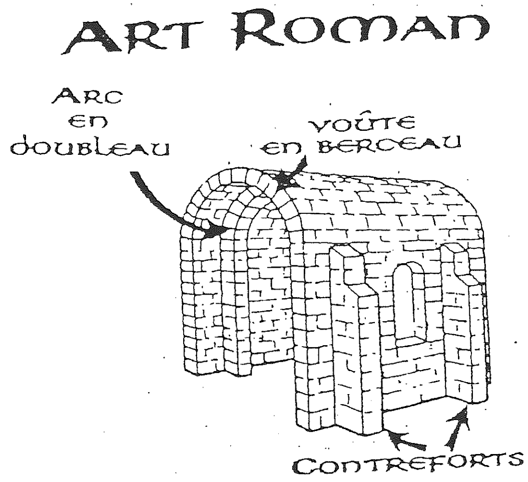
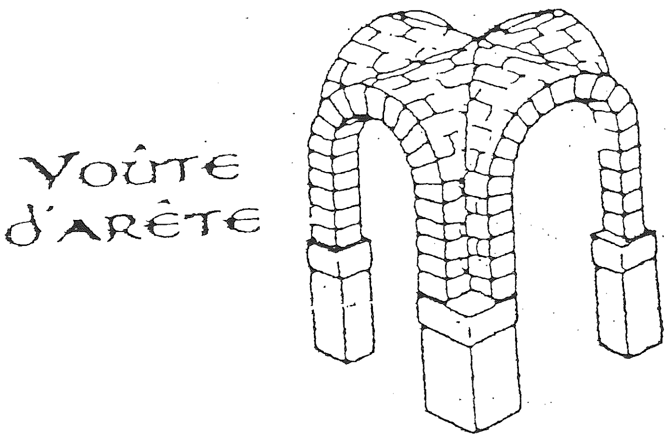
VILHENA, H. (1936), *O professor Doctor Francisco Gomes Teixeira*, Lisboa.





De la Math. Sup. à la classe de 5ème,
en passant par la lecture de textes d'Archimède....

BATHIER-FAUVET Michèle
MENEZ-HALLEZ Maryvonne
IREM Paris VII (France)

Abstract

L'idée de cet atelier est née un lundi matin, lors d'une de nos discussions dans le groupe M : A.T.H. à l'I.R.E.M. de PARIS VII. Je parlais d'un problème posé par Archimède à son ami Eratosthène et qui est aussi un exercice d'oral de l'Ecole des Arts et Métiers : il concerne le calcul du volume de l'intersection de deux cylindres de même rayon, d'axes orthogonaux et concourants. Maryvonne a été très intéressée car elle rentrait d'une visite - entre autres - du château de Falaise avec ses élèves de 5ème; c'est là qu'ils avaient appris que les premières croisées de transept ou voûtes d'arête, étaient des intersections de voûtes en berceau orthogonales, donc de demi-cylindres orthogonaux; elle voulait leur en proposer une construction.

En $5^{\text{ème}}$:

- *Contexte* : nous travaillons dans le cadre d'un projet pluridisciplinaire intitulé "Du roman au gothique"; la partie du programme abordée ici est la représentation de l'espace; elle fut motivée par l'étonnement éprouvé par les élèves en écoutant notre guide dans les salles du château de Falaise.

- *Activités* : il s'est agi dans un premier temps de familiariser les élèves à effectuer des passages d'une réalité perçue à une mathématisation de cette réalité; dans un deuxième temps de construire un objet réel qui permette à la fois une appropriation du nouveau regard engendré par cette mathématisation et l'enrichissement de la perception qui en résulte, et donc de réinventer des procédés de construction. La dernière étape fut la représentation en deux dimensions.

Les constructions de maquettes de voûtes d'arête furent d'abord réalisées par tâtonnement expérimental à l'aide de cylindres en carton (rouleaux de papier toilettes); ensuite une maquette de voûte en berceau fut découpée dans un rouleau pour moquette avec l'aide d'un parent architecte; de même pour la voûte d'arête sur laquelle furent collés des morceaux de sucre à la manière de la pose des pierres de la voûte. Nous eûmes à répondre à de nombreuses interrogations sur la hauteur de la voûte, sur les plans d'intersection des cylindres.

Plusieurs représentations planes furent spontanément proposées par les élèves : le plus souvent en perspective approximativement cavalière, et pour une, en perspective quasi centrale; il y eut aussi deux ou trois tentatives de représentation par projection sur un plan horizontal. Une discussion passionnée mit en évidence les insuffisances de cette projection unique : le déplacement du regard et donc des élèves autour de l'objet conduisit aux projections sur deux plans perpendiculaires.

En Math. Sup. :

- *Contexte* : nous sommes en fin de $2^{\text{ème}}$ trimestre et les techniques de calculs d'intégrales multiples n'ont pas encore été vues; il s'agit pourtant de répondre à une question des élèves : comment fait-on pour trouver le centre de gravité d'une demi-sphère (on en a besoin en physique) ? D'autre part, en cours, nous venons de traiter les courbes paramétrées.

- *Activités* : utilisation de textes d'Archimède, en interaction avec une problématique "moderne" et en passant par des résultats mathématiques pratiques; en effet, un élève de Math. Sup. se laisse difficilement convaincre de l'intérêt de ce qu'il considère comme des "digressions culturelles" (ou bien il "débranche", ou bien il considère qu'il perd son temps); pour l'entraîner sur ce terrain là, il vaut mieux qu'il soit surpris et épaté par ce qu'il découvre; il faut aussi que ça ne dure pas trop longtemps et qu'il en retire de "l'utilisable au concours".

Cette activité, sous une forme moins complète, a été faite en classe.

Comment trouver le centre de gravité d'une demi-sphère, d'une calotte sphérique ?

D'une façon générale, le centre de gravité G d'un solide homogène S est donné par la formule suivante, $V(S)$ étant son volume :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{V(S)}\int\int\int_S \overrightarrow{OP}\,(x,y,z)dxdydz.$$

Si l'on choisit comme origine du repère le centre O de la demi-sphère posée sur le plan

xOy, pour des raisons de symétrie, son centre d'inertie est sur Oz et sa cote est :

$$z_G=\frac{1}{V(S)}\int\int\int_S zdxdydz.$$

Il n'est bien sûr pas question de faire un cours théorique pour définir les notions d'ensembles cubables et d'intégrales multiples, ni d'énoncer le théorème de Fubini ; on peut cependant faire saisir quelques rudiments efficaces de ces techniques.

a) Calcul du volume de la demi-sphère (Fig. 1)

On sait que $V(S) = \int\int\int_S dxdydz.$

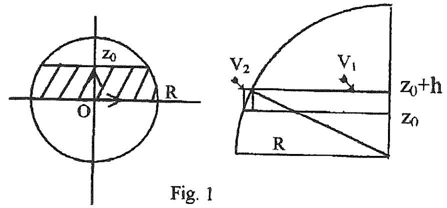


Fig. 1

Pour tout z_0 de $[0, R]$, soit $V(z_0)$ le volume de la portion de sphère hachurée. On a donc, $V(S) = V(R)$.

Soit $h > 0$, on a alors : $V_1 < V(z_0+h)-V(z_0) < V_1+V_2$, avec $V_1 = h\times[R^2-(z_0+h)^2]\times\pi$ et $V_1 + V_2 = h \times (R^2 - z_0^2) \times \pi$.

D'où, $\pi \times (R^2 - (z_0 + h)^2) < \frac{V(z_0+h)-V(z_0)}{h} < \pi \times [R^2 - z_0^2]$, et, quand h tend vers zéro, on peut en déduire que V est dérivable à droite en z_0 et que : $V_d'(z_0) = \pi \times (R^2 - z_0^2)$.

Si $h < 0$, on montre de la même façon que V est dérivable à gauche en z_0, et que

$$V_g'(z_0) = \pi \times (R^2 - z_0^2).$$[1]

V est donc dérivable sur $[0, R]$, et $\forall z \in [0, R], V'(z) = \pi \times (R^2 - z^2)$. Remarquons que $V'(z) = S(z), S(z)$ étant l'aire du disque $D(z)$, intersection de la sphère et du plan d'équation $Z = z$, c'est-à-dire que $S(z) = \int\int_{D(z)} dxdy$.

On a donc, $V(z_0) = \int_0^{z_0} V'(z)dz = \int_0^{z_0} S(z)dz = \pi \times z_0 \times (R^2 - \frac{z_0^2}{3})$.

Comme $V(S) = V(R)$ on a $V(S) = 2\pi \times \frac{R^3}{3}$.

b) Recherche du centre de gravité de la demi-sphère

$$\int\int\int_S zdxdydz = \int_0^R z\int\int_{D(z)} dxdydz = \int_0^R zS(z)dz = \int_0^R z\times\pi\times(R^2-z^2)dz = \pi\times\frac{R^4}{4}.$$

Comme $V(S) = \frac{2}{3} \times \pi \times R^3$ on a $Z_G = \frac{3}{8}R$.

On peut comparer ce résultat avec celui énoncé (et établi) par Archimède dans la proposition 6 de *La Méthode : "Dans tout hémisphère, le centre de gravité est situé sur son axe, en*

[1] Cette idée de découpage en chips d'un volume peut être suggérée à des élèves de 5ème en leur proposant une construction de la voûte avec des feuilles de carton ou des briques de LEGO.

un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie située du côté de la surface de l'hémisphère à la partie restante soit égal au rapport de cinq à trois."[2]

c) Déterminer le centre de gravité G' d'une calotte sphérique C (Fig. 2)

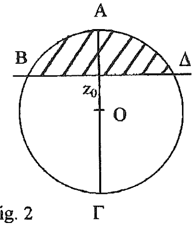


Fig. 2

$$V(C) = \int\int\int_C dxdydz = \int_{z_0}^{R} S(z)dz$$
$$= \int_{z_0}^{R} \pi \times (R^2 - z^2)dz = \frac{\pi}{3} \times (R - z_0)^2 \times (2R + z_0)$$

et

$$\int\int\int_C zdxdydz = \int_{z_0}^{R} zS(z)dz = \int_{z_0}^{R} \pi\times z\times(R^2-z^2)dz = \frac{\pi}{4}\times(R^2-z_0^2)^2,$$

d'où, comme

$$Z_{G'} = \frac{1}{V(C)}\times\int\int\int_C zdxdydz \text{ on a } Z_{G'} = 3 \times 4\times\frac{(R+z_0)^2}{2R+z_0}.$$

La proposition 9 de *La Méthode d'Archimède* (Fig. 3)

Les Grecs, plus de deux siècles avant J.-C., savaient placer le centre de gravité d'une calotte sphérique, comme le montre l'énoncé suivant :

"Dans tout segment de sphère, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, en un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie du côté du sommet du segment à la partie restante soit égal au rapport entre la somme de l'axe du segment et du quadruple de l'axe du segment opposé, d'une part, et la somme de l'axe du segment et du double de l'axe du segment opposé."[3]

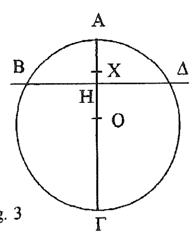


Fig. 3

Archimède assure donc que le centre de gravité de la calotte $AB\Delta$ est le point X de ΓA tel que : $\frac{AX}{XH} = \frac{AH+4\Gamma H}{AH+2\Gamma H}$.
En utilisant un calcul analytique moderne et en munissant l'axe ΓA d'un repère d'origine O, son milieu, de telle sorte que

$$\Gamma(-R), A(R), H(z_0), \text{et } X(\alpha),$$

cette égalité se traduit par :

$$\frac{R-\alpha}{\alpha-z_0} = \frac{R-z_0+4(R+z_0)}{R-z_0+2(R+z_0)} = \frac{5R+3z_0}{3R+z_0}.$$

D'où, par un calcul élémentaire : $\alpha = \frac{3}{4}\frac{(R+z_0)^2}{2R=z_0}$.
On retrouve bien le résultat précédent.

***La Méthode*, la lettre à Eratosthène** (cf. annexe 1)

Comment Archimède a-t-il bien pu établir une telle formule alors qu'il ne disposait pas du calcul intégral ? Il nous l'explique dans le traité de *La Méthode*[4].

Le seul manuscrit de ce traité qui nous soit parvenu, et qui a été découvert en 1907, a été

[2]ARCHIMÈDE, *La Méthode*, tome III, p. 102.

[3]Ibid., pp. 108-109.

[4]Le titre complet est : *La méthode d'Archimède relative aux propositions mécaniques, à Eratosthène.*

sous les feux de l'actualité l'été dernier : la Walters Art Gallery[5] à Baltimore, l'a exposé au public du 20 juin au 5 septembre 1999.

Il était une fois..., au XII$^{\text{ème}}$ siècle, dans un monastère de Constantinople, un moine qui avait besoin de parchemin pour transcrire des oraisons destinées à la guérison des malades.

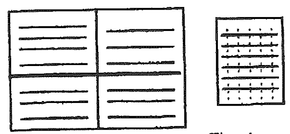


Fig. 4

Il en avait bien un sous la main, qui contenait un traité de mathématiques en grec. On le lave; on le coupe en deux dans le sens de la largeur afin d'obtenir plus de feuillets; et on réécrit dessus après avoir tourné les anciennes pages à 90° (Fig. 4)....

Sa transformation en livre de prières a sûrement été un heureux épisode pour lui car, après, cet important document religieux a été gardé précieusement dans les monastères. Il semble que, du XV$^{\text{ème}}$ siècle au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il ait été conservé au monastère de Mar Saba, à quelques encablures à l'Est de Bethléem. Il retourna ensuite à Contantinople où le savant danois J.L. Heiberg -qui avait déjà publié en 1880 la première édition critique des œuvres d'Archimède connues à l'époque- le découvrit au monastère du Saint Sépulcre. Il avait eu vent de son existence en consultant un inventaire. Avec le temps, l'encre de la première écriture était remontée et révélait la trace d'un traité mathématique. Heiberg reconnut de quoi il s'agissait. Il se remit au travail, retranscrivit et traduisit tout ce qu'il put; entre 1913 et 1915, il fera une seconde édition critique de l'œuvre d'Archimède. Mais la tâche était difficile : il n'utilisait qu'une loupe et la lumière naturelle. De plus, comme il n'avait pas désossé le manuscrit, le texte sous la reliure lui resta inaccessible; il a donc été conduit à reconstituer les passages manquants ou illisibles.

Après la dernière étude, en 1909, on perd la trace du palimpseste; il refait surface à Paris, en 1920, dans une collection privée. Il y reste jusqu'à sa vente, chez Christies en octobre 1998, à un collectionneur privé qui souhaite rester anonyme. Mais W. Noël, le conservateur des manuscrits de la Walters Art Gallery, se lance à sa recherche, le trouve et parvient à négocier le droit d'exposer la merveille au public et celui de l'étudier...

Outre *La Méthode*, Heiberg avait découvert le *Traité des Corps Flottants* et des bribes du *Stomachion* dans ce manuscrit. Il semblerait que les premiers examens utilisant des méthodes modernes d'étude de palimpsestes aient permis de repérer six traités. Les prochaines années nous en apprendront sûrement beaucoup sur Archimède...

La Méthode est un texte d'une importance capitale : on peut presque dire que c'est le testament scientifique d'Archimède. La lettre d'introduction à son ami et pair, Eratosthène[6] (vers 276-194 av. J.-C.), que vous trouverez en annexe à cet article, est on ne peut plus significative. La lecture de cette annexe 1 donne une bonne idée de la structure habituelle des traités d'Archimède qui ne s'adresse qu'à ses pairs : il commence par une lettre d'introduction à son correspondant; viennent après les lemmes ou propriétés utiles à la compréhension de ce qui suit et, le plus souvent, établis dans des traités antérieurs; il passe ensuite à la rédaction propre-

[5]La Walters Art Gallery possède l'une des plus belles collections au Monde de manuscrits enluminés.

[6]ERATOSTHÈNE, connu de nos jours pour son "crible" qui permet de trouver les nombres premiers dans une liste de nombres, était alors le conservateur en chef de la Grande Bibliothèque d'Alexandrie. Il fut aussi précepteur des enfants royaux. Quand on saura que cette Bibliothèque était celle du *Mousséion*, institution royale abritée dans de somptueux bâtiments près des palais royaux et qui pensionnait les plus grands savants, on comprendra mieux l'importance du personnage.

ment dite des propositions et de leurs démonstrations (il y en a quinze dans *La Méthode*). Dans d'autres traités, entre la lettre amicale et les lemmes, il intercale des définitions et des postulats.

Travail demandé : 1) Lire les dix-neuf premières lignes de l'annexe 1, puis :

- **Faire la figure décrite.**
- **Ecrire la formule de volume énoncée.**
- **Vérifier, en faisant un calcul analytique moderne, qu'Archimède ne s'est pas trompé.**

2) Lire les neuf lignes suivantes et répondre aux mêmes questions.

Dans cette lettre donc, Archimède annonce la démonstration de deux résultats déjà soumis à la sagacité d'Eratosthène, que nous noterons respectivement théorèmes 1 et 2 , et qu'en langage moderne nous pouvons énoncer :

Le volume de l'onglet cylindrique vaut 1/6 de celui du cube.

Le volume de l'intersection de deux cylindres d'axes orthogonaux et concourants, inscrits dans un cube, est égal aux 2/3 de celui de ce cube.

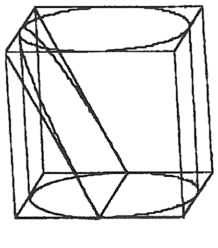


Fig. 5

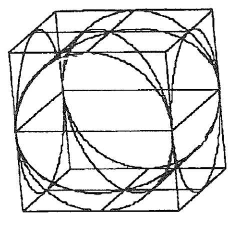


Fig.6

Ainsi, une figure partiellement curviligne *"est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans"*[7]. Voilà sans doute pourquoi Archimède estime que *"ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement"*[8]; il y pressentait probablement un pas vers la résolution du problème de la quadrature du cercle, une constructibilité d'un "rectiligne" ou d'un "plat" équivalent à du "rond".

"J'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la

[7] ARCHIMÈDE, *La Méthode*, tome III, p. 83.

[8] Ibid. p. 83.

recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance"[9], écrit-il ensuite.

En substance, cette méthode "ne vaut pas", mais "elle marche" parce qu'elle permet d'avoir l'intuition d'un résultat; ce qui est particulièrement important car, si la méthode "par la géométrie"[10] est une méthode démonstrative parfaitement convaincante, elle n'a, elle, aucun pouvoir heuristique : il faut connaître le résultat à l'avance pour pouvoir le prouver ainsi. C'est pourquoi Archimède rend hommage à Démocrite (vers 460-370 av. J.-C.), occupé lui aussi de problèmes de calculs de volumes, qui énonça des résultats qu'il n'établit pas, mais qu'Eudoxe (vers 408-vers 355 av. J.-C.) put ensuite démontrer : une pyramide a un volume égal au tiers de celui du prisme de même base et de même hauteur (c'est la proposition XII-7 des *Éléments* d'Euclide), et un cône a un volume égal au tiers de celui du cylindre de même base et de même hauteur (c'est la proposition XII-10 des *Éléments* d'Euclide). Archimède inscrit donc clairement son travail dans le prolongement de celui de mathématiciens qui l'ont précédé.

Et il sait à quel point sa découverte est importante : "*...je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit*"[11].

La Méthode, **proposition 1 : la quadrature de la parabole** (cf. annexe 2)

La démonstration de la formule donnant le volume de l'onglet cylindrique, difficile, est faite de deux façons différentes dans ce traité, en propositions 12-13 d'une part et 14-15 d'autre part. Celle de la formule donnant le volume de l'intersection des deux cylindres n'est pas dans la portion de traité qui nous est parvenue; on pourra cependant la déduire assez simplement de la précédente. Pour comprendre le principe de cette "méthode", étudions la première proposition, suivant ainsi la démarche pédagogique et heuristique d'Archimède qui nous dit : *"Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique..."*[12].

Travail préparatoire :

1)

- **Quel est l'énoncé de la proposition 1 ?**
- **Lire les 12 premières lignes et faire la figure correspondante.**

N.B. Actuellement, on appelle diamètre d'une conique, le lieu des milieux des cordes de direction donnée; il est inclus dans une droite (ce que nous allons établir dans les questions suivantes).

[9] ARCHIMÈDE, *La Méthode*, tome III, pp. 83-84.

[10] Cette méthode sera aussi appelée méthode d'exhaustion, méthode "par compression", "par double réduction à l'absurde", "apagogique"; elle sera utilisée jusqu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle et Pascal, Descartes... parlent de la "méthode des Anciens" lorsqu'ils y font référence.

Le nom de "méthode d'exhaustion" est dû à Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) qui l'emploie dans son *Opus geometricum Quadraturae circuli et sectionum coni* (i.e. *Traité géométrique de la Quadrature du cercle et des sections coniques*) (1647).

Pour avoir plus d'informations concernant cette méthode, le lecteur pourra se référer à l'article de J. P. Le Goff "*De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)*" paru dans les actes du colloque INTER-IREM de Besançon des 12 et 13 mai 1989 (pp. 196-220). Il pourra aussi consulter le numéro 1 de *Mnémosyne* d'avril 1992.

[11] Ibid. p. 84.

[12] Ibid, p. 84.

2) Résultats préliminaires concernant la parabole

a) Soit (P) une parabole; elle admet donc un axe de symétrie $\Im$. Γ et B sont deux points quelconques de (P), et A est le point de (P) tel que $A\Gamma$ soit parallèle à la tangente à (P) en B.

La parallèle à $\Im$ passant par B coupe $A\Gamma$ en Δ.

- **Que peut-on dire de Δ si B est sur $\Im$?**
- **Le résultat subsiste-t-il pour un choix quelconque de B ?**
- **Que peut-on conclure de ce qui précède ?**

N.B.1 Soit $f : x \to ax^2 + bx +$. En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[\alpha, \gamma]$ où $A(\alpha, f(\alpha))$ et $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$, retrouver le résultat précédent.

N.B.2 Ce qu'Archimède appelle "diamètre" d'une parabole, c'est son axe de symétrie; pour tous les autres "diamètres" au sens actuel, il parle de "*parallèle au diamètre*".

b) La tangente à (P) en Γ coupe $B\Delta$ en E. Que peut-on dire du point E ?

N.B. Ce résultat est celui de la proposition 2 du traité *La quadrature de la parabole* d'Archimède.

c) Soit ΞM une parallèle à $B\Delta$. Elle coupe $A\Gamma$ en Ξ, (P) en O et ΓE en M. Montrer que : $\dfrac{\Gamma A}{A\Xi} = \dfrac{M\Xi}{\Xi O}$.

On pourra se placer dans un repère de la forme : $(B$, tangente à (P) en $B, B\Delta)$[13].

3) Facultatif : compléments sur le diamètre d'une conique

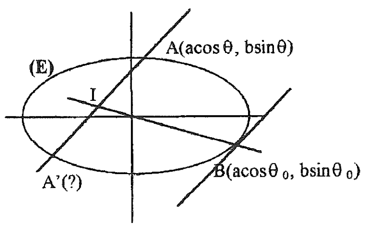
a) Dans un repère rapporté à ses asymptotes, une hyperbole admet pour équation $xy = k$.

Quels sont les diamètres de cette hyperbole ?

b) On pourra mettre en évidence les diamètres d'une ellipse par une démonstration analytique utilisant une représentation paramétrique de cette ellipse.[14]

[13] La note 16 en fournit une autre démonstration, accessible à un élève de Terminale.

[14] Cette démonstration peut être intéressante pour un élève de Terminale car elle est un exemple d'application pratique des formules de trigonométrie.



(E) admet une équation paramétrique de la forme :

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta.$

La tangente à (E) en B est donc dirigée par $\vec{V}(-a\sin\theta_0, b\cos\theta_0)$. Si $A'(a\cos\theta', b\sin\theta')$, $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\vec{V}$

$\Longleftrightarrow \cos(\theta' - \theta_0) = \cos(\theta - \theta_0)$

$\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}\ : \theta' - \theta_0 = \theta - \theta_0 + 2k\pi \quad (1)$

ou $\theta' - \theta_0 = -(\theta - \theta_0) + 2k\pi \quad (2)$

(1) donne les coordonnées de A.

(2) donne $A'\ (a\cos(2\theta_0 - \theta), b\sin(2\theta_0 - \theta))$.

Le milieu I de $[AA']$ a donc pour coordonnées : $(a\cos\theta_0\cos(\theta - \theta_0), b\sin\theta_0\cos(\theta - \theta_0))$.

Donc, $\overrightarrow{OI} = \cos(\theta - \theta_0)\ \overrightarrow{OB}$. Les milieux des cordes $[AA']$ ayant la direction celle de la tangente à (E) en B sont donc situés sur la droite OB.

On rappelle cependant qu'une ellipse peut être vue comme déduite d'un cercle par une affinité qui est, comme chacun le sait, une application affine. En utilisant cette remarque, trouver et prouver très rapidement quels sont les diamètres d'une ellipse.

Nous pouvons maintenant comprendre la démonstration d'Archimède.

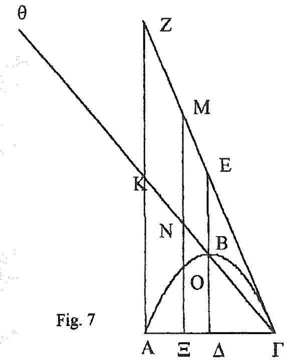


Fig. 7

On construit Θ tel que K soit le milieu de $\Theta\Gamma$ vu comme un levier de point d'appui K (Fig. 7).

La méthode consiste à montrer que le segment $AB\Gamma$ déplacé en[15] Θ équilibre, autour de K, le triangle $AZ\Gamma$ restant en place. On en déduira que :

segment $(AB\Gamma) = \frac{1}{3}$ triangle $(AZ\Gamma)$.

D'où le résultat par des considérations élémentaires sur les triangles $AB\Gamma$ et $AZ\Gamma$: en effet, l'aire du triangle $AZ\Gamma$ vaut le quadruple de celle du triangle $AB\Gamma$.

Soit $M\Xi$ une sécante parallèle à ΔE.

On a : $\frac{\Gamma A}{A\Xi} = \frac{M\Xi}{\Xi O}$[16]. D'où $\frac{M\Xi}{\Xi O} = \frac{\Theta K}{KN}$ car $\frac{\Gamma A}{A\Xi} = \frac{\Gamma K}{KN}$ et $\Gamma K = K\Theta$.

N étant le milieu de $M\Xi$, il est le centre de gravité du segment $M\Xi$, donc le segment $O\Xi$ déplacé de façon que Θ soit son milieu, équilibre par rapport à K, le segment $M\Xi$ restant en place[17]. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les parallèles $M\Xi$ à $E\Delta$,

[15] "*Le segment $AB\Gamma$ déplacé en Θ* " signifie que ce segment (c'est-à-dire la portion de plan comprise entre la droite et l'arc de parabole $AB\Gamma$) est déplacé de façon que son centre de gravité coïncide avec Θ, ou soit à l'aplomb de Θ.

[16] • Ce résultat a été établi dans le travail préliminaire.

• Voici l'argumentation d'Archimède : d'après la proposition 5 de *La Quadrature de la parabole* : $\frac{O\Xi}{OM} = \frac{A\Xi}{\Xi\Gamma}$, donc $\frac{\Xi T}{A\Xi} = \frac{OM}{\Xi O}$ et on peut en déduire que $\frac{(A\Xi + \Xi\Gamma)}{A\Xi} = \frac{(\Xi O + OM)}{\Xi O}$, soit $\frac{A\Gamma}{A\Xi} = \frac{M\Xi}{\Xi O}$.

• Pour un élève de Terminale : montrons que $\frac{O\Xi}{OM} = \frac{A\Xi}{\Xi\Gamma}$.

Pour cela, considérons la parabole (P) d'équation $y = ax^2$, et les points $A(\alpha)$ et $\Gamma(\gamma)$. Soit Ξ le point de la corde $[\Gamma A]$ d'abscisse δ, O le point de (P) d'abscisse δ et M le point d'intersection de la droite ΞO et de la tangente à (P) en Γ.

On a : $\Xi(\delta, a(\alpha + \gamma)\delta - a\alpha\gamma)$, $O(\delta, a\delta^2)$, $M(\delta, \gamma a(2\delta - \gamma))$.

Si A'' et Γ'' ont même abscisse que A et Γ respectivement, et même ordonnée que Ξ, on peut écrire :

$$\frac{A\Xi}{\Xi\Gamma} = \frac{A''\Xi}{\Xi\Gamma''} = \frac{\delta - \alpha}{\gamma - \delta}.$$

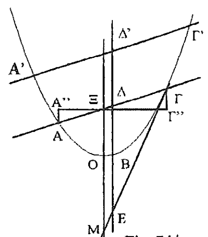


Fig. 7 bis

Or $\frac{O\Xi}{OM} = \frac{O\Xi}{MO} = \frac{a\delta(\gamma+\alpha) - a\alpha\gamma - a\delta^2}{a\delta^2 - 2a\delta\gamma + a\gamma^2} = \frac{(\delta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\delta-\gamma)^2} = \frac{\delta-\alpha}{\gamma-\delta}$. D'où le résultat.

[17] D'après ARCHIMÈDE, *De l'Equilibre des Figures Planes I*, tome II, proposition 6 et proposition 7.

...toutes les parallèles à $E\Delta$ menées dans le triangle $ZA\Gamma$ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point K. Et du moment que le triangle ΓZA est constitué par les segments de droites menés dans le triangle ΓZA, et le segment $AB\Gamma$ constitué par les segments de droites pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞO, le triangle $ZA\Gamma$ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre de gravité Θ, l'équilibre se faisant par rapport au point K, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point K[18].

La position du centre de gravité du triangle $AZ\Gamma$ étant connue[19], on a donc $\frac{\text{segment}(AB\Gamma)}{\text{triangle}(AZ\Gamma)} = \frac{1}{3}\frac{\Gamma K}{K\Theta} = \frac{1}{3}$.

La Méthode, **propositions 12 et 13 : volume de l'onglet cylindrique, un changement de poids**

Dans ces propositions, Archimède va, selon ses termes, *"faire voir"*[20] que le théorème 1 (volume de l'onglet cylindrique) est vrai avant d'en faire une démonstration par la méthode d'exhaustion en proposition 15. La proposition 14 établit aussi le résultat, autrement.

a) Proposition 12. La rédaction est un peu différente de celle des propositions précédentes : Archimède décrit une figure, développe un raisonnement et il faut attendre les dernières lignes pour savoir où il voulait en venir. C'est une démonstration qui paraît plus spontanée; par exemple, il ne considère un levier qu'au moment où il s'avère utile dans la réflexion.

La figure 8-a n'est pas dans le texte original, mais elle donne sous forme condensée la description de plus d'une page des constructions faites et des notations utilisées.

N.B. : Dans le texte original, N est employé deux fois en des sens différents, c'est pourquoi, afin d'éviter toute confusion, le N archimédien de la figure 8-b sera remplacé par N'. Le lecteur qui se référera aux textes remarquera que, en fait, $I = X$, et $E = \Pi$[21].

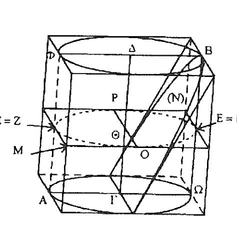


Fig. 8-a

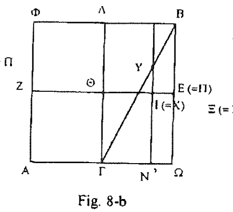


Fig. 8-b

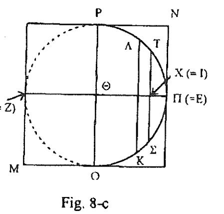


Fig. 8-c

On coupe le demi-cylindre de section droite OEP par un plan vertical $(\Im)$ parallèle à son axe et parallèle à OP. La trace de l'intersection de ce plan $(\Im)$ et du demi-cylindre dans le plan ME (plan qui est parallèle à la base du cylindre et passe par le milieu de son axe (Fig.8-c)) est ΣT; $(\Im)$ coupe donc :

[18] ARCHIMÈDE, tome III, pp. 87-88.

[19] *Equilibre des Figures Planes I*, proposition 14 et *La Quadrature de la parabole, proposition 6*.

[20] Ibid, p.114.

[21] Ces erreurs peuvent cependant être le fait du copiste; à moins qu'il ne s'agisse de conventions de notations : le même point étant noté différemment suivant la section plane dans laquelle il est situé.

- le demi-cylindre suivant un rectangle de base ΣT et de hauteur $B\Omega$.
- l'onglet suivant un rectangle de même base ΣT et de hauteur YN (Fig.8-b).

On a donc : $\frac{E\Theta}{\Theta I} = \frac{\Omega\Gamma}{\Gamma N} = \frac{B\Omega}{YN} = \frac{\text{rectangle découpé du cylindre}}{\text{rectangle découpé de l'onglet}}$.

Or $E\Theta = \Theta\Xi$, donc $\frac{\Theta\Xi}{\Theta I} = \frac{\text{rectangle découpé du cylindre}}{\text{rectangle découpé de l'onglet}}$.

Donc, le rectangle du demi-cylindre, de centre de gravité I, restant en place, est équilibré autour de Θ, par le rectangle de l'onglet déplacé en Ξ.

En conséquence, le demi-cylindre, restant en place, est équilibré autour de Θ, par l'onglet déplacé en Ξ.

Archimède s'est ainsi débarrassé d'une des inconnues du système : le centre de gravité de l'onglet. Mais il lui en reste encore trop pour pouvoir conclure : le centre de gravité du demi-cylindre, le volume de l'onglet, le volume du demi-cylindre. Il va régler le problème en proposition 13 par une substitution de poids.

b) Proposition 13

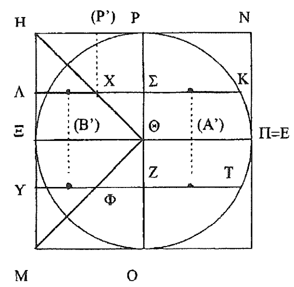


Fig. 9

N.B. Nous avons conservé les notations du texte archimédien; on revient à la même coupe que celle faite à la figure 8-c (N retrouve la signification qu'il avait au départ et n'est donc pas à confondre avec le point que nous avons noté N'); mais les lettres $\Lambda, X, \Sigma, K, T, Z, \Phi$ ont une autre signification que celles qu'elles ont eu jusqu'à présent.

L'idée est d'équilibrer, autour de Θ, le demi-cylindre par le prisme triangulaire de base droite $H\Theta M$ et de hauteur celle du cube; ce prisme triangulaire, substitué au demi-cylindre dans l'équilibre précédent (proposition 12) donne un système qui n'a plus qu'une seule inconnue : le volume de l'onglet cylindrique.

Des plans orthogonaux à PO rencontrent cette droite en deux points Σ et Z symétriques par rapport à Θ et découpent;

– dans le prisme triangulaire, des rectangles de bases ΛX et $Y\Phi$ et de hauteur celle du cylindre, que nous noterons, nous, $\{\Lambda X\}$ et $\{Y\Phi\}$.

– dans le demi-cylindre, deux rectangles de bases ΣK et ZT et de hauteur celle du cylindre.

La démonstration livrée par le manuscrit s'arrête là. En notes, C. Mugler[22] donne la reconstitution "à la manière de ..." proposée par Heiberg. Il considère deux points A' et B' qui ne sont pas sur la figure originale et que je note pour cette raison (A'), (B'). A' est à l'intersection de ΘE et du segment d'extrémités le milieu de ΣK et le milieu de ZT; A' est donc le centre de gravité de l'ensemble des rectangles $\{\Sigma K\}$ et $\{ZT\}$. De même, B' est le centre de gravité de l'ensemble des rectangles $\{\Lambda X\}$ et $\{Y\Phi\}$.

[22] C. Mugler a établi et traduit ces textes pour Les Belles lettres, édition à laquelle nous nous référons ici.

On a $\Lambda X = Y\Phi$ et $\Sigma K = ZT$, de plus les parallélogrammes considérés ont même hauteur, d'où

$$\frac{\{\Sigma K\}+\{ZT\}}{\{X\Lambda\}+\{Y\Phi\}} = \frac{\Sigma K}{\Lambda X} = \frac{\Sigma K}{\Sigma P}\text{[23]} = \frac{\Sigma K^2}{\Sigma P \times \Sigma K} = \frac{\Sigma P \times \Sigma O}{\Sigma P \times \Sigma K}\text{[24]} = \frac{\Sigma O}{\Sigma K}$$
$$= \frac{\Sigma P + 2\Sigma\Theta}{\Sigma K} = \frac{\Lambda X + 2X\Sigma}{\Sigma K} = \frac{\frac{1}{2}\Lambda X + X\Sigma}{\frac{1}{2}\Sigma K} = \frac{\Theta B'}{\Theta A'}.$$

Or B' est le centre de gravité de $\{\Lambda X\} + \{Y\Phi\}$ et A', celui de $\{\Sigma K\} + \{ZT\}$, d'où le résultat, l'ensemble de ces rectangles constituant respectivement le prisme triangulaire et le demi-cylindre.

N.B. : On ne peut qu'admirer l'astucieuse utilisation de la symétrie de la figure.

Un résumé de ce raisonnement pourra le faire mieux comprendre et apprécier toute l'ingéniosité d'Archimède ici mise en œuvre.

Etape 1.

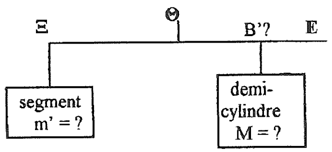


Fig. 10-a

Etape 2.

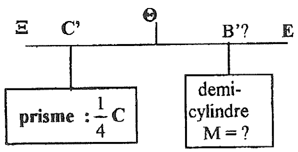


Fig. 10b

Etape 3. Dans le premier équilibre, on peut donc substituer au demi cylindre de masse et de centre de gravité inconnus, le prisme, de masse et de centre de gravité connus. Alors, il ne restera plus qu'une seule inconnue : la masse m' de l'onglet cylindrique.

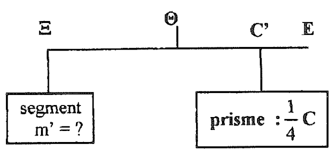


Fig. 10-c

Une traduction moderne de ce dernier équilibre donne : $\Theta\Xi \times m = \Theta C' \times \frac{1}{4}C$.
Or, $\Theta C' = \frac{2}{3}\Theta E = \frac{2}{3}\Theta\Xi$, d'où :
$m = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}C = \frac{1}{6}C$.

[24] $\Lambda X = XP' = \Sigma P, HX$ étant une diagonale du carré $\Lambda XP'H$.

[24] Le triangle PKO est rectangle en K, de hauteur $K\Sigma$, donc : $\Sigma K^2 = \Sigma P \times \Sigma O$.

Comment déduire la proposition 2 de la proposition 1 ?

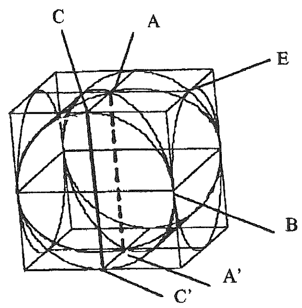


Fig. 11

Pour des raisons de symétrie, le volume V cherché, vaut 8 fois celui, noté V_1, de la portion d'espace comprise entre les plans ACC', ABA', CBC' et le cylindre d'axe parallèle à AC. Le parallélépipède rectangle $CAECA'$ ayant une base carrée et admettant le plan ABC' pour plan de symétrie, la proposition précédente assure que :
$V_1 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times C$,
c étant le volume du cube.

D'où $V = 8 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times C = \frac{2}{3}C$.

Bibliographie

ARCHIMEDE, T.II, *La Quadrature de la parabole*, T.III, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres, collection G. Budé, Paris, 1971.

"Archimède", *Les Cahiers de Science & Vie*, collection Les Pères Fondateurs de la Science, hors série n°18, Excelsior Publications, Paris, déc. 1993.

EUCLIDE, *Les Œuvres d'Euclide*, traduction de F. Peyrard, Librairie A. Blanchard, Paris, réédition de 1993.

INTER-IREM HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES, Actes du $7^{\text{ème}}$ colloque les 12 et 13 mai 1989, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 1989, pp. 197-218.

Jeu de 54 cartes : Jeu Roman (Musée de Cluny), Editions Dusserre, Paris.

Mnémosyne, n°1 (avril 1992), n°14 (juin 1998), Publication de l'IREM Université Denis Diderot Paris VII, Groupe M.A.T.H..

Auteur NOM Prénom, titre de l'article, *American scientist*, Vol. 87, Juillet-Août 1999, pp. 316-318.

Annexe 1

Textes extraits de ARCHIMÈDE, T.III, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres.

LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE RELATIVE AUX PROPOSITIONS MÉCANIQUES, A ÉRATOSTHÈNE

Archimède à Ératosthène, prospérité !

Je t'ai envoyé antérieurement certains théorèmes que j'avais découverts, en me bornant à en rédiger les énoncés et en t'invitant à trouver les démonstrations que je n'avais pas encore indiquées ; les énoncés des théorèmes envoyés étaient les suivants ; premièrement : si on inscrit dans un prisme droit, ayant pour base un parallélogramme[1], un cylindre ayant ses bases situées dans les parallélogrammes[1] opposés et (sc. certaines de) ses génératrices dans les plans restants du prisme[2], et si on mène un plan par le centre du cercle de base du cylindre et par un des côtés du carré situé dans le plan opposé, le plan ainsi mené découpera du cylindre un segment compris entre deux plans et la surface du cylindre, l'un des plans étant le plan mené, l'autre celui qui contient la base du cylindre, et la surface (sc. cylindrique) étant comprise entre les plans indiqués, et le segment découpé du cylindre est équivalent à la sixième partie du prisme entier. L'énoncé du second théorème était le suivant : si on inscrit dans un cube un cylindre ayant ses bases situées dans des parallélogrammes[1] opposés, et sa surface

1. Le contexte montre qu'il s'agit d'un carré.
2. Le cylindre est donc tangent aux quatre faces du prisme.

tangente aux quatre plans restants, et si on inscrit dans le même cube un autre cylindre, ayant ses bases dans deux autres parallélogrammes et sa surface tangente aux quatre plans restants, la figure comprise entre les surfaces des cylindres et située à l'intérieur des deux cylindres est équivalente aux deux tiers du cube entier. Mais ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement ; car dans ceux-là nous avons comparé les volumes de figures, comme les paraboloïdes, les hyperboloïdes et les ellipsoïdes de révolution, et les segments de ces figures, à des volumes de cônes et de cylindres, mais aucune de ces figures n'a été trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans, alors que chacune de ces figures, comprises entre deux plans et des surfaces cylindriques, est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans.

Ce sont donc les démonstrations de ces théorèmes que je t'envoie, rédigées dans ce livre.

M'apercevant, comme je l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquête mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas suceptible de démonstrations ;

car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. Pour cette raison, de ces propositions sur le cône et la pyramide, dont Eudoxe fut le premier à trouver la démonstration, en particulier des théorèmes affirmant que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme, qui ont même base et même hauteur, on doit attribuer une part notable à Démocrite, qui le premier a formulé l'énoncé au sujet de la figure indiquée sans en donner une démonstration. Or il m'arrive que, aussi pour les propositions que je vais exposer maintenant, la découverte m'est venue de la même manière que pour les propositions précédentes ; aussi ai-je voulu rédiger et publier cette méthode, à la fois parce que j'en ai parlé antérieurement[1] et que j'ai voulu éviter de paraître à certains avoir proféré de vaines paroles, et parce que je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit.

Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur, ensuite une à une les propositions qui ont été examinées de la même manière. La fin du livre sera consacrée aux démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'avais envoyé les énoncés antérieurement.

Lemmes

1. Si on retranche une grandeur d'une grandeur, et si le même point est centre de gravité à la fois de

1. Cf. *Quadr. parab.*, fin de la lettre à Dosithée.

la grandeur entière et de la grandeur retranchée, ce même point est le centre de gravité de la grandeur qui reste.

2. Si une grandeur est retranchée d'une grandeur sans que le même point soit centre de gravité à la fois de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur le prolongement de la droite joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la partie retranchée, à l'extrémité d'un segment découpé dont le rapport au segment compris entre les centres de gravité indiqués est égal au rapport entre le poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante[1].

3. Si les centres de gravité d'un nombre aussi élevé qu'on voudra de grandeurs sont situés sur la même droite, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera, lui aussi, situé sur la même droite[2].

4. Le centre de gravité de tout segment de droite est le point qui divise le segment en deux parties égales[3].

5. Dans tout triangle le centre de gravité est le point d'intersection des droites menées des sommets du triangle aux milieux des côtés[4].

6. Dans tout parallélogramme le centre de gravité est le point de rencontre des diagonales[5].

7. Le centre de gravité d'un cercle est le centre même du cercle.

8. Dans tout cylindre le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

9. Dans tout prisme le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

10. Dans tout cône le centre de gravité est situé sur l'axe, en un point qui divise l'axe de manière que le segment situé du côté du sommet soit triple du segment restant.

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
2. Cf. *ibid.* I, 4 ; I, 5 ; II, 2.
3-5. Cf. notes complémentaires.

Annexe 2

[...]

1.

Soit le segment ABΓ compris entre la droite AΓ et la parabole ABΓ ; divisons AΓ en deux parties égales par le point Δ, menons la parallèle ΔBE au diamètre et les droites AB et BΓ joignant B à A et à Γ.

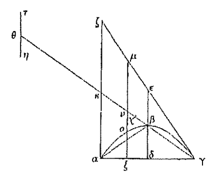


Fig. 121

Je dis que le segment ABΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle ABΓ.

Menons des points A et Γ la droite AZ parallèle à ΔBE et la droite ΓZ tangente au segment et prolongeons ΓB jusqu'au point K ; soit ΓK égal à KΘ. Imaginons que ΓΘ soit un levier de centre K, et choisissons une parallèle MΞ à EΔ.

Dès lors, comme ΓBA est une parabole[1], que ΓZ est une tangente et que ΓΔ est mené d'une manière ordonnée, EB est égal à BΔ, comme cela a été démontré dans les *Eléments*[2] ; pour cette raison, et parce que ZA et MΞ sont parallèles à EΔ, MN est égal[3] à NΞ et ZK égal à KA. Et comme ΓA est à AΞ comme MΞ est à ΞO, comme cela est démontré dans un lemme[4], que ΓA est à AΞ comme ΓK est à KN, et que, enfin, ΓK est égal à KΘ, le rapport de ΘK à KN est égal au rapport de MΞ à ΞO, Et puisque le point N est le centre de gravité[5] du segment de droite MΞ, parce que MN est égal à NΞ, si nous plaçons le segment de droite TH, égal à ΞO, de manière que son centre de gravité soit le point Θ et que TΘ soit égal à ΘH, le segment de droite TΘH fera équilibre au segment de droite MΞ restant en place, parce que ΘN est coupé en raison inverse des poids TH et MΞ et que ΘK est à KN comme[6] MΞ est à HT ; il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux poids[7] est le point K ; de la même manière aussi toutes les parallèles à EΔ menées dans le triangle ZAΓ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point K. Et du moment que le triangle ΓZA est constitué par les segments de droite menés dans le triangle ΓZA, et le segment ABΓ constitué par les segments de droite pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞO, le triangle ZAΓ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre

1. παραβολή dans le texte grec, mot qui provient d'une interpolation ; Archimède appelle la parabole ὀρθογωνίου κώνου τομά.
2-7. Cf. notes complémentaires.

de gravité Θ, l'équilibre se faisant par rapport au point K, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point K. Divisons dès lors ΓK par le point X de manière que ΓK soit triple de KX ; le point X sera donc le centre de gravité du triangle AZΓ, comme cela a été démontré dans le livre *Des équilibres*[1]. Du moment donc que le triangle ZAΓ, restant en place, fait équilibre, par rapport au point K, au segment BAΓ placé autour du centre de gravité Θ, et que le centre de gravité du triangle ZAΓ est le point X, le rapport du triangle AZΓ au segment ABΓ placé autour du centre Θ est égal au rapport de ΘK à XK. Or ΘK est triple de KX ; il s'ensuit que le triangle AZΓ est à son tour triple du segment ABΓ. Mais le triangle ZAΓ est aussi quadruple du triangle ABΓ, parce que ZK est égal à KA, et AΔ égal[2] à ΔΓ ; par conséquent, le segment ABΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle ABΓ.

2.

La proposition qui précède n'est, certes, pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie ; pour cette raison, voyant que la propriété n'est pas démontrée, mais pressentant que la conclusion est vraie, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et publiée antérieurement[3].

[...]

1. Cf. lemme 6 et *De l'équil. des fig. planes* I, 15.
2-3. Cf. notes complémentaires.