pour analyser l'évolution de leurs conceptions sur le concept de limite d'une fonction à travers l'instruction.

CORNU (1983), dans son travail de recherche sur le concept de limite, étudie les réponses des élèves à plusieurs questionnaires et classifie les conceptions sur le concept de limite d'après deux points de vue. En prêtant attention à la nature de la réponse sur le propre concept, il les appelle conception statique et conception dynamique, et selon le moment où elles se sont produites (avant ou après avoir reçu l'enseignement de la notion), il les appelle conception spontanée et conception propre. Il affirme que les conceptions spontanées restent chez les élèves durant beaucoup de temps. L'idée de conception propre, mélange de la conception spontanée et de la notion mathématique, correspond au "concept image" de Tall et Vinner, et ainsi à la conception. Comme le signale Cornu : "Nos preuves ont démontré que la notion mathématique ne prendra pas purement et simplement le lieu de conceptions spontanées mais qu'il se formera un mélange, en faisant que chez chaque élève se formera ce qu'on appelle sa propre conception". WILLIAMS (1991) réalisa une étude des étudiants universitaires dans le but de connaître leurs conceptions sur la limite, et pour laquelle il a utilisé, dans une première phase, un questionnaire dans lequel l'élève devait choisir sa réponse à la question posée entre 6 réponses possibles : d'entre elles, les élèves en choisirent 3 majoritairement qui correspondent à :

1. Une vision dynamique de la limite.
2. Une vision de la limite comme quelque chose d'inaccessible.
3. Une vision de la limite qui s'identifie à la définition formelle.

Conceptions liées à la notion de limite d'une fonction

Pour détecter les conceptions liées à l'origine historique du concept de limite nous nous sommes basés sur les idées de Deledicq (1994). En premier lieu, une brève origine historique de cette notion a été réalisée où l'on a pris en compte quatre étapes ou périodes.

Dans la première étape, l'étape grecque, les problèmes fondamentaux qui se posaient étaient de nature géométrique, le cercle étant l'objet mathématique le plus traité. Comme CORNU (1983) note : "le problème du calcul de l'aire d'un cercle donna l'occasion de pratiquer les outils qui constituent les prémices de la notion de limite". Les méthodes utilisées par les grecs sont géométriques et s'appliquent aux grandeurs et non aux nombres. Ainsi, la conception des grecs sur la limite d'une fonction est géométrique et nous l'appellerons CG.

Une progression importante se fait au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, lorsque Fermat, en travaillant avec des lieux géométriques, découvre une méthode pour trouver les points où une fonction polynomiale prend une valeur maximum ou minimum. Nous pouvons considérer que, malgré l'intervention de problèmes géométriques, comme celui de la tangente, avec Fermat émerge, comme évolution de la conception géométrique, une certaine conception numérique de limite d'une fonction. Newton, en traitant les problèmes physiques sur le mouvement instantané, élabora ce qui fut appelée la méthode des fluxions (la quantité en mouvement s'appelle fluent et sa vitesse est la fluxion). Dans cette méthode les notions de "raisons premières" et "d'ultimes raisons" sont apparues et elles se font explicites dans le principe suivant : "Les quantités, et la raison de quantités, qui dans n'importe quel intervalle fini de temps converge continuellement vers l'égalité, et qui avant la fin de ce temps s'approchent l'une vers l'autre plus que n'importe quelle différence donnée, se font également égales." (BOYER (1986), p. 500). Nous sommes alors devant une conception arithmétique que nous appelerons CN.

Bolzano, dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, utilise le concept de continuité et, en donnant la définition de fonction continue, il traite l'idée de limite de fonction. C'est Weierstrass qui, en donnant la définition de l'environnement d'un point, révolutionne l'Analyse et où avant il s'agissait de donner un résultat, maintenant on peut démontrer une inégalité, en prenant des cotes supérieures ou inférieures. L'utilisation de "e" et "d" dans les environnements conduit à la conception métrico-analytique de la limite d'une fonction, que nous appellerons CAM.

Plus tard, Cantor en 1883, après la création de la théorie d'ensembles infinis, introduit, entre autres, les concepts de point limite et d'ensemble dérivé. Le développement de la théorie des fonctions de Weierstrass et de la théorie des ensembles de Cantor s'est réalisée à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, et dès le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle la généralisation de la topologie de R en espaces topologiques abstraits (Frechet, Hausdorff, Caratheodory ...) permit de définir la limite à travers la notion d' ouvert et le point d'accumulation et nous situe dans une nouvelle conception, la topologique, que nous symbolisons par CT. Basés sur SÀNCHEZ (1997) et sur CONTRERAS & SÀNCHEZ (1998), ces conceptions détectées dans le développement historique du concept de limite seront tenues en compte dans l'étude de manuels, des élèves et des professeurs, bien que nous ayons introduit quelques variations pour clarifier les analyses effectuées. D'une part, la conception géométrique (CG), émane, comme nous l'avons indiqué, des méthodes pour mesurer les superficies des figures géométriques à l'époque d'Archimède, liée ainsi à des grandeurs, ont peu à voir avec le fait d'utiliser des images ou des représentations graphiques pour donner un signifié au concept de limite. Donc, comme tout graphique est, en général, une figure géométrique, dans cette recherche nous emploierons le terme conception géométrico-graphique (CGG) lorsqu'on utilisera la représentation graphique dans l'étude des limites.

En deuxième lieu, au moment de catégoriser les différentes réponses des étudiants aux items du questionnaire, il est utile de distinguer entre conception numérique statique (CNE) et conception numérique dynamique (CND) en prenant comme référence les idées de Cornu et de Tall et Vinner dans ce sens.

Les termes obstacles et actes de compréhension

BROUSSEAU (1983) distingue les caractéristiques suivantes :

1. Les erreurs produites dues aux obstacles sont résistantes à la correction,
2. Il s'agit toujours d'une connaissance, non d'une absence de connaissance; elle peut être incorrecte ou incomplète mais elle est cohérente,
3. C'est une connaissance qui produit des réponses correctes dans des situations déterminées ou maîtrises de problème,
4. C'est une connaissance qui engendre des réponses erronées pour certaines situations ou maîtrises de problème,
5. Les erreurs que les obstacles produisent ne sont pas sporadiques, elles se répètent systématiquement dans des situations similaires.

SIERPINSKA (1985) considère qu'"un obstacle a un caractère inévitable et se répète dans la phylogenèse et ontogenèse des concepts", c'est pourquoi "la notion d' obstacle épistémologique peut être étudiée dans le développement historique de la pensée scientifique et dans la pratique de l'éducation"; elle affirme qu'"un obstacle épistémologique est un obstacle pour comprendre" et elle considère deux aspects essentiels :

1. Un obstacle est spécifique d'un concept et seulement de lui,
2. Sa prise de conscience est indispensable pour le développement de ce concept.

SIERPINSKA (1991) signale que la compréhension est un terme qui apparaît dans toute recherche sur les obstacles épistémologiques et que la compréhension d'un concept pourrait se mesurer par le nombre et la qualité des obstacles épistémologiques relatifs à celui-ci et que quelqu'un n'a pas résolu. La rapidité de compréhension n'est pas une caractéristique qui permet de discriminer, dans la mesure où ce qui compte est la qualité du niveau de compréhension, et elle considère l'identification, la discrimination, la généralisation et la synthèse comme des différentes catégories de compréhension.

Dans ce travail, on considérera ces termes dans le sens de BROUSSEAU et de SIERPINSKA, et on se centrera sur les obstacles épistémologiques et didactiques. L'obstacle est considéré intimement associé à l'acte de compréhension, de telle façon que plus sera important le nombre d' obstacles qu'un élève devra dépasser à travers des actes de compréhension pertinents, plus riche sera la notion conceptuelle acquise.

Obstacles et actes de compréhension liés à la notion de limite d'une fonction

Parmi les chercheurs qui ont étudié les obstacles épistémologiques relatifs au concept de limite nous avons VINNER & TALL (1981), DAVIS & VINNER (1986), CORNU (1981, 83, 85, 86, 91) et SIERPINSKA (1985, 87, 91). Certains des obstacles signalés par CORNU et SIERPINSKA ont été pris en compte dans l'analyse de manuels et dans l'étude des élèves.

Les obstacles relatifs au concept de limite d'une fonction considérés dans ce travail se basent sur SÁNCHEZ (1997), SÁNCHEZ & CONTRERAS (1998) et CONTRERAS & SÁNCHEZ (1998) et sont les suivants :

O1 : Se centrer sur la forme des approximations des valeurs des variables indépendantes et dépendantes plus que sur les propres approximations. Cet obstacle, inhérent à la notion de limite, a pour conséquence que les étudiants, en calculant la limite d'une fonction f en un point $x = 2$ dont les approximations numériques sont 0.39; 0.0399; 0.003999; ... et 0.41; 0.0401; 0.004001; ..., ils croient que cette limite est 0.004. Ou, également, en calculant, ils croient que les valeurs 0.6; 0.66; 0.666; ... s'approchent de 6 au lieu de 2/3. Ou bien, pour les valeurs : 0.9; 0.99; 0.999; ... qui s'approchent de 9 au lieu de 1. La discrimination entre nombre et manière d'écrire un nombre, aussi bien pour la valeur dépendante que pour la variable indépendante permettrait la résolution de cet obstacle.

O2 : Utilisation exclusive de l'approximation graphique sans être accompagné des valeurs correspondantes des approximations numériques des variables dépendantes et indépendantes. Cet obstacle, d'origine didactique, conduit l'élève à une impasse lorsqu'il ne dispose pas d'une représentation graphique, en ne pouvant pas raisonner sans l'appui de celui-ci. En fait, dans la majorité des manuels le graphique d'une fonction abstraite apparaît pour l'interprétation géométrique de la limite. En tenant compte que, selon SIERPINSKA (1985), la manière dont les élèves utilisent la calculatrice est très naïve et la tâche de réaliser des calculs approximatifs est très peu utilisée dans l'enseignement, il y aurait des actes de compréhension nécessaires pour dépasser cet obstacle, comme l'utilisation simultanée de valeurs et de graphiques d'une fonction, l'identification du tableau de valeurs des approximations numériques avec le graphique correspondant, ainsi que discriminer entre plusieurs graphiques quel est celui relatif à la fonction dont la limite se calcule de celui dont ils connaissent les approximations numériques.

O3 : Croire que l'existence d'une limite d'une fonction en un point signifie que les valeurs de la variable dépendante s'approchent de quelque chose. Cet obstacle, de caractère épistémologique, est présent lorsque l'élève ne fait pas la distinction entre approximation et distance et donc faire la différence entre s'approcher les valeurs de la variable dépendante de la limite et s'approcher 'tant que l'on veut' d'elle est un acte de compréhension qui permet de le dépasser. Cet obstacle se présente également lorsqu'on considère le graphique d'une fonction constante, car, en ne détectant pas une approximation dans le sens physique de mouvement, les élèves disent qu'il n'y a pas de limite.

O4 : Croire que la limite d'une fonction en un point existe lorsque le nombre de valeurs de la variable dépendante qui s'approche de ce point est infini (ou très grand) et non presque tous d'entre eux. Ceci donne lieu à des cas où l'élève croit qu'une fonction qui a seulement une limite latérale a une limite au point. C'est ainsi, discriminer entre "un nombre infini de valeurs de $f(x)$ s'approchent de la limite lorsque x tend au point c" et "presque toutes les valeurs de $f(x)$ s'approchent à la limite quand x tend à c des deux côtés" serait un acte de compréhension nécessaire pour dépasser cet obstacle épistémologique.

O5 : Croire que l'environnement est toujours symétrique. Cet obstacle est lié à la transposition didactique que se fait de la notion de limite à travers l'interprétation géométrique de la conception analytique (CAM) et de la conception topologique (CT). L'élève croit que l'environnement ouvert doit être toujours symétrique, fait qui crée des erreurs quand on considère $f(x) = 2x$ si $x < 1$ et $f(x) = x+1$ si $x > 1$ et calcule la limite en $x = 1$. La discrimination entre la symétrie du graphique de la fonction et l'amplitude de l'environnement du point où l'on calcule la limite permettrait de dépasser cet obstacle.

O6 : Croire que les variables indépendantes ou dépendantes prennent la valeur de ∞. Voici l'origine du fait que certains étudiants considèrent les expressions + ∞ et - ∞ comme des nombres. Discriminer entre nombre et concept comme des quantités infiniment grandes et infiniment petites serait un acte de compréhension pour cet obstacle, qui selon notre opinion a un double caractère; d'une part, il peut être considéré d'origine didactique puisque, parfois, cette situation est induite par le professeur ou par quelque manuel en utilisant une notation inadéquate quand, en donnant la définition de limite finie en un point ils ajoutent que "a" et "L" peuvent être + ∞ et - ∞; D'autre part, dû à l'incursion du propre ∞ et à l'obstacle 4) signalé par Cornu (1983), il peut être considéré épistémologique.

O7 : Croire que les lettres ε et δ qui apparaissent dans la définition formelle de limite d'une fonction en un point, représentent des grandeurs constantes ou variables. Cet obstacle, inhérent à la notion, fait référence au langage symbolique et apparaît lié à la compréhension formelle de limite d'une fonction. Un acte de compréhension serait de discriminer entre l'usage des lettres en Algèbre et en Logique; et selon TALL (1995), comme pour dire que pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0 \ldots$, l'élève pourrait penser que pour toute valeur de ε possible il existe seulement ce δ, une lecture de la définition sous la forme : Pour chaque $\varepsilon > 0$, quoiqu'il soit, il existe $\delta > 0 \ldots$ pour "ce" $\varepsilon > 0$, l'aiderait à le dépasser. De plus, pour SIERPINSKA (1985), il ne suffit pas de connaître les quantificateurs et leurs propriétés pour se rendre compte du rôle que leur présence et leur ordre joue dans la définition de la notion de limite, ce rôle peut être plus clair dans les exemples d'inexistence de limite.

O8 : Croire que la limite d'une fonction en un point existe parce que la différence entre les valeurs successives de la variable dépendante est en train de diminuer. Cet obstacle, propre de la notion, fait que, en confondant convergence avec diminution d'une distance, pour la fonction $f(x) = l$, si x est irrationnel et $f(x) = x$, si x est rationnel, les élèves affirment qu'il y a une limite au point $f(x) = 2$ parce qu'ils observent que la différence entre les images, pour x rationnel, est chaque fois plus petite (ils identifient avec les successions de Cauchy), et donc la discrimination entre succession convergente et succession de Cauchy, dans les différents ensembles numériques, serait un des actes de compréhension nécessaires.

O9 : Croire que la limite d'une fonction en un point est la valeur de la fonction en ce point. Cet obstacle, de caractère didactique, est favorisé lorsqu'on a recours, au moment d'introduire le concept, à des exemples de type de la fonction f donnée par, où l'on demande la limite $x = 2$, et on essaie d'expliquer à l'élève qu'en étant, sauf en 2, la fonction $f(x) = g(x) = x + 2$, ses limites sont égales. La discrimination entre image d'une fonction en un point et valeur approximative, distinguer entre fonction et ensemble de valeurs; Ainsi vaut-il mieux éviter quand on introduit le concept l'utilisation d'exemples comme ci-dessus et les utiliser seulement après les théorèmes correspondants qui faciliteraient les actes de compréhension.

Méthodologie de l'étude expérimentale

Objectifs de l'étude. Spécimen

À travers l'analyse des manuels et des réponses des élèves au questionnaire, on essaye de détecter dans la lecture des manuels et des réponses erronées quelques-uns des obstacles décrits antérieurement. D'autre part, on associera également les réponses des étudiants aux conceptions signalées. Le spécimen fut pris intentionnellement aussi bien dans les manuels que chez les élèves. Pour les élèves nous avons considéré les élèves de première année d'Ingénierie Technique Industriel, d'Ingénierie Technique Topographique et d'Ingénierie Technique en Télématique de l'Université de Jaén, avec un total de 194 étudiants, au moins 25 de chaque groupe. Dans les livres la période comprend le XX$^{\text{ème}}$ siècle (1950-95), la taille est 37 manuels du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Questionnaire : questions, objetifs des questions analyse et classification des réponses des élèves

Pour l'élaboration des éléments nous avons tenu compte aussi bien des recherches de CORNU (1983), EL BOUAZZOUI (1988), Y AZCÁRATE (1990) que de l'analyse des manuels que nous avons realisée. Nous comptons en plus sur un apport personnel, fruit de la propre expérience. Le procédé utilisé dans expérience pour recueillir des informations a été le questionnaire, puisqu'il permet de s'adresser à un grand nombre de sujets à la fois, et en plus, offre une certaine facilité pour compter et corriger. Avant l'élaboration du questionnaire définitif, on utilisa un questionnaire pilote avec une épreuve réduite et un autre questionnaire, nouvelle élaboration de du précédent, qui s'appliqua sur un terrain plus important. Avec les conclusions obtenues de ces deux questionnaires, on modifia certains aspects ce qui permit de confirmer les éléments auxquels les étudiants répondirent finalement. Le questionnaire contient 6 éléments. Tout d'abord nous montrons le contenu et les objetifs de quatre questions ainsi que la manière dont nous avons classifié la reponse des élèves aux questions un et six.

Question numéro un : Si tu devais expliquer à un collègue ce que signifie le fait qu'une fonction ait une limite finie en un point $x = a$, que dirais-tu? Ecris brièvement de quelle manière tu le ferais.
A travers la question numéro un on pretend détecter la conception dominante chez les élèves, c'est-à-dire celle avec laquelle les élèves se sentent plus sûrs, comprennent ou croient comprendre et avec laquelle ils se sentent capables de transmettre leurs connaissances aux autres. De plus, cette question facilite l'analyse de l'influence de la T.D. aussi bien pour le professeur que celle qui se réalise dans les manuels.

Question numéro deux : Quels exemples donnerais-tu?
Avec la question numéro deux nous prétendons connaître le niveau de compréhension des élèves par rapport à la conception analytique, topologique, graphique et numérique de la limite d'une fonction en un point, en plus des exemples que l'étudiant considère plus importants et les types de graphique et de fonction les plus utilisés par l'étudiant.

Question numéro quatre : Ecris le sens qu'a pour toi le fait qu'une fonction ait une limite finie en un point.
Cette question rend possible la confrontation entre la conception qu'utilise l'élève quand il se pose des questions sur le concept de limite, son "concept definition" d'après TALL (1981),

c'est la même question que lorsque lui demande qu'il la transmettre aux autres, son "concept image"; c'est-à-dire si ce que l'élève "sait" ou "comprend" sur la limite d'une fonction en un point est la même chose que ce qu'il transmet aux autres. Ainsi nous pouvons analyser aussi bien l'influence qu'a chez l'élève la T.D. que le professeur réalise.

Question numéro six : Nous savons qu'une fonction a le tableau de valeurs indiqué ci-dessous. Etude le comportement de la fonction f en $x = 2$ dans chaque cas suivant :

a)

x	1,9	1,99	1,999	....	2	....	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,1	0,01	0,001	....	3	....	3,001	3,01	3,1

b)

x	1,9	1,99	1,999	....	2	....	2,001	2,01	2,1
f(x)	1	1	1	....	2	....	2	2	2

c)

x	1,9	1,99	1,999	......	2	......	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,39	0,0399	0,003999	......	-	......	0,004001	0,0401	0,41

La question numéro six nous permet également d'observer plusieurs aspects : Première) si la CN est présente chez l'élève. Deuxième) si la T.D. qui se fait de la notion dans les manuels d'enseignement et par le professeur est pertinente et claire pour les élèves en enlevant ainsi les effets et les influences de cette T.D.

Catégorisation pour les réponses à la question n° 1

Après avoir classifié les réponses données par les étudiants à cette question et en faisant attention aux termes utilisés dans leurs réponses, on a pu observer qu'un même élève inclut dans sa réponse des termes correspondants aux différentes catégories considérées et que ces catégories ont des expressions correctes quant au concept objet de l'étude et d'autres expressions qui ne sont pas correctes. Les catégories considérées sont les suivantes :

a) Par rapport aux conceptions

CND (Conception numérique dynamique) : Si dans la réponse on inclut certains de ces termes "$\cdots$ s'approche de$\cdots$", "$\cdots$ tend vers$\cdots$", "$\cdots$ est en train de s'approcher de$\cdots$".

CNE (Conception numérique statique) : Si dans la réponse sont inclus des termes comme "$\cdots$ c'est la valeur de la fonction dans ce point là$\cdots$", "$\cdots$ c'est l'image de la fonction en ce point$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où la fonction n'est pas continue$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où la fonction est continue$\cdots$.

CGC (Conception géométrico-graphique) : Si la réponse contient certains des termes "$\cdots$ c'est le point du graphique où la fonction a un maximum$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où le graphique se termine$\cdots$".

CAM (Conception analytico-métrique) : Si dans la réponse on inclut la définition métrique symbolique, ou bien certain terme comme : "c'est la valeur $\cdots$ tel que sa distance par rapport à$\cdots$".

CT (Conception topologique) : Si la réponse contient la définition topologique symbolique, ou bien un des termes suivants : "$\cdots$ pour tout point de l'environnement de $\cdots$ les valeurs de la fonction sont dans l'environnement de$\cdots$".

Nous avons considéré correctes les réponses qui contenaient des expressions comme : "$\cdots$ en donnant à x des valeurs à droite et à gauche $\cdots$ la fonction s'approche autant que l'on veut de$\cdots$", "$\cdots$ valeur de laquelle s'approche tant que l'on veut la fonction en un point et qui ne dépend pas de l'existence de $f(a)$ ou de ce que vaut $f(a)$ en ce point$\cdots$", la définition métrique ou topologique.

b) Par rapport aux obstacles

On peut détecter l'obstacle O_1 lorsque la réponse inclut "mais ne l'atteint pas$\cdots$", "$\cdots$ mais ne la touche pas$\cdots$".
On peut détecter l'obstacle O_2 lorsque l'on dit dans la réponse uniquement "point du graphique duquel s'approche la fonction".
On peut détecter l'obstacle O_3 lorsque la réponse contient "$\cdots$ les valeurs de la fonction s'approchent de ou tendent vers$\cdots$", "$\cdots$ valeur de laquelle la fonction s'approche indéfiniment$\cdots$".
On peut détecter l'obstacle O_4 lorsque la réponse contient "$\cdots$ quand les valeurs de x s'approchent indéfiniment de$\cdots$".
On peut détecter l'obstacle O_6 lorsque l'on dit dans la réponse : "$\cdots$ valeur en laquelle le x et l'y sont infinis$\cdots$".
On peut détecter l'obstacle O_7 quand on inclut dans la réponse la définition métrique symbolique en n'expliquant pas le sens de ε et de δ.
On peut détecter l'obstacle O_9 lorsque la réponse contient des termes comme : "$\cdots$ c'est la valeur de laquelle on s'approche et qui coïncide avec celle de la fonction en ce point$\cdots$", "$\cdots$ c'est l'image de la fonction en ce point$\cdots$", "$\cdots$ c'est la valeur maximum de la fonction$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où la fonction est continue$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où la fonction est discontinue $\cdots$".

Analyse des manuels

Ici nous décrirons ensuite quelques aspects relatifs aux obstacles extraits des textes analysés et qui sont significatifs dans cette analyse.
On peut induire les obstacles O_3 et O_4 quand apparaissent des phrases comme les suivantes :
"$\cdots$ *en approchant indéfiniment x de a, les valeurs de la fonction s'approchent indéfiniment de*$\cdots$"
"$\cdots$ *si $f(x)$ s'approche infiniment de la valeur L en tendant x vers a*$\cdots$"
"$\cdots$ *si quand x s'approche suffisamment de x_0, les valeurs correspondantes de $f(x)$ sont alors très proches de l*$\cdots$"
"$\cdots$ *c'est de la valeur y_0 que la fonction s'approche, de sorte que $y - y_0$ puisse se faire en valeur absolue aussi petit qu'on le désire en prenant x suffisamment proche de x_0*$\cdots$".

On facilite les actes de compréhension pour l'obstacle O_3 avec des expressions du type :

"$\cdots$ *la phrase $f(x)$ s'approche autant qu'on le veut de L signifie que $f(x)$ est dans l'intervalle $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ et en termes de valeur absolue s'écrit $f(x) - L < \varepsilon \cdots$*"
"$\cdots$ *c'est analogue pour x qui tend vers c, qui signifie qu'il existe un nombre positif δ de telle manière que x est situé dans l'intervalle $(c-\delta, c)$ ou dans $(c, c+\delta)$ ce qui peut s'exprimer dans la double inégalité* $\cdots$".

On facilite les actes de compréhension pour l'obstacle O_4 avec des expressions du type :
"$\cdots$ *si $f(x)$ s'approche autant qu'on le veut d'un unique numéro L, quand x tend vers c des deux côtés* $\cdots$"
"$\cdots$ *la limite à droite peut être différente de la limite à gauche mais évidemment les deux coïncident quand il existe une limite dans le sens général* $\cdots$".

On peut induire à l'obstacle O_6 quand la définition se présente sous la forme :
"*Une fonction $f(x)$ a une limite L au point $x = u$ quand pour toute succession de valeur x_n qui a pour limite u, la succession de valeurs correspondantes $f(x_n)$ a pour limite L. On peut indiquer ainsi : $\lim_{x \to u} f(x) = L$, u peut être $a^+, a^-, +\infty, -\infty$; dans le sens où de cette façon l'élève arrive à croire que $+\infty$ et $-\infty$ sont des nombres et que les variables indépendantes et dépendantes prennent véritablement la valeur $+\infty$ et $-\infty$*".
Cet obstacle est d'origine didactique et peut être évité en éludant des présentations comme la précédente ou avec des expressions comme "... ce qui prétend être décrit à travers la notion de limite en un point est que les valeurs d'une fonction s'approchent de quelque chose (un nombre, $+\infty$ ou $-\infty$) $\cdots$".

On peut induire à l'obstacle O_7 quand la définition métrique ou topologique se présente sous forme de phrases comme celle-ci :
"$\cdots$ *si donné un $\varepsilon > 0$ on peut déterminer un autre nombre $\delta > 0 \cdots$*"
"$\cdots$ *quand à tout nombre positif eε nous pouvons faire correspondre un ensemble du point* $\cdots$"
"$\cdots$ *si pour n'importe quel numéro positif ε il existe un autre nombre positif $\delta \cdots$*"
"$\cdots$ *si pour tout ensemble $E(l)$ il existe un ensemble réduit $E^*(xo) \cdots$*".

On facilite des actes de compréhension pour l'obstacle O_7 quand on inclut des expressions comme :
"$\cdots$ *ε et δ dans la définition de limite sont des quantificateurs de l'approximation (de x à c d'une part, et de $f(x)$ à la limite d'autre part)* $\cdots$"
"$\cdots$ *si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \cdots$*"
"*Aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, nous considérons l'ensemble $E(-2, \varepsilon)$, il existe un $\delta > 0 \ldots$ qui dépend de ε; et plus ε sera petit plus on devra choisir un δ aussi petit* $\cdots$"
"$\cdots$ *le fait de trouver une valeur appropriée de δ pour un ε concret ne démontre pas l'existence d'une limite $\cdots$ ceci requiert la preuve qu'il est possible de trouver un δ adéquat pour chaque $\varepsilon \cdots$*".

On peut induire à l'obstacle O_9 à travers l'interprétation géométrique de la définition en n'excluant pas le point dans l'ensemble, quand le calcul de limite en un point pour une fonction continue se pose dans l'introduction.

On facilite des actes de compréhension pour l'obstacle O_9 en ajoutant des explications telles que :

"$\cdots$ *la fonction peut, également, ne pas être définie au point* $\cdots$"
"$\cdots$ *dans l'exemple* $\cdots$ *la fonction a une limite au point mais manque de valeur en celui-ci* $\cdots$"
"$\cdots$ *la valeur de f en $x = c$ n'intervient pas dans la définition de limite et pour l'exprimer simplement on dit que $x - c$ est positif, en valeur absolue, et nous utiliserons les inégalités $0 < |X - c| < \delta$ pour exprimer que X est un nombre de l'intervalle $(c-\delta, c+\delta)$ distinct de $c \cdots$*"
"$\cdots$ *dans la définition n'intervient pas la valeur de f au point a (valeur qui ne peut être même pas définie)* $\cdots$" *et après un exemple* "$\cdots$ *il est intéressant d'observer que la fonction dans ce cas est définie au point qui se considère et sa valeur coïncide avec la limite* $\cdots$"
"$\cdots$ *on peut remarquer que dans le cas où $f(a)$ existerait, le point de coordination $x = a, y = f(a)$ n'est pas obligé d'appartenir au rectangle antérieur* $\cdots$", *explication qui se fait après l'interprétation géométrique de la définition*".

Conclusions de l'analyse des réponses des élèves au questionnaire

Des résultats obtenus, SÁNCHEZ & CONTRERAS (1995), SÁNCHEZ (1997) nous avons pu apprécier que les élèves ont une faible tendance à utiliser la représentation graphique de la fonction pour raisonner le comportement de la fonction dans l'environnement du point. L'utilisation de la conception numérique est assez fréquente, surtout dans la conception numérique dynamique, associée à l'idée de la limite comme tendance. Finalement nous attirons l'attention sur le fait que dans leurs réponses les étudiants ont recours peu souvent à l'utilisation de δ et de ε pour justifier leur raisonnement. Selon les données obtenues lors des résultats antérieurs nous pouvons détacher quelques conclusions sur l'enseignement du concept de la limite d'une fonction dans les cours préuniversitaires.

D'une part, la très faible présence de la conception CAM chez les élèves indique que, malgré que les δ et les ε s'étudient avec une assez grande fréquence dans ces cours, on ne dirait pas qu'ils figurent dans le langage mathématique des élèves. La conception la plus fréquente est la conception numérique, surtout la dynamique, ce qui indique que les idées intuitives sont celles qui prévalent avant d'arriver à l'Université. Ainsi, il n'est pas difficile de déduire qu'en recevant un enseignement d'analyse mathématique, après l'étudiant rencontre des difficultés pour la compréhension des concepts basiques de cette matière. Dans les réponses relatives aux obstacles, on peut observer qu'une grande quantité d'élèves ne répondent pas aux questions formulées. Ainsi, beaucoup des obstacles qui se détectent chez ceux qui répondent, seraient présents dans le cas où des réponses sont données. La présence notable de l'obstacle O_9 nous indique que le calcul algébrique de limites dans le "Bachillerato" inévitable favorise la présence de cet obstacle ce qui implique que les actes de compréhension signalés devraient être tenus en compte par les professeurs. L'obstacle O_3 a une fréquence assez élevée ce qui indique que l'idée de limite comme approximation et tendance peuvent être tout d'abord de bonnes idées intuitives si l'on induit aussitôt chez les élèves des actes de compréhension préparés pour donner clairement le sens de s'approcher "autant qu'on veut". Un autre obstacle qui se détecte dans de nombreuses occasions est O_4, ce qui donne une idée des difficultés que les étudiants peuvent rencontrer en distinguant clairement les limites latérales et la limite.

Dans l'enseignement du concept de limite d'une fonction on doit tenir compte, aussi bien des conceptions avec lesquelles les étudiants rentrent à l'Université que les obstacles présents dans leurs réponses, de telle façon qu'une fois connus par les professeurs, ceux-ci posent des situations en classe qui initient à leurs élèves à la réalisation des actes de compréhension nécessaires et qui tendent au dépassement des obstacles présents dans le concept.

Quelques conclusions de l'étude des manuels. Réflexions et implications pour l'enseignement et la recherche

Dans la majorité des textes on peut détecter la présence d'obstacles relatifs au concept de limite d'une fonction et on ne trouve pas, en général, les situations suffisantes d'enseignement qui provoquent des actes de compréhension qui permettent la résolution de ceux-ci. La faible présence d'obstacles et des actes de compréhension correspondants dans d'autres textes montre le manque de situations qui aident le lecteur à la compréhension du concept. En plus nous avons pu observer les différentes mises en oeuvre des auteurs au moment de l'introduction du concept de limite, les exemples qu'ils proposent, les définitions utilisées, etc., bien que seulement quelques-uns des professeurs réalisent l'introduction à travers les exemples qui contemplent la triple représentation graphique, symbolique et numérique laquelle est la plus indiquée pour la compréhension de la notion selon de récentes recherches.

Quant au nombre des obstacles et aux actes de compréhension détectés dans les manuels, on observe que c'est indépendant de l'époque. Alors que dans certains cas (comme ceux de REY PASTOR, GUZMÁN et LARSON), SÁNCHEZ (1997), on détecte des situations qui facilitent au lecteur de nombreux actes de compréhension qui les conduisent à la résolution des obstacles présents dans les manuels; dans beaucoup d'autres cas, on ne pousse pas aux obstacles et on ne facilite pas non plus des actes de compréhension, la lecture du manuel n'aide donc pas à la compréhension du concept. Dans l'évolution des conceptions on peut observer une présence minime de la conception géométrique, ce qui semble paradoxal dans la mesure où l'utilisation de cette conception comme recours didactique facilite la compréhension du concept. Cependant, la présence de la conception géométrico- graphique est très élevée, elle apparaît dans plus de 50% des manuels, lorsque cette conception pousse le lecteur vers des obstacles déterminés comme O_2, O_5 et O_9.

Pour finir, nous pensons qu'on doit augmenter les modèles visuels de l'enseignement du Calcul de la même façon que l'on doit diminuer les calculs algorithmiques pour permettre la création "d'images de concept" qui, en évoluant, facilitent la formalisation postérieure du concept. Dans cette recherche nous avons étudié l'évolution des conceptions des étudiants quant à la compréhension du concept de limite d'une fonction, basée sur l'idée d'obstacles épistémologiques et sur l'acte de compréhension; cependant, nous n'avons pas réalisé une proposition méthodologique dans ce sens. Ainsi, notre projet est l'élaboration de ces propositions pour les étudiants universitaires, lesquelles peuvent s'enrichir grâce à l'utilisation de certains recours liés aux nouvelles technologies.

Références bibliographiques

ARTIGUE, M. 1989. Epistemologie et Didactique, Institut de Recherche pour l'enseignement des Mathématiques. París : University París VII.

ARTIGUE, M. 1994. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, pp. 27-39.

ARTIGUE, M. 1994. Analysis. En Tall, D. (Ed). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht/Boston/London : Kluwer Academic Publisher. pp. 167-198.

BOYER, C.B. 1959. The History of the Calculus and its Conceptual Development. Dover Publications, Inc., New York.

BOYER, C.B. 1986. Historia de la Matemática. Madrid : Alianza Editorial.

BROUSSEAU, G. 1980. Les problèmes de l'enseignement des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1, 1, pp. 11-56.

BROUSSEAU, G. 1982. Les objets de la didactique des Mathématiques. Actes du 2e École d'Été de didactique des Mathématiques, (pp. 1-16). IREM de la Universidad de Burdeos.

BROUSSEAU, G. 1983. Les obstacles epistémologiques et les problèmes en Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4, 2, 164-198.

CHEVALLARD, Y. 1991. La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée Sauvage. (Edición original, 1985).

CHEVALLARD, I., JOHSUA, M.A. 1991. La transposition didactique. La Pensée Sauvage, éditions.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCON, J. 1997 Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. "Cuadernos de educación". ICE Universidad de Barcelona - Editorial Horsovi.

CONTRERAS, A. y SÁNCHEZ, C. 1998. Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos. VI Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias, celebrado en Jaca (Huesca), 24-28 de junio de 1998.

CORNU, B. 1981. Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de li-mite. Bulletin de l'APMEP, 335, pp. 627-641.

CORNU, B. 1983. Apprentissage de la notion de limite. Thèse de doctorat de troisième cycle de Mathématiques pures. Université de Grenoble.

CORNU, B. 1985. Les principaux obstacles à l'apprentissage de la notion de li-mite. Bulletin IREM - APMEP, pp. 55-63.

CORNU, B. 1986. Quelques obstacles à l'apprentissage de la notion de limite. Laboratoire de Mathématiques Pures. Université de Grenoble I.

CORNU, B. 1991. Limits. En Tall, D. (De). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht/ Boston/London : Kluwer Academic Publisher. pp. 153-166.

DAVIS, R. & VINNER, S. 1986. The notion of Limit : Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. Journal of Mathematical Behavior 5, 281-303.

DELEDICQ, A. 1994. Les conceptions rélatives aux limites. Vingt ans de didactique des mathématiques en France. M. Artigue, R. Grass, C. Laborde y P. Tavignot (Eds.), pp. 321-327. La Pensée Sauvage, éditions.

EL BOUAZZOUI, H. 1988. Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction. PHD. Université de Bordeaux I.

ROBINET, J. 1983. Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 4, n° 3, pp. 223-292. La Pensée Sauvage, éditions.

SÁNCHEZ, C. 1997. Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. 1998. Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función : Una perspectiva desde la noción de obstáculo. Enseñanza de las Ciencias, 16 (1).

SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. 1998. Análisis de la evolución de los ejemplos que se plantean en libros de texto de Bachillerato y COU para le enseñanza del concepto de límite de una función (1950-1993). VI Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias, celebrado en Jaca (Huesca), 24-28 de junio de 1998.
SCHUBRING, G. 1988. Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leurs représentations dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1975 et 1845. En C. Laborde (Ed.), Actes du premier Colloque Franco-Allemand des Mathématiques et de l'Informatique, pp. 137-146. Grenoble : La Pensée Sauvage.
SFARD, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 1-36.
SIERPINSKA, A. 1985a. Obstacles epistemologiques rélatifs à la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 6, n° 1, pp. 5-67.
SIERPINSKA, A. 1985b. La notion d'obstacle epistémologique dans l'enseignement des mathématiques. Actes de la 37e Rencontre CIEAEM, Leiden.
SIERPINSKA, A. 1987. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics 18 , 371-397. T.
SIERPINSKA, A. 1990. Some remarks on undertanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, Vol. 10, pp. 24-36.
SIERPINSKA, A. 1991. Some remarks on undertanding in mathematics. Versión revisada del trabajo presentado al Canadian Mathematics Education Study Group. Vancouver.
TALL, D. 1994. Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.
TALL, D. 1995. Interrelationships between mind and computer : processes, images, symbols. Advanced Technologies in the Teaching of Mathematics and Science (Ed. David I. Ferguson).
TALL, D. 1995. Seminario Didáctica del Análisis y Didáctica de las Funciones. Universidad Autónoma de Barcelona.
VINNER, S. y TALL, D. 1981. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, pp. 151-169.
WEBER, J. 1986. Basic content analysis. Newbury Park, California : Sage University Press.
WILLIAMS, S. 1991. Models of limit Held by College Calculus Students. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3, pp. 219-236.

Nota : Este trabajo se ha realizado dentro del marco del Proyecto: "Fenómenos didácticos ligados a la adquisición de conceptos matemáticos fundamentaless en Educación Secundaria y Universidad", (PB 97-0851), otorgado a los autores por la Secretaría de Estado de Universidades, Investigación y Desarrollo - Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica - del Ministerio de Educación y Cultura español, dentro del Programa Sectorial de Promoción General del Conocimiento. Asi mismo está subvencionado parcialmente por el Grupo de Investigación "Aproximación y Métodos Numéricos" del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén (España).

Anexos del estudio

1) Manuales analizados

ANZOLA, M. y otros. Matemáticas 2° BUP. Ed. Santillana. Madrid, [1976].
APOSTIL, T.M. (1989) *Calculus*. Editorial Reverté. Barcelona.
DE BURGOS ROMÁN, J. (1988) *Cálculo Infinitesimal* (teoría y problemas). Madrid.
DE BURGOS ROMÁN, J. (1994) *Cálculo Infinitesimal de una variable*. Editorial McGraw-Hill. Madrid.
GARCIA CASTRO - GUTIERREZ GOMEZ. (1992) *Cálculo Infinitesimal-I*. Ediciones Pirámide. Madrid.
GRANERO, F. (1990) *Cálculo*. Editorial McGraw-Hill. Madrid.
GUZMÁN, M. de - B. Rubio. (1992) *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático*. Ediciones Pirámide. Madrid.
GUZMÁN, M.; COLERA, J. y SALVADOR, A. Matemáticas. Bachillerato 2. Ed. Anaya. Navarra, [1987].
GUZMÁN, M.y COLERA, J. Matemáticas I - COU. Ed. Anaya. Navarra, [1989].
LARSON - HOSTETLER. (1989) *Cálculo y Geometría Analítica*. Editorial McGraw-Hill. Madrid.
LARSON / HOSTETLER / EDWARDS. (1995) *Cálculo*, vol 1. Editorial McGraw-Hill. Madrid.
MARTINEZ SALAS, J. (1964) *Elementos de Matemáticas*. Impreso por Gráficas A. Martín. Valladolid.
PRIMO, A. Matemáticas COU. Ediciones S.M. Madrid, [1987].
PUIG ADAM, P. (1959) *Cursos de Análisis Matemático para Ingenieros*. (Tomo I: Curso teórico práctico de Cálculo Integral aplicado a la Física y Técnica). Cuarta edición. Madrid.
PUIG ADAM, P. (1970) *Cursos de Análisis Matemático para Ingenieros*. (Tomo I: Curso teórico práctico de Cálculo Integral aplicado a la Física y Técnica). 12ª edición. Madrid.
REY PASTOR, J. - PI CALLEJA, P. - TREJO, C.A. (1956) *Análisis Matemático*. Volumen I. Editorial Kapelusz. Buenos Aires.
REY PASTOR, J. (1973) *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Editor: Biblioteca Matemática S.L. Madrid.
REY PASTOR, J. y A. de CASTRO. (1964) *Elementos de Matemáticas*. Editorial S.A.E.T.A. Madrid.
REY PASTOR. Matemáticas 6°. Colección Didáctica Elemental. Madrid, [1954].
RÍOS, S. (1966) *Cálculo Infinitesimal*. Impreso por Ibérica. Madrid.
RÍOS, S. (1973) *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Paraninfo. Madrid.
RÍOS, S. Matemáticas Especiales (COU). Ed. Paraninfo. Madrid, [1974].
RÍOS, S. (1951) *Complementos de Matemáticas y Métodos Estadísticos*. Impreso por Díez, Madrid.
RÍOS, S. (1957) *Complementos de Matemáticas*. Impreso por Gráficas España, Madrid.
RÍOS, S. / A.R. SANJUAN. Matemáticas 5°. Ed. de los autores. Madrid, [1958].
RÍOS, S. / A.R. SANJUAN. Matemáticas 6°. Ed. de los autores. Madrid, [1966].
RÍOS, S.(1975) *Matemática Aplicada*. Editorial Paraninfo. Madrid.
THOMAS ARA, L. y RÍOS GARCÍA, Mª E. (1974) *Matemáticas-Cálculo*. Manufacturas Jean, S.A. Santander.
THOMAS, G.B. (1968) *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Aguilar S. A. de Ediciones. Madrid.
THOMAS, G.B. (1980) *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Aguilar. Madrid.

THOMAS, G.B. (1959) *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.* Aguilar. Madrid.
VIZMANOS, J.; ANZOLA, M.; PRIMO, A. Matemáticas 2° BUP. Ed. S.M. Madrid, [1983].
VIZMANOS, J.R. y ANZOLA, M. Matemáticas - Algoritmo 2. 2° de BUP. Ediciones S.M. Madrid, [1990].
VIZMANOS, J.R. y ANZOLA, M. Matemáticas I. COU (Opción A y B). Madrid, [1993].

2) Clasificación de los manuales por niveles y años.

Etapa	Año	Autor - E. Universitaria	Año	Autor - E. Media
1ª	1951	Sixto Ríos		
	1956	Rey Pastor	1954	Rey Pastor-Puig Adam (6°)
	,,	Sixto Ríos		
	1957	Sixto Ríos	1958	S. Ríos-R. Sanjuan (5°)
	1959	Puig Adam		
	,,	G. B. Thomas		
2ª	1960	Rey Pastor		
	1964	Martínez Salas		
	,,	Rey Pastor		
	1966	Sixto Ríos	1966	S. Ríos-R. Sanjuan (6°)
	1968	G. B. Thomas		
	1969	Mataix Aracil		
3ª	1970	Puig Adam	1974	Sixto Ríos (COU)
	1973	Rey Pastor	1976	Anzola-otros (2°)
	,,	Sixto Ríos		
	1974	Thomas Ara		
	1975	Sixto Ríos		
4ª	1980	G. B. Thomas	1983	Anzola-otros (2°). Ed.S.M.
	1988	J. de Burgos	1987	A. Primo. COU. Ed. S.M.
	1989	Larson y otros	1987	M.Guzmán-J. Colera (2°)
	,,	Apostol	1989	M.Guzmán y Colera (COU)
5ª	1990	F. Granero		
	1992	M. de Guzmán	1990	Anzola-otros (2°)
	,,	García Castro	1993	Anzola-otros (COU)
	1994	J. de Burgos		
	1995	Larson y otros		