LIVRE SINGULIER UTILE TOUCHANT L'ART ET PRATICQUE DE GEOMETRIE, COMPOSE NOUVELLEMENT EN FRANCAIS PAR MAITRE CHARLES DE BOUVELLES, CHANOINE DE NOYON
1542

prologue

*Comparaiſon de. Larithmetique à la Geometrie.*

LA ſcience & art de Geometrie, eſt en proportion pareille & reſpondante & ſubalterne à la noble ſcience Darithmetique, & comme depēdāt dicelle Entre les deux ſœurs y a pareille differēce, cōme entre lame & le corps. Larithmetique eſt dediee aux nōbres, leſquelz ſont giſans & ſituez en lame. La Geometrie cōſidere les meſures, les quantitez & dimenſions corporelles, leſquelles ſont poſees & ſituees au corps, & en toute choſe ſolide & materiele. Parquoy Larithmetique en excellence de dignité & de naturele perfection, ſurmonte la Geometrie dung hault degré: nonobſtant que les principes de lune & de laultre ſont communs, & enſemble correſpondans: comme peuent aſſez teſmoigner ceulx, qui en toutes les deux ſciences ſont bien inſtruictz. Larithmetique eſt compriſe ſur quatre principes ſeulement: ceſtaſcauoir ſur vng, deux, trois, & quatre, leſquelz conioinctz enſemble font le nombre de dix: lequel ſelon lopinion de Pythagôras, & de tous philoſophes, eſt fort myſtique, & de grande perfection. Car auſſi en luy par les quatre premiers nōbres deſſuſdictz, eſt fondee toute la ſciēce de Muſique, & toutes les cōſonances & harmonies dicelle. La Geometrie par limitatiō de Larithmetique eſt pareillemēt fondee & cōtenue ſur quatre principes ſeulemēt, nommez en latin, Punctū, Linea, Superficies, Corpus: Ceſtadire le poīct, la ligne, la plaine ou ſupfice, & le corps. Et na aultre choſe à conſiderer & à contempler que ces quatre, leſquelles ſont les meſures de toute choſe ferme & ſolide, ſoit celeſte, ou ſoit contenue ſoubz le ciel. Et de ces quatre choſes dirons icy particulierement, & commencerons par vne table generale, & vtile à toute la Geometrie.

❡Senſuyt la table generale de tout ce qui eſt traicté en la Geometrie.

# Quelques éclairages sur l'enseignement de l'arithmétique depuis le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle

BOYÉ Anne
LEFORT Xavier
IREM des Pays de Loire (France)

**Abstract**

L'Arithmétique avait, en France, disparu depuis un certain temps des programmes de Mathématiques au lycée. Elle réapparaît progressivement ces dernières années, au collège, pour que, sans doute, les élèves aient quelques notions sur les nombres, au lycée (en terminale scientifique, spécialité maths), de manière plus approfondie.

A partir de quelques manuels du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle à nos jours, utilisés dans l'enseignement français, il nous a paru à propos de se pencher sur les différents exposés et les niveaux des connaissances exigées. Si l'enseignement est resté élémentaire, sans influence de la tradition diophantienne, jusqu'aux années 1750, on peut voir apparaître de nouveaux contenus dans les ouvrages de la fin de ce siècle.

Beaucoup de questions se posaient quant à ce qu'il fallait enseigner en Arithmétique. Le niveau devait-il rester élémentaire ou bien être approfondi ? La question du statut du nombre pouvait-elle être abordée ? Celle-ci engage alors une réflexion mathématique générale, et l'enseignement ne pouvait plus se contenter de techniques purement calculatoires.

L'atelier proposé à l'Université d'Été Européenne de Louvain-la-Neuve/Leuven a été conçu autour d'un nombre assez important de textes dont nous avons essayé d'extraire les plus significatifs, à commencer par le premier. En effet, bien que plus ancien, celui-ci célèbre avec conviction l'Arithmétique comme surmontant la Géométrie "en excellence de dignité et de naturelle perfection".

**L'Arithmétique en sa perfection**

**François Legendre**
**1° édition : 1745**

**Preuve de la Multiplication par 9**

Cette Règle, comme les précédentes, doit se prouver par son contraire, mais attendu que je n'ai pas encore expliqué la Division, qui est le contraire de la Multiplication, je me servirai par supplément de la preuve par 9, laquelle se fait ainsi.

Remarquez que c'est la preuve de la Multiplication suivante que j'explique, où le nombre à multiplier est 706, le multiplicateur 57, et le produit 40 242.

Il faut faire une croix, puis tirer la preuve de 706 dont le surplus de 9 est 4, qu'il faut poser en haut de la croix.

Ensuite, il faut tirer la preuve de 57, et écrire le surplus de 9, qui est 3, au bas de la croix. Cela fait, il faut multiplier ces deux restes l'un par l'autre, savoir 4 par 3 vient 12, dont le surplus de 9 est 3 qu'il faut écrire au côté gauche de la croix. Enfin il faut tirer la preuve de 40 242 qui est le produit, et écrire le surplus de 9, qui sera aussi 3, au bras droit de la même croix ; d'où l'on conclut que la règle est bien faite, d'autant qu'il faut que le quatrième reste que l'on trouve soit égal au troisième qu'on a posé.

Et c'est une règle générale pour la preuve par 9 de toutes les règles de Multiplications et de divisions qui suivront :

**Exemple de la Multiplication pour la pratique de la preuve par 9.**

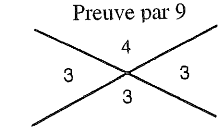
A 57 livres l'arpent de terre, combien 706 arpents ?

706 Arpents à multiplier
par 57 livres

4942
3530

40242

Preuve par 9




Les manuels d'enseignement de F. Legendre eurent un certain succès dès leur parution, puisqu'ils furent réédités plusieurs fois. Ils furent en particulier utilisés dans les écoles tenues par les Oratoriens.

Il explique ici la preuve par 9 de la multiplication soulignant toutefois que la meilleure preuve serait celle de l'opération contraire : la division.

Son explication n'est pas suivie de vraie justification, ce qui est d'usage à l'époque dans les ouvrages d'enseignement ; il explique à travers un exemple, ce qui est aussi habituel.

"La preuve de 706 dont le surplus de 9 est 4" signifie que $7 + 0 + 6 = 13 = 9 \times 1 + 4$.

De la même façon : $5 + 7 = 12 = 9 \times 1 + 3$ .

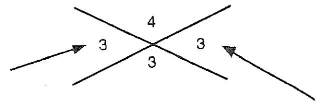
Enfin : $4 \times 3 = 12 = 9 \times 1 + 3$ (multiplication des restes).

Le même procédé est appliqué à 40 242 le produit de 706 par 57.

$4 + 0 + 2 + 4 + 2 = 12 = 9 \times 1 + 3$.



La disposition classique est :




" surplus " de " 4 × 3 "

" surplus de 40242 "

Il faut que les deux " surplus " finaux soient égaux, sinon la multiplication est sûrement fausse.

Voici comment l'on pourrait justifier cette " preuve par 9 " :

$10\,n$ a pour reste 1 dans la division par 9, quel que soit $n$ entier. (Ou encore : $10 \equiv 1$ (9) donc $10n \equiv 1(9)$).

Donc 706 qui est $7 \times 102 + 0 \times 10 + 6$ a pour reste le même que $7 + 6 = 13$, or $13 = 9 \times 1 + 4$, donc 706 a pour reste 4 dans la division par 9.($706 \equiv 4$ (9)).

De la même façon 57 a le même reste que $5 + 7 = 12$, or $12 = 9 \times 1 + 3$, donc 57 a pour reste 3 dans la division par 9. ($57 \equiv 3$ (9)).

Le produit $706 \times 57$ a le même reste que le produit des restes, donc que $4 \times 3 = 12$, et $12 = 9 \times 1 + 3$. Donc $706 \times 57$ a pour reste 3. ($706 \times 57 \equiv 4x3$ (9) $\equiv 3$ (9)).

Il faut donc vérifier que 40 242 a bien ce même reste.

40 242 a pour reste le même que $4 + 0 + 2 + 4 + 2 = 12$, c'est à dire 3.(40 242 $\equiv 3(9)$).

La " preuve " est vérifiée.

Etienne BÉZOUT est né à Nemours en 1730 et mort près de Fontainebleau en 1783. S'il est surtout connu pour le théorème de "BACHET-BÉZOUT", dont le texte proposé présente plus une illustration qu'un réel énoncé, cet auteur a d'abord travaillé à l'élaboration d'un "Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine" en 6 volumes. Il est à remarquer que l'extrait se trouve dans le troisième tome, consacré à l'algèbre, et non pas dans le premier, intitulé "Arithmétique". Ce premier tome contient, en plus des définitions et opérations élémentaires, la théorie des logarithmes.

Ce cours parut en France de 1764 à 1771, et les rééditions des trois premiers volumes témoignent de son succès, y compris hors des frontières du royaume. BÉZOUT a publié également en 1779 une "Théorie des équations algébriques", ajoutant ainsi à son œuvre pédagogique, où les récentes avancées mathématiques ne sont pas absentes, une dimension théorique non négligeable.

**ÉTIENNE BÉZOUT**

**Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine**

Si l'on proposait cette question: *Trouver deux nombres qui pris ensemble fassent 24* en nommant $x$ l'un de ces nombres, & $y$ l'autre, on aurait $x + y = 24$, équation de laquelle on tire $x = 24 - y$. Or cette question est susceptible d'une infinité de solutions, si par $x$ et $y$ on entend indifféremment des nombres entiers, ou des nombres positifs ou négatifs: il suffit, pour y satisfaire, de prendre pour $y$ tel nombre qu'on voudra, & de conclure la valeur de $x$ de l'équation $x = 24 - y$, en substituant pour $y$ le nombre qu'on aura pris arbitrairement; ainsi si l'on suppose successivement

$$y = 1, y = 1\frac{1}{2}, y = 2, y = 2\frac{2}{3}, \&c,$$

on aura

$$x = 23, x = 22\frac{1}{2}, x = 22, x = 21\frac{1}{3}\&c.$$

Mais si l'on ne veut que des nombres entiers & positifs, alors le nombre des solutions est limité; car pour que $x$ soit positif, il faut que $y$ ne soit pas plus grand que 24. Et puisqu'on ne veut que des nombres entiers, il est évident que l'équation ne peut avoir en tout que 25 solutions en $y$ comprenant 0 en sorte que supposant successivement $y = 0, y = 1, y = 2, y = 3$, &c on aura $x = 24, x = 23, x = 22, x = 21$, &c

Lorsqu'on impose la condition que les nombres demandés soient des nombres entiers & positifs, on ne voit pas toujours aussi facilement que dans l'exemple précédent, comment on peut satisfaire à cette condition: les questions suivantes sont propres à le faire connaître.

Question première. *On demande en combien de manières on peut payer 542 livres, en donnant des pièces de 17 livres & recevant en change des pièces de 11 livres.*

Représentons par $x$ le nombre des pièces de 17 liv.; & par $y$ celui des pièces de 11 liv.; on payera $x$ fois 17 liv. ou $17x$ : en recevant $y$ pièces de 11 liv. on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x - 11y$; & puisqu'on veut payer 542 liv. on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de $y$, c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coefficient, & nous aurons $y = \frac{17x-542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour $x$ tel nombre qu'on voudra, on aura pour $y$ une valeur qui satisfera sûrement à l'équation, mais comme la question exige que $x$ & $y$ soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement. La valeur de $y = \frac{17x-542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \frac{6x-3}{11}$ ; il faut donc que $\frac{6x-3}{11}$ soit un nombre entier : soit $u$ ce nombre; on aura $\frac{6x-3}{11} = u$, & par conséquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u+3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \frac{5u+3}{6}$, il faudra donc que $\frac{5u+3}{6}$ fasse un nombre entier : soit $t$ ce nombre entier; on aura $\frac{5u+3}{6} = t$, & par conséquent $5u + 3 = 6t$ & $u = \frac{6t-3}{5} = t + \frac{t-3}{5}$; il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ fasse un nombre entier: soit $s$ ce nombre entier, on aura $\frac{t-3}{5} = s$, & par conséquent $t = 5s + 3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour $s$ tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour $t$ un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de $x$ & $y$: puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$ , en mettant pour $t$ la valeur $5s + 3$ on aura $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s + 3$; & puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour $u$ sa valeur, on aura $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s + 6$; enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x-542}{11}$, en mettant pour $x$ sa valeur, on aura $y = \frac{187s+102-542}{11} = 17s - 40$.

Ainsi les valeurs correspondantes de $x$ & de $y$ sont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la première, on est libre de prendre pour $s$ tel nombre entier qu'on voudra; mais la seconde ne permet pas de prendre $s$ plus petit que 3; en effet $y$ devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que $s$ soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire, plus grand que 2.



On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de $x$ & de $y$, au lieu de $s$, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini; ainsi posant successivement $s = 3, s = 4, s = 5, s = 6, s = 7$, &c, on aura les valeurs correspondantes de $x$ & de $y$ comme il suit:

$$\begin{array}{rcrrcr}
x & = & 39 & y & = & 11 \\
 & = & 51 & & = & 28 \\
 & = & 61 & & = & 45 \\
 & = & 72 & & = & 62 \\
 & = & 83 & \&c & = & 79.
\end{array}$$

En fait pendant une période assez longue, l'enseignement de l'arithmétique fut cantonné à l'apprentissage des quatre opérations, et de leurs applications à des problèmes concrets de la vie courante, du commerce, des partages etc. ... A vrai dire l'arithmétique en tant que théorie et étude des nombres n'était pas vraiment une préoccupation des mathématiciens.

Fermat au XVII$^{\text{ème}}$ siècle avait retrouvé la tradition de Diophante, au travers de la traduction faite par Bachet de Meziriac en 1621. Fermat définit, le premier, le domaine des entiers comme le domaine propre de l'arithmétique. Cependant, dans les faits, ses recherches sur les nombres avaient peu influencé les mathématiciens de son temps. Il faudra attendre les générations suivantes pour que Euler par exemple reprenne ses résultats, pour les compléter ou les démontrer et faire avancer une science qui bientôt sera désignée de différents noms pour bien marquer qu'il ne s'agit plus d'arithmétique élémentaire. Nous trouverons par exemple : Théorie des nombres[1], arithmétique supérieure, $\cdots$

Il devient intéressant, à partir de la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle en arithmétique comme dans les autres domaines des mathématiques, d'étudier les interactions entre " le savoir savant ", et le " savoir enseigné ". Les mathématiciens sont en effet de plus en plus chercheurs et enseignants, au niveau du supérieur du moins, et avec plus ou moins de retard, les découvertes et résultats nouveaux sont pris en compte dans les programmes d'enseignement des dernières classes du secondaire.

Gauss, en particulier, avec ses *Disquisitiones arithmeticæ* (1801) transforme la théorie des nombres qui était plutôt un amas de résultats isolés en une nouvelle discipline douée de méthodes propres, puissantes et très profondes.

Dans la deuxième moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle les programmes des établissements secondaires vont peu à peu intégrer les progrès des connaissances mathématiques, et l'on pourra trouver dans les manuels d'arithmétique pour la préparation au baccalauréat, la théorie des résidus quadratiques, étudiée depuis Euler et développée dans Theoria residuorum biquadraticorum de Gauss (1831) et la théorie des congruences exposée dans les *Disquisitiones*. Bien sûr, comme par exemple dans le manuel de Combette que nous présentons plus bas, ces résultats sont souvent présentés en annexe, en complément. Cela témoigne cependant du niveau de ce que l'on enseignait alors en arithmétique. Notons d'ailleurs que la théorie des nombres est redevenue arithmétique.

Nous notons déjà ce désir de sortir l'arithmétique enseignée dans le secondaire, du niveau élémentaire, dans le texte suivant extrait d'un ouvrage publié en 1842 à Saint-Malo, dont l'auteur, Fournier, indique qu'il a fréquemment employé la notation algébrique pour démontrer les principes de l'arithmétique, " *parce que l'emploi de ce procédé m'a paru préférable à celui de certains raisonnements, parfois un peu longs, et qui sont souvent très bien débités par les élèves, sans être parfaitement compris* ".

[1]A.M. LEGENDRE, 1798

Il s'agit de :

**ELEMENTS D'ARITHMETIQUE ET D'ALGEBRE**
**à l'usage des écoles royales de navigation**

La quatrième partie comprend nombre de résultats et de théorèmes, dont le suivant:

"Tout nombre $N$ qui divise un produit $AB$, et qui est premier avec un des facteurs, divise nécessairement l'autre facteur".

"Supposons que $N$ soit premier avec $A$, il divisera $B$.

Les nombres $A$ et $N$ étant premiers entre eux, si on leur applique le procédé (l'algorithme d'Euclide), on parviendra nécessairement à un reste égal à l'unité.

Cela posé, supposons d'abord $A$ plus grand que $N$. Représentant par $Q, Q', Q'' \cdots$ les quotients consécutifs que l'on obtiendrait en appliquant à ces deux nombres le procédé (l'algorithme d'Euclide) et par $R, R', R'' \ldots$ les restes successifs des diverses divisions, nous aurons:

$$\begin{aligned} A &= NQ + R \\ N &= RQ' + R' \\ R &= R'Q'' + R'' \\ R' &= R''Q''' + R'''. \end{aligned}$$

Multiplions par $B$ les deux membres de chacune de ces égalités, et divisant ensuite par $N$, nous aurons encore:

$$\frac{AB}{N} = BQ + \frac{BR}{N} \tag{1}$$

$$B = \frac{BRQ'}{N} + \frac{BR'}{N} \tag{2}$$

$$\frac{BR}{N} = \frac{BR'Q''}{N} + \frac{BR''}{N} \tag{3}$$

$$\frac{BR'}{N} = \frac{BR''Q'''}{N} + \frac{BR'''}{N}. \tag{4}$$

Dans l'égalité (1), le premier membre $\frac{AB}{N}$ est un nombre entier, puisque, par hypothèse, $N$ divise $AB$; donc le second membre $BQ + \frac{BR}{N}$ sera aussi un nombre entier. Mais $BQ$ est un nombre entier, donc $\frac{BR}{N}$ sera aussi un entier et $N$ divise $BR$.

Dans l'égalité (2), le premier membre $B$ étant un nombre entier, le second membre $\frac{BRQ'}{N} + \frac{BR'}{N}$ sera aussi un nombre entier. Mais on vient de démontrer que $N$ divise $BR$, donc il divise $BRQ'$ et $\frac{BRQ'}{N}$ sera un nombre entier, et par conséquent $\frac{BR'}{N}$ sera aussi un nombre entier; d'où il résulte que $N$ doit diviser $BR'$.

Dans la troisième égalité, $\frac{BR}{N}$ étant un nombre entier, d'après ce qui a été démontré dans la première, le second membre $\frac{BR'Q''}{N} + \frac{BR''}{N}$ sera un nombre entier. Mais $N$ divise $BR'$, ainsi qu'on vient de le démontrer, il divisera $BR'Q''$ et par conséquent $\frac{BR''}{N}$ sera un nombre entier, d'ou il résulte que $N$ doit diviser $BR''$.

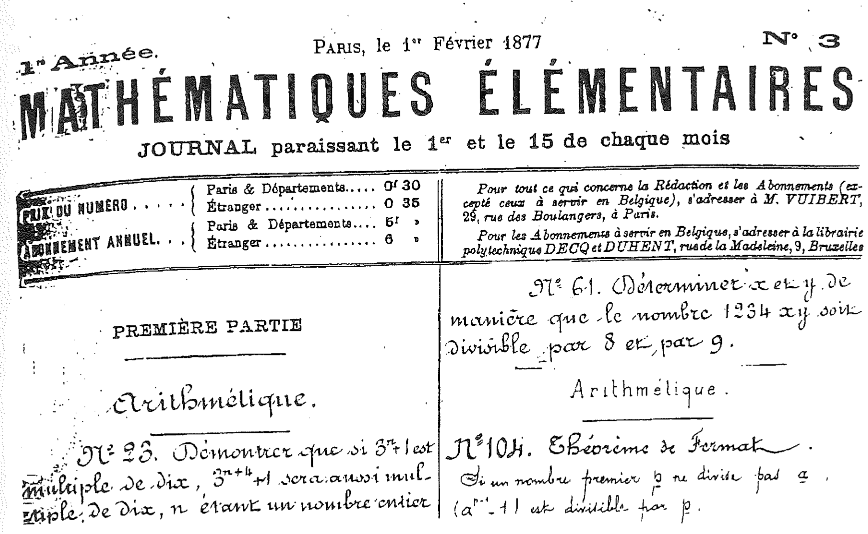
On démontrerait de la même manière que $N$ devra diviser les produits de $B$ par chacun des restes successifs que l'on obtiendrait en continuant l'opération commencée sur les nombres $A$ et $N$ pour trouver leur plus grand commun diviseur. Mais les nombres $A$ et $N$ étant premiers entre eux, cette opération conduira nécessairement à un reste égal à l'unité; donc le nombre $N$ divisera le produit de $B$ par l'unité, et par conséquent $B$ lui-même.

Si $N$ était plus grand que $A$, au lieu de diviser $A$ par $N$, on diviserait $N$ par $A$; puis on diviserait $A$ par $R$, $R$ par $R'$, $R'$ par $R''$ et ainsi de suite. Du reste, le raisonnement serait absolument le même."



Le *"Journal des Mathématiques élémentaires"* est un périodique bimensuel français de la seconde moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle; il fournissait aux enseignants à la fois un bulletin de liaison, un recueil d'exercices toujours renouvelé, mais aussi un stimulant certain, puisque les textes proposés émanaient des lecteurs mêmes, comme autant d'exercices soumis à la sagacité de leurs collègues. Outre la remarquable calligraphie, il faut noter le souci toujours théorique des énoncés. Sans doute la part très minoritaire de l'Arithmétique conduit à penser que celle-ci restait marginale dans l'enseignement, mais elle permet de retrouver les problèmes traditionnels de ce domaine.

Un des numéros de l'année 1877 proposait entre autres le théorème de FERMAT :



1re Année. PARIS, le 1er Février 1877 N° 3

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

JOURNAL paraissant le 1er et le 15 de chaque mois

PRIX DU NUMÉRO . . . . . { Paris & Départements..... 0f 30 / Étranger.................. 0 35

ABONNEMENT ANNUEL. . . { Paris & Départements.... 5f » / Étranger................ 6 »

*Pour tout ce qui concerne la Rédaction et les Abonnements (excepté ceux à servir en Belgique), s'adresser à M. VUIBERT, 29, rue des Boulangers, à Paris.*

*Pour les Abonnements à servir en Belgique, s'adresser à la librairie polytechnique DECQ et DUHENT, rue de la Madeleine, 9, Bruxelles*

PREMIÈRE PARTIE

Arithmétique.

N° 23. Démontrer que si $3^n+1$ est multiple de dix, $3^{n+4}+1$ sera aussi multiple de dix, $n$ étant un nombre entier

N° 61. Déterminer $x$ et $y$ de manière que le nombre $1234xy$ soit divisible par 8 et par 9.

Arithmétique.

N° 104. Théorème de Fermat.

Si un nombre premier $p$ ne divise pas $a$, $(a^{p-1}-1)$ est divisible par $p$.

La démonstration proposée en correction considère la suite des multiples de $a$ ; $p$ étant premier "absolu", il ne divisera aucun des multiples de $a$ jusqu'à $(p-1).a$, et la division de ces multiples par $p$ donne $(p-1)$ restes différents.

En effet, si deux restes sont égaux:

$$ma = pq_m + r_m \text{ et } na = pq_n + r_m$$

donc

$$a(m-n) = p(q_m - q_n)$$

et $p$ devrait diviser un multiple de $a$ plus petit que $(p-1).a$.

Ces restes sont évidemment plus petits que $p-1$, ce sont donc tous les nombres de 0 à $p-1$; on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} a.2a.3a.\cdots.(p-1).a &= mp + r_1 r_2 r_3 \cdots r_{p-1} \\ (p-1)!.a^{p-1} &= mp + (p-1)! \\ (p-1)!(a^{p-1}-1) &= mp. \end{aligned}$$

Comme $p$ ne divise pas $(p-1)!$, il divise $a^{p-1}$.

(la notation ! ne figure pas dans le texte de la correction)

A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, et dans le cadre de la préparation au baccalauréat français, l'inspecteur général de l'éducation E. COMBETTE publiait un cours d'Arithmétique très complet et suffisamment remarquable pour être réédité à de nombreuses reprises jusqu'au début du siècle suivant. Il s'agit cette fois non seulement d'un ouvrage à but pédagogique, mais encore d'un ouvrage quasiment institutionnel, vu la qualité de son auteur.
Le contenu, s'il comprend l'Arithmétique élémentaire et se complète d'applications pratiques (calculs d'erreurs, règles d'alliage...) ne se dispense pas de résultats théoriques et de leurs démonstrations. La théorie des nombres premiers est complétée par un chapitre conséquent, et le théorème de FERMAT s'y retrouve, avec bien sûr sa démonstration, et sa généralisation (dite théorème d'EULER).
Le texte proposé ci-après est tiré de la huitième édition et expose donc le théorème de FERMAT, précédé d'un lemme nécessaire. La démonstration est remarquablement claire et concise, rejoignant, sans doute dans un autre ordre, celle du "Journal des Mathématiques élémentaires".



## § II. — THÉORÈMES DE FERMAT ET D'EULER.

**237. — THÉORÈME XXV.** — *Si* A *est premier avec* B, *les restes de division par* B *des* (B — 1) *premiers multiples de* A :

$$A \times 1,\ A \times 2,\ A \times 3, \ldots A \times (B-1)$$

*forment, dans un certain ordre, la suite des* (B — 1) *premiers nombres entiers.*

1° *Aucun de ces restes n'est égal à zéro*, car B ne peut diviser aucun de ces multiples de A, puisqu'il diviserait le second facteur qui est inférieur à B.

2° *Tous ces restes sont différents*, car si deux multiples $A \times K$ et $A \times K'$ donnaient des restes égaux, leur différence :

$$A \times (K' - K)$$

serait divisible par B (104), ce qui est impossible puisque $(K' - K)$ est inférieur à B.

Donc ces restes, en nombre (B — 1), tous différents et inférieurs à B, forment, dans un certain ordre, la suite des nombres :

$$1,\ 2,\ 3, \ldots B-2,\ B-1.$$

**238. — Corollaire.** — *Si* A *est premier avec* B, *les restes de division par* B *des produits de* A *par chacun des entiers premiers avec* B *et inférieurs à* B, *sont dans un certain ordre les entiers premiers avec* B *et inférieurs à* B.

Ces restes sont tous différents, aucun d'eux n'est nul, et ils sont tous premiers avec B ; car B étant premier avec le dividende est aussi premier avec le reste.

**239. — THÉORÈME XXVI.** — (THÉORÈME DE FERMAT.) *Si* $p$ *est un nombre premier absolu qui ne divise pas* $a$, $p$ *divise*

$$a^{p-1} - 1$$

En effet, soit

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots r_{p-1}$$

les restes de division par $p$ des nombres :

$$a \times 1,\ a \times 2,\ a \times 3, \ldots a \times (p-1) :$$

le reste de division par $p$ du produit de ces $(p-1)$ multiples de $a$ sera le même que le reste de division par $p$ du produit des restes (115) :

$$r_1 r_2 r_3 \ldots r_{p-1}.$$

Si donc nous représentons par N le produit

$$1 \times 2 \times 3 \ldots \times (p-1),$$

d'où il résultera (237) :

$$N = r_1 \times r_2 \times r_3 \ldots \times r_{p-1}.$$

nous aurons :

$$a^{p-1} \times N - N = \text{m}^{\text{e}} \text{ de } p,$$

donc :

$$(a^{p-1} - 1) \times N = \text{m}^{\text{e}} \text{ de } p.$$

or, $p$ est premier absolu, il doit donc diviser l'un des deux facteurs du premier membre (168). — De plus, $p$ est premier avec chacun des nombres qui lui sont inférieurs, c'est-à-dire avec tous les facteurs du produit N, c'est-à-dire avec ce produit (171) ; donc $p$ divise $(a^{p-1} - 1)$, c'est ce qu'il fallait prouver.

Ainsi, 13, nombre premier ne divise pas 25, donc en divisant $25^{12}$ par 13 on aura pour reste l'unité.

L'enseignement en général, et l'enseignement des mathématiques en particulier va subir tout au long du XX$^{ème}$ siècle l'influence à la fois du politique et des autorités scientifiques, plus encore que dans le siècle précédent. C'est en effet le siècle de la démocratisation progressive de l'enseignement secondaire, et les décisions sur les programmes, les orientations pédagogiques, touchent une part de plus en plus grande de la population, donc de la vie économique et sociale d'un pays. Le siècle s'ouvre avec le début de la réforme des programmes de 1902, sur un débat entre la valeur éducative de la science, qui doit donc être enseignée à tous de manière égalitaire et un apprentissage utilitaire qui devrait donc être différencié selon les aspirations de chacun. Ce débat semble-t-il n'a cessé tout au long du siècle.
L'enseignement de l'arithmétique sera bien sûr marqué du sceau des réformes successives.
Durant la première moitié du siècle, l'on passe rapidement de l'arithmétique pratique de la première classe du secondaire à des problèmes d'un niveau non élémentaire. Ainsi, il était nécessaire, pour le brevet de 1920, de savoir non seulement ce qu'est un plus grand commun diviseur, mais aussi de le rechercher par la méthode de décomposition en facteurs premiers.
La première moitié du siècle a vu les lycéens français se pencher, dès les premières classes, sur les caractères de divisibilité, les plus petits multiples communs et les plus grands communs diviseurs.
Peu à peu, la notion de structure va prendre une importance grandissante dans les mathématiques, et pénétrer les programmes des lycées dès le début des années 1960. Le contenu est cette fois très conséquent, puisqu'il inclut l'étude de l'anneau Z des entiers relatifs et les congruences. On recherche le plus grand commun diviseur par l'algorithme d'EUCLIDE, et on parle sans hésiter de relation d'équivalence... Nous ne sommes pourtant pas encore à la révolution des "Maths modernes" qui marqueront l'enseignement en France comme ailleurs !
Ces années 70 vont couronner l'arithmétique comme une science particulièrement abstraite, un endroit privilégié d'apprentissage de la notion de structure. Dès le début de l'enseignement secondaire le PGCD de deux nombres sera connu par exemple comme le plus grand élément de l'intersection de l'ensemble des diviseurs de chacun de ces deux nombres, mais le sens élémentaire restera sûrement caché aux yeux de la plupart des élèves. C'est le triomphe de la conception ensembliste des entiers.
En réaction à cette conception, l'arithmétique théorique va disparaître du programme des dernières classes du lycée. Seules restent au début des années 80 dans les classes des collèges (11 à 15 ans) les notions de décomposition en produit de facteurs premiers, de PGCD et de PPCM, d'un point de vue très pratique, essentiellement pour les calculs et les simplifications de fractions par exemple.
Peu à peu, le collège devenait ouvert à tous, les préoccupations pédagogiques prenant le pas sur les contenus, il se fait jour que les élèves doivent construire eux-mêmes leur savoir. Cette arithmétique très élémentaire va donc aussi disparaître des programmes des collèges français.
Jusqu'à ces dernières années, un élève français avait son premier contact avec l'arithmétique en arrivant dans l'enseignement supérieur, s'il commençait des études de mathématiques.
Comme souvent l'autorité varie, la dernière réforme en cours vient de réintroduire une petite dose d'apprentissage du nombre dans les classes de collège : quelques caractères de divisibilité, recherche de PGCD, reconnaissance des nombres premiers dans les futurs programmes des classes de seconde (premières classes des lycées, élèves d'environ 16 ans).
Puis l'arithmétique un peu savante est réapparue il y a deux ans au programme de la classe de terminale scientifique des lycées, pour les élèves qui choisissent la spécialité "mathématiques". Cet enseignement cependant n'a que peu de rapport avec celui qui était dispensé du temps des " maths modernes ". La notion de structure n'est plus du tout à l'ordre du jour. L'accent est mis sur l'algorithmie, l'usage bien sûr de l'informatique. C'est que l'arithmétique a maintenant



une très grande importance pratique, par exemple dans la cryptographie. Apparemment, la connaissance du " nombre " n'est toujours pas une préoccupation. Utilité sociale, utilité pratique des mathématiques, formation de l'esprit ? Le débat est toujours le même, et l'histoire de l'enseignement de l'arithmétique en est une belle illustration.

**Aperçu sur l'enseignement de l'arithmétique, en France, du XVII$^{ème}$ siècle à nos jours, au travers de quelques manuels.**
**Chronologie**

| **Noms et dates** | **Savoir enseigné** | **Savoir savant** |
|---|---|---|
| BACHET (1581-1638) | | Traduction de Diophante<br>Énoncé du théorème dit de " BACHET-BÉZOUT " |
| FERMAT (1601-1665) | | |
| RIVARD (XVIII$^{ème}$) | Techniques de calcul.<br>(Parfois l'arithmétique inclut les logarithmes) | |
| F. LEGENDRE (XVIII$^{ème}$) | " L'arithmétique en sa perfection " 1745 | |
| EULER (1707-1783) | | Recherches sur les nombres |
| BÉZOUT (1730-1783) | " Cours de mathématiques à l'usage des gardes... " | |
| BOSSUT (XVIII$^{ème}$)<br>LACAILLE (XVIII$^{ème}$) | Manuels<br>Techniques de calcul | |
| A.M. LEGENDRE (1752-1833) | | " Essai sur la théorie des nombres " (1798) |
| GAUSS (1777-1855) | | " Disquisitiones arithmeticae " (1801)<br>Congruences. |
| FOURNIER (mi-XIX$^{ème}$)<br>TOMBECK (XIX$^{ème}$)<br>COMBETTE (XIX$^{ème}$) | Manuels | |
| FREGE (1848-1925) | | " Les fondements de l'arithmétique " (1884) |
| PEANO (1858-1925) | | Axiomes fondamentaux des entiers naturels |
| LESPINARD et PERNET | Manuel correspondant aux programmes de 1962 | |
| Années 70-80 | " Mathématiques modernes " | |
| Aujourd'hui | | |

## Bibliographie


BELHOSTE, GISPERT, HULIN, *Les sciences au lycée*, Vuibert, Paris, 1996.

BKOUCHE, CHARLOT, ROUCHE, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris, 1991.

COMBETTE, *Cours d'arithmétique*, Félix Alcan, Paris, 1893.

DE BOUVELLES, *Livre singulier touchant l'art et practique de géométrie, composé nouvellement en français par maître Charles de Bouvelles*, chanoine de Noyon.

DE COMBEROUSSE, *Cours de mathématiques*, tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1900.

F. LEGENDRE, *L'arithmétique en sa perfection*, 1745.

FITZ-PATRICK, CHEVREL, *Exercices d'arithmétique*, Hermann, Paris, 1900.

FOURNIER, *Eléments d'arithmétique et d'algèbre à l'usage des écoles royales et de navigation*, 1842,

GAUSS, *Reherches arithmétiques*, 1801.


4 COURS D'ANALYSE.

la quantité opposée à $+a$. Ces remarques suffisent pour établir ce qu'on appelle *la règle des signes* [voyez la note I.re].

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui recoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croit de plus en plus; &c. ...

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives



# Conceptions et obstacles épistémologiques à propos du concept de limite d'une fonction et son influence sur l'enseignement et sur l'apprentissage de la notion


CONTRERAS DE LA FUENTE Ángel
SÁNCHEZ GÓMEZ Carmen
Université de Jaén (Espagne)


### Abstract


Dans le développement du concept de limite d'une fonction et du point de vue épistémologique, on peut distinguer plusieurs étapes dans sa construction jusqu'à ce qu'il devienne objet de connaissance. C'est-à-dire, depuis la conception géométrique, liée aux principes d'Archimède et d'Eudoxe jusqu'à la conception métrico-analytique $(\varepsilon - \delta)$ de Weierstrass, les conflits Socio-cognitifs qui ont jalonné l'évolution de la notion furent nombreux. Nous poserons les questions suivantes :

Est-il pertinent de poursuivre fidèlement l'enseignement de cette évolution historique ?

Quels obstacles épistémologiques sont apparus au cours de la progression du concept ?

Quels sont ceux qui se manifestent au moment de son enseignement et de son apprentissage ?

Comment envisager cet enseignement en fonction des élèves auxquels il s'adresse ?

Quels doivent être le temps employé à son enseignement et celui destiné à son apprentissage ?

En général, quelle en la transposition didactique appropriée à la notion de limite, qui convertirait le savoir scientifique en savoir scolaire ?

Durant l'atelier conformément aux idées de Contreras y Sanchez (1998) et Sanchez (1997), nous proposerons de travailler diverses situations extraites de l'analyse de manuels et des résultats obtenus à partir de questionnaires distribués aux étudiants sur l'enseignement du concept de limite où sont impliqués aussi bien les conceptions que les obstacles occasionnés par la dite notion.