compris sous les droites AW, XC équivaut au carré de la droite WX.
Or on a démontré (Prop.14) que le rectangle compris sous les droites AW, XC équivaut aussi au carré de la droite GY; donc la droite GY est égale à la droite WX, c'est-à-dire au diamètre KL du cercle décrit autour du point G
Et puisqu'il a été démontré précédemment que la droite HO est au diamètre du cercle décrit autour du point H comme la droite GY conjointement avec la droite KL est à la droite KL et puisque la droite GY, conjointement avec la droite KL est le double de la droite KL il s'ensuit que la droite HO sera aussi le double du diamètre du cercle décrit autour du point O
En conséquence, la droite HO, conjointement avec le diamètre du cercle décrit autour du point H est le triple de ce diamètre. De plus, la droite IP est dans le même rapport avec le diamètre du cercle décrit autour du point I ; par conséquent, la droite IP est aussi le triple du diamètre du cercle décrit autour du point I
Et pareillement, la perpendiculaire relative au cercle suivant est le quadruple de son diamètre ; les perpendiculaires suivantes seront trouvées des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent successivement l'un l'autre d'une unité, et l'on démontrera que cela se présente ainsi à l'infini. "

conséquent (3).
De (3) on déduit : $AW \cdot XC = WX^2$.
De la proposition 14, Pappus déduit aussi

$$AW \cdot XC = GY^2.$$

d'où l'égalité cherchée :

$$GY = WX = KL = d_1.$$

Pappus démontre ensuite que : $HO = 2d_2$.
De la proposition 15, il déduit

$$\frac{HO}{d_2} = \frac{(GY + d_1)}{d_1} = \frac{2d_1}{d_1}$$

d'où : $h_2 = HO = 2d_2$.

Pappus opère aussi avec le troisième cercle

$$HO + d_2 = 2d_2 + d_2 = 3d_2$$

et d'après la proposition 15

$$\frac{IP}{d_3} = \frac{(HO + d_2)}{d_2} = \frac{3d_2}{d_2} = 3$$

d'où : $h_3 = 3d_3$

Il affirme que, de même, nous obtenons ce que nous notons :

$$h_4 = 4d_4$$

et, plus généralement, que

$$h_n = nd_n.$$

Avec ou sans maître ?
Modes d'appropriation du savoir mathématique
(quelques traitements historiques des coniques)

With or without a teacher ?
How to capitalize mathematical knowledge
(Historical variations on conics)

Atelier pluridisciplinaire
BESSOT Didier, DHOMBRES Jean, RADELET-DE GRAVE Patricia
IREM de Basse-Normandie
EHESS, Paris
Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve

Abstract

Au cours de l'histoire, la nécessité d'un maître en mathématiques fut soumise à question. Car il y a souvent scandale pour la raison que la mathématique n'aille pas de soi; comme il y a scandale que la mathématique en impose au bon sens et au réel. Si l'enseignement des mathématiques fut néanmoins maintenu, son obligation dans les cursus secondaires ne date que du début du XIX[ème] siècle, et fut de temps à autre contestée, ou mollement appliquée. On n'a pas toujours enseigné les mathématiques dans les classes; on ne l'a pas toujours fait pour les mêmes raisons, et l'obligation actuelle, apparemment universelle, ne répond pas partout aux mêmes nécessités intellectuelle, culturelle, politique ou sociale. La mise en perspective historique des différents modes d'appropriation du savoir mathématique permet donc de questionner les priorités intellectuelles d'une société. Et parce qu'elle interroge en profondeur son rôle, elle donne à l'enseignant la possibilité de dépasser le consensus de sa profession pour découvrir les antécédents et les filiations de sa pratique d'enseignement. Ce sont des filiations intellectuelles et déontologiques qui ne résultent pas du seul jeu de la mathématique.

Comment favoriser auprès d'enseignants la mise en perspective historique de leurs savoirs et de leurs pratiques afin de leur permettre un recul réflexif et une appréciation de leur place dans un processus général ? L'histoire des mathématiques, qui est devenue à la mode, est souvent un bon prétexte pour faire des mathématiques autrement, c'est-à-dire d'une façon autre que celle requise par le programme. Or, celui-ci représente un consensus. Aussi, l'histoire proprement historienne des mathématiques ne peut-elle pas recevoir auprès des enseignants le succès escompté. La fidélité à une situation historique donnée exige d'envelopper les mathématiques de considérations très diverses qui tiennent aux raisons mêmes d'enseigner telles mathématiques plutôt que telles autres. Ces considérations paraissent le plus souvent inutiles à l'enseignant. Car il est placé dans une situation historique et sociale précise, et partage nécessairement l'idée de progrès qui fait regarder le passé comme définitivement passé. Pourquoi cette histoire, qui parle d'autre chose que ce qui concerne les enseignants, les remettrait-elle en cause, et les aiderait-elle dans leur tâche selon les objectifs qu'ils s'assignent ? L'histoire des mathématiques, contrairement à quelques discours lénifiants, ne va pas de soi pour l'apprentissage des mathématiques.

Si nous voulons qu'une réflexion prenne corps sur le rôle de l'histoire des mathématiques en vue de l'enseignement, et donc sur le rôle de l'histoire professionnelle des mathématiques, il faut une meilleure prise en compte de l'histoire de la pratique enseignante. Favoriser le regard historique sur cette pratique est l'objectif poursuivi dans cet atelier. Il est donc essayé de combiner deux recherches en une même activité, recherche historique et recherche didactique. Conformément au titre général de cette III$^{\text{ème}}$ Université d'été, programme qui requiert une réelle réflexion.

Il aurait été possible de faire directement de la sociologie des enseignants de mathématiques, en montrant comment les contenus interviennent pour organiser cette sociologie. Telle n'est pas la solution adoptée. Car ce n'est pas l'enseignant qui est ici visé, mais le savoir qu'il diffuse. Ou plutôt ce qui de ce savoir, partie et non totalité de son savoir, est organisé par l'idée que l'enseignant se fait du rôle de la pensée mathématique. Dès lors, nous sommes libérés d'avoir à focaliser sur l'enseignant et son réseau social; il suffit pour notre objectif d'atelier à Leuven d'évoquer quelques mathématiciens du passé, confrontés à l'enseignement à d'autres. Autrement dit, nous pouvons user de la plus vieille habitude des historiens des mathématiques, celle qui valide leur travail, et c'est de servir le commentaire à des textes précis.

Mais il faut dans ces commentaires répondre à des questions d'enseignement, et ne pas se contenter de dire que nous satisfaisons une légitime curiosité historique. L'une des questions peut se résumer ainsi : pourquoi telle stratégie d'exposé mathématique est-elle adoptée dans un texte ? Cette question requiert de détecter d'abord une stratégie d'enseignement dans les textes étudiés, et la volonté de prendre en compte jusqu'à la rhétorique qui en est la tactique. Il faut aussi se débarrasser et de la volonté de corriger un texte pour mieux faire (car ce ne peut être que dans un autre contexte scolaire), et de la volonté de tout expliquer, (en particulier de tout expliquer historiquement, même les erreurs). Il y a souvent de l'incompréhension dans le reproche fait à des auteurs anciens de manquer de rigueur. La mathématique a heureusement cela d'économique que, dans une présentation d'histoire, on puisse omettre certaines choses sans perdre l'essentiel de la preuve, ni l'esprit d'une démonstration; le lecteur mathématicien sait comment combler ce qui n'a pas été dit ou explicité, et qu'importe qu'il le fasse par un biais différent de l'auteur étudié. L'histoire des mathématiques en cause n'est pas dirigée vers un ignorant des mathématiques. L'important pour nous, ici, est d'interpréter un texte dans un sens pédagogique particulier. Ce qui revient à lire la spécificité d'un auteur au-delà de la nécessité mathématique, et ne pas prendre un texte mathématique comme donnant la seule bonne méthode, mais comme résultant de

la décision d'un auteur en vue d'une compréhension. Aussi nous a-t-il été particulièrement utile de ne choisir que des textes où les auteurs tentaient d'éviter le passage par le commentaire du maître, en s'adressant directement au lecteur supposé pouvoir tout maîtriser, tout comprendre de ce qui était dit sans qu'un tiers intervienne. La mathématique sans maître n'est pas une revendication pour nous; juste un moyen de mieux juger l'effort pédagogique inhérent à toute mathématique.

L'organisation de l'atelier est simple puisqu'il s'agit finalement de donner à lire quelques textes courts afin de dégager ce qui, dans l'écriture même, favorise un apprentissage direct, sans la médiation d'un expliquant. La question en retour, pour l'enseignant qui suit cet atelier, est celle de savoir en quoi il a besoin d'un commentateur historien chargé de lui expliquer le contenu des textes retenus, doublé d'un commentateur didacticien pour lui faire saisir une technique pédagogique. Cet atelier interroge donc directement la pratique d'histoire pour un didacticien et la pratique de didactique pour un historien. Sans sortir des mathématiques : c'est bien là la gageure.

Il fallait, pour qu'ils soient utilisables en commun, que les textes retenus touchent tous à un même thème mathématique : furent choisies les coniques, et même plus particulièrement la parabole. La sélection était l'opération la plus difficile : il manque, nous le savons tous, des anthologies de textes historiques mathématiques où soient données les raisons pour lesquelles les textes ont été retenus. Il y a une certaine paresse intellectuelle à se contenter de reproduire de façon exhaustive des textes anciens; on a ici poussé l'intervention jusqu'à couper dans certains extraits afin de mieux servir l'objectif de l'atelier. Il fallait entourer les textes de leur environnement culturel, mais en réduisant ce commentaire à l'essentiel utile pour la compréhension de la démarche didactique. Ce sont plutôt des dossiers que nous avons constitués et portant sur plusieurs périodes historiques. Était prévu un cinquième texte du XX$^{\text{ème}}$ siècle, et de Lebesgue sur la parabole, mais l'ensemble est déjà trop long pour un seul atelier.

1° Texte d'Auguste Comte (1843) sur la similitude des paraboles, dossier établi par Jean Dhombres, avec comme titre : *pourquoi toutes les paraboles sont-elles semblables ?*

2° Textes de Galilée (1638) sur la parabole, dossier établi par Patricia Radelet-de Grave, avec comme titre : *la parabole comme trajectoire des projectiles.*

3° Textes de Serenus d'Antinoé réécrits par Francesco Maurolico (1494-1575) sur l'ellipse, dossier établi par Didier Bessot avec comme titre : *Ellipses conique et cylindrique.*

4° Texte de Bouguer (1746) sur la parabole, dossier établi par Jean Dhombres, avec comme titre : *l'arche de Noé pouvait-elle couler, ou les ressources d'une parabole.*

Summary : The purpose is to read some short texts from mathematicians of the past, all texts related to conics, in order to grasp the way mathematicians have avoided the mediation by a teacher. Conversely, from an historical point of view, or from a didactical point of view, what is required from a commentator of such texts ? This workshop aims at understanding a practice of history for a didactician and a practice of didactics for a historian.

Dossier 1, établi par Jean Dhombres

Pourquoi toutes les paraboles sont-elles semblables ?

Extraits du *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux ou trois dimensions, contenant toutes les théories générales de géométrie accessibles à l'analyse ordinaire*[1] publié par Auguste Comte en 1843 (pp. 189-204)

Théorie de la similitude des courbes.

64. La notion de similitude convient évidemment, par sa nature, à toutes les figures possibles, envers lesquelles les observateurs les plus étrangers à la géométrie rationnelle emploient journellement les qualifications de semblables ou dissemblables, en y attachant un sens, vague et confus peut-être, mais au fond essentiellement juste. Quand les géomètres se sont spécialement emparés de cette conception universelle et spontanée pour la systématiser convenablement après l'avoir nettement analysée, ils ont dû considérer premièrement les figures purement rectilignes, dont les éléments sont directement appréciables, ainsi que les lois de leur assemblage. C'est là que la similitude se montre avec une pleine évidence comme consistant dans l'égalité des angles respectifs et la proportionnalité des côtes homologues : toute l'élaboration scientifique n'a pu consister, à cet égard, qu'à réduire au moindre nombre possible les conditions d'une telle définition ou appréciation, d'abord envers les triangles, et ensuite pour les polygones quelconques, suivant les explications de la géométrie élémentaire. Mais il s'agit maintenant d'étendre convenablement aux diverses courbes planes ces notions primordiales, afin de découvrir, en chaque cas, les conditions précises de la similitude, ou de constater que l'identité d'espèce n'exige aucune relation particulière; question dont il serait superflu de faire ici ressortir expressément la haute importance.

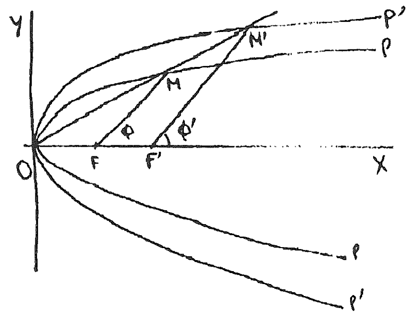
Au premier aspect, une telle extension semble ne pouvoir s'opérer, en général, que d'après l'analyse transcendante, qui, en considérant les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés infiniment petits, permettrait d'y exprimer distinctement l'égalité directe des angles et la proportionnalité des côtés, sans être alors arrêté par la nature infinitésimale des uns et des autres. Mais un examen plus approfondi de cette importante théorie géométrique conduit à reconnaître que l'analyse ordinaire suffit réellement à l'instituer d'une manière tout aussi générale et beaucoup plus commode. Il faut seulement, pour cela, choisir convenablement, parmi les propriétés essentielles des polygones semblables, celles qui sont susceptibles de devenir immédiatement appréciables envers les courbes, sans exiger la considération de côtés infiniment petits et d'angles infiniment obtus, et en réduisant l'inévitable notion de l'infini à n'influer que sur le nombre des sommets, à l'égard desquels l'uniformité de leur caractère analytique permet aisément de surmonter une telle difficulté, d'après le simple examen d'un point indéterminé, propre

[1]Paris, Carilian-Goeury et V^{GR} Dalmont, Paris, mars 1843, Imp. de Fain et Thunot, VIII-598 p. et 3 planches de 82 figures gravées par Hibon. Ce traité est ici référé par l'abréviation TEGA. Il a connu une seconde édition dans les années 1890, et une traduction en portugais au Brésil. Les coupures dans le texte sont signalées par [. . .].

à les représenter tous, suivant un artifice logique déjà familier, à beaucoup d'autres titres, en géométrie analytique.

On ne peut d'abord employer à cet indispensable office la proposition fondamentale, trop exclusivement mentionnée dans l'enseignement habituel de la géométrie élémentaire, sur la décomposition des polygones semblables en triangles semblables. Car, en l'étendant aux courbes, cette décomposition offrirait, comme la définition primitive elle-même, quoiqu'à un moindre degré, l'inconvénient capital d'obliger à considérer des angles et des côtés infinitésimaux. Mais, la théorie de la similitude des figures rectilignes fait aussi connaître, à leur égard, deux autres propriétés générales, dont chacune est, par sa nature, éminemment propre à s'étendre aux courbes, comme spontanément exempte d'un tel vice; de manière à pouvoir fournir ensuite, plus ou moins commodément, un fondement suffisant à la théorie analytique que nous voulons constituer ici.

65. D'après la première de ces propriétés, les contours semblables, ont leurs divers sommets déterminés par des triangles respectivement semblables ayant tous, dans chaque figure, une base commune; et réciproquement, deux figures ainsi construites seront nécessairement semblables, quel que soit le rapport de ces deux bases homologues. Les côtés et les angles de ces triangles artificiels, indépendants de la figure proposée, restant naturellement finis quand le polygone devient infinitésimal, rien n'empêche d'étendre aux courbes un tel caractère, avec la seule obligation de l'y vérifier envers un point indéterminé, comme le permet toujours l'uniformité de la définition, géométrique ou analytique, afin d'éviter l'embarras direct d'un nombre infini de points. C'est ainsi, par exemple, qu'on démontrerait aisément la similitude constante de deux cercles, surtout en y prenant pour bases deux diamètres respectifs; puisque les triangles, dès lors constamment rectangles, se trouveraient spontanément semblables, en ne comparant entre eux, suivant l'esprit de ce théorème, que des points pour lesquels un des angles à la base offrirait, de part et d'autre, la même grandeur.
Considérons encore l'exemple de la parabole, d'après la définition du n° 20.[2]



En prenant pour bases les droites OF, OF' qui joignent chaque point fixe au sommet, et faisant d'ailleurs coïncider les axes et les sommets des deux paraboles, on mènera encore, de l'origine O, une droite arbitraire $y = mx$, dont l'intersection M avec la première parabole $y^2 = 2dx$, donnera $x = \frac{2d}{m^2}, y = \frac{2d}{m}$. En joignant ce point M à l'autre extrémité F de la base, on aura tang.

[2] C'est la définition par foyer et directrice de la parabole, lieu des points à égale distance d'un foyer F et d'une droite D.

$\varphi = \frac{\frac{2d}{m}}{\frac{2d}{m^2} - \frac{d}{2}}$. Or, ce résultat ne saurait changer en y remplaçant d par d' pour l'autre parabole, puisqu'il est évidemment indépendant de D. Donc, deux paraboles sont toujours semblables entre elles, comme deux cercles. Il serait aisé de constater aussi, d'après l'équation $y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$, en choisissant convenablement les bases, qu'il en est encore de même de deux cissoïdes. Au reste, en rapprochant ces trois cas de similitude spontanée, on conçoit, à priori, qu'une telle relation est inévitable en toute espèce de courbe dont l'équation pourra être réduite à ne contenir qu'une seule constante arbitraire : car, s'il y pouvait exister une condition quelconque de similitude, elle tendrait alors à déterminer cette unique constante; en sorte que la courbe semblable à la proposée se trouverait ainsi individualisée, ce qui serait évidemment absurde.

Une telle institution analytique de la théorie générale de la similitude des courbes planes, n'offre d'autre défaut essentiel que la trop grande complication des calculs qu'elle exige, quand il s'agit d'équations peu simples, et lorsqu'on ne peut choisir assez commodément les bases homologues. Aussi adopterons-nous finalement, à ce sujet, une autre mode, fondé sur une propriété plus aisément formulable [...].

69. Afin de perfectionner davantage la théorie générale de la similitude des courbes planes, il y faut maintenant joindre une importante considération subsidiaire, qui, judicieusement appliquée, dispensera souvent de toute opération analytique, en permettant de déduire immédiatement la solution de la seule définition des lignes proposées. Cette méthode auxiliaire repose sur l'heureux aperçu, indiqué par Clairaut dans ses *Élémens de géométrie*, et suivant lequel deux figures semblables ne diffèrent que d'après l'échelle sur laquelle elles sont construites, en sorte qu'un simple changement d'échelle pourrait toujours les rendre superposables. Quoique Clairaut n'y eût en vue que les figures rectilignes, ce judicieux énoncé convient également sans aucune préparation spéciale, aux diverses figures curvilignes. On doit le regarder comme l'expression la plus concise de tous les rapprochements géométriques auxquels la similitude peut donner lieu.

D'après un tel principe, le travail à accomplir sur chaque définition proposée d'une espèce de courbe, afin d'y découvrir les conditions de similitude, consistera à y bien séparer d'abord les données, linéaires ou angulaires, indispensables à la grandeur de la courbe d'avec celles qui n'affecteraient que sa situation, et ensuite à réduire les premières au moindre nombre possible. Cette double préparation présente quelquefois, surtout sous le second aspect, des difficultés insurmontables, pour certaines définitions, envers lesquelles on ne pourra éviter, à ce sujet, l'emploi ultérieur de la méthode analytique, qui conserve donc nécessairement son privilège exclusif d'une entière généralité. Mais, quand ces deux conditions préliminaires auront été suffisamment remplies, le principe de Clairaut fournira aussitôt la solution demandée. Car, si la grandeur de la courbe est ainsi déterminable d'après une seule dimension, toutes les courbes de cette espèce sont nécessairement semblables entre elles, puisque le simple changement d'échelle pourrait les faire coïncider, en identifiant leurs dimensions respectives. Quand il faudra plusieurs données distinctes et indépendantes, la similitude exigera autant de conditions qu'il existera de ces éléments moins un, et chacune d'elles consistera naturellement dans la proportionnalité des lignes considérées, ou dans l'égalité des angles introduits, sauf à lui attribuer ensuite toute autre forme, linéaire ou angulaire, que l'on jugerait au numéro précédent. Alors, en effet, le changement d'échelle ne pourra identifier qu'une seule dimension respective, et les courbes ne seront semblables que si cette première coïncidence entraîne celle de tous les autres éléments, ce qui suppose évidemment l'universelle proportionnalité des longueurs proposées ou l'égalité mutuelle des angles considérés. On voit qu'une telle marche revient, en d'autres termes, à déduire les conditions de la similitude de celles de l'identité, en considérant, d'une part, que le nombre des unes doit toujours être inférieur d'une unité à celui des autres, et, d'autre part, que les diverses égalités linéaires simultanément prescrites par celles-ci doivent se changer en simples proportionnalités pour celles-là.

Cette méthode subsidiaire ferait aussitôt découvrir la similitude constante, déjà constatée analytiquement, dans les divers cas du cercle, de la parabole, de la cissoïde, etc. : elle nous apprend, en outre, que la même relation s'étendra aux courbes qui dériveraient de ces premières d'une manière déterminée, d'ailleurs quelconque, comme, à l'égard du cercle, la cycloïde, l'épicycloïde, les courbes de Descartes (n° 26), etc. Au contraire, les ellipses ou hyperboles, d'après la définition du n° 19, ne seront semblables qu'autant qu'il y aura proportionnalité entre les deux longueurs, évidemment indépendantes et irréductibles, qui y déterminent la grandeur de la courbe, abstraction faite de la situation. La définition commune des trois sections coniques (n° 23) exigera ainsi, pour la similitude, l'égalité du rapport spécifique correspondant. Envers les définitions de la conchoïde ou des sections toriques, on trouvera, sans plus d'embarras, des résultats analogues.

Les conditions préliminaires propres à garantir le succès de cette méthode subsidiaire sont, de la même nature que celles relatives à la méthode correspondante que comporte aussi la théorie du nombre de points déterminant : seulement, ce préambule indispensable est ici plus difficile et plus incertain envers quelques définitions, pareillement antipathiques à ces deux procédés supplémentaires; puisqu'il faut maintenant opérer, en outre, une séparation, souvent délicate, et quelquefois impossible, entre les idées de grandeur et les idées de position. C'est ainsi, par exemple, que les définitions du cercle, soit comme segment capable, soit comme lieu des points dont les distances à deux pôles sont constamment proportionnelles, ne permettraient nullement de constater, par ce moyen, la similitude nécessaire de tous les cercles, puisqu'elles semblent exiger deux données distinctes pour déterminer la grandeur de la courbe, quoiqu'une appréciation ultérieure, que l'équation peut seule, en général, diriger sûrement, doive montrer qu'il n'y a d'indispensable, à cet égard, qu'une certaine combinaison unique de ces deux éléments en apparence irréductibles. Mais l'irrécusable évidence des erreurs que pourrait produire, envers des courbes peu étudiées ou trop compliquées, l'application irréfléchie de cette méthode subsidiaire ne saurait altérer son incontestable efficacité dans le cas qui s'y adaptent suffisamment.

Pourquoi toutes les paraboles sont-elles semblables ?

Comte déclare s'adresser à ceux qui travaillent seuls. Il convient donc à notre propos. Mais cela ne suffit pas à donner envie de lire Comte.

Pourquoi lire Comte ?

L'on peut comprendre que le *Traité* de Comte n'ait guère eu de succès auprès des historiens des sciences. Car ceux-ci sont avant tout soucieux de suivre le mouvement général de la mathématique auquel apparemment ce texte du père du positivisme ne contribua pas[3]. Pour qui s'apprête à lire Comte mathématicien, son faible impact sur les épistémologues est quand même démoralisant. Peut-on se rassurer et poursuivre la lecture en prétendant que les épistémologues

[3]Ce qui suit est tiré partiellement d'un article à paraître, Jean Dhombres, "La pratique philosophique des mathématiques chez Auguste Comte : une conceptualisation de l'espace par l'éd.), *Auguste Comte et l'idée d'une science de l'homme*", colloque Paris-Sorbonne, 26-27 novembre 1998.

requièrent matière plus noble qu'un texte s'affichant "élémentaire", et dont Comte avoue qu'il présente le caractère d'une digression ?

> Ce petit ouvrage résulte d'une sorte de loisir très passager dû à l'intermittence philosophique qui devait naturellement avoir lieu chez moi entre la récente terminaison de mon système fondamental de philosophie positive et le prochain début des grands travaux dont j'y ai posé les bases[4].

Si l'on peut se réjouir de surprendre un Comte décontracté, le sens à donner à la banalité mathématique, aussi bien dans l'ordre épistémologique que dans l'ordre pédagogique, suscite-t-il vraiment la curiosité de lecture ? Il y a des interrogations immédiates sur cette banalité, manifestées dans l'extrait retenu. Car le programme somme toute banal sur la similitude s'ouvre par une introduction non banale

> La notion de similitude convient évidemment, par sa nature, à toutes les figures possibles, envers lesquelles les observateurs les plus étrangers à la géométrie rationnelle emploient journellement les qualifications de semblables ou dissemblables, en y attachant un sens, vague et confus peut-être, mais au fond essentiellement juste[5].

Il faut comprendre ce qui serait "juste"! A "cette conception universelle et spontanée" de la similitude, le philosophe – un mathématicien ne parle jamais ainsi – oppose le travail d'analyse et de systématisation des géomètres qui l'ont réduite au cas des figures rectilignes, avant de découvrir, cas après cas, que "l'identité d'espèce n'exige aucune relation particulière"[6], avant donc de penser la similitude comme opération géométrique en tant que telle, et non en tant qu'appliquée à des objets particuliers.

L'histoire des mathématiques nous a appris à reconnaître en cette dernière idée de la similitude comme transformation, une des contributions importantes de la science du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Et le professeur de mathématiques peut estimer aujourd'hui utile de commencer directement par la similitude comprise en ce sens là. Mais Comte nous dit autre chose, ou quelque chose de plus, et qui conduit à une interrogation. Si, en effet, le mathématicien a seulement et avec peine abstrait ce qui était déjà justement pensé dans les métiers, qu'a-t-on besoin de la pensée mathématique ? Et qu'a-t-on besoin de l'histoire de cette pensée qui devient un encombrement, voire une gêne pour penser ? Comte semble dire que la pensée commune, celle des métiers, est en avance sur la pensée des mathématiciens. La pratique serait-elle d'emblée et de droit positive ? En ce cas, quel serait le positif dans la rigueur mathématique, rigueur que Comte paraît comparer à une subtilité inutile et qui avait déjà été reprochée au XVII$^{\text{ème}}$ siècle aux mathématiciens par Arnauld et Nicole dans la *Logique ou l'Art de penser*. Or Comte se veut également cartésien dans le *Traité*, et on peut même dire qu'il écrit un texte qui fera la postérité géométrique de Descartes. Comte ne s'efforce-t-il pas de rendre banale cette postérité, donc d'expliquer sa genèse en tant qu'abstraction raisonnée de gestes auparavant inconscients ou mécaniques ? C'est là une réflexion sur l'enseignement des mathématiques et son rôle. Il explique les conditions d'une banalisation.

Ne peut manquer d'intervenir dans l'appréciation de l'ouvrage de 1843 le fait qu'il soit le pendant du *Traité philosophique et d'astronomie populaire* paru l'année suivante, et qu'il présente de même une vulgarisation. Or, cet autre *Traité* débute par le *Discours sur l'esprit positif* dont tous s'accordent à dire qu'il est le signe d'une pensée philosophique à sa maturité.

[4]TEGA, p. VI.
[5]TEGA, pp. 189-190.
[6]TEGA, p. 190.

Mais le parallèle entre les deux ouvrages ne va pas jusqu'au qualificatif de "juste" accordé à la pensée commune. Car chacun sait que celle-ci n'a pas adopté aisément l'héliocentrisme, et une enquête soulignait assez récemment qu'une majorité de Français voyaient le Soleil tourner autour de la Terre. La popularisation d'une idée positive fait problème en astronomie; elle n'en serait pas en mathématique. Conclusion paradoxale ! Comment la société apprend-elle en mathématiques ?

En écrivant son ouvrage, Comte songeait aux "esprits heureusement organisés qui voudraient isolément étudier ici la géométrie analytique, sans aucun secours étranger"[7]. A tout le moins, en le disant ainsi, le répétiteur d'analyse à l'École polytechnique récusait une tradition française, instaurée depuis un siècle, sortie considérablement confortée par la Révolution, et servant de garant à l'École elle-même. Posée comme fondamentale pour toute entreprise collective des ingénieurs de tous ordres, la mathématique devait requérir un assez long apprentissage, sous la férule d'un maître. Et un maître spécialisé, ayant dévoué son savoir à cette formation des autres, aux dépens peut-être de sa propre créativité. Le manuel accompagnait la formation, mais il ne pouvait servir sans la parole du maître; la mathématique était une école, c'est-à-dire une formation collective dans le cadre d'une classe dirigée par un seul, classe qui permettait en outre une disposition commune et un esprit d'élite commun. La mathématique était devenue signe de reconnaissance d'une initiation[8]. Tout le contraire d'une pensée commune.

Contre l'organisation de la méritocratie qui correspondait si bien aux valeurs politiques et morales d'une époque, et sauf imposture de Comte que nous écartons, oser proposer une mathématique assimilable en elle-même par un esprit suffisamment préparé, requérait de Comte qu'il disposât d'une assurance de type intellectuel[9]. Ne serait-elle pas celle que procure le sens d'un achèvement ? Comte aurait acquis le sens complet de la géométrie analytique dont il trouvait l'origine, et je prends ce mot en son sens husserlien[10], chez Descartes, son collègue en philosophie. Seule cette complétion permet l'enseignement de la géométrie, et celui-ci ne requiert plus nécessairement la présence d'un maître. Dans le langage de Comte, devenu trop ordinaire pour qu'il accroche la mémoire, un sens complet s'appelle la généralité de la géométrie[11]. L'interprétation de cette généralité peut justifier qu'un enseignant des mathématiques s'intéresse à un texte auquel les comtiens eux-mêmes, en tout cas ceux du XX$^{\text{ème}}$ siècle, ont accordé si peu d'importance. Il faudrait ajouter, pour le profit des maîtres d'aujourd'hui, que le livre de Comte a eu une influence sur les maîtres d'hier, en tout cas sur les professeurs des classes de mathé-

[7]TEGA, p. VI. On ne saurait oublier l'importance accordée par Comte à l'enseignement populaire; cela lui valut faveur et engouement chez les Républicains du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, qui se poursuivirent jusque chez les marxistes des années 1950.

[8]Le rôle des mathématiques, dans l'enseignement mis en place à partir de la Révolution, est analysé dans J. et N. Dhombres, *Naissance d'un pouvoir : sciences et savants en France (1793-1824)*, Paris, Payot, 1989, chap. 7; celui des manuels et des "mathématiques élémentaires" dans la seconde moitié du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, est traité dans J. et N. Dhombres, *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997, chap. 2. Je veux insister ici sur le caractère "collectif" de l'apprentissage mathématique dans le système français des grandes écoles du premier XIX$^{\text{ème}}$ siècle; il est bien repéré par Stendhal dans sa *Vie de Henry Brulard*, et Beyle l'oppose à la pratique du génie solitaire, à la vision dramatique d'une découverte individuelle du savoir, des questions philosophiques, et de la beauté artistique. Il forgeait ainsi l'opposition romantique entre savoir collectif et savoir individuel.

[9]Comte indique avec soin tout ce qui est requis du lecteur pour qu'il puisse profiter de la lecture de son *Traité*. Il avait vécu de leçons de mathématiques jusqu'à l'obtention de son poste de répétiteur à l'Ecole polytechnique. Ces leçons furent données avec une évidente satisfaction de part et d'autre : le précepteur savait jauger les niveaux et s'adapter à celui qui l'écoutait. Nous pouvons penser, *a priori*, que Comte avec son *Traité* ne se livrera pas à une exhibition fourre-tout de savoir mathématique.

[10]E. Husserl, *L'origine de la géométrie*, trad. fr. J. Derrida, Paris, PUF, 1962.

[11]"Suivant une telle appréciation, ce système final de la science géométrique devrait être rationnellement désigné par la dénomination de géométrie *générale*, comme je l'ai proposé depuis longtemps dans le tome premier de mon Système de philosophie positive" (TEGA, pp. 3-4).

matiques spéciales du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, qui retrouvaient en quelque sorte l'un des leurs ayant su le mieux exprimer leurs espoirs d'enseignants.

Il y a pourtant contradiction entre la généralité d'une théorie mathématique et sa présentation en tant que transition vers une autre. En se proclamant novateur, Comte dirige notre regard sur un ailleurs de son *Traité*, et alors qu'il fournit le programme de leçons orales à venir, il ajoute :

> Cette indication caractéristique peut surtout acquérir une véritable importance envers l'enseignement du calcul différentiel, qui constitue certainement, après la géométrie analytique, la partie la plus décisive, et jusqu'ici la plus imparfaite de l'initiation mathématique[12].

Voilà qui paraît contredire aussi le discours de géomètres comme Michel Chasles, polytechnicien tout comme Comte, et pour qui la géométrie devait rivaliser avec le Calcul, non le préparer, et pouvait le supplanter tant dans les méthodes que dans les résultats. Comte ne cherche pas cette vaine rivalité : en en faisant le tour, il entend donner à comprendre les limites mêmes de la géométrie analytique. Et en particulier montrer que la similitude, comme théorie, appartient entièrement à la géométrie analytique.

Ce genre de préoccupations est typique des réflexions des enseignants; ils doivent en effet justifier, et d'abord à leurs propres yeux, la cohérence de ce qu'ils enseignent, tout en sachant qu'il y a un au delà de leur enseignement, une mathématique qui se poursuit, et qui parviendra même à modifier ce qu'ils enseignent. Modifier ne veut pas dire détruire.

Pour accaparer du savoir mathématique mais dans les limites raisonnables, Comte doit parvenir à penser la similitude comme une opération – on dira bientôt une transformation. Transformation de quoi ? Est nécessairement en jeu quelque chose qui s'apparente à l'espace, cet absent de la tradition euclidienne, que Descartes semble avoir trouvé par l'expérience intellectuelle de la mécanique sous le nom d'étendue. Pourtant, Comte n'invente pas l'espace de la géométrie. Suffira-t-il de dire qu'il est sur la voie ? Ceci n'est pas une remarque intéressante pour l'historien des mathématiques, ou alors il lui faudrait montrer comment Comte a influé ceux qui aboutiront à l'espace euclidien. Et ce n'est pas ici le propos, qui est de saisir la disposition d'esprit dans laquelle Comte entend mettre son lecteur pour lui permettre de comprendre autrement ce qu'il sait déjà sur la similitude.

Il faut donc revenir à l'enseignement de l'époque de Comte, où l'on distinguait entre la similitude en tant qu'elle concerne des figures rectilignes, voire composée d'arcs de cercle, et celle visant des courbes. Et on le faisait au nom d'une rigueur : l'impossibilité de démontrer par les ressources de la géométrie dite élémentaire le fait que deux aires délimitées par des courbes semblables sont entre elles selon le carré du rapport de similitude. C'était même devenu une question de cours, dûment posée à l'examen oral d'entrée à l'École polytechnique. Comte ne cherche pas à prétendre englober ce résultat général dans sa théorie de la similitude. Mais, indique-t-il, de tels problèmes de quadrature "sont aujourd'hui conçus, d'une manière trop exclusive, comme ne pouvant jamais être traités que par l'analyse transcendante"[13]. De façon spectaculaire, Comte justifie par l'histoire une élémentarisation de la géométrie, c'est-à-dire une nouvelle compréhension de la géométrie dans l'ordre élémentaire.

> On a maintenant trop oublié la phase rapide, mais impérissable, que présente l'histoire de la géométrie moderne depuis la fondation de la géométrie analytique par Descartes jusqu'à la découverte de l'analyse infinitésimale par Leibnitz. Dans ce mémorable intervalle, plusieurs géomètres, et surtout Wallis, ont heureusement concouru à développer et à systématiser de plus en plus la théorie générale

[12]TEGA, p. VII.

[13]TEGA, p. 206.

des quadratures par les seules ressources de l'analyse ordinaire; et c'est principalement pour perfectionner ces premiers efforts que le calcul intégral a ensuite été créé, tandis que le progrès de la théorie des tangentes conduisait au calcul différentiel. Il importe beaucoup que la marche individuelle de l'initiation géométrique reste toujours conforme à cette gradation spontanée du développement historique, en caractérisant ici avec soin les moyens que comporte, à cet égard, l'analyse élémentaire, et qui, quoique plus bornés qu'envers toutes les questions antérieures, sont cependant bien plus étendus qu'on ne le suppose maintenant, sans altérer d'ailleurs cette indispensable exposition par aucune vaine introduction déguisée de l'analyse transcendante[14].

Voilà une forte justification de l'intérêt de histoire des mathématiques pour l'enseignement. Et Comte s'inscrit en faux contre le récit "husserlien" qu'avait élaboré Lazare Carnot en 1797 avec ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, où se voyait l'unité du Calcul depuis son origine sous la diversité de ses formes, archimédienne, galiléenne, newtonienne, leibnizienne, eulérienne, etc. Avec le *Traité*, nous sommes aux premières loges pour assister à une utilisation didactique de l'histoire, entendue comme progrès. Ce texte a donc inspiré la rédaction des programmes de mathématiques, au moins en France, tout au long de la troisième République, à partir de l'assertion d'une "gradation spontanée du développement historique".

Et il nous faut comprendre l'expression de "partie imparfaite" que Comte a donnée pour le Calcul : elle choque dans la mesure où les historiens, en gros unanimes, en attribuent la fondation à Cauchy et, précisément, dans ses cours à l'École Polytechnique entre 1814 et 1830, en tout cas le socle communément admis en Europe jusqu'au XX^ème^ siècle. Comte ne considère pas le Calcul comme terminé.

Comte déroge au consensus[15]; c'est assez rare pour un mathématicien, c'est assez étonnant pour un homme qui suit de près la science; c'est exceptionnel pour un enseignant. Voilà bien des raisons d'indiscipline pour inviter à lire Comte mathématicien, indépendamment même de sa philosophie.

Mais ne faisons pas semblant : cette philosophie intervient obligatoirement dans notre lecture; Comte n'est pas un inconnu que l'on découvrirait par hasard aujourd'hui. Je n'ai donc pas besoin d'en présenter les grandes lignes.

Des questions philosophiques ? La géométrie comparée de Comte

Philosophique, dans l'ouvrage de Comte la question de l'identité est majeure, celle des objets mathématiques comme celle des raisonnements. Car une identité, ou une équivalence, gère les classements. Et il ne fait pas de doute que l'entreprise de géométrie de Comte ait pour objectif d'ordonner le monde trop riche des objets de la géométrie, trop riche par l'histoire en particulier. Il le soumet à des rangements, qui tiennent à la fois compte de la nature de ces objets et de la façon dont on les a établis. C'est-à-dire des raisonnements qui en ont fait voir des propriétés et sont alors classables suivant leur généralité d'obtention de ces propriétés. Le projet est aussi, à la manière des poupées gigognes, une organisation de la géométrie élémentaire dans le cadre plus vaste de la géométrie chargée de dire l'étendue. L'extrait étudié du texte de Comte l'exprime en termes inhabituels pour un mathématicien, puisqu'il s'agit de découvrir

[14] TEGA, p. 206.

[15] D'autant que Comte a suivi l'enseignement de Cauchy la première année où celui-ci le donnait, en 1814 : des notes de cours sont restées dans les archives de Comte. Pourtant, Comte ne cite jamais Cauchy dans le cours de philosophie positive ! Il y a là un beau sujet de controverse à la française, car réglée par le silence.

les conditions précises de la similitude, ou de constater que l'identité d'espèce n'exige aucune relation particulière; question dont il serait superflu de faire ici ressortir expressément la haute importance[16].

La similitude ne dépend pas des objets sur lesquels elle peut porter. Le projet d'un élémentaire de la géométrie analytique présuppose que ce qui sera rassemblé sous ce nom possède les moyens de classer les objets traités, sans devoir faire appel à des techniques exogènes comme les procédés transcendants du calcul intégral, sans avoir à faire appel à la manipulation de l'infini que permet le calcul infinitésimal, et sans requérir une complication ou un contournement déraisonnable de ces méthodes[17]. La géométrie analytique élémentaire a pour champ, selon Comte, ce qu'elle peut classer. C'est en ce sens qu'elle est une structure, dont la similitude n'est qu'un élément[18].

Mais alors qu'elle est le fruit d'une histoire, en a-t-elle encore une possible et un devenir ? Comte pense que oui, donc que la structure peut encore évoluer. Par accroissement, non par réorganisation. Sans que de nouveaux objets apparaissent nécessairement. Mais l'emploi du mot "objet" est maladroit dans la description de la pensée géométrique de Comte, tout comme chez Hilbert d'ailleurs. Chez l'un et chez l'autre, il y a des questions ou problèmes qui requièrent des solutions, et les solutions sont intéressantes dans la mesure où elle indiquent le fond de la question posée, et donc la terminent. Chez Hilbert, ces questions sont issues des seules mathématiques. Une question pour la géométrie chez Comte est la forme des courbes. La similitude intervient à ce propos.

Chaque forme crée en effet son propre espace aux yeux de Comte, et la classification consiste à comparer les espaces ainsi établis. Comte annonce qu'il faut parvenir à une "géométrie comparée", non encore rationnellement établie, et qui peut-être ne le pourra jamais être : il laisse donc son champ à l'histoire à venir. L'objectif de cette géométrie serait, en classant les objets que sont les équations, d'en déduire automatiquement les formes correspondantes, c'est-à-dire les courbes. De le faire non par intuition, mais par l'immédiateté que confère l'expérience de la forme des courbes, et sans qu'un calcul s'interpose nécessairement. Naturellement, la réciproque devrait être vraie; à une forme, faire correspondre l'équation (de plus petit degré) à laquelle elle répond.

C'est à un dictionnaire des formes que Comte voue le futur de la géométrie analytique. Mais ce dictionnaire ne doit relever que de l'élémentaire, et la forme est donc conçue comme une conséquence de l'algèbre qui pourrait se dire algèbre polynomiale. En indiquant une lignée de l'histoire, "l'espace algébrique" pourrait-on dire et non l'espace euclidien, Comte la clôt. C'est par cette possible fermeture qu'il affirme philosopher sur les mathématiques, mieux que les mathématiciens auxquels il reproche de ne pas savoir conclure, et de poursuivre sans fin. La fermeture n'est que conceptuelle. Les espaces provoqués par les courbes dans la conception de Comte peuvent encore s'enrichir de formes relevant d'un au-delà de l'algèbre, qui est le calcul différentiel et intégral, le Calcul jugé encore incomplet.

Comte est fasciné par la vitalité qu'a procurée dans le passé la limitation définissant la géométrie de la règle et du compas. Les méthodes ont été enrichies en empêchant la dispersion.

[16] TEGA, p. 189.

[17] Comme l'ouvrage de Comte porte sur les courbes algébriques, la dérivation est une opération permise de la géométrie élémentaire, et elle reste dans l'algèbre polynomiale. Comte ne fera pas intervenir des idées de la théorie des équations : il sait bien que cette théorie n'est pas véritablement faite, quoiqu'il n'ait pas lu Galois.

[18] Comte n'a aucunement imaginé pour la géométrie la structure d'algèbre linéaire que nous lui associons aujourd'hui : il est notable, par exemple, que les nombres complexes, les imaginaires de Descartes pourtant, soient totalement absents du *Traité* de Comte.

Lui-même ne peut évidemment pas se limiter à ces deux instruments puisqu'il envisage *a priori* la géométrie dans les trois dimensions, et chacun voit qu'une sphère ne peut se construire avec une règle et un compas. Il choisit donc la limitation par l'élémentaire de l'algèbre des polynômes, parce qu'il en espère un progrès pour la conception de l'espace que j'ai qualifié d'algébrique.

Qu'indiquera le dictionnaire prévu ? Dictionnaire de l'espace et des formes qui le structurent ? Dans et pour l'espace, Comte distingue ce qui relève de la grandeur, de la forme et de la position. L'analyse, par vocation et fonction historique, réduit tout à la grandeur– elle est quantitative– mais le quantitatif a réussi à fixer aussi la position. Tel est précisément le rôle dévolu à la méthode des coordonnées, dont l'ouvrage de Comte constitue une réflexion philosophique sur son sens historique. Quant à la forme, elle se déduit "indirectement, à l'aide de combinaisons convenables"[19]. Convenable, le mot est plutôt d'un celui d'un grammairien, et la syntaxe de la géométrie analytique consistera en ces combinaisons là, sous la restriction que celles-ci relèvent de l'élémentaire. Provoqués par l'étude de telle ou telle courbe pour en dire l'espace ainsi construit, les nécessaires changements de repère devenaient une partie propre de la géométrie.

La similitude n'est donc conçue que comme un outil apte à dire des résultats qui ne tiennent pas à l'espace de telle ou telle courbe. La similitude chez Comte n'est une transformation de l'espace qu'en ce sens là.

Un exemple est frappant, celui où il se donne une forme courbe dans le plan (figure 1) et organise un discours pour lui associer une équation polynomiale : il ne tente pas une interpolation par points à la manière de l'approximation à laquelle les ordinateurs nous ont habitués. Son empirisme tente d'atteindre la forme en se focalisant sur les singularités reconnues de la courbe, exprimables analytiquement, tangentes horizontales ou verticales qui sont des extrémums, inflexions où change la courbure, convexité et concavité se répondant[20].

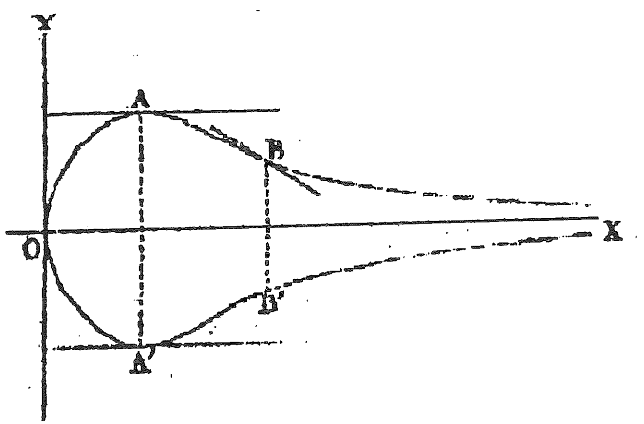


Figure 1

[19]TEGA, p. 10.

[20]La courbe en question est *a priori* posée sous la forme du carré de y égal à un quotient de deux polynômes, le numérateur étant une fonction linéaire, et le dénominateur étant une fonction affine du carré de x. Il s'agit d'ajuster ensuite les trois coefficients que ces polynômes comportent.

Incidemment, puisque Comte range en géométrie analytique tout ce qui, aujourd'hui, fait partie de l'étude élémentaire des fonctions, en gros l'essentiel de l'apprentissage mathématique dans les lycées français, on pourrait trouver là sa marque encore visible dans l'ordre pédagogique, sa marque historique parce qu'ayant figé un mouvement mathématique de la représentation des courbes.

Son ambition est d'obtenir une connaissance des formes de l'espace par le biais d'un classement qui ne soit pas réducteur du mouvement historique qui le porte, d'Euclide à Descartes. C'est cela la géométrie comparée. Il y a donc l'espoir de susciter une classification "naturelle", celle-ci s'opposant à l'artificialité des classifications présentes.

> Plus on méditera sur ce grand sujet de philosophie géométrique, à peine entrevu jusqu'ici, mieux on sentira que la classification des courbes planes d'après les degrés de leurs équations n'est pas plus rationnelle, au fond, que ne le serait une classification zoologique fondée sur la couleur ou sur la taille, etc., indépendamment de toute profonde comparaison organique[21].

A ce programme répondent les nombreux traités sur les courbes spéciales du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle[22], dans lesquels la faune des courbes est décrite à la double manière de l'histoire naturelle. D'une part, le naturel qui est une manière systématique à partir de toutes les représentations possibles avec tableau des "singularités", ou plutôt pour employer le langage comtien mais aussi cartésien, les affections de ces courbes. D'autre part, une manière de curiosité qui se manifeste par l'exhibition des propriétés évoquées par tel ou tel mathématicien, et qui paraissent ainsi provenir de l'histoire (mot qui figure bien dans histoire naturelle).

Ces traités ont toujours embarrassé les mathématiciens, rebelles au genre de l'encyclopédie. Il est difficile de voir en ces traités la genèse de la géométrie algébrique, mais on peut penser que celle-ci put débuter en réaction, afin de mettre de l'ordre dans le fouillis de toutes les courbes[23].

Il est possible de lire ailleurs, tellement ailleurs que je suis sûr de ne pouvoir qualifier cet ailleurs de suite de Comte que par son trait devenu élémentaire. La postérité véritablement mathématique de l'idée de Comte est en théorie des fonctions analytiques le théorème de Mittag-Leffler qui donne *a priori* la forme d'une fonction méromorphe lorsque l'on en connaît suffisamment bien les singularités (parties polaires)[24]. Le classement des singularités est une synthèse : il termine l'étude des formes analytiques.

Faute de pouvoir réaliser la "juste" classification qu'exigerait la géométrie comparée, faute donc de disposer de moyens de comparaison entre chacun des espaces associé à chaque courbe, Comte cherche l'identité des courbes. Que dit-on d'autre qu'une identité de forme, en effet, quand on assure que toutes les paraboles sont semblables ? Comme d'ailleurs tous les cercles,

[21]TEGA, p. 236.

[22]Les plus connus de ces traités sont ceux du Portugais Francesco Gomes Teixeira (*Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Coïmbre, Imp. de l'Université, 1908-1915; après une première version en espagnol, *Tratado de las curvas especiales notables*, publiée à Madrid en 1905), de l'Italien Gino Loria (*Spezielle algebraïsche und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, B.G. Teubner, 1902, traduit de l'italien par von Fritz Schutte), de l'Allemand Heinrich Wieleitner (*Spezielle ebene Kurven*, Leipzig; G.J. Goschen, 1908), du Français Henri Pierre Jean Brocard (*Courbes géométriques remarquables*, Paris, 1919), et jusqu'à l'Américain Robert Carl Yates, mais écrivant beaucoup plus tard (*A Handbook on Curves and their Properties*, Ann Arbor, J.W. Edwards, 1947).

[23]La différence est alors notable avec les ouvrages mentionnés dans la note précédente, comme on peut le constater par exemple sur l'ouvrage de Federigo Enriques, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable*, trad. fr. de M. Legaut, Paris, Gauthier-Villars, 1926. Il est intéressant de noter les différences en consultant la bibliographie d'une courte période fournie par H. Wieleitner, *Bibliographie der höheren Algebraische Kurven für die Zeitabschnitten 1890-1904*, Leipzig, Goschen, 1905.

[24]Voir W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, trad. J. Dhombres, Paris, Dunod, 1998, chapitre 13.

ou toutes les cissoïdes ! Question associée, pourquoi y-a-t-il plusieurs espèces d'ellipses ou d'hyperboles, la classification par la similitude dépendant alors de l'excentricité. En tout cas, puisque les différentes coniques se comportent différemment pour la similitude, l'identité de toutes les paraboles ne se résoudra pas par la seule classification cartésienne à partir du degré des courbes algébriques. Aussi utile qu'il puisse paraître, le degré n'est vraiment pas le bon critère de classification des courbes. Cependant, Comte travaille à contre-courant du mouvement de la géométrie intrinsèque et anticartésienne; selon lui, la méthode des coordonnées, loin de déposséder la géométrie de ses attributs phénoménologiques – la forme des courbes par exemple – procure à ceux-ci leur "solution" pleinement générale, d'après une convenable réduction du concret à l'abstrait[25].

Selon Comte, il n'est pas plus nécessaire de revenir à un avant de la géométrie analytique qu'il ne faut la dépasser par une nouvelle théorie. Il reste seulement, dans le cadre analytique auquel il se restreint, à abstraire des propriétés des espaces, c'est-à-dire à concevoir de nouveaux espaces.

Similitude de deux paraboles

Quelle garantie y a-t-il que la géométrie analytique élémentaire puisse régler la question de l'identité des courbes, leur similitude ? L'ancienne géométrie, celle des Grecs, ne pouvait raisonner sur des courbes en général; et Comte a éliminé d'emblée tout raisonnement qui joue de l'infini, par exemple par passage à la limite à partir de la triangulation des courbes. Il se prive ainsi de toute algèbre homologique, alors même que Cauchy venait de montrer, avec la théorie des fonctions holomorphes, tout le jeu possible sur la forme des courbes, forme entendue en un sens différent de celui de Comte[26]. Aussi, la technique qui va permettre de dire la similitude des courbes doit remonter au plus ancien, à la signification phénoménologique même de la similitude, telle qu'elle apparaît chez Euclide parlant de triangles semblables et avec comme figure type celle que nous donnons au théorème dit de Thalès. Le retour à Euclide n'est pas un luxe : il est imposé. Mais Comte assure qu'il est contenu dans l'idée de géométrie analytique chez Descartes. Ce dernier n'a-t-il pas assuré qu'il n'avait besoin pour sa *Géométrie* que du théorème de Thalès et du théorème de Pythagore !

Le point de vue est alors, pour démontrer la similitude de deux courbes, de vérifier que sont nécessairement semblables deux triangles génériques construits dans chacune des courbes. Voilà le général qui consiste à trouver dans "l'espace" de chacune des courbes deux couples de points destinés à être homologues. Par exemple les foyers F et F' pour les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, et un point commun 0 aux deux courbes, point double de l'homologie attendue. Dès lors, sont génériques les deux triangles OFM et $OF'M'$ ayant pour bases les deux segments homologues OF et OF', et pour sommet respectivement les points M et M' situés sur une même droite issue de O et coupant en M et M' les deux courbes (figure 2).

La similitude de ces deux triangles se constate par l'égalité de deux angles ϕ et ϕ'. Egalité que, tellement adaptée à la généralité de la courbe, l'équation cartésienne des courbes permet

[25] TEGA, p. 7.

[26] Une fois de plus, les travaux de Cauchy sont évités par Comte; il y aurait une étude fine à faire sur l'antagonisme intellectuel des deux hommes. L'un des ces antagonismes tient au rapport aux autres que met en place l'enseignement et la responsabilité qu'il procure. Cauchy n'a pas su créer autour de lui une école, n'a pas tenté de faire fructifier chez les autres ses propres résultats. Au moment où Comte écrit son *Traité*, le jeune Liouville abandonne toute revendication d'originalité sur le théorème qui porte son nom (toute fonction entière bornée est une constante), car Cauchy prétend qu'il s'agit d'une conséquence de sa théorie (ce qui est vrai), et qu'il l'avait indiquée déjà (ce qui est faux si l'on donne au verbe "indiquer" une signification publique).

de vérifier. Le point M étant sur la droite de pente m passant par l'origine, et l'équation de la parabole étant admise, $y^2 = 2px$, Comte vérifie que la tangente de l'angle ϕ est indépendante du paramètre p puisque l'on a $tg\phi = \frac{\frac{2p}{m}}{\frac{2p}{m^2} - \frac{p}{2}}$. Pour compléter cette preuve, il est nécessaire de remonter à la définition focale d'une parabole, qui est la définition première selon Comte qui s'est débarrassé d'une définition spatiale par le cône, "l'équation du lieu d'un point toujours équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe"[27]. Dans des axes convenables vient donc $y^2 = 2px$.

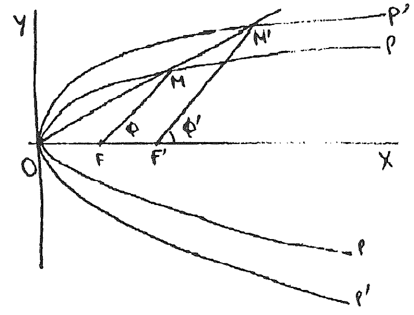


Figure 2
Il s'agit de la figure 39 du *Traité* de Comte, à laquelle a été rajoutée quelques lettres.

De cette manière, il est facile de déduire que toutes les paraboles sont semblables et que sont semblables toutes les ellipses de même excentricité, etc. Un critère d'identité des courbes a été trouvé. Il fonctionne sur l'équation : de sorte que, quelle qu'en soit l'origine – section de cône à base circulaire par un plan parallèle à une des génératrices, construction par foyer et directrice, trajectoire d'un boulet de canon –, toute parabole se ramène à une équation rapportée à des axes de coordonnées convenables où intervient un paramètre, le "paramètre" même si l'on adopte la terminologie sur les coniques remontant en français à Hérigone au XVII$^{\text{ème}}$ siècle (dans un livre paru un peu avant la *Géométrie* de Descartes).

La signification géométrique, ou issue d'Apollonius, de ce paramètre ne joue aucun rôle dans l'établissement de la similitude de toutes les paraboles. Comte œuvre à faire "oublier" ce sens ancien du paramètre au profit de celui de coefficient dans l'équation. Comte a donc réussi dans le monde scolaire : bien peu d'élèves savent lire le paramètre sur le dessin d'une parabole, et l'équation leur paraît indispensable pour le faire surgir. Il est étonnant que les maîtres d'aujourd'hui reprochent cette ignorance aux élèves, alors qu'il y a eu oubli organisé par la géométrie analytique elle-même. La signification intrinsèque du paramètre a changé d'Apollonius à Descartes. C'est Comte qui assume le seul nouveau sens comme un élémentaire.

Pourquoi ne pas s'arrêter là ? Comte ne serait pas un géomètre s'il ne dépassait pas ce calcul afin d'en saisir la signification. C'est-à-dire s'il ne débarrassait pas le raisonnement de ce qui le complique ou le localise par le choix d'axes de référence convenables. Mais il ne serait pas cohérent dans son entreprise philosophique s'il ne déduisait la similitude de l'aspect même de l'équation qui doit dire que dans le genre parabole il n'y a pas d'espèces, alors même qu'intervient un paramètre, donc a priori différentes courbes.

[27] TEGA, p. 64.

Partant d'une propriété phénoménologique de la similitude des figures rectilignes – "Il suffit de tourner un seul côté parallèlement à son homologue, pour que tous les autres se dirigent d'eux-mêmes parallèlement aux leurs" – il l'adapte au cas des courbes. Et découvre la similitude comme propriété fonctionnelle (classe de fonctions invariantes par homothétie). Il va plus loin. Il conçoit la similitude en elle-même, car elle revient à "une transposition d'axes indéterminée, portant à la fois sur la direction et l'origine"[28]. La similitude porte sur le repère, et ceci vaut pour toutes les courbes. Quelle différence entre espace et repère ? La différence qu'il y a entre la pensée géométrique de Comte et celle de Bourbaki.

Et Comte en déduit le moyen analytique et "élémentaire" de vérifier la similitude de deux courbes données par leurs équations dans des axes cartésiens quelconques par une extension manifeste de la méthode des indéterminées de Descartes.

> On examinera s'il devient possible d'identifier les deux équations
>
> $$f_2(x'\cos X' - y'\sin X' + a, x'\sin X' + y'\cos X' + b) = 0, f_1(mx, my) = 0,$$
>
> en disposant convenablement des quatre constantes arbitraires m, a, b, et X', dont les valeurs, nullement étrangères à la question, détermineront le rapport linéaire des deux courbes, et feront en même temps connaître exactement en quoi consiste la diversité effective de leurs situations actuelles[29].

La similitude se repère indépendamment des figures auxquelles elle peut s'appliquer; elle est en ce sens opération d'espace parce qu'elle affecte certains changements de repère cartésiens, indépendamment de ce qu'ils permettent de repérer. J'ai omis ce passage dans l'extrait du texte de Comte fourni pour commencer, parce que me paraît plus intéressant d'aller plus loin, de lire plus.

Comte ne termine pas ici sa théorie. Il éprouve le besoin d'expliquer plus, mais il qualifie ce plus de "méthode subsidiaire". Elle est efficace, mais elle n'est pas générale. Comte indique-t-il ainsi que le dernier mot n'est pas fourni, et que la géométrie, même élémentaire, n'est pas terminée ?

Son raisonnement consiste à dire que, sur l'équation réduite d'une courbe, la similitude impose une proportionnalité et donne une relation de moins que ce que donnerait l'identité effective de deux courbes, calculée par la méthode des indéterminées de Descartes. Dès lors, de la considération directe de l'équation réduite d'une parabole, $y^2 = 2px$, on déduit sans calcul, par l'examen de la seule dépendance du paramètre p, que toutes les paraboles sont semblables[30]. De même de la seule équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ on déduit que qu'il y ait similitude entre deux ellipses $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ il faut qu'existe un réel m tel que $a = ma'$ et $b = mb'$, soit $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Donc seules les ellipses de même excentricité sont semblables.

La question philosophique de l'identité des courbes a débouché sur un procédé géométriquement élégant de reconnaissance des formes semblables.

> On voit qu'une telle marche revient, en d'autres termes, à déduire les conditions de la similitude de celles de l'identité, en considérant, d'une part, que le nombre des unes doit toujours être inférieur d'une unité à celui des autres, et d'une autre part, que les diverses égalités linéaires simultanément prescrites par celles-ci doivent se changer en simples proportionnalités pour celles-là.[31]

[28] TEGA, p. 200.

[29] TEGA, p. 200. Cette portion du texte ne figure pas dans le document fourni, car je souhaitais attirer l'attention sur autre chose.

[30] Ainsi, avec $f_1(x, y, p_1) = y^2 - 2p_1x = 0$, l'homothétie fournit $f_1(mx, my, p_1) = m^2y^2 - 2p_1mx = 0$, soit $f_2(x, y, p_2) = y^2 - 2p_{1/m}x = 0$, ou encore $f_1(x, y, p_2) = 0$, avec comme paramètre nouveau, $p_2 = p_1/m$.

[31] TEGA, p. 203.

Dans cette méthode, la difficulté réside dans le sens à donner à l'équation réduite, ou canonique, d'une courbe, cette équation grâce à laquelle se résoudrait le problème de la géométrie comparée. Le problème du bon choix des axes de référence pour une courbe donnée, choix qui détermine l'équation réduite, revient chez Comte à caractériser l'espace associé à la courbe.

L'espace selon Comte

Même s'il ne s'agit dans l'exemple traité que de géométrie plane, en reprenant toute la démarche suivie on saisit la conception que se fait Comte de l'espace géométrique. Donc on le situe historiquement parce que ce n'est plus notre conception, ou plutôt ce n'est plus la conception que suggèrent les programmes de l'enseignement des mathématiques.

L'espace, chez Comte, est ce qui permet le raisonnement en vue du classement des formes, et ce qui règle la reconnaissance de leur identité. L'espace n'est pas une catégorie de la sensibilité, mais un outil. Dont il serait vain de vouloir démontrer l'existence, ou établir qu'il possède une réalité physique. Car il y a plusieurs espaces, selon les courbes algébriques considérées. Ce n'est pas plus un lieu indifférencié, qui ne serait représenté que par le jeu algébrique des coordonnées une fois adopté un repère.

Si la très grande majorité des figures fournies par Comte dressent impérieusement les deux axes rectangulaires, et indiquent dûment OX et OY, c'est à titre d'un ordre arbitrairement disposé sur les formes et selon la règle fameuse du *Discours de la méthode*. Le mot "coordonnées" est remarquablement adapté à cette conception, et il définit la position. Ce sont les coordonnées ou le repère qui permettent de parler d'une droite et d'une gauche, d'un haut et d'un bas, tout un vocabulaire moins conventionnel qu'ordonné en vue d'une reconnaissance des formes. Et tout ceci dès le cas de l'espace des droites, auquel il serait bon de réserver un nom, le rectilinéaire. Car l'on comprend l'un des rôles du repère, outil certes, mais outil désormais réglé par le rectilinéaire puisque les changements d'échelle s'en déduisent. Une droite n'est rectilinéaire qu'en comparaison d'autres droites, et d'abord celles du repère cartésien. A un coefficient près de normalisation $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, et à un signe près d'orientation, l'expression $ax + by + c$ fournit directement la distance du point de coordonnées (x, y) à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Bien sûr, si cette droite est l'axe des $y(x = 0)$, cette distance est tout simplement x, la coordonnée. En ce sens, parce qu'elle est toujours repère possible, une seule droite crée tout l'espace du rectilinéaire[32].

D'autres espaces viennent avec d'autres courbes et elles sont conçues comme des fonctions polynomiales. Ainsi le foyer de la parabole n'est pas seulement lié à la parabole, quoique non situé sur cette courbe considérée comme un ensemble de points ; il est une façon d'organiser l'espace de la parabole. Il permet, on l'a vu par l'équation, de déterminer l'identité entre toutes les paraboles.

Alors qu'il cherche à donner l'équation cartésienne de la parabole à partir de la définition par directrice et foyer, Comte parle distinctement des "documents" qui vont lui permettre de choisir le plus convenablement les axes du repérage[33]. Parmi ces documents figurent, en géométrie, les explications d'analyse de la variation des fonctions, extremum, tangentes horizontales ou verticales, etc. Mais ces documents peuvent être purement algébriques. Le foyer est ainsi ce point

[32] Jean Dhombres, La question du repère chez Descartes et dans la postérité cartésienne : essai sur le concept de banalisation en histoire des sciences, in J. F. Stoffel, P. Radelet-de Grave, Les "enfants naturels" de Descartes, *Réminiscience*, 4, Brepols, 2000, pp. 27-78.

[33] Il prend bien sûr l'axe de la parabole comme première droite de repère, mais abandonne la directrice au vu de l'équation cartésienne, car une parallèle à cette droite à distance p/2 du foyer lui paraît préférable, donnant l'équation réduite : n'intervient en effet qu'une seule fois le paramètre.

à partir duquel la distance à tout point de la parabole est une fonction affine des coordonnées : $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = ax+by+c$, où (α, β) sont les coordonnées du foyer. Que le foyer soit le seul point possédant cette propriété, évidente selon la définition par foyer et directrice d'une parabole, se confirme par la forme géométrique de la parabole : au moyen d'une propriété de pure représentation algébrique, celle-ci structure effectivement un espace.

L'espace n'est donc pas le lieu d'une improbable géométrie intrinsèque ; il est l'outil qui permet de nommer rigoureusement telle ou telle forme, comme par exemple la parabole que jamais un seul dessin ne permettra de nommer autrement que cette parabole là. L'espace est conçu comme une transformation sémantique, de cette parabole là à la parabole.

On ajouterait de l'inutile, ou une conception trop élargie à la Felix Klein, en disant que l'espace est le lieu des transformations qui permettent de repérer l'identique. Même si l'on précisait que c'est le lieu sur lequel opère le groupe des similitudes. Pour Comte, l'espace est ce groupe et il parle d'ailleurs de "transpositions d'axes indéterminés". Mais, selon lui, le futur de la géométrie ne se réduit pas à l'étude des changements d'axes : ceux-ci sont un outil pour la question de l'identité, outil rendu nécessaire par la pensée géométrique en tant qu'elle est analytique, et outil devenu objet. C'est la similitude, qui n'a rien d'autre à révéler, car elle est l'issue positive et complète de la réflexion mathématique sur ce chapitre. Comte sait clore un sujet. On le lui a beaucoup reproché. C'est aussi une forte méthode d'enseignement.

ANNEXE

Table abrégée des matières contenues dans le *Traité élémentaire de géométrie analytique*

GÉOMÉTRIE PLANE

PREMIÈRE PARTIE

Introduction générale

SECONDE PARTIE

Théories générales de géométrie plane, suffisamment accessibles à l'analyse ordinaire

TROISIÈME PARTIE

Discussion géométrique des équations algébriques à deux variables

QUATRIÈME PARTIE

Étude spéciale des courbes du second degré

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

PREMIÈRE PARTIE

Introduction générale

SECONDE PARTIE

Théorie générale des surfaces courbes,
d'après leur classification analytique par familles vraiment naturelles

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Figure 1

La page de titre des *Discorsi e dimostrazioni matematiche* de Galilée

DOSSIER 2, ÉTABLI PAR PATRICIA RADELET-DE GRAVE

Le mouvement des projectiles d'après Galilée

Le thème des coniques est central dans l'histoire des mathématiques et permet de la parcourir de l'Antiquité aux Temps Modernes. Ce thème joue un rôle particulier dans les relations entre mathématiques et physique. En effet, lorsque l'on renoncera au cercle parfait de Platon comme description des mouvements, les coniques le remplaceront, principalement l'ellipse et la parabole. L'abandon de l'orbite circulaire au profit de l'elliptique par Kepler est rapidement suivi par la proposition que fait Galilée du mouvement parabolique pour les projectiles. Et il ne faudra plus attendre que cinquante ans avant que Newton ne montre l'unité, via les coniques et la gravitation universelle, de ces deux types de mouvements, célestes et terrestres. Le fait que l'on renonce au cercle, dans le contexte physique du mouvement des masses, pour le remplacer par des objets mathématiquement étudiés depuis Apollonius, ne peut que faire réfléchir celui qui s'interroge sur les rapports entre physique et mathématiques.

Cette question interpelle d'autant plus fortement aujourd'hui que nous savons que ces coniques ne fournissent pas la description parfaite du mouvement des corps célestes, mais en constituent une bonne approximation. Que s'est-il passé? N'a-t-on fait appel aux coniques que parce qu'elles avaient fait l'objet d'études approfondies? Dans quelle mesure la nature présente-t-elle réellement ces coniques? Nous ne tenterons pas de répondre à ces questions dans ce qui suit, mais le fait qu'elle se pose nous semble justifier l'intérêt que l'on peut porter à la lecture de travaux anciens et fondateurs. Il nous a dès lors semblé intéressant d'analyser en détail le texte de Galilée sur le mouvement des projectiles. Texte qui constitue la quatrième et dernière journée des *Discorsi e dimostrazioni matematiche* publiés en 1638. Outre l'importance du texte lui-même, il nous a paru d'autant plus précieux que Galilée s'y veut professeur et qui plus est professeur du plus grand nombre. Son style, l'organisation du texte ne sont pas établis à la légère et méritent notre attention. Galilée entendait que son texte fût lu sans intermédiaire.

Notre étude est destinée au professeur qui, enseignant les mathématiques et plus précisément les propriétés de la parabole, désire illustrer son cours par un texte. Sa lecture trouverait également sa place dans un cours de mécanique et il nous semble important de souligner que c'est précisément dans le mariage de ces deux disciplines que réside l'un des enseignements les plus profonds de ce texte.

DU MOUVEMENT DES PROJECTILES

Extraits du texte original[1]

Théorème I - Proposition I

Un projectile qu'entraîne un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas, décrit au cours de son déplacement une trajectoire demi-parabolique.

[1] *Discorsi e dimostrazioni mathematiche intorno a due nuove scienze Attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali* fut publié, comme on peut le voir sur la reproduction de la page de titre (Fig. 1), à Leiden chez Elsevier, en 1638. Il est reproduit au volume VIII, *Le Opere di Galileo Galilei,* Edizione nazionale, Ed. Favaro, Barbera, Firenze, 1890-1909, pp. 9-318. Nous nous baserons sur la traduction française publiée par M. Clavelin, *Philosophies pour l'âge de la science,* Armand Colin, 1970, où nous avons corrigé quelques fautes de frappe dans les dénominations des points. Ce texte sera référé selon *Discorsi.*

. . .

SALVIATI : Je désire au contraire que vous les compreniez et grâce, à l'auteur lui-même qui, lorsqu'il me permit de voir son travail et parce que je n'avais pas non plus à ma disposition les livres d'Apollonius, s'efforça de me démontrer sans qu'aucune connaissance particulière soit requise, deux des propriétés essentielles de la parabole - les seules dont nous ayons besoin dans le présent traité. Ces propriétés sont également établies par Apollonius, mais après de nombreuses autres qu'il serait trop long d'examiner; aussi mon intention est-elle de suivre une voie plus brève, en dérivant purement et simplement la première propriété de la génération de la parabole, et en m'appuyant sur elle pour obtenir immédiatement la démonstration de la seconde. Soit donc la première, de ces propriétés.

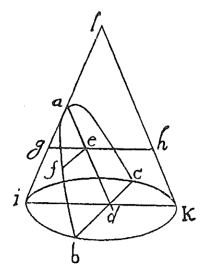


Figure 2

Représentons-nous un cône droit avec le cercle $ibkc$ pour base et pour sommet le Point l : si on le coupe par un plan parallèle au côté lk, on obtiendra la section bac, appelée parabole; sa base bc coupe à angle droit le diamètre ik du cercle $ibkc$, et son axe ad est parallèle au côté lk. Prenons un point quelconque f sur la ligne bfa et menons la droite fe parallèle à la base bd : je dis que le carré de bd a au carré de fe même rapport que l'axe da à sa partie ae. Par le point e faisons passer un plan parallèle au cercle $ibkc$ qui produira dans le cône une section circulaire dont le diamètre sera la ligne geh : comme bd est perpendiculaire au diamètre ik du cercle ibk, le carré de bd sera égal au rectangle formé par id et dk; et de même dans le cercle supérieur qui passe par les points g, f, h, le carré de fe sera égal au rectangle formé par ge et eh : par conséquent le carré de bd aura le carré de fe le même rapport que le rectangle idk au rectangle geh. Mais puisque ed est parallèle à hk, eh et dk qui sont également parallèles seront égaux; le rectangle idk aura ainsi avec le rectangle geh même rapport que id avec ge, c'est-à-dire que da avec ae : par conséquent entre le rectangle idk et le rectangle geh, c'est-à-dire entre le carré de bd et le carré de fe, existera le même rapport qu'entre l'axe da et sa partie ae, ce qu'il fallait démontrer.

Quant à la deuxième proposition nécessaire à la présente étude, nous l'établirons comme suit. Traçons une parabole dont l'axe ca est prolongé vers l'extérieur jusqu'en d, et par un point b quelconque menons la ligne bc parallèle à la base de la parabole; si nous prenons da de même longueur que la partie ca de l'axe, je dis alors que la droite tirée par les points d et b ne tombe pas à l'intérieur

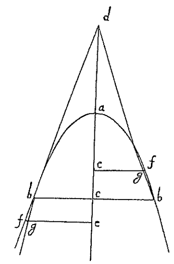


Figure 3

de la parabole, mais à l'extérieur, et de telle façon qu'elle lui est tangente au point b. Supposons, en effet, si cela est possible, qu'elle tombe à l'intérieur de la parabole, qu'elle la coupe en haut ou, après avoir été prolongée, en bas, et soit sur cette ligne un point g quelconque par lequel on fait passer la droite fge. Comme le carré de fe est plus grand que le carré de ge, il y aura entre le carré de fe et le carré de bc un rapport plus grand qu'entre le carré de ge et le carré de bc; et puisque, d'après la proposition précédente, le carré de fe est au carré de bc comme ea est à ac, ea sera avec ac dans un rapport plus grand que le carré de ge avec le carré de bc c'est-à-dire que le carré de ed avec le carré de dc (en effet, d'après les triangles dge [et dbc], ge est avec bc comme ed avec dc; mais la ligne ea est avec la ligne ac, c'est-à-dire avec ad, dans le même rapport que le quadruple du rectangle ead avec le quadruple du carré de ad, ou encore avec le carré de cd (lequel est égal à quatre fois le carré de ad) : par conséquent le quadruple du rectangle cad aura avec le carré de dc un rapport plus grand que le carré de ed avec le carré de dc, et le quadruple *du* rectangle ead sera plus grand que le carré de ed; or cela est faux, et il est plus petit, puisque les parties ea et ad de la ligne ed ne sont pas égales. Ainsi la droite db est tangente à la parabole en b, et ne la coupe pas ce que l'on devait démontrer.

. . .

SALVIATI : . . . Nous pouvons donc reprendre le texte pour voir comment il démontre sa première proposition, dans laquelle il entend prouver que la trajectoire décrite par un mobile pesant, alors qu'il descend d'un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et du mouvement naturel de chute, est une demi-parabole. Soit une ligne horizontale ou un plan ab, situé en hauteur, et sur lequel un mobile se meut d'un mouvement uniforme de a vers b; si le support que fournit le plan, disparaît en b, le mobile acquerra en outre, du fait de sa gravité, un mouvement naturel vers le bas le long de la perpendiculaire bn. Prolongeons directement le plan ab par la ligne be, pour représenter l'écoulement ou la mesure du temps et sur celle-ci marquons arbitrairement du nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, bc, cd, de; des points b, c, d, e, abaissons des lignes équidistantes de la parallèle bn; sur la première de celles-ci prenons une distance quelconque ci, puis sur la suivante une distance quadruple df, sur la troisième une distance neuf fois plus grande eh, et ainsi de suite sur les autres lignes en suivant la proportion des carrés de cb, db, eb, ou encore en raison double de ces mêmes lignes. Si nous supposons qu'un mobile entraîné d'un mouvement uniforme de b vers c subit en même temps une descente perpendiculaire égale à ci, à la fin de l'intervalle de temps bc il se trouvera en i. Le mouvement continuant, à la fin de l'intervalle de temps db, double de bc, la distance

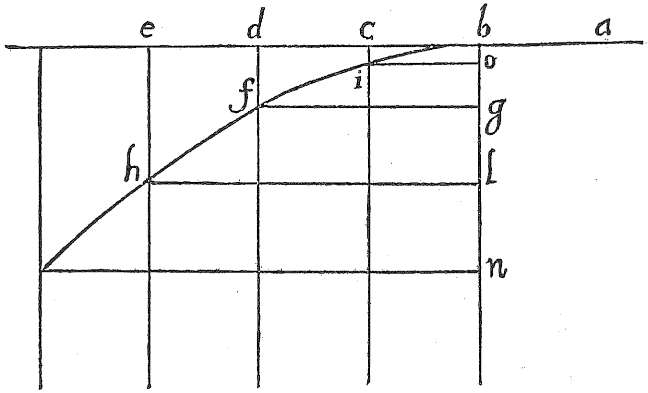


Figure 4

parcourue vers le bas sera le quadruple de la première distance ci; on a en effet démontré, dans le traité précédent, que, les espaces parcourus par un corps grave animé d'un mouvement accéléré, sont comme les carrés des temps; par conséquent la distance eh, franchie pendant le temps be, sera comme 9, d'où il s'ensuit manifestement que les espaces eh, df, ci sont entre eux comme les carrés des lignes eb, db, cb. Menons maintenant des points i, f, h, les droites io, fg, hl, équidistantes de be : les lignes hl, fg, io, seront égales respectivement aux lignes eb, db, cb de leur côté les lignes bo, bg, bl seront égales aux lignes ci, df, eh; le carré de hl sera au carré de fg comme la ligne lb à la ligne bg, et le carré de fg, sera au carré de io, comme gb est à bo : par conséquent les points i, f, h, sont situés sur une seule et même parabole. On démontrera de la même façon, en prenant une nombre quelconque d'intervalles de temps égaux et d'une grandeur arbitraire que, les points par lesquels passe un mobile animé d'un mouvement semblablement composé pendant ces mêmes intervalles de temps se trouvent sur une même ligne parabolique. D'où résulte notre proposition.

...

SAGREDO : On ne peut nier que le raisonnement soit nouveau, ingénieux et concluant; il n'en procède pas moins *ex suppositione,* car il suppose que le mouvement transversal demeure toujours uniforme, que le mouvement vers le bas conserve de même son mode propre qui est d'accélérer constamment en proposition du carré des temps, enfin que ces mouvements et leurs vitesses, en se combinant, ne s'altèrent ni ne se gênent, en sorte que la trajectoire du projectile, tout au long du mouvement, ne subit aucune transformation de nature : or cela, à mon avis, est impossible. Car c'est un fait que l'axe de la parabole le long duquel nous admettons que s'effectue le mouvement naturel des graves, se termine, par suite de sa perpendicularité à l'horizon, au centre de la Terre; et c'est un autre fait que la parabole s'écarte sans cesse de son axe; aucun projectile ne devrait donc jamais se diriger vers le centre de la Terre, ou s'il le fait, comme cela semble nécessaire, alors sa trajectoire doit se transformer en une autre courbe, fort différente d'une parabole.

...

Théorème II - Proposition II

...

SALVIATI : Poursuivant sa recherche, l'Auteur nous fait alors passer au cas d'un mobile mû à nouveau d'un mouvement composé de deux mouvements, l'un horizontal et uniforme, l'autre perpendiculaire mais naturellement accéléré, c'est-à-dire ceux-là mêmes dont dépendent le mouvement du projectile, et la trajectoire parabolique en chaque point de laquelle on cherche à déterminer l'*impeto* du mobile. En vue dei quoi l'Auteur établit en ces termes la manière, ou plutôt la méthode, permettant de mesurer cet *impeto*, sur la ligne même où le grave se meut vers le bas, d'un mouvement naturellement accéléré, à partir du repos.

Théorème III - Proposition III

...

Toutefois, avant d'aller plus loin, il me faut ici avertir d'une chose comme le mouvement dont nous allons parler est composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas (car c'est par un tel mélange qu'est formée et décrite la trajectoire d'un projectile, c'est-à-dire la parabole), nous sommes dans l'obligation de définir une commune mesure à l'aide de laquelle mesurer la vitesse, *l'impeto* ou le moment de l'un et l'autre mouvement; de plus comme les degrés de vitesse d'un mouvement uniforme sont innombrables et qu'un seul entre tous ces degrés (et non n'importe lequel) doit être réuni et composé avec le degré de, vitesse acquis grâce au mouvement naturellement accéléré, je n'ai pu trouver aucun moyen plus facile pour le déterminer que d'assumer un autre mouvement du même genre. Pour me faire mieux comprendre, soit la perpendiculaire ac élevée sur l'horizontale bc; ac sera la hauteur et cb l'amplitude de la demi-parabole ab, laquelle est engendrée par la composition de deux mouvements, dont l'un est celui du mobile quand il descend le long de ac, partant du repos en a, d'un mouvement naturellement accéléré, et dont l'autre est le mouvement uniforme transversal sur l'horizontale ad. L'*impeto* acquis en c après la descente ac est déterminé par la grandeur de cette même hauteur ac uniques et toujours semblable en effet est l'*impeto* d'un mobile, tombant de la même hauteur; en revanche sur l'horizontale ce n'est pas un mais d'innombrables degrés de vitesse qui peuvent être assignés aux mouvements uniformes. Afin de pouvoir isoler de tous les autres, et pour ainsi dire montrer du doigt, celui que je choisirai, je prolongerai la hauteur ca vers le haut et marquerai sur la ligne ainsi obtenue selon les besoins, la sublimité ae : car si je me représente un mobile tombant de cette sublimité, à partir du repos en e, il est évident que l'*impeto* qu'il acquerra au point a sera le même que celui- avec lequel je l'imaginerai en train de se mouvoir, après conversion de son mouvement sur l'horizontale ad; et ce degré de vitesse sera précisément celui par lequel, dans un temps égal à celui de sa descente le long de ea, il parcourra sur l'horizontale un espace double de la même distance ea. Tel est l'avertissement qu'il me semblait nécessaire d'introduire.

On notera en outre que j'appelle " amplitude " de la demi-parabole ab l'horizontale cb
"hauteur", c'est-à-dire ac, l'axe de la même parabole;
mais que je nomme "sublimité" la ligne ea dont le franchissement en chute libre, détermine l'*impeto* horizontal.

...

Comment déterminer l'*impeto* en chacun des points d'une parabole donnée, décrite par un projectile.

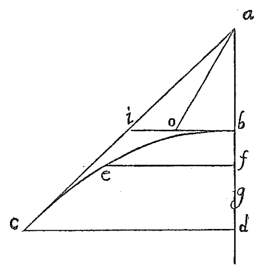


Figure 5

Soit la demi-parabole *bec* dont *cd* est l'amplitude, *db* la hauteur, et qui, prolongée vers le haut, rencontre en *a* la tangente à la parabole *ca*. Si l'amplitude *cd* est égale à la hauteur totale *da*, *bi* sera égal à *ba* et *bd* d'autre part, si nous convenons que *ab* lui-même, représente la mesure, du temps de chute le long de *ab*, ainsi du moment de vitesse acquis en *b* au terme de la descente *ab* à partir du repos en *a*, *dc* (qui est le double de *bi*) sera l'espace que le mobile parcourrait dans le même temps grâce à l'*impeto ab*, s'exerçant désormais sur une ligne horizontale; mais dans le même temps, un corps descendant le long de *bd*, à partir du repos en *b*, franchit la hauteur *bd* il est donc clair que le mobile qui, partant du repos en *a*, tombera le long de *ab*, puis verra son mouvement converti en mouvement horizontal avec l'*impeto ab*, parcourra un espace égal à *dc*. Toutefois lorsqu'il vient à descendre le long de *bd*, il franchit la hauteur *bd* et décrit la parabole *bc* dont l'*impeto* au point *c* est dû à la combinaison de l'*impeto* du mouvement transversal uniforme (dont le moment est comme *ab*) avec l'autre, *impeto* acquis après la descente *bd* au point *d*, ou encore *c* : et leurs moments sont égaux. Si donc nous admettons que ab est la mesure de l'un d'eux, soit celui du mouvement transversal uniforme, puis que *bi*, qui est égal à *bd*, mesure l'*impeto* acquis en *d* ou en *c*, la sous-tendue *ia* représentera la grandeur de l'*impeto* composé de l'un et de l'autre *impeto* - elle fournira- donc la quantité ou mesure du moment total par lequel se manifeste au point *c* l'*impeto* du projectile qui a suivi la parabole *bc*. Ce résultat présent à l'esprit, marquons sur la parabole un point quelconque *e*, où il s'agit de déterminer l'*impeto* du projectile. Menons l'horizontale *ef* et prenons *bg* moyenne proportionnelle entre *bd* et *bf* comme *ab* ou *bd*, donne par convention la mesure du temps et du moment de vitesse produit par la chute *bd*, à partir du repos en *b*, le segment *bg* donnera le temps ou plutôt la mesure du temps et de l'*impeto* au point f quand le mobile vient de *b*. Si donc nous prenons *bo* égal à *bg* et traçons la diagonale *ao*, celle-ci représentera la grandeur de l'*impeto* au point *e* : avec *ab* nous avons en effet une détermination du temps et de l'*impeto* en *b*, - *impeto* qui une fois dévié sur l'horizontale demeure identique à lui-même - et *bo* quant à lui détermine l'*impeto* en *f* ou en *e*, c'est-à-dire celui qu'engendre la descente, à partir du repos en *b*, sur la hauteur *bf* : or *ao* est égal en puissance à la somme de *ab* et *bo*. D'où suit clairement ce qui était demandé.

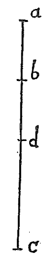


Figure 6

...

SALVIATI : ... Reprenons donc la vitesse et l'*impeto* acquis par un grave, tombant comme nous le disions, de la hauteur d'une pique, puisque telle est la vitesse dont nous voulons nous servir pour mesurer le cas échéant les autres vitesses et *impeto*, et supposons, par exemple, que le temps d'une telle chute soit de 4 secondes; pour déterminer à l'aide de cette mesure l'*impeto* d'un mobile au terme d'une descente quelconque, soit plus grande soit plus petite, l'erreur serait de conclure directement d'après le rapport de cette nouvelle hauteur avec la distance d'une pique et d'estimer, si l'on veut, qu'à une hauteur quadruple correspond l'acquisition d'une vitesse quadruple : en fait cela est faux, car dans le mouvement naturellement accéléré la vitesse augmente ou diminue non en proportion des espaces mais des temps, et ceux-là, comme il a déjà été démontré, varient comme les carrés de ceux-ci. C'est pourquoi si nous prenions sur une ligne droite une partie de cette ligne pour mesure de la vitesse, du temps et aussi de l'espace franchi en un tel temps (trois grandeurs que pour aller plus vite on représente souvent par un même segment), ni le temps ni le degré de vitesse relatifs à une autre distance ne seraient représentés par cette distance, mais bien par la ligne qui serait moyenne proportionnelle entre l'une et l'autre distance. je m'expliquerai mieux sur un exemple. Sur la ligne *ac*, perpendiculaire à l'horizon, nous désignons par *ab* un certain espace franchi par un grave qui descend d'un mouvement naturellement accéléré; bien qu'il soit possible de prendre une ligne quelconque, je représenterai le temps de ce parcours, pour plus de brièveté, par la même ligne *ab*, et je prendrai encore *ab* pour mesure de l'*impeto* et de la vitesse engendrés par un tel mouvement : ainsi pour toutes les distances, ultérieurement considérées les mesures s'effectueront à partir du segment *ab*. Après avoir fixé à notre guise, et au moyen d'une seule grandeur, l'expression de ces trois quantités fort différentes, savoir l'espace, le temps et l'*impeto*, proposons-nous de déterminer pour la hauteur *ac*, et le temps que durera la descente de *a* en *c*, et l'*impeto* que le mobile, aura acquis au point final *c* - l'évaluation s'effectuant par rapport au temps et à l'*impeto* mesurés pour la distance *db*. Questions auxquelles on répondra en prenant ad moyenne proportionnelle, entre *ac* et *ab*, et en affirmant que le temps requis, pour descendre le long de *ac* tout entier est comme le temps *ad* vis-à-vis du temps *ab*, par lequel on a figuré initialement le temps requis pour franchir *ab*. Nous dirons pareillement que l'*impeto* ou degré de vitesse que possédera le grave au point *c* est avec l'*impeto* qu'il possédait en *b* dans le même rapport que la ligne *ad* à la ligne *ab*, la vitesse, comme on sait, croissant en proportion directe du temps : conclusion dont l'Auteur bien qu'il l'ait prise pour postulat, a néanmoins voulu justifier l'application à la Proposition III.

...

Calculer et disposer sous forme de table les amplitudes de toutes les demi-paraboles que décrivent des projectiles lancés avec un même, *impeto*.

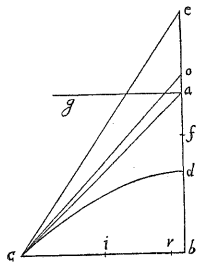


Figure 7

Il ressort des démonstrations antérieures que des paraboles données, leurs sublimités, jointes à leurs hauteurs, forment au-dessus de l'horizon des perpendiculaires d'égale longueur, alors ces paraboles sont décrites par des projectiles lancés avec un même *impeto* : en conséquence ces perpendiculaires doivent être comprises entre les mêmes lignes horizontales parallèles. Prenons la perpendiculaire ba égale à l'horizon cb, et joignons la diagonale ac : l'angle acb aura une valeur de 45°; divisons ensuite la perpendiculaire ba par le milieu en d : la demi-parabole dc, sera celle qui est décrite depuis la sublimité ad avec la hauteur db, et son *impeto* en c sera égal à celui d'un mobile qui, partant du repos en a, descend le long de la ligne ab; si maintenant l'on mène ag parallèle à bc, pour toutes les demi-paraboles, dont l'*impeto* sera égal à celui dont on vient de parler, la somme de la hauteur et de la sublimité sera égale à la distance comprise entre les parallèles ag et bc. De plus, comme il a déjà été établi que des demi-paraboles dont les tangentes s'écartent d'une même quantité, en plus ou en moins, d'une élévation de 45°, ont des amplitudes égales, les calculs que nous allons faire pour les plus grandes élévations serviront aussi pour les plus petites. Divisons ensuite en 10 000 parties la plus grande amplitude de projection, c'est-à-dire celle d'une demi-parabole dont l'angle d'élévation est de 45° : cette évaluation s'appliquera à la ligne ba ainsi qu'à l'amplitude de la demi-parabole bc. Nous choisissons ce nombre de 10 000, car nous nous servons dans ces calculs de la table des tangentes où telle est précisément la valeur de la tangente de 45°. Passant alors à l'essentiel, menons ce en formant un angle ecb plus grand (quoique toujours aigu) : le problème est de décrire la demi-parabole qui ait ec pour tangente et dont la sublimité, jointe à la hauteur, soit égale à la ligne ba elle-même. Partant de l'angle donné bce prenons, dans la table des tangentes, la valeur de la tangente be, et divisons be par le milieu en f; trouvons ensuite la troisième proportionnelle de bf et bi (moitié de bc), qui nécessairement sera plus grande que fa; et soit fo. On a ainsi découvert que la demi-parabole inscrite dans le triangle ecb avec ce pour tangente, et d'amplitude cb, aura bf pour hauteur et fo pour sublimité. Mais la longueur bo, prise en totalité, dépasse la distance comprise entre les parallèles ag et cb, alors qu'elle devrait lui être égale; si nous désirons donc qu'à la fois la parabole cherchée et la parabole dc soient décrites par des projectiles tirés de c avec le même *impeto* (et sans oublier qu'un nombre indéfini de paraboles semblables, plus grandes ou plus petites, peuvent être décrites à l'intérieur de l'angle bce), il nous faudra trouver une autre parabole,

semblable à dc, dont la sublimité ajoutée à la hauteur (celle-ci étant homologue à bc) sera égale à ba. Que, l'amplitude bc ait alors avec cr le même rapport que ob avec ba : on aura obtenu cr qui est précisément l'amplitude de la parabole ayant bce comme angle d'élévation, et dont la sublimité, jointe à la hauteur, est égale à la distance comprise entre les parallèles ga et eb, c'est-à-dire ce que l'on cherchait. L'opération par conséquent a lieu comme suit :

Ayant relevé la tangente de l'angle donné bce, on prend sa moitié, à laquelle on ajoute, fo troisième proportionnelle entre cette même moitié et la moitié de bc; puis on fait en sorte que bc ait avec une quatrième longueur même rapport que ob avec ba : cette longueur est cr, c'est-à-dire l'amplitude cherchée.

Prenons un exemple.
Soit l'angle ecb de 50 degrés; sa tangente sera 11 918, et sa moitié, c'est-à-dire bf, sera 5 959; la moitié de bc est 5 000; la troisième proportionnelle de ces deux moitiés est 4 195 qui, ajoutée à bf, donne 10 154 pour la longueur bo. Que le rapport de ob à ba, c'est-à-dire de 10 154 à 10 000, soit aussi celui de bc, c'est-à-dire de 10 000 (l'une et l'autre, en effet, sont tangentes de l'angle de 45 11) à une quatrième longueur : nous obtiendrons ainsi l'amplitude cherchée rc, soit 9 848, alors que bc (l'amplitude maxima) est égale à 10 000. Les amplitudes des paraboles entières auront une valeur double, c'est-à-dire 19 696 et 20 000; et telle est aussi l'amplitude de la parabole dont l'angle d'élévation est de 40 degrés, car elle diffère de l'angle de 45° par une même quantité.

AMPLITUDES DES DEMI-PARABOLES DECRITES PAR LE MEME *impeto*

Degrés		Degrés	Degrés		Degrés
45	10000		69	6.692	21
46	9994	44	70	6428	20
47	9976	43	71	6157	19
48	9945	42	72	5878	18
49	9902	41	73	5592	17
50	9848	40	74	5300	16
51	9782	39	75	5000	15
52	9704	38	76	4694	14
53	9612	37	77	4383	15
54	9511	36	78	4067	12
55	9396	35	79	3746	11
56	9272	34	80	3420	10
57	9136	33	81	3090	9
58	8989	32	82	2756	8
59	8829	31	83	2419	7
60	8659	30	84	2079	6
61	8481	29	85	1736	5
62	8290	28	86	1391	4
63	8090	27	87	1044	3
64	7880	26	88	698	2
65	7660	25	89	349	1
66	7431	24			
67	7191	23			
68	6944	22			

1 Le plan du texte de Galilée

1. Introduction.
2. Les deux propriétés mathématiques de la parabole utilisées.
3. Réflexion mécanique sur le mouvement de chute.
4. Mise en place des éléments mécaniques et de leur description sur la parabole.
5. Détermination de l'*impeto* en chaque point de la parabole.
6. Lien mécanique entre *amplitude, sublimité et hauteur*.
7. Les 45°, cas particulier et la symétrie par rapport à 45°.
8. Si l'on a $\frac{h_1}{S_1} = \frac{S_2}{h_2}$, alors les amplitudes sont les mêmes et l'*impeto* également.
9. *Impeto* et amplitude fournissent la hauteur.
10. Table de même *impeto*.

2 Introduction

Les deux premières journées des Discours de Galilée sont consacrées à la résistance des matériaux, et les deux suivantes sont consacrées à l'étude du mouvement. Galilée divise cette dernière étude en trois parties. Les deux premières abordent le mouvement uniforme, puis le mouvement uniformément accéléré et cela constitue la troisième journée. La quatrième journée est consacrée au "mouvement violent", c'est-à-dire au mouvement d'un projectile. Cette dernière étude est un aboutissement; elle vient à la fin du livre comme dernier chapitre. C'est la fin d'un crescendo dans la difficulté des problèmes traités. La difficulté est mécanique, et on commence par le mouvement rectiligne uniforme, puis on aborde le mouvement uniformément accéléré et finalement la composition des deux dans le mouvement du projectile. Difficulté mathématique puisque les premiers mouvements constituent un problème linéaire, alors que les seconds sont quadratiques. La difficulté du dernier réside dans la manière de composer les deux premiers.

> Dans la recherche que j'aborde à présent, je m'efforcerai de mettre en lumière et d'établir sur de fermes démonstrations certaines des conséquences particulièrement importantes et dignes d'être connues, qu'entraîne pour un mobile le fait d'être animé d'un double mouvement, à savoir un mouvement uniforme et un mouvement naturellement accéléré : car de ce genre paraît bien être le mouvement que nous attribuons aux projectiles[2].

Galilée poursuit en décrivant la génération d'un tel mouvement. Il rappelle brièvement les éléments qui ont déjà été établis dans les chapitres précédents de son livre et que l'enseigné doit avoir à l'esprit.

> J'imagine qu'un mobile a été lancé sur un plan horizontal d'où l'on a écarté tout obstacle; il est déjà certain, d'après ce qu'on a dit ailleurs plus longuement, que son mouvement se poursuivra uniformément et éternellement sur ce même plan, pourvu qu'on le prolonge à l'infini[3].

Il rappelle le principe d'inertie : en l'absence de forces extérieures, un solide poursuit éternellement son mouvement rectiligne uniforme. Cela étant acquis, que va-t-on modifier à présent ?

> Supposons en revanche *que le plan* soit limité et situé à une certaine hauteur : le mobile que j'imagine doué de gravité, parvenu à l'extrémité du plan et continuant sa course, ajoutera à son précédent mouvement uniforme et indélébile la tendance vers le bas que lui confère sa gravité : le résultat sera ce mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas que j'appelle projection[4].

Tout est dit, la description est parfaite, il reste à la mathématiser pour permettre la mesure grâce à l'expérience. Telle sera la tâche effectuée dans la suite du chapitre qui se termine sur un tableau de mesures expérimentales.

Les deux propriétés mathématiques de la parabole utilisées

La première propriété : une sorte d'équation de la parabole

[2] *Discorsi*, p. 205.
[3] *Discorsi*, p. 205.
[4] *Discorsi*, p. 205.

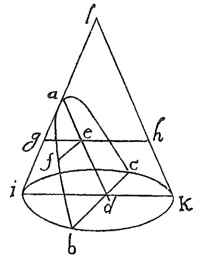


Figure 8
La parabole comme section conique chez Galilée

Cette première proposition est présentée sous la forme suivante, f étant un point quelconque de la parabole, intersection d'un cône droit avec un plan parallèle à une génératrice lh (Figure 8),

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae}.$$

La démonstration, celle d'Apollonius mais elle est refaite pour le profit du lecteur supposé sans accès à un livre de référence, est faite dans l'espace, sur un cône où il trace un cercle parallèle à la base et passant f. Sur le cercle de base, on a la relation de la puissance du point d

$$bd^2 = id.dk.$$

De même dans le cercle supérieur

$$fe^2 = ge.eh.$$

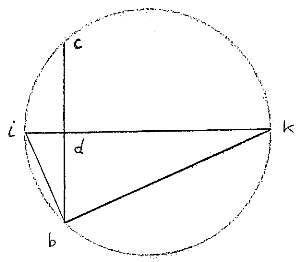


Figure 9. Coupe horizontale du cône

Pour montrer ces relations de puissance, reproduisons le cercle de base $ibkc$ avec le point d qui se trouve dans le plan de la parabole et qui, dans ce cercle, est projection sur l'axe ik de c comme de b. Le théorème de Pythagore nous donne

$$ik^2 = ib^2 + kb^2.$$

Et l'on peut introduire $ik = id + dk$

$$id^2 + dk^2 + 2id.dk = ib^2 + kb^2.$$

Mais avec le théorème de Pythagore encore, $ib^2 = id^2 + db^2$ et $kb^2 = dk^2 + db^2$.

Donc

$$id^2 + dk^2 + 2id.dk = id^2 + db^2 + dk^2 + db^2.$$

soit

$$id.dk = db^2.$$

En divisant la première relation par la seconde pour les deux cercles, on obtient

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id.dk}{ge.eh}.$$

Par construction, $ed//hk$ et $eh//dk$ donc $eh = dk$ et la relation devient

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id}{ge}.$$

Mais les points $agide$ sont dans le plan de la parabole et forment un triangle.

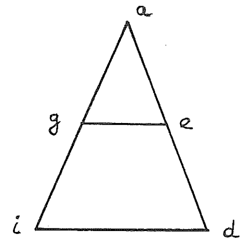


Figure 10. Section transversale du cône

On a par

$$\frac{id}{ge} = \frac{da}{ae}.$$

Ce qui achève la démonstration :

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae}.$$

Il nous appartient à présent de nous interroger sur le sens de cette propriété. Plaçons-nous dans le plan de la parabole et rappelons l'équation $y = ax^2$.

Relisons sur la figure la relation établie en la traduisant dans un langage qui nous est plus habituel, celui des coordonnées x et y que Descartes allait introduire en 1637.

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae},$$

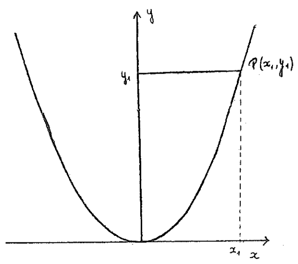


Figure 11. La parabole en coordonnées cartésiennes

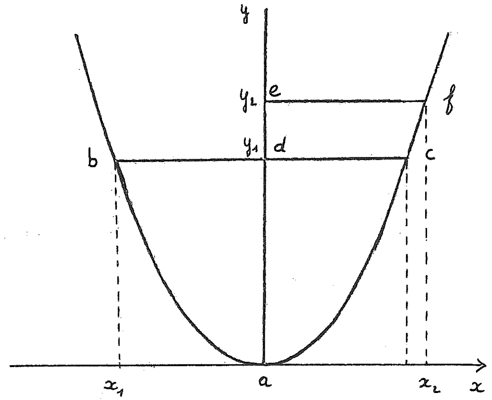


Figure 12. Lecture de la relation donnée par Galilée

$$\frac{{x_1}^2}{{x_2}^2} = \frac{y_1}{y_2},$$

où nous voyons apparaître une relation entre les coordonnées (x_1, y_1) du point b et les coordonnées (x_2, y_2) d'un autre point f de la parabole. L'apparition d'un tel rapport ne doit pas nous étonner à une époque où la théorie des proportions est constamment maniée. On l'a bien vu par la démonstration même de Galilée. Le fait que les coordonnées (x, y) soient reliées par la relation $x^2 = y$, autrement dit par l'équation de la parabole, est donc la propriété qui sous-tend celle de Galilée. Seule change la présentation de cette équation. Galilée utilise non pas deux coordonnées, mais quatre, correspondant à deux points : quels que soient deux points de la parabole, le rapport de leurs distances à l'axe vertical, bd ou fe, doit être égal au rapport des carrés des distances à l'axe horizontal da et ae.

2.1 La seconde propriété

Cette propriété donne une construction de la tangente en un point quelconque de la parabole :

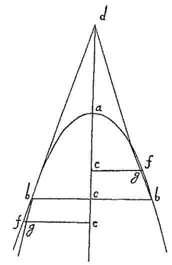


Figure 13.
Propriété de la tangente chez Galilée, deuxième figure

L'énoncé sous forme de propriété serait : Si db est tangente à la parabole en b elle coupe l'axe de la parabole en un point d symétrique de la projection c de b sur l'axe, c'est-à-dire tel que $ca = ad$.

La démonstration se fait par l'absurde. Admettons que la droite issue de b et qui coupe l'axe en d de manière à ce que $da = ac$, recoupe la parabole en un autre point.

On trace fge perpendiculaire à l'axe de la parabole. Si f est au delà de b (partie gauche de la Figure 13) comme fe est plus grand que ge, on aura

$$\frac{fe^2}{bc^2} > \frac{ge^2}{bc^2}.$$

Par la proposition précédente, on sait que

$$\frac{fe^2}{bc^2} = \frac{ea}{ac},$$

et donc

$$\frac{ea}{ac} > \frac{ge^2}{bc^2}.$$

En considérant les triangles dge et dbc de cette même figure, on a la relation de similitude

$$\frac{ge^2}{bc^2} = \frac{ed^2}{cd^2}$$

et donc

$$\frac{ea}{ac} > \frac{ed^2}{cd^2}.$$

Mais par construction $ac = ad$, donc

$$\frac{ea}{ac} = \frac{ea}{ad},$$

en multipliant haut et bas par $4ad$ on obtient

$$\frac{ea}{ad} = \frac{4ea.ad}{4ad.ad}.$$

Comme $2ad = cd$, on trouve

$$\frac{ea}{ad} = \frac{4ea.ad}{cd^2},$$

qui doit être plus grand que

$$\frac{ed^2}{cd^2}.$$

C'est-à-dire

$$4ea.ad > ed^2,$$

ce qui est faux, parce qu'ainsi a ne peut être au milieu de ed. Par construction en effet a est au milieu de cd et e et c sont distincts. Pour le montrer, Galilée fait appel à une proposition d'Euclide : dans un segment de découpé en deux parties égales par p et en parties inégales par a, on a

$$ea.ad < dp^2.$$

Puisque dp est la moitié de ed

$$4dp^2 = de^2.$$

Soit

$$4ea.ad < ed^2,$$

ce qui est l'égalité contraire.

Figure 14. Lemme d'Euclide

L'inégalité du lemme d'Euclide peut se voir immédiatement sur la Figure 15 puisque l'aire du rectangle $ea.ad$ est égale à l'aire du carré dp^2 moins l'aire du petit carré hachuré pa^2. On retrouve algébriquement ce même petit carré en comparant l'expression de

$$\begin{aligned} ep^2 &= ep.ea + ep.ap \\ &= dp.ea + ep.ap \\ &= dp.ea + ea.ap + ap^2 \\ &= (dp + pa)ea + ep^2 \\ &= ad.ea + ap^2. \end{aligned}$$

Réflexion purement mécanique sur le mouvement de chute

Galilée décrit le mouvement[5] d'un corps lancé sur un plan horizontal qui s'arrête en un point b.

[5] cf. supra

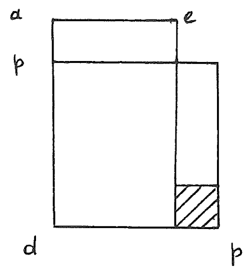


Figure 15.
Démonstration géométrique du lemme d'Euclide

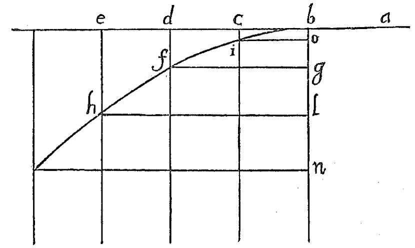


Figure 16.
Figure de Galilée sur le mouvement de chute

> Soit une ligne horizontale ou un plan ab, situé en hauteur, et sur lequel un mobile se meut d'un mouvement uniforme de a vers b.[6]

Ce corps parcourt donc des espaces égaux en des temps égaux.

> Si le support que fournit le plan disparaît en b, le mobile acquerrera en outre, du fait de sa gravité, un mouvement naturel vers le bas le long de la perpendiculaire bn.[7]

Ce mouvement de chute verticale simple a déjà été étudié par Galilée. Il sait que le corps parcourt en tombant des espaces qui sont comme les carrés des temps. Donc si l'on commence avec un temps $= 1, 2, 3, etc.$, on aura la série $1, 4, 9, \ldots$ Galilée poursuit en prenant bc comme axe des temps.

> Prolongeons directement le plan ab par la ligne be, pour représenter l'écoulement ou la mesure du temps, et sur celle-ci marquons arbitrairement du nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, bc, cd, de[8].

[6] *Discorsi*, p. 208.
[7] *Discorsi*, p. 208.
[8] *Discorsi*, p. 208-209.

Des points b, c, d, e, abaissons des lignes équidistantes de la parallèle bn; sur la première de celles-ci prenons une distance quelconque ci, puis sur la suivante une distance quadruple df, sur la troisième une distance neuf fois plus grande eh, et ainsi de suite sur les autres lignes en suivant la proportion des carrés de cb, db, eb, ou encore en raison double de ces mêmes lignes[9].

C'est la construction point par point de la courbe de chute en combinant, sans interférence, un mouvement rectiligne et uniforme et un mouvement accéléré vertical. Il reprend son explication en termes plus mécaniques. Sur ae le mobile a, dû à son inertie, un mouvement rectiligne et uniforme. La distance qu'il parcourt est directement proportionnelle au temps. Après un temps bc, il a parcouru une distance bc. En même temps il tombe verticalement d'un mouvement accéléré. Les espaces verticaux qu'il parcourt dans sa chute son proportionnels aux carrés des temps. Pendant qu'il parcourt bc, il tombe de ci et se trouve donc en i. Après le temps db, il aura parcouru vers le bas une distance quadruple de ci, il sera en f. Retraçant verbalement la (Figure 16), Galilée aboutit à

$$\frac{fg^2}{io^2} = \frac{gb}{bo}.$$

Ce qui est la première propriété mathématique de la parabole donnée par Galilée, où nous avons reconnu l'équation $y = ax^2$. Galilée démontre ensuite la réciproque par l'absurde, puis Sagredo soulève une objection.

> On ne peut nier que le raisonnement soit nouveau, ingénieux et concluant; il n'en procède pas moins ex suppositione, car il suppose que le mouvement transversal demeure toujours uniforme, que le mouvement vers le bas conserve de même son mode propre qui est d'accélérer constamment en proportion du carré des temps, enfin que ces mouvements et leurs vitesses en se combinant, ne s'altèrent ni ne se gênent, en sorte que la trajectoire du projectile, tout au long du mouvement, ne subit aucune transformation de nature : or cela à mon avis est impossible[10].

Il souligne ainsi le fait que les deux mouvements ne doivent en aucun cas interférer.

Mise en place des éléments mécaniques et de leur description sur la parabole

Le Théorème III, Proposition III traite de la chute verticale accélérée qui a déjà été utilisé du point de vue mathématique. Galilée y donne une relation entre l'*impeto* en un point quelconque et en un point de référence. Ce point de référence, noté c sur la figure, est tel que ac représente à la fois le temps de la chute, le trajet et l'*impeto*. L'*impeto* est une grandeur encore imprécise chez Galilée. Selon lui, un poids acquiert un certain *impeto* après une chute d'une certaine hauteur. Pour nous, il est lié à l'énergie cinétique, et serait proportionnel au carré de la vitesse. Mais Galilée l'utilise aussi comme une impulsion. Cette fois, l'*impeto* serait proportionnel à la vitesse. Il n'est pas possible de lever cette ambiguïté, une ambiguïté qui va se perpétuer.

La relation que Galilée établit est

$$\frac{imp_b}{imp_c} = \frac{as}{ac}.$$

> Marquons as moyenne proportionnelle entre ba et ac : nous allons démontrer que l'*impeto* en b est à l'*impeto* en c comme la ligne sa est à la ligne ac[11].

[9] *Discorsi*, p. 209.
[10] *Discorsi*, p. 210.
[11] *Discorsi*, p. 216.

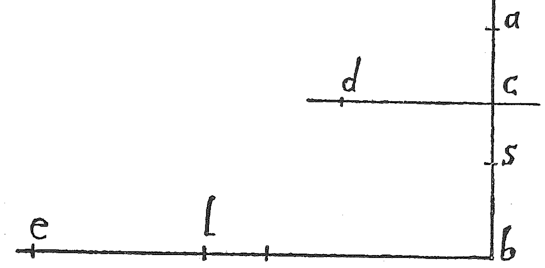


Figure 17.
Galilée établit des proportions entre l'espace vertical parcouru, le temps de parcours et l'*impeto* acquis

Le fait que as soit moyenne proportionnelle revient à écrire

$$\frac{ba}{as} = \frac{as}{ac}$$

ou

$$as^2 = ba.ac.$$

Galilée revient sur cette moyenne proportionnelle un peu plus loin dans son texte.

> Dans le mouvement naturellement accéléré la vitesse augmente ou diminue, non en proportion des espaces mais des temps, et ceux-là, comme il a été démontré, varient comme les carrés de ceux-ci[12].

Figure 18.
Détermination de la vitesse de la chute accélérée en un point, Galilée

[12] *Discorsi*, p. 221.

Après avoir fixé à notre guise, et au moyen d'une seule grandeur, l'expression de ces trois quantités fort différentes, savoir l'espace, le temps et l'*impeto*, [après le premier élément de temps] proposons nous de déterminer pour la hauteur ac, et le temps que durera la descente de a en c, et l'*impeto* que le mobile aura acquis au point final c - l'évaluation s'effectuant par rapport au temps et à l'*impeto* mesurés pour la distance ab.

Il s'agit en fixant la distance ab de fixer les unités de mesures.

Questions auxquelles on répondra en prenant ad moyenne proportionnelle entre ac et ab, et en affirmant que le temps requis pour descendre le long de ac tout entier est comme le temps ad vis-à-vis du temps ab, par lequel on a figuré initalement le temps requis pour franchir ab. Nous dirons pareillement que l'*impeto* ou degré de vitesse que possédera le grave au point c est avec l'*impeto* qu'il possédait en b dans le même rapport que la ligne ad à la ligne ab, la vitesse, comme on sait, croissant en proportion directe du temps[13].

Galilée nous dit que as mesure le temps de chute de a à b. Autrement dit le rapport qu'il trouve dit que les *impeto* sont dans le rapport des temps de chute.

Ainsi apparaît clairement le moyen de mesurer l'*impeto*, ou moment de vitesse, sur la ligne où a lieu le mouvement de descente, et cet *impeto* par définition augmente en raison directe du temps[14].

Galilée marque une pause.

Toutefois, avant d'aller plus loin... nous sommes dans l'obligation de définir une commune mesure à l'aide de laquelle mesurer la vitesse, l'*impeto* ou le moment de l'un et l'autre mouvement; de plus comme les degrés de vitesse d'un mouvement uniforme sont innombrables, et qu'un seul entre tous ces degrés (et non n'importe lequel) doit être réuni et composé avec le degré de vitesse acquis grâce au mouvement naturellement accéléré[15].

Galilée veut dire ici que l'on peut donner un mouvement rectiligne uniforme équivalent à n'importe quelle vitesse. Il s'agit donc de se donner la vitesse uniforme. Le *mouvement naturellement accéléré* a par contre un degré de vitesse en chaque point car Galilée admet tacitement que le corps part du repos.

Comment va-t-il déterminer la vitesse uniforme?

Pour mieux me faire comprendre, soit la perpendiculaire ac, élevée sur l'horizontale bc; ac sera la hauteur et cb l'amplitude de la demi-parabole ab, laquelle est engendrée par la composition de deux mouvements, dont l'un est celui du mobile quand il descend le long de ac, partant du repos en a, d'un mouvement naturellement accéléré, et dont l'autre est le mouvement uniforme transversal sur l'horizontale ad. L'*impeto* acquis en c après la descente ac est déterminé par la grandeur de cette même hauteur ac : unique et toujours semblable en effet est l'*impeto* d'un mobile tombant de la même hauteur; en revanche sur l'horizontale ce n'est pas un, mais d'innombrables degrés de vitesse qui peuvent être assignés aux mouvements uniformes. Afin de pouvoir isoler de tous les autres, et pour ainsi dire montrer du doigt, celui que je choisirai, je prolongerai la hauteur ca vers le haut et marquerai sur la ligne ainsi obtenue selon les besoins, la sublimité ae : car si je me représente un mobile tombant de cette sublimité, à partir du repos en e, il est évident que l'*impeto* qu'il acquerra au

[13]*Discorsi*, p. 222.
[14]*Discorsi*, p. 217.
[15]*Discorsi*, p. 210.

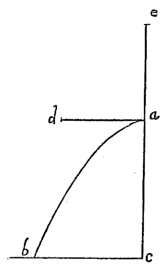


Figure 19.
Galilée. Calcul de l'*impeto* après une chute parabolique d'une hauteur déterminée

point a sera le même que celui avec lequel je l'imaginerai en train de se mouvoir, après conversion de son mouvement, sur l'horizontale ad; et ce degré de vitesse sera précisément celui par lequel, dans un temps égal à celui de sa descente le long de ea, il parcourra sur l'horizontale un espace double de la même distance ea[16].

Galilée compose un mouvement vertical naturellement accéléré, partant du repos en a avec un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse est déterminée de la manière suivante : le corps est lâché sans vitesse initale au point e, il tombe ensuite librement de e en a où on le dévie horizontalement. Il aura donc en a une vitesse qui pour nous est déterminée par la relation

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2.$$

Pour Galilée, c'est le degré de vitesse acquis après la chute ea qui est lié à l' *Impeto* acquis après cette chute. Pour comprendre cette curieuse manière de mesurer la vitesse, il faut rappeler que la mesure du temps est difficile pour Galilée. Les résultats de ces mesures sont mauvaises, ce qui rend mauvaises les mesures de la vitesse comme nous l'entendons. Une longueur, ou une hauteur se mesure beaucoup plus aisément et beaucoup plus précisément.

L'idée qui consiste à laisser tomber verticalement un objet sur sa trajectoire est jugée digne de Platon par Galilée. L'idée originale qui ne semble pas être chez Platon consiste à transformer un mouvement de chute rectiligne et accélérée d'une planète en un mouvement circulaire et perpétuel. Telle eut été la manière de procéder par Dieu au moment de la création pour choisir les vitesses de rotation des planètes. Notons qu'en 1738, Daniel Bernoulli dans ses *Commentationes de immutatione et extensione principii conservationis virium vivarum, quae pro motu corporum coelestium requiritur*[17], fixera encore de cette manière les conditions initiales dans le cas des mouvements planétaires. L'idée de Galilée est plus générale que l'idée originale attribuée à Platon puisqu'il ne s'agit pas d'une planète, ni d'un mouvement circulaire.

Les éléments mécaniques ayant été présentés, il faut à présent mettre en place les éléments mathématiques correspondants.

[16]*Discorsi*, p. 217.
[17]Commentarii academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Vol. X, 1738 (1747), pp. 116-124, reproduit dans *Die Werke von Daniel Bernoulli,* Vol. 3, Basel, Birkhäuser, 1987, p. 160.

On notera en outre que j'appelle "amplitude" de la demi-parabole *ab* l'horizontale *cb*; "hauteur" c'est-à-dire *ac*, l'axe de la même parabole; mais que je nomme "sublimité" la ligne *ea* dont le franchissement en chute libre, détermine l'*impeto* horizontal.

Ces définitions ne correspondent pas à des grandeurs intrinsèques de la parabole; aucun lien avec l'emplacement du foyer ou de la directrice n'est donné avec le paramètre.

Détermination de l'*impeto* en chaque point de la parabole

Pour ce faire, Galilée présente dans le Problème I - Proposition IV, une situation à première vue particulière.

Soit la demi-parabole *bec* dont *cd* est l'amplitude, *db* la hauteur, et qui, prolongée vers le haut, rencontre en *a* la tangente à la parabole *ca*. Si l'amplitude *cd* est égale à la hauteur totale *da*, *bi* sera égal à *ba* et *bd*[18].

En effet, il prend le cas d'une tangente à 45°. Comme, nous le verrons, l'angle de 45° va jouer un rôle important dans la suite, on est tenté de croire à une simplification injustifiée de Galilée. Mais regardons les choses autrement. Toute parabole à en un certain point une tangente à 45°. Quel est ce point? Il s'agit du point d'où une perpendiculaire à l'axe rencontre l'axe au foyer. Si nous regardons la parabole placée, comme l'entend Galilée, verticalement avec le sommet au plus haut, cette perpendiculaire est horizontale. Il s'agit ici de l'amplitude *cd*. Dans ce cas toujours, la hauteur galiléenne *bd* est la distance focale, le foyer est en *d*. Et la sublimité *ab* qui est égale à la distance focale représente la distance du sommet à la directrice. La sublimité comme la hauteur sont le demi paramètre de la parabole. En définissant la parabole au moyen de la tangente à 45°, Galilée ne fait rien d'autre que définir le paramètre de la parabole. Il ne traite donc pas un cas particulier. Mais retenons que pour Galilée la hauteur n'est pas synonyme de demi paramètre. La hauteur n'est le demi paramètre que si on considère la chute jusqu'à ce point particulier où la tangente est de 45°. Après cette digression importante reprenons le sujet réel de la Proposition IV. Il s'agit de déterminer l'*impeto* en un point quelconque de la parabole définie de la manière qui vient d'être décrite. Le résultat est obtenu en composant en chaque point de la parabole l'*impeto* dû au mouvement rectiligne uniforme avec celui qui en ce point est dû au mouvement de chute naturelle et accélérée. La composition se fait suivant la loi connue du parallélogramme que Galilée est autorisé à utiliser en chaque point car l'*impeto* dû à la chute verticale accélérée est fixe et connu en chaque point même si il varie de point en point. L'*impeto* dû au mouvement rectiligne uniforme est toujours le même ici *ib*. Il s'agit d'un *impeto* unitaire dû à une chute d'une distance unitaire en un temps unitaire. L'*impeto* dû au mouvement accéléré se détermine en chaque point de la manière suivante :

Marquons sur la parabole un point quelconque *e*, où il s'agit de déterminer l'*impeto* du projectile. Menons l'horizontale *ef* et prenons *bg* moyenne proportionnelle entre *bd* et *bf* [les distances verticales parcourues jusqu'à *d* et jusqu'à *e*] comme *ab*, ou *bd*, donne par convention la mesure du temps et du moment de vitesse produit par la chute *bd* à partir du repos en *b*, le segment *bg* donnera le temps ou plutôt la mesure du temps et de l'*impeto* au point *f* quand le mobile vient de *b*[19].

Ce qui permet à Galilée de conclure en appliquant la loi du parallélogramme.

[18]*Discorsi*, p. 219.
[19]*Discorsi*, p. 219-220.

Si donc nous prenons *bo* égal *bg* et traçons la diagonale *ao*, celle-ci représentera la grandeur de l'*impeto* au point *e*[20].

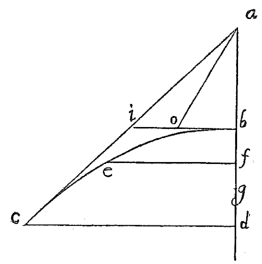


Figure 20.
Calcul de l'*impeto* en chaque point de la parabole

Lien mécanique entre *amplitude, sublimité et hauteur*

Galilée pose dans Proposition V une sorte de problème inverse. Il ne s'agit plus de déterminer la trajectoire parabolique suivie par un projectile mais étant donnée une parabole de déterminer de quelle hauteur il faut laisser tomber un poids pour qu'il parcourt cette parabole. La parabole est définie encore une fois par un de ses points et la tangente en ce point. Mais cette fois, il ne s'agit plus du point particulier où la tangente est de 45°.

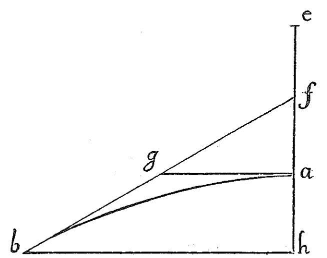


Figure 21.
Illustration de la relation entre *amplitude, sublimité et hauteur*

Soit *ab* la parabole, *hb* son amplitude, et *he* l'axe prolongé sur lequel il s'agit de découvrir la sublimité à partir de laquelle un corps, tombant en chute libre, puis déviant sur une ligne horizontale l'*impeto* acquis en *a*, décrirait la parabole *ab*[21].

[20]*Discorsi*, p. 220.
[21]*Discorsi*, p. 226.

Le point f de la tangente est le symétrique de h par rapport au sommet a. La tangente détermine sur la tangente au sommet la grandeur de l'*impeto* en a parce que l'*impeto* au sommet a est la moitié[22] de l'espace bh parcouru si la hauteur fh totale était franchie, et que c'est une propriété de la tangente que d'être coupée en son milieu par la tangente au sommet. Il reste à trouver de quel point il faut descendre pour avoir l'*impeto* correspondant.

> Enfin faisons ae troisième proportionnelle entre fa et ag. Je dis que e est le point cherché[23].

Il a donc

$$\frac{fa}{ag} = \frac{ag}{ae},$$

ce qui peut encore se lire ag est moyenne proportionnelle entre ea et fa. Comme fa est égale à ah, la hauteur, il a obtenu une relation entre la sublimité et la hauteur. La troisième terme est la moitié de l'amplitude bh. La relation supra peut donc aussi s'écrire

$$\frac{\text{Hauteur}}{\textit{sublimité}} = \frac{\textit{sublimité}}{\frac{\text{amplitude}}{2}}.$$

Il énonce comme corollaire :

> La moitié de la base, ou de l'amplitude, de la demi-parabole (c'est-à-dire le quart de l'amplitude de la parabole entière) est moyenne proportionnelle entre sa hauteur et la sublimité d'où un mobile, après descente en chute libre, décrit cette même parabole[24].

Ceci lui permet encore, Proposition VI, de déterminer l'amplitude en connaissant la sublimité et la hauteur.

Le cas particulier de 45° et la symétrie par rapport à 45°

La proposition VII confirme théoriquement un résultat connu des artilleurs.

> Parmi les projectiles qui décrivent des demi-paraboles de même amplitude, un *impeto* plus petit est requis pour celui dont la trajectoire a une amplitude double de la hauteur, que tout autre[25].

Cette parabole intéressante est celle qui a en son point d'arrivée ou plutôt dans le cas des artilleurs son point de départ, une tangente de 45°. Elle est la seule à avoir l'amplitude double de la hauteur, parce que dans ce cas seulement, la hauteur est égale à la distance focale et l'amplitude à la distance entre la directrice et le foyer. Galilée montre sur la Figure 22 que lorsque l'amplitude reste la même mais que la hauteur est plus petite, l'*impeto* nm est plus grand que celui de la parabole à angle de 45° ea, de même lorsque la hauteur devient plus grande, l'*impeto* nm est plus grand que ae. L'évaluation de l'*impeto* composé se fait comme précédemment.

Nous voyons clairement dans cette proposition que la hauteur n'est pas la distance focale mais qu'elle marque la distance à une parallèle quelconque à la directrice.

Galilée poursuit par un corollaire :

[22]La provenance de ce multiple 2 n'est pas très claire chez Galilée. Il fait penser au $\frac{1}{2}$ de la formule
$mgh = \frac{1}{2}mv^2$.

[23]*Discorsi*, p. 226.

[24]*Discorsi*, p. 227.

[25]*Discorsi*, p. 227.

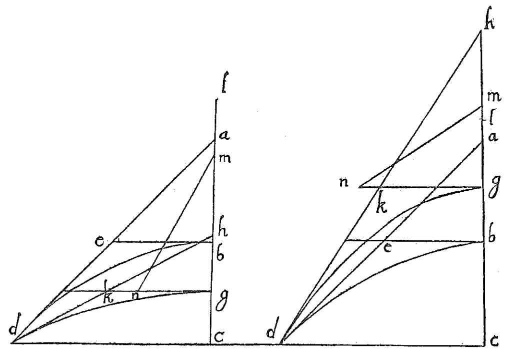


Figure 22.
Cas d'angles supérieur et inférieur à 45°

> D'où il apparaît, par la converse, qu'un *impeto* plus petit est requis pour lancer un projectile, à partir du point d, le long de la demi-parabole db, que le long de toute autre [parabole] dont l'élévation serait plus grande ou plus petite que celle de la demi-parabole bd, représentée par la tangente ad dont l'angle avec la ligne d'horizon est de 45 degrés[26].

Dans la Proposition VIII, Galilée poursuit son raisonnement en montrant une intéressante symétrie par rapport à la tangente à 45°.

> Les amplitudes des paraboles décrites par des projectiles animés du même *impeto*, et tirés selon des élévations inférieures ou supérieures d'une même quantité à l'angle de 45°, sont égales entre elles[27].

La démonstration se fait en déterminant, dans les deux cas, l'*impeto* composé et en montrant géométriquement des égalités de triangles[28].

[26]*Discorsi*, p. 229.

[27]*Discorsi*, p. 229.

[28]La démonstration montre l'égalité de ih et de gf qui n'apparaît pas sur la Figure 23.

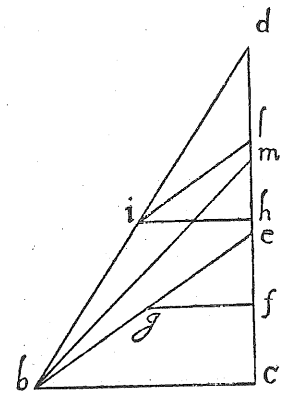


Figure 23.
Symétrie des amplitudes par rapport à 45°

Lien mathématique entre *amplitude, sublimité et hauteur*

La Proposition IX montre que

> Des paraboles, dont les hauteurs et les sublimités sont inversement proportionnelles, ont des amplitudes égales[29].

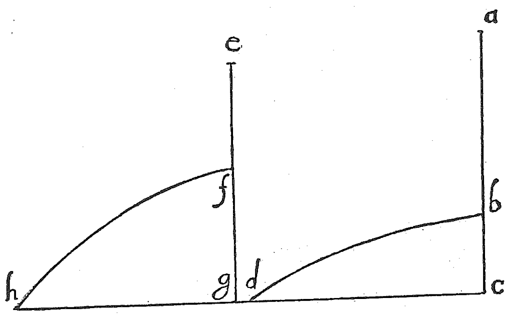


Figure 24. Seizième figure de Galilée

[29] *Discorsi*, p. 230.

Autrement dit si l'on a

$$\frac{h_1}{S_1} = \frac{S_2}{h_2}$$

alors les amplitudes sont les mêmes et il montre à la proposition X que l'*impeto* est aussi égal. La proposition IX ne fait que répéter la relation entre hauteur, sublimité et amplitude trouvée à la proposition V supra. La relecture de la relation est faite en tenant compte de la symétrie qui vient d'être démontrée et elle permet la proposition X. Cette dernière affirme que l'*impeto* en fin de parcours, d'un corps que l'on a laissé tombé sur une trajectoire parabolique d'une certaine hauteur, qu'il appelle la sublimité puisqu'on le laisse descendre le long de sa parabole sur une certaine hauteur, sera égal à l'*impeto* d'un corps en chute libre, verticale descendant une hauteur totale, somme de la sublimité et de la hauteur. Un corollaire résume l'acquis.

> De là suit qu'au point terminal de toutes les demi-paraboles, pour lesquelles la somme de la sublimité et de la hauteur est identique, l'*impeto* est pareillement identique[30].

Ceci n'est qu'un corollaire du théorème d'énergie publié en 1624, par Grégoire de Saint-Vincent dans ses *Thèses de statique*[31].

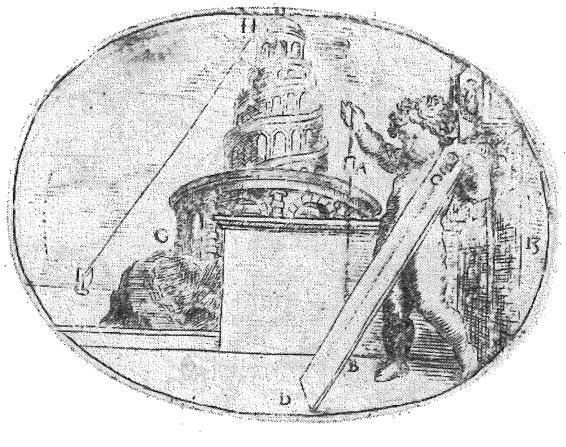


Figure 25.
Grégoire de Saint-Vincent, Thèses de statique (1624)

THEOREME 13

> a. Transportés sur une pente, tout droit ou en oblique, des poids de moments égaux, accumulent des forces égales en parcourant une égale mesure de la distance verticale, qu'ils s'en acquittent par une chute lente ou très prompte, qu'ils croisent l'horizon en une course ou plus oblique ou plus droite, qu'ils soient proches du centre de l'Univers ou qu'ils en soient éloignés d'un vaste intervalle. Et la vertu de ces forces est tout à fait difforme et composée de parts hétérogènes, tel un mouvement dont la durée est faite de pièces et de morceaux.

[30] *Discorsi*, p. 232.
[31] Theoremata mathematica scientiae staticae, Leuven, 1629.

> b. Que si la masse descend un sentier en spirale s'enroulant autour d'un cylindre ou d'un cône, il faut calculer les forces à partir d'une mesure de la distance verticale, car tirer ceci de la longueur du chemin, n'est pas une bonne méthode.
>
> a. La vertu que A acquiert en tombant vers B est égale à la vertu de ce même A tombant le long d'un plan incliné de C à D.
>
> b. La spirale de la tour GH et la ligne HI produisent la même vertu parce qu'elles ont la même distance verticale[32].

Galilée continue à analyser les possibilités de sa relation entre sublimité, hauteur et amplitude en demandant :
Étant donné l'impeto et l'amplitude d'une demi-parabole, trouver sa hauteur.

3 Analyse du lien entre *amplitude, sublimité et hauteur*

Dans les trois dernières propositions, Galilée analyse la relation liant la sublimité, la hauteur et l'amplitude d'une nouvelle manière, en établissant des tables. Ainsi dans la proposition XII, il se donne l'*impeto* au point d'arrivée, ou de départ si l'on veut poursuivre le raisonnement en termes d'artillerie, et établit un tableau donnant la tangente à la parabole en ce même point et l'amplitude de la parabole décrite.

> Calculer et disposer sous forme de table les amplitudes de toutes les demi-paraboles que décrivent des projectils lancés avec un même *impeto*[33].

Dans la proposition XIII, il complète son tableau en ajoutant pour chaque amplitude trouvée, la hauteur de chaque demi-parabole.

> Étant donné les amplitudes des demi-paraboles, réunies dans la table précédente, et tout en conservant le même *impeto*, déterminer la hauteur de chaque demi-parabole.

La proposition XIV résoud de manière tout à fait générale le problème des artilleurs.

> Déterminer, pour chaque degré d'élévation, la hauteur et la sublimité des demi-paraboles dont l'amplitude est constante.

Ce qui signifie étant donnée l'amplitude, la distance à la cible, déterminer pour chaque degré d'élévation, c'est-à-dire angle de la tangente au point d'arrivée, ou angle du canon au point de départ, la hauteur et la sublimité. Il détermine les autres grandeurs de la parabole dont la somme donne l'*impeto* c'est-à-dire la "vitesse" à laquelle il faut lancer l'obus.

Conclusion

Ce texte ne peut certainement pas être lu sans autres commentaires par des élèves mais il contient plusieurs idées qui peuvent faire l'objet de cours tant de géométrie sur la parabole que de mécanique sur le mouvement des projectiles. Il faut en tout cas les mettre en garde à propos de l'ambiguïté du mot *impeto*, mais cette mise en garde à elle seule peut probablement faire l'objet d'un cours qui viserait à préciser toutes les notions compatibles avec l'*impeto* galiléen. De nombreux historiens s'y sont employés.

[32]Cf. P. Radelet-de Grave, *Relativité galiléenne et lois de conservation,* "Revue des Questions scientifiques", Tome 170, 1999, N3, pp. 209-261

[33]*Discorsi*, p. 233.

Dossier 3, réuni par Didier Bessot

Ellipses conique et cylindrique chez Francesco Maurolico (1494 - 1575)

Abstract

Dans un appendice de ses *Grammaticorum rudimentorum libelli sex*, publiés en 1528, Francesco Maurolico annonce un vaste programme de publications et d'études de grandes œuvres de la mathématique classique grecque et médiévale; il cite les noms d'Euclide, Archimède, Ménélaüs, Théodose, Ptolémée, Boèce et Jordanus et évoque les travaux d'autres mathématiciens très pénétrants (*"acutissimi mathematici"*).

En effet, dans la première moitié des années 1530, Maurolico rédige un nombre important d'ouvrages présentés comme autant de versions latines de traités de la mathématique grecque ou médiévale, dont des *Éléments* d'Euclide, la *Quadrature de la parabole, la Mesure du cercle* et le second livre de *la Sphère et le Cylindre* d'Archimède, *les Sphères mobiles* et *Du lever et du coucher des étoiles ou des Phénomènes* d'Autolycos, *les Données arithmétiques* de Jordanus ainsi que des traités de Théodose, Héron et Hippocrate, et le traité de Serenus *De la section du cylindre.* Ni le nom d'Apollonios, ni la mention d'une œuvre générale sur les sections coniques n'apparaissent ni dans le programme de 1528 ni dans la liste des travaux réalisés de 1532 à 1535.

Ses travaux s'inscrivent dans le vaste mouvement de (re)découverte des textes de l'Antiquité classique que l'Europe occidentale connaît depuis le XIV[ème] et surtout le XV[ème] siècle, en liaison avec l'accroissement des échanges commerciaux et intellectuels dont la Méditerranée est la zone principale. L'Italie est au premier rang dans les relations avec l'Orient byzantin en raison des liens anciens et souvent chaotiques que plusieurs cités marchandes comme Gênes ou Venise entretiennent avec Constantinople. Dans la première moitié du XV[ème] siècle, les relations italo-byzantines connurent un temps fort dans la tenue du concile de Florence (1438-39) où fut tentée et presque réussie l'unification des Églises d'Orient et d'Occident; en 1453, Byzance entrait dans l'empire musulman. Tous ces événements ont favorisé l'introduction des manuscrits conservés à Byzance vers l'Italie.

Des sources nouvelles, par rapport à celles provenant du monde musulman, et probablement plus sûres étaient ainsi mises à la disposition des érudits de la Renaissance italienne. Toutefois leur découverte, leur étude restèrent lentes et progressives et leur circulation encore limitée. En outre, Maurolico réside à Messine, loin des principaux centres intellectuels italiens de l'époque que sont Florence, Venise puis Rome. Ainsi il est quasi certain que le savant sicilien ne connaissait pas, dans la période 1530-1535, de manuscrits grecs ou latins des traités d'Archimède ou d'Apollonios; de plus Maurolico ne mentionne dans ses textes de cette époque aucun ouvrage antérieur dont il se serait servi. Selon Clagett, les sources utilisées par Maurolico, notamment dans ses tentatives de reconstitution du corpus archimédien, seraient constituées d'ouvrages médiévaux reprenant des parties de traités de l'Antiquité, ayant eux-mêmes transités par le monde musulman.

Cependant, Clagett et d'autres historiens des mathématiques s'accordent sur le fait que Maurolico disposait très certainement en 1534 au moins d'une source plus récente dans l'ouvrage rédigé par Giorgio Valla et publié en 1501 sous le titre *De expetendis et fugiendis rebus opus*; cet ouvrage, consacré principalement à l'arithmétique, à la géométrie, à la musique, à l'astronomie et à l'astrologie médicale, contenait au livre XIII un chapitre IV intitulé *De cylindrica sectione* qui constitue une adaptation en latin, plus qu'une traduction, d'une partie des traités de Serenus sur la section du cylindre et la section du cône. Le travail de Valla s'est appuyé sur la consultation d'un manuscrit contenant les quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonios et les deux traités susmentionnés de Serenus, manuscrit acquis à Byzance et transporté en Italie en 1427 par le secrétaire de la légation vénitienne à Byzance, l'humaniste philologue Francesco Filelfo.

La première véritable traduction des traités de Serenus à partir de ce manuscrit sera l'œuvre de Federico Commandino qui la publiera en 1566 à la suite de sa traduction des quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonios; le travail de Maurolico sur la section du cylindre d'après Serenus se situe précisément à mi-chemin entre ceux de Valla et de Commandino.

1. Les *Sereni cylindricorum libelli duo* (1534) par Maurolico

A. Le manuscrit autographe et son édition moderne

Le manuscrit autographe contenant les *Sereni cylindricorum libelli duo*, datés du 16 août 1534, est conservé à la Bibliothèque Nationale (Paris), département des manuscrits, sous la cote *Fonds latin 7465*. Constitué de trente-deux feuillets reliés mais sans couverture, d'un format petit in-4°, il contient trois autres courts traités autographes de Maurolico : *Archimedis de circuli dimensione libellus* (f^{ii} 21v-28v), *Hippocratis tetragonismus* (f° 29r etv) et *Maurolycii tetragonismus* (f^{ii} 29v-31r); les *Sereni cylindricorum libelli duo* en forment la plus grande partie (f^{ii} 1r-20r)[1].

Ce manuscrit est resté inédit jusqu'à la publication en 1995 d'une édition critique par les soins de Roberta Tassora dans le *Bolletino di Stroria delle Scienze Matematiche*[2]. Cette édition critique, après une introduction sur Maurolico et le contexte général de ses travaux dans la période considérée (p. 135-142), donne une description détaillée du manuscrit (p. 143-153), étudie la question des sources possibles pour cette œuvre de Maurolico (p. 153-167), décrit le contenu mathématique du traité (p. 167-187) en consacrant un paragraphe particulier au problème étudié dans le second livre, qui est l'objet principal des extraits proposés à la lecture de l'atelier (p. 186, 187) et s'achève sur une partie consacrée à la question de l'identification d'un ouvrage cité en référence dans le traité de Maurolico à l'appui de plusieurs démonstrations sous le titre d'*Elementa conicorum*. L'analyse critique est suivie de trois appendices : le premier donne en trois pages une description rapide du contenu du manuscrit folio par folio, le deuxième, le plus important (40 pages), comporte le texte du manuscrit établi et annoté par R. Tassora et le troisième reproduit le chapitre *De cylindrica sectione* de l'ouvrage de Giorgio Valla susmentionné.

B. Description du contenu du manuscrit

Le traité de Maurolico est divisé en deux livres de taille très inégale; le premier comprend dix-huit définitions, réparties en deux endroits, et trente-quatre propositions tandis que le second n'en comprend que sept; certaines propositions sont complétées de corollaires et de scholies.

Le premier livre étudie des coupes planes d'un cylindre circulaire, puis quelques propriétés de la section elliptique qui permettent d'en établir une caractérisation sous forme d'une proportion liant des aires construites sur des éléments adéquats de l'ellipse; ce résultat permet au sein de l'étude menée dans les six dernières propositions de ce premier livre des sections planes d'un cylindre à base elliptique, de montrer que ces sections sont des ellipses de même genre que les bases.

Le second livre traite d'un problème voisin du précédent puisqu'il est consacré à la comparaison entre l'ellipse conique et l'ellipse cylindrique; c'est de l'examen de cette question que traite la seconde partie du présent article.

Les tableaux A et B ci-dessous permettent d'engager une étude comparée des textes de Serenus, Valla et Maurolico. Leur examen montre une forte corrélation entre les travaux de Serenus et de Valla, même si ce dernier ne propose qu'une partie des résultats développés par Serenus; les huit premières propositions sont identiques et

[1]Pour une étude matérielle plus détaillée du manuscrit, consulter [3] et [4] (cf. bibliographie en fin d'article).

[2]Voir [3] dans la bibliographie en fin d'article.

les suivantes, dans le texte de Valla, sont ordonnées comme leurs correspondantes chez Serenus. En revanche, dès la quatrième proposition, le traité de Maurolico s'écarte notablement de ceux de ses prédécesseurs autant par le contenu des propositions que par leur organisation. Ce constat permet d'avancer que, plus qu'une reprise de la publication de Valla, le travail de Maurolico consiste en une reconstruction du traité de Serenus, qui lui restait inconnu, appuyée sur l'ouvrage de Valla (et peut-être sur d'autres sources encore non identifiées) mais surtout créée en grande partie par Maurolico, en particulier sur l'étude des cylindres à base elliptique et sur la comparaison entre ellipse conique et ellipse cylindrique.

Le style d'exposition de Maurolico est, quant à lui, tout à fait conforme au modèle grec classique; chaque proposition est présentée selon le plan déjà en vigueur dans les *Éléments* d'Euclide : l'énoncé (*protasis*) donne dans les termes les plus généraux les hypothèses (*dedomena*) et la conclusion (*zetoumenon*); les données et les hypothèses sont reprises en spécifiant, par des lettres qui les nomment, les divers éléments en jeu au cours de l'exposition (*ekthesis*) suivie de la détermination (*diorismos*) qui reprend avec les mêmes notations la conclusion attendue; si la proposition est un problème ou construction, intervient à ce stade la construction proprement dite (*kataskene*); dans tous les cas, suit la démonstration (*apodeixis*), et l'exposé s'achève par la conclusion (*sumperasma*) dans les termes de l'énoncé, bien que le plus souvent cette ultime partie soit écourtée.

Tableau A.

Mauricolo	Valla	Serenus (Ver Eecke)
Livre I		
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	-	-
5	-	-
6	-	∼11
7	-	-
8	7	7
9	8	8
Cor 9	-	∼9
10	-	∼12
11	-	-
12	-	-
13	5	5
14	-	-
15	4	4
16	6	6
17	-	-
18	-	-
19	-	-
20	∼11	∼15
21	-	-
22	-	-
23	-	-
24	-	-
25	-	-
26	-	-
27	-	-
28	-	-
29	-	-
30	-	-
31	-	-
32	-	-
33	-	-
34	-	-

Tableau B.

Serenus (Ver Eecke)	Valla	Mauricolo
1	1	I 1
2	2	2
3	3	3
4	4	15
5	5	13
6	6	16
7	7	8
8	8	9
9	-	Cor 9
(10)	-	-
11	-	∼6
12	-	∼10
13	9	-
14	10	-
15	11	∼20
16	12	-
17	13	-
18	14	-
19	-	-
20	-	-
21	-	II ∼3
22	-	∼4
23	-	-
24	-	-
25	15	6
26	16	7
27	-	-
28	-	-
29	-	-
30	-	-
31	-	-
32	-	-
33	-	-

Livre II		
1	-	-
2	-	-
3	-	~21
4	-	~22
5	-	-
6	15	25
7	16	26

Légende des tableaux :
le signe ~ signifie une correspondance approximative entre les propositions.
le signe - signifie l'absence de proposition correspondante.

2. Identification entre ellipse conique et ellipse cylindrique chez Maurolico

Le problème de l'identité de genre des ellipses résultant de coupes planes de cône et de cylindre a déjà été abordé et résolu dans l'Antiquité. La proposition 9 du traité *Sur les conoïdes et les sphéroïdes* d'Archimède énonce et démontre :

> Étant donnés une ellipse *[conique]* et un segment de droite issu du centre de l'ellipse, non perpendiculaire *[au plan de l'ellipse]* mais situé dans le plan perpendiculaire au plan de l'ellipse et passant par l'un des diamètres, il est possible de trouver un cylindre ayant son axe sur la même droite à laquelle appartient le segment érigé et tel que sa surface contienne l'ellipse donnée.[3]

Archimède n'étudie pas la situation réciproque comme le fera Serenus; la proposition 20 de son *Livre sur la section du cylindre* donne :

> Je dis donc qu'il est possible de démontrer qu'un cylindre et un cône soient coupés conjointement par une même ellipse.[4]

tandis que les propositions 21 et 22 proposent les deux constructions réciproques suivantes :

> Étant donnés un cône et une ellipse dans celui-ci, trouver un cylindre qui soit coupé par cette même ellipse du cône.[5]

et

> Étant donnés un cylindre et une ellipse dans celui-ci, trouver un cône qui soit coupé par cette même ellipse du cylindre.[6]

Les propositions 23, 24 et 26 proposent des variantes de telles constructions.

[3] Archimède, *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, texte établi et traduit par Ch. Mugler. Paris : Les Belles Lettres, 1970, p. 176, 177.

[4] Serenus d'Antinoë, *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône*, traduction et notes par Paul Ver Eecke. Paris : Albert Blanchard, 1969, p. 33.

[5] Serenus d'Antinoë, *op. cit.*, p. 37.

[6] Serenus d'Antinoë, *op. cit.*, p. 38.

Si donc le problème de l'identification des deux genres d'ellipses avait reçu des solutions plusieurs siècles avant l'époque de Maurolico, celui-ci n'avait pas connaissance dans la période 1530-1535 des résultats rappelés ci-dessus. En effet, il ne semble disposer que de l'adaptation faite par Valla du traité de Serenus et cette adaptation ne comporte pas de propositions correspondant aux propositions 20, 21, 22, 23 et 24 de Serenus; seule la proposition 26[7] de Serenus, plus spécialisée que les précédentes, trouve un correspondant dans la proposition 16[8] de Valla; Maurolico reprendra cette proposition au numéro 7 du livre II, après en avoir donné sa réciproque à la proposition 5. Toute la réflexion du savant sicilien sur la question de l'identification des deux genres d'ellipses pourrait donc trouver son point de départ dans la seule proposition 16 de Valla et serait donc largement de son propre fait.

Pour suivre le développement de cette réflexion, objet du livre II, il est utile de donner en préalables des définitions et certains résultats établis par Maurolico au livre I.

A. Définitions et caractérisations de l'ellipse cylindrique

Si Maurolico étudie des coupes de cylindres aussi bien scalènes que droits, ces coupes ne sont cependant pas quelconques. Si le plan de coupe du cylindre est parallèle à l'axe de ce dernier, la coupe est un parallélogramme; ces cas simples sont étudiés par Maurolico dès le début du livre I (propositions 2 à 7). L'autre genre de coupe, qui produit le cas le plus intéressant d'une figure non rectiligne, est précisée par les définitions 9 à 11. Le plan de coupe elliptique est déterminé en deux temps : Maurolico introduit d'abord un plan passant par l'axe et perpendiculaire aux plans des bases circulaires du cylindre, appelé *primum planum* puis plus loin *primarium planum*; ce plan, qui sera nommé ici **plan primaire** est unique dans un cône scalène et est déterminé par l'axe ab et la perpendiculaire as au plan d'une des bases du cylindre (Figure 1). Le plan de coupe est alors un plan, dit **secondaire**, perpendiculaire au plan primaire; l'intersection des plans primaire et secondaire, gh, est le premier diamètre de la section tandis que la droite kl qui dans le plan secondaire est perpendiculaire à gh et la partage par moitiés est appelée second diamètre. Enfin si ces deux diamètres sont de longueur différente, la section est appelée ellipse[9].

[7] Cette proposition énonce : "Étant donné un cylindre coupé par une ellipse, établir sur la même base du cylindre et sous la même hauteur, un cône coupé par le même plan, déterminant une ellipse semblable à l'ellipse du cylindre". Serenus d'Antinoë, *op. cit.*, p. 44.

[8] Le texte de cette proposition reprend mot pour mot la proposition de Serenus précédemment citée : "Cylindro dato secto ellpisi conum constituere in eadem basi cylindri qui sit sub eadem altitudine et eodem plano sectus faciensque similem ellipsim cylindri ellipsi."

[9] Dans le cas où les deux diamètres sont de même longueur, ce qui se produit lorsque le plan secondaire est soit parallèle aux plans des bases, soit antiparallèle à ces plans, la section est un cercle; ces cas sont étudiés respectivement aux propositions 13 et 16 du livre I.

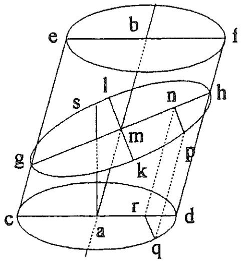


Figure 1

ab est l'axe du cylindre.
as est la perpendiculaire au plan de base cd en a.
$cdfe$ est le plan primaire.
Le plan de coupe $gkhl$ est perpendiculaire au plan $cdfe$; l'intersection gh de ces deux plans est le premier diamètre; sa perpendiculaire dans $gkhl$ en m est le second diamètre. Contrairement aux premières apparences le premier diamètre n'est pas nécessairement plus grand que le second; cela dépend de l'inclinaison du plan secondaire, donc de gh, par rapport aux parallèles ce et df.
m est le centre de la section.
$mk = ml = ac$, rayon des bases.
np est une droite menée **de manière ordonnée** sur le diamètre gh.

Ce choix particulier du plan de coupe ne permet un examen général des coupes de cylindres mais présente l'avantage de simplifier les conditions de l'étude faite : en effet, les diamètres ainsi définis, qui jouent un grand rôle dans cette étude, sont en fait les axes (de symétrie orthogonale) de la section et sont donc perpendiculaires entre eux; en outre, le second diamètre est alors de même longueur que le diamètre des bases du cylindre, ce qu'établit le corollaire de la proposition 14. Maurolico précise aussi sa définition de la similitude de deux sections en ces termes :

> Similes sectiones sunt, quarum diametris respondentibus ad eandem quotiescumque sectis, et a punctis divisionum structim eductis ad periferiam, eductæ sunt sicut diametri.[10]

Ainsi, les sections elliptiques $abcd$ et $fghk$ (Figure 2) sont semblables si, leurs diamètres de même genre (par exemple leurs premiers diamètres) étant partagés respectivement aux points m et n dans un même rapport et des droites étant menées de manière ordonnée (*structim* c'est-à-dire parallèlement aux autres diamètres bd et gk) depuis les points de division m et n jusqu'aux circonférences en p et q, alors le rapport des droites mp et nq est le même que celui des diamètres à partir desquels ces droites sont menées. En particulier, dans des sections semblables, les seconds diamètres sont proportionnels aux premiers.

[10]Cf. bibliographie, [3] Tassora, p. 203. Les citations ultérieures du texte de Maurolico seront données dans une traduction française du texte latin établi par R. Tassora.

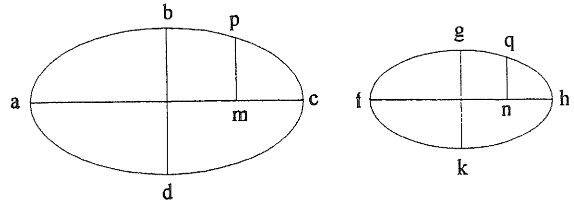


Figure 2

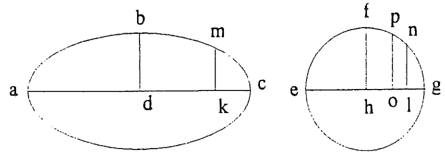
Les sections $abcd$ et $fghk$ sont semblables
si et seulement si
pour tout point m sur ac, $\frac{am}{mc} = \frac{fn}{nh} \Rightarrow \frac{mp}{nq} = \frac{ac}{fh}$

Vers la moitié du premier livre, Maurolico établit des propriétés de l'ellipse cylindrique qui peuvent être considérées comme caractéristiques de cette courbe, même si Maurolico n'énonce et ne démontre qu'un sens de l'équivalence, à savoir : "dans une ellipse, telle propriété est réalisée".

La proposition 17 met en relation les cordes d'une ellipse parallèles au second diamètre avec celles d'un cercle, en ces termes :

> Si le premier diamètre d'une ellipse et le diamètre d'un cercle sont partagés dans le même rapport et que des droites sont tirées par les points de division perpendiculairement aux diamètres vers les circonférences, la droite tirée dans l'ellipse sera à la droite tirée dans le cercle comme le second diamètre de l'ellipse est au diamètre du cercle.
>
> Réciproquement si le second diamètre de l'ellipse est au diamètre du cercle comme la droite tirée dans l'ellipse est à la droite tirée dans le cercle, les droites tirées partagent les diamètres dans le même rapport.[11]

Maurolico précise les termes de cette proposition dans l'exposition :
étant donnés une ellipse (cylindrique) abc de premier diamètre ac et de second demi diamètre bd et un cercle efg de centre h et de diamètre eg (Figure 3), les points k et l partagent respectivement les diamètres ac et eg dans le même rapport; les droites perpendiculaires aux diamètres respectifs par k et l coupent l'ellipse en m et le cercle en n. Alors le rapport de la longueur km la longueur ln est égal à celui du demi diamètre bd au rayon fh.



$\frac{ak}{kc} = \frac{el}{lg} \Rightarrow \frac{mk}{nl} = \frac{bd}{fh}$

Figure 3

[11]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 218.

La démonstration est obtenue en particularisant le cercle dont le diamètre est pris égal au second diamètre de l'ellipse, ce qui n'ôte en fait aucune généralité au raisonnement puisque hypothèses et conclusion concernent des rapports de longueurs et non des longueurs en elles-mêmes; ce cercle est donc cercle de base du cylindre (corollaire de la proposition 14). D'après la proposition 14, les diamètres de l'ellipse et du cercle de base étant divisés dans le même rapport, les droites menées des points de partage vers les circonférences de manière ordonnée[12] sont "égales", comme np et rq dans la Figure 1 et comme ici, mk et nl.

La réciproque énoncée par Maurolico est prouvée en considérant dans le cercle une droite ordonnée po vérifiant $\frac{mk}{po} = \frac{bd}{fh}$ et $eo \neq el$; puis en montrant l'égalité des longueurs po et nl, il survient une contradiction donc o et l sont confondus. En revanche, Maurolico ne propose pas la réciproque de l'ensemble de la propriété, qui s'énoncerait en substance et en termes modernes : les segments ac et bd et le cercle efg de centre h étant donnés comme précédemment, les points k et l partageant ac et eg dans le même rapport, le point m défini par $\frac{mk}{nl} = \frac{bd}{fh}$ décrit une ellipse de premier diamètre ac et de second demi-diamètre bd quand k parcourt ac.

Le résultat prouvé par Maurolico, joint à la définition donnée des ellipses semblables, permet de montrer que deux ellipses (cylindriques) dont les paires de diamètres sont proportionnelles sont semblables[13].

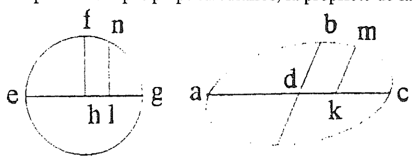
Si la proposition 18 n'est que l'homologue de la précédente, obtenue en inversant les rôles des premier et second diamètres, la proposition 21 établit, cette fois encore sans réciproque, une caractérisation de l'ellipse cylindrique interne à l'ellipse, sans référence à un cercle :

> Si on mène de manière ordonnée des droites jumelles de la circonférence de la section vers l'un ou l'autre diamètre, les carrés de ces droites seront proportionnels aux rectangles construits sous les segments du diamètre.[14]

énoncé dont l'exposition en termes spécifiés donne : deux points k et s étant pris sur l'un des deux diamètres, ac dans la Figure 4, et des droites étant menées des ces points vers la circonférence de manière ordonnée, c'est-à-dire parallèlement à l'autre diamètre, jusqu'aux points m et t, le rapport des carrés de km et de st est égal au rapport des rectangles ak, ac et $as,\ sc$.

La démonstration est obtenue par comparaison avec les figures analogues établies dans un cercle : les points k et s étant pris sur le diamètre ac, un diamètre eg d'un cercle efg est partagé aux points o et l dans des rapports égaux à ceux dans lesquels k et s partagent ac; à partir de ces points de division, dans l'ellipse et le cercle, sont menées des droites ordonnées atteignant les circonférences en m et t d'une part et p et n d'autre part. Il s'ensuit les proportions suivantes :

[12]Cette expression, d'usage permanent dans l'étude des coniques, signifie que ces droites, passant par un point d'un diamètre, sont menées parallèlement au diamètre conjugué. Ici, en raison du choix particulier du plan de coupe, les diamètres utilisés pour l'ellipse sont perpendiculaires. Il faut remarquer que si les diamètres conjugués de l'ellipse ne sont pas perpendiculaires, la propriété de la proposition 17 reste valide.

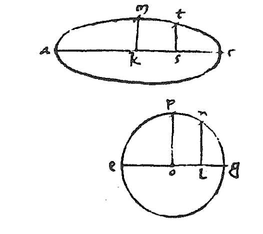


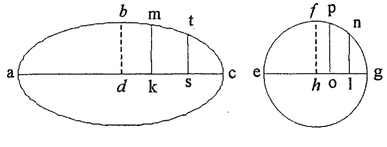
ac et bd étant des diamètres conjugués quelconques de l'ellipse, la propriété suivante est vraie :
abc est une ellipse $\Longleftrightarrow \left[\frac{ak}{kc} = \frac{el}{lg} \Rightarrow \frac{mk}{nl} = \frac{bd}{fh}\right]$.

[13]Ce résultat apparaît à la proposition 23, [3] Tassora, *op. cit.*, p. 223.

[14]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 221.

$\frac{ak}{kc} = \frac{eo}{og}$ et $\frac{as}{sc} = \frac{el}{lg}$ par définition des points o et l et $\frac{mk}{po} = \frac{bd}{fh}$ et $\frac{ts}{nl} = \frac{bd}{fh}$ par application de la proposition 17 (ou 18 si k et s sont pris sur le second diamètre).





$$\frac{mk^2}{ts^2} = \frac{ak \times kc}{as \times sc}$$

Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 10r.

Figure 4

Les deux dernières proportions donnent alors : $\frac{mk}{po} = \frac{ts}{nl}$ puis $\frac{mk}{ts} = \frac{po}{nl}$ puis $\frac{mk^2}{ts^2} = \frac{po^2}{nl^2}$. Or, d'après la proposition 16 du sixième Élément d'Euclide, $po^2 = eo \times og$ et $nl^2 = el \times lg$ donc $\frac{mk^2}{ts^2} = \frac{eo \times og}{el \times lg}$. Enfin, d'après les proportions définissant les points o et l à partir des points k et s, le rapport des rectangles $eo \times og$ et $el \times lg$ est égal à celui des rectangles $ak \times kc$ et $as \times sc$[15]. Donc $\frac{mk^2}{ts^2} = \frac{ak \times kc}{as \times sc}$ ce qui achève la démonstration.

Cette proposition 21 est suivie d'un corollaire obtenu en particularisant l'un des points de division, comme s, au centre d de l'ellipse :

> Donc il est manifeste que le carré d'un demi diamètre de la section est au carré de la perpendiculaire à l'autre diamètre comme le carré sur l'autre demi diamètre est au rectangle construit sous les segments de l'autre demi diamètre.[16]

ce qui, en notations modernes, se traduit par : $\frac{mk^2}{bd^2} = \frac{ak \times kc}{ad^2}$ et peut aussi être énoncé, ce que Maurolico ne fait pas : $\frac{mk^2}{ak \times kc} = \frac{bd^2}{ad^2} = \left(\frac{bd}{ad}\right)^2$, ou en style plus "littéraire" : le rapport du carré (mkQP dans la Figure 5) d'une droite élevée de manière ordonnée (mk) sur un diamètre (ac) au rectangle des segments découpés sur ce diamètre ($ak \times kc$ ou akLN sur la Figure 5) est constamment égal au rapport des carrés des diamètres[17].

[15]Cette dernière proportion était sans doute pour Maurolico et ses contemporains quasi évidente, rompus qu'ils étaient au maniement de la théorie des proportions telle qu'elle est exposée au cinquième Élément d'Euclide. Pour un lecteur d'aujourd'hui, plus accoutumé au calcul algébrique qu'à la théorie des proportions, elle peut demander une justification comme, par exemple :

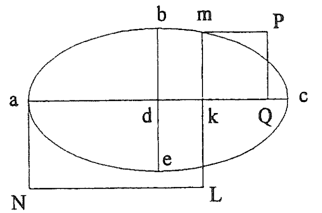
$$\left.\begin{array}{lll} \frac{ak}{kc} = \frac{eo}{og} \Rightarrow \frac{ak}{kc} + 1 = \frac{eo}{og} + 1 \Rightarrow \frac{ak+kc}{kc} = \frac{eo+og}{og} & \Rightarrow & \frac{ac}{kc} = \frac{eg}{og} (*) \\ \text{et pareillement } \frac{as}{sc} = \frac{el}{lg} \Rightarrow \frac{ac}{sc} = \frac{eg}{lg} & \Rightarrow & \frac{sc}{ac} = \frac{lg}{eg} (**) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{sc}{kc} = \frac{lg}{og} (\$) \text{ par produit de (*) et (**).}$$

De même, en remplaçant c par a et g par e, $\frac{as}{ak} = \frac{el}{eo}$ (\$\$).
Puis, par produit de (\$) et (\$\$), $\frac{as.sc}{ak.kc} = \frac{el.lg}{eo.og}$ donc enfin $\frac{ak.kc}{as.sc} = \frac{eo.og}{el.lg}$.

[16]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 222.

[17]Les réciproques de la proposition 21 et de son corollaire, que Maurolico n'étudie pas, sont valides et complètent des caractérisations de l'ellipse cylindrique qui sont utilisées au livre II. En outre, les mêmes résultats (directs et réciproques) demeurent lorsque les diamètres utilisés pour les établir ne sont plus perpendiculaires mais seulement conjugués (cf. note 12).



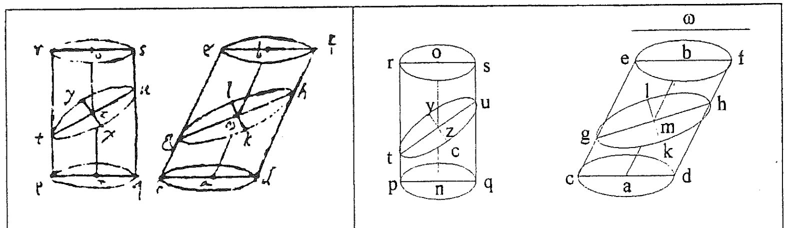
$$\frac{\text{Aire(mkQP)}}{\text{Aire(akLN)}} = \frac{mk^2}{ak \times kc} = \left(\frac{bd}{ad}\right)^2 = \left(\frac{be}{ac}\right)^2$$

Figure 5

Le dernier résultat utile à la lecture des extraits du livre II proposés plus loin est une construction décrite à la proposition 28 :

> Étant proposés deux cylindres dont l'un est coupé suivant une ellipse, couper l'autre par un plan secondaire de sorte que la section soit une ellipse semblable.[18]

Deux cylindres étant donnés, comme $(pqsr)$ et $(cdfe)$, de plans primaires respectifs $pqsr$ et $cdfe$, le premier est coupé par un plan secondaire en l'ellipse de premier diamètre tu (Figure 6). Il faut couper le cylindre $(cdfe)$ par un plan secondaire de façon que la section soit une ellipse semblable à celle du premier cylindre.



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 12r. Figure 6

Le point principal de cette construction consiste à déterminer une droite ω, quatrième proportionnelle du petit diamètre de l'ellipse $tyuz$, de son grand diamètre et de cd, diamètre de la base du second cylindre; la ligne ω vérifie donc $\frac{\omega}{cd} = \frac{\text{grand diamètre de } tyuz}{\text{petit diamètre de } tyuz}$ et est ainsi plus grande que cd. Dans le parallélogramme $cdfe$, il est alors facile d'insérer entre les parallèles ce et df une ligne gh égale à ω[19]. Le plan secondaire, de coupe du cylindre $(cdfe)$, est le plan perpendiculaire au plan primaire $cdfe$ et contenant la droite gh. L'ellipse ainsi obtenue, $glhk$, a pour premier et plus grand diamètre gh et pour second et plus petit diamètre kl égal à cd : ces diamètres sont donc proportionnels par constrution à ceux de l'ellipse $tyuz$, par conséquent l'ellipse $glhk$ est semblable à l'ellipse $tyuz$, d'après la proposition 23.

B. Ellipse conique et ellipse cylindrique sont-elles de même genre ?

Les sept propositions qui constituent le livre II du traité de Maurolico sont consacrées à

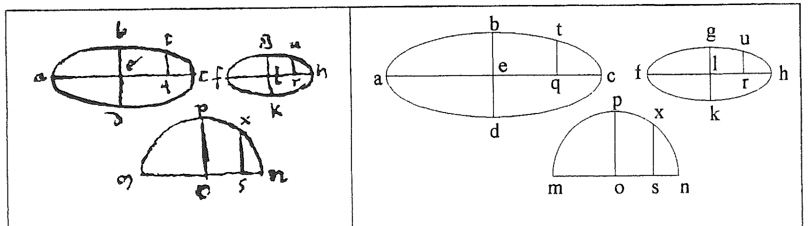
[18]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 227.

[19]Cette construction élémentaire est exposée à la proposition 27 : *"Insérer entre deux parallèles proposées une ligne droite égale à une ligne donnée."* Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 226.

donner, sous différentes formes, une réponse affirmative à cette question. Mise à part la proposition 6 qui traite d'une question relevant de l'"algèbre" des grandeurs[20] à titre de lemme pour la proposition 7, les six autres propositions sont organisées par paires : 1 et 2, 3 et 4 puis 5 et 7.

La première proposition montre la similitude d'une ellipse conique et d'une ellipse cylindrique dont les paires de diamètres sont proportionnelles :

> Une ellipse conique et une ellipse cylindrique dont les grands diamètres sont proportionnels aux petits sont semblables entre elles.
>
> *Soit une ellipse conique* abcd *de diamètres* ac *et* bd *et de centre* e, *ainsi qu'une ellipse cylindrique* fghk *de diamètres* fh *et* gk *et de centre* l. *Et que le diamètre* bd *soit au diamètre* gk *comme le diamètre* ac *est au diamètre* fh. [Figure 7]
>
> *Je dis que les ellipses* abc *et* fgh *sont semblables.*
>
> *En effet qu'on décrive sur une droite* mn, *librement choisie et partagée en deux parties au point* o, *un demi-cercle* mpn *et qu'on mène le demi diamètre* op *perpendiculaire à* mn.
>
> *Ensuite qu'on partage les diamètres* q, r *et* s *dans le même rapport aux points* q, r *et* s *et qu'on élève des droites* qt, ru *et* sx *perpendiculairement aux diamètres jusqu'aux circonférences. D'après les propositions 61 et 64 du premier livre des Coniques,* tq *sera à* xs *comme* be *à* po, *par permutation* po *sera à* xs *comme* be *à* tq. *Mais d'après les propositions 17 ou 18 du livre précédent,* gl *est à* ur *comme* po *est à* xs, *donc* gl *sera à* ur *comme* be *est à* tq. *Et je pourrai montrer la même chose chaque fois que les diamètres* ac *et* fh *sont partagés dans le même rapport. En vertu de quoi, d'après la définition des sections semblables, les sections* abc *et* fgh *sont semblables, ce qui est proposé.*



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 15v. Figure 7.

> *Ou encore, d'après la note suivant la proposition 59 du premier livre des Éléments des Coniques, ou celle suivant la proposition 64, le carré de* be *est au carré de* tq *comme le carré de* ae *est au rectangle* aq qc *et d'après la proposition 21 du précédent livre, le carré de* gl *est au carré de* ur *comme le carré de* fl *est au rectangle* fr rh. *Mais le carré de* ae *est au rectangle* aq qc *comme le carré de* fl *est au rectangle* fr rh *puisque, bien sûr, de tels rapports sont composés des rapports des côtés d'après la proposition 24 du sixième Élément d'Euclide et les rapports des côtés sont les mêmes à cause du partage proportionnel des diamètres* ac *et* fh. *Alors, d'après la proposition 11 du cinquième Élément* [d'Euclide], *le carré de* gl *est au carré de* ur *comme le carré de* be *est au carré de* tq, *et c'est pourquoi* gl *est à* ur *comme* be *est à* tq. *En conséquence le même résultat advient chaque fois que les diamètres* ac *et* fh *sont partagés dans le même rapport. Les diamètres* ac *et*

[20]Cette expression : "algèbre" des grandeurs, désigne ici, de façon quelque peu anachronique et abusive mais commode, la matière dont traite par exemple le deuxième *Élément* d'Euclide.

fh sont proportionnels aux diamètres bd et gk et à nouveau d'après la définition des sections semblables, les sections abc et fgh, l'une conique l'autre cylindrique, sont semblables, ce qu'il fallait démontrer.[21]

Maurolico donne deux démonstrations de cette proposition, fondées toutes deux sur l'identification de caractérisations de l'ellipse conique et de l'ellipse cylindrique : pour ce qui concerne la section du cylindre, la première démonstration utilise la caractérisation des propositions 17 ou 18 du livre I, tandis que la seconde se réfère à celle de la proposition 21.

En utilisant les notations de la Figure 7, les hypothèses peuvent être traduites en termes modernes ainsi : $\frac{bd}{gk} = \frac{ac}{fh}$, ou de manière équivalente, $\frac{be}{gl} = \frac{ac}{fh}$.

Le première démonstration introduit un demi cercle de diamètre mn, de centre o et de rayon op perpendiculaire à mn. Les trois diamètres ac, fk et mn sont partagés dans un même rapport respectivement en q, r et s, points à partir desquels sont menées des droites ordonnées vers les circonférences, respectivement qt, ru et sx. Maurolico invoque alors un résultat sur l'ellipse conique, objet des propositions 61 et 64 du premier livre d'un ouvrage sur les coniques[22], qui donne la proportion suivante :

$\frac{tq}{xs} = \frac{be}{po}$, puis par permutation, $\frac{po}{xs} = \frac{be}{tq}$, le premier rapport étant pris dans le cercle et le second dans l'ellipse conique. Puis, en vertu des propositions 17 ou 18 du livre I de son traité (cf. *supra*), Maurolico obtient entre l'ellipse cylindrique et le cercle la proportion :

$\frac{gl}{ur} = \frac{po}{xs}$ qui permet de déduire la proportion suivante entre les deux ellipses : $\frac{gl}{ur} = \frac{be}{tq}$.

Cette proportion restant vraie quel que soit le choix des points q et r divisant les diamètres ac et fh dans le même rapport, il s'ensuit pour Maurolico la similitude des deux ellipses. En effet de $\frac{gl}{ur} = \frac{be}{tq}$ se déduit $\frac{tq}{ur} = \frac{be}{gl}$, or $\frac{be}{gl} = \frac{ac}{fh}$ donc $\frac{tq}{ur} = \frac{ac}{fh}$, chaque fois que $\frac{aq}{qc} = \frac{fr}{rh}$, ce qui correspond à la définition des sections semblables donnée au début du traité.

La seconde démonstration met en œuvre une autre caractérisation de l'ellipse conique, provenant de notes des propositions 59 ou 64 du premier livre du même ouvrage sur les coniques, donnant la proportion attachée à la seule ellipse conique :

$\frac{be^2}{tq^2} = \frac{ae^2}{aq \times qc}$ tandis que la propriété de l'ellipse cylindrique établie à la proposition 21 du livre I donne : $\frac{gl^2}{ur^2} = \frac{fl^2}{fr \times rh}$. Or, en raison du partage proportionnel des diamètres ac en q et fh en r, il vient les proportions $\frac{ae}{aq} = \frac{fl}{fr}$ et $\frac{ae}{qc} = \frac{fl}{rh}$ qui, par composition (multiplication) donnent $\frac{ae^2}{aq \times qc} = \frac{fl^2}{fr \times rh}$; ce qui permet de déduire $\frac{gl^2}{ur^2} = \frac{be^2}{tq^2}$ puis $\frac{gl}{ur} = \frac{be}{tq}$. La fin de la preuve est identique à celle de la première méthode.

La proposition 2, appariée à la première, énonce que, si les diamètres de deux ellipses, l'une conique, l'autre cylindrique, sont égaux chacun à chacun, les deux ellipses sont semblables et égales. La similitude est déjà acquise grâce à la proposition précédente et l'égalité des diamètres donne $be = gl$, qui, jointe à $\frac{gl}{ur} = \frac{be}{tq}$, conduit à $tq = ur$, et ce chaque fois que les points q et r partagent les diamètres égaux ac et fh dans le même rapport. Les ellipses sont donc égales.

À ce stade de son travail, Maurolico a trouvé un critère de similitude et d'égalité d'une ellipse conique et d'une ellipse cylindrique. Mais cela ne suffit pas à prouver l'existence de sections, l'une conique, l'autre cylindrique, qui soient semblables ou égales. Cette preuve est l'objet des propositions 3 et 4.

La proposition 3 énonce :

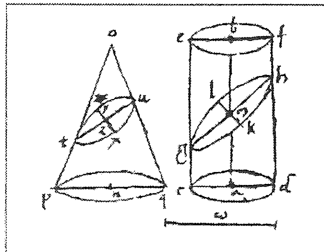
[21]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 234, 235.

[22]La question de l'identification de cet ouvrage est évoquée plus loin.

Étant proposée une ellipse conique, couper un cylindre donné de sorte que la section soit une ellipse semblable à la proposée.

Soit un cône poq *de base* pq, *de sommet* o, *coupé par un plan formant l'ellipse* tχuy *de diamètres* tu *et* χy *et de centre* z. *De même soit un cylindre* cf *d'axe* ab, *et de bases* cd *et* ef. [Figure 8] *Il faut couper ce cylindre* cf *par un plan formant une ellipse semblable à l'ellipse conique* tχu.

Que le cylindre cf *soit coupé, comme dans la proposition 28 du livre précédent, par un plan formant une ellipse* gkhl *de diamètres* gh *et* kl *et de centre* m, *de sorte que les diamètres de l'ellipse* gkh *soient proportionnels aux diamètres de l'ellipse* tχu, *par la toute même méthode que nous avons utilisé dans la proposition 28 du précédent. Dès lors puisque les diamètres de l'ellipse conique* tχu *sont proportionnels aux diamètres de l'ellipse cylindrique* gkh, *d'après la première proposition de ce livre, les ellipses seront semblables : donc nous avons coupé le cylindre donné* cf *par un plan formant une ellipse* gkh *semblable à la proposée* tχu, *ce que l'on s'était proposé de faire.*[23]



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 16v.

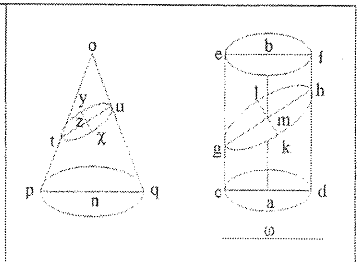


Figure 8.

La construction est effectuée par la même méthode que celle de la proposition 28 du livre I. Elle consiste d'abord à construire une droite ω vérifiant $\frac{\omega}{cd} = \frac{tu}{y\chi}$, puis à insérer entre les parallèles ce et df une droite gh égale à ω; le plan secondaire perpendiculaire au plan $cdfe$ et passant par gh coupe le cylindre selon une section semblable à l'ellipse donnée dans le cône.

La proposition 4 est analogue à la précédente et obtenue en échangeant les rôles du cône et du cylindre avec un complément concernant la construction d'une ellipse conique non seulement semblable mais aussi égale à une ellipse cylindrique donnée. La construction d'une section d'un cône donné semblable à une ellipse cylindrique donnée repose sur une construction exposée à la proposition 82 du premier livre de l'ouvrage sur les coniques, déjà mentionné précédemment, alors que le cas de l'égalité se réfère à une note de la proposition 36 du même ouvrage; l'absence d'identification de cet ouvrage interdit tout commentaire de ces constructions.

Maurolico ajoute à chacune des deux propositions qui viennent d'être examinées un corollaire qui tient plus du commentaire que du corollaire véritable; à la suite de la proposition 3, il indique :

C'est pourquoi il est manifeste que dans des cylindres on trouve une ellipse semblable et aussi semblable et égale à une ellipse conique proposée quelconque.[24]

[23]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 236, 237.

[24]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 237.

et il suffit d'y remplacer "cylindres" par "cônes" et "conique" par "cylindrique" pour obtenir le commentaire suivant la proposition 4. Il complète ces remarques par une manière d'aveu admiratif :

> Et [. . .] il est certainement digne d'admiration que, dans des solides dissemblables, on trouve deux sections semblables et même semblables et égales.[25]

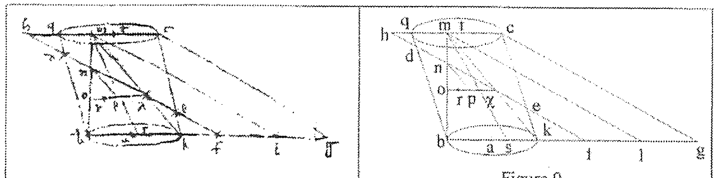
manifestant ainsi qu'un résultat qui deviendra un peu plus d'un siècle plus tard une quasi évidence[26] mérite selon Maurolico des démonstrations élaborées et une mention particulière à l'attention de son lecteur.

Le livre II et le traité *Sereni cylindricorum libelli duo* s'achèvent sur deux constructions qui constituent un raffinement des deux constructions précédentes; à nouveau leurs énoncés s'échangent mutuellement par substitution réciproque des termes "cylindre" ↔ "cône" et "conique" ↔ "cylindrique". Les propositions 5 et 7 peuvent être réunies en un même énoncé :

> Étant proposé un cône [cylindre] coupé suivant une ellipse quelconque, construire un cylindre [cône] sur la même base et de même hauteur qui, coupé par le même plan que le cône [cylindre], donne une ellipse semblable à l'ellipse conique [cylindrique].[27]

où les mots entre [ ] correspondent à la proposition 7. Les deux propositions sont illustrées par des figures identiques (Figure 9).

L'intérêt principal de ces propositions, dans le cadre de cette étude, tient au fait que seule la proposition 7, parmi les propositions du livre II traitant de la similitude des ellipses conique et cylindrique, avait été donnée à Maurolico grâce à la traduction très partielle du traité de Serenus publiée par Giorgio Valla sous le titre *De cylindrica sectione*; la proposition 7 de Maurolico est une reprise presque mot à mot de la proposition 16 de Valla. Tout le reste du livre II et la partie du livre I à partir de la proposition 17 sont à mettre au crédit de Maurolico.



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 17v.

Figure 9.

C. Les coniques et Maurolico en 1534

Les renvois effectués par Maurolico, au cours de démonstrations, à des propositions, référencées par des numéros, issues du premier livre d'un ouvrage intitulé *Elementa conicorum* pose la question de sa connaissance des sections coniques dans la période 1530-1535. Le numéro le

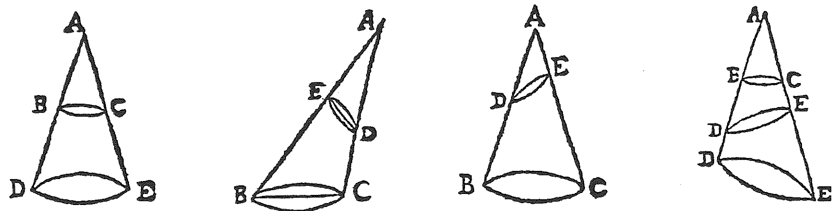
[25]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 237.

[26]Pour le géomètre Girard Desargues (1591-1661), cône et cylindre sont deux *sousgenres* d'un même *genre* de solide qu'il appelle *rouleau*, et dont le sommet est à distance soit finie (cône), soit infinie (cylindre); il n'y a plus donc lieu d'opérer aucune distinction entre ellipses conique et cylindrique. Pour le texte original, voir : R. Taton, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paris : Vrin, 1981, 2ème éd. p. 133, 134.

[27]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 238 et 241.

plus élevé des références fournies par Maurolico concerne la proposition 81 du premier livre des *Elementa conicorum*; or aucun ouvrage connu antérieur sur les coniques ne contient autant de propositions dans son premier livre. En particulier, il ne peut s'agir d'une publication dérivée des quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonios, dont certes un manuscrit est présent en Italie depuis 1427 et ce pour la première fois, semble-t-il, mais dont la première diffusion sera la traduction latine publiée en 1537 par Giovan Battista Memmo[28]; d'ailleurs le premier livre des *Coniques* d'Apollonios ne comporte que soixante propositions. D'autre part, la seule trace connue de travaux de Maurolico antérieurs à 1530 sur les coniques consiste en quatre seules propositions figurant dans son ouvrage d'optique *Photismi de lumine et umbra* . . . publié en 1521; ces propositions, comprenant les théorèmes 10 à 13, sont d'un contenu trop pauvre sur les sections coniques pour constituer un corpus utile dans l'étude des sections du cylindre :

> Théorème 10. Un cercle éclairé à partir d'un point projette dans un plan parallèle au sien une ombre circulaire et plus grande que lui. [. . .]
>
> Théorème 11. Il est possible qu'une ombre circulaire soit la projection d'un cercle oblique sur le plan [de base]. [. . .]
>
> Théorème 12. Il est possible qu'une ombre circulaire soit la projection d'une section conique. [. . .]
>
> Théorème 13. Un cercle peut projeter dans un plan une ombre qui soit une section conique quelconque.[29]



Théorème 10 Théorème 11 Théorème 12 Théorème 13

Maurolico disposait-il d'un ouvrage reprenant de plus ou moins près le traité aujourd'hui perdu d'Euclide sur les coniques, qui pourrait être celui que cite Archimède sous le titre *Éléments des coniques*[30] ? Ou Maurolico aurait-il rédigé un tel ouvrage à partir d'éléments épars recueillis dans divers ouvrages qu'il aurait rassemblés, réorganisés et complétés ? Telle est l'hypothèse avancée par R. Tassora qui appuie sa thèse sur un extrait de la biographie de Maurolico rédigée par un de ses neveux :

> Non minor fatiga durò egli nell' emenda de quattro libri Conici di Apollonio, aggiongendovi il quinto, e sesto, et formatone in oltre un breve trattato de sopranominati distinto in tre libri con dimostrationi rette, e brevi, nelle quali racchiudesi quasi tutta la scienza Conica.[31]

[28]G. B. Memmo, bibliographie [5]. C'est à partir de cet ouvrage que Maurolico entreprendra son traité sur les sections coniques *Emendatio et restitutio Conicorum Apollonii Pergæi*, achevé en 1547, et apportant corrections et compléments au travail de Memmo.

[29]F. Maurolico, bibliographie [2], p. 7, 8.

[30]Archimède, *op. cit.*, p. 164.

[31]R. Tassora, *op. cit.*, p. 191. La citation faite par R. Tassora renvoie à : *Vita del'Abbate del Parto D. Maurolyco*

Il faudrait que cet ouvrage ait été composé entre 1531 et 1534 et qu'il fut assez éloigné de ce que découvrira Maurolico des *Coniques* d'Apollonios au travers de la traduction effectuée par Memmo pour justifier la rédaction, achevée en 1547, de l'*Emendatio et restitutio Conicorum Apollonii Pergæi*. La citation ci-dessus laisse plutôt penser que le "bref traité [...] en trois livres" a été conçu comme un complément à l'*Emendatio*... de 1547. Il demeure que, jusqu'à présent, aucune découverte documentaire ne permet de se prononcer sur l'existence d'un traité maurolicien sur les sections coniques antérieur à 1534.

* * *

Même si Maurolico n'apporte pas de résultats fondamentalement nouveaux sur la question des sections planes du cylindre, il fait cependant montre d'originalité dans sa démarche de la preuve de l'identité de genre entre ellipses conique et cylindrique; toutefois cette démarche manque d'exhaustivité dans la mesure où, si les cylindres utilisés sont bien scalènes, les coupes faites de ces cylindres ne sont pas quelconques et produisent des ellipses dont les diamètres découlant naturellement de leur construction sont les axes de symétries orthogonales et non des diamètres conjugués quelconques. Cette position, en retrait par rapport à celle de Serenus et même de Valla, ne milite pas en faveur d'une connaissance approfondie, chez Maurolico, de la théorie apollonienne des coniques en 1534.

En revanche, Maurolico semble être le premier à envisager des coupes de cylindres à bases elliptiques. Il initie ainsi la question plus globale qui sera posée au XVII$^{\text{ème}}$ siècle : quelle est la nature d'un cône construit sur une conique ? Une coupe plane d'un tel cône est-elle une conique ou une courbe d'un autre genre ? Si la réponse en faveur de la conique est rapidement pressentie, les preuves tentées par Mydorge (1639), Descartes (1641) ou La Hire (1692) resteront incomplètes et le résultat sera acquis au début du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Mais ceci est une autre histoire.

Brève bibliographie

[1] F. MAUROLICO, *Sereni cylindricorum libelli duo*, 1534. Ms BN *Fonds latin 7465*.

[2] F. MAUROLICO, *Abbatis Francisci Maurolyci Messaniensis Photismi de lumine, & umbra ad perspectivam, & radiorum incidentiam facientes. Diaphanorum partes, seu Libri tres : in quorum primo de perspicuis corporibus : in secundo de Iride : in tertio de organi visualis structura, & conspiciliorum formis agitur. Problemata ad perspectivam, & Iridem pertinentia. Omnia nunc primum in lucem edita*. Naples, 1611 (1$^{\text{ère}}$ édition : 1521).

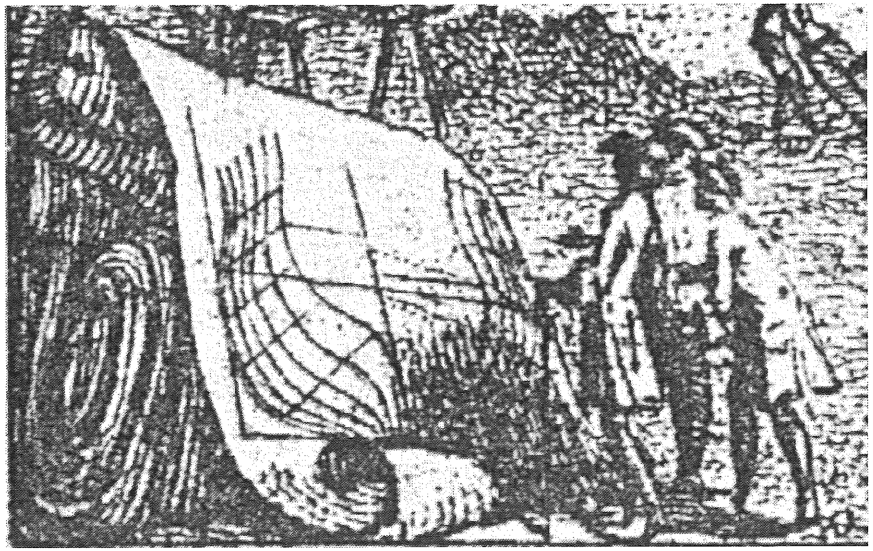
[3] R. TASSORA, "I *Sereni cylindricorum libelli duo* di Francesco Maurolico e un trattato sconoscuito sulle sezioni coniche" in *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 15$^{\text{e}}$ année, n°2 (déc. 1995), p. 135-264.

[4] R. MOSCHEO, *Francesco Maurolico tra Rinascimento e Scienza galileiana. Materiali e ricerche*, Messine, 1988.

scritta dal Baron della Foresta, ad istanza dell'Abbate di Roccamatore D. Sylvestro Maruli fratelli, di lui nipoti, Messine : Pietro Brea, 1613, p. 4, et donne en traduction française : "Il n'eut pas moins de fatigue dans la correction des quatre livres des Coniques d'Apollonios, leur ajoutant un cinquième et sixième livres et rédigeant en outre un bref traité distinct des susnommés en trois livres avec des démonstrations directes et brèves en lesquelles est contenue presque toute la science des coniques."

[5] G.B. MEMMO, *Apollonii Pergei philosophi, mathematicique excellentissimi Opera per doctissimum philosophum Ioannem Baptistam Memum Patritium Venetum, mathematicarumque artium in Urbe Veneta publicum de Græco in Latinum et noviter impressa*. Venise, 1537.

[6] G. VALLA, *Georgii Vallæ Placentini Viri clarissimi De expetendis et fugiendis rebus, opus in ovo hæc continentur : ....* Venise, 1501.



Extrait de l'illustration de la première page du *Traité du Navire* de Bouguer.

Dossier 4, réuni par Jean Dhombres

L'arche de Noé pouvait-elle couler, ou les ressources d'une parabole

Extrait du *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements*, par Pierre Bouguer, publié en 1746
(modernisé pour l'orthographe, mais les formules mathématiques sont selon l'original, avec correction des erreurs de frappe)

Chapitre III.
Méthode de déterminer le Métacentre, ou le terme de la plus grande hauteur à laquelle on peut mettre le centre de gravité du Vaisseau.

I.

Lorsque les coupes verticales de la carène, faites perpendiculairement à la longueur du navire, ne sont pas des cercles, il faut ordinairement se livrer à une assez longue discussion, pour pouvoir découvrir *le métacentre*, ce point au-dessous duquel il est nécessaire de mettre le centre de gravité du navire. Comme la question se réduit à déterminer la situation des directions ΓZ et γz (Figure 54) sur lesquelles agit successivement la poussée de l'eau, il faut chercher d'abord combien les centres de gravité Γ et γ d'où partent ces lignes, sont éloignés l'un de l'autre. Γ comme nous l'avons déjà assez dit, est le centre de gravité de la carène AEB, considérée comme homogène, & γ de la partie qui est submergée, lorsque le navire est incliné. L'intervalle entre les deux centres ne doit être qu'un infiniment petit, puisqu'il ne s'agit d'abord que de la première, ou plus petite inclinaison du navire. La carène AEB et le solide aEb, ont une partie commune AFbE, dont le centre de gravité est en 3. Ainsi le petit intervalle $\Gamma\gamma$ qui se trouve entre les centres de gravité Γ, γ, ne vient que des deux autres parties BFb et AFa, dont l'une sort de l'eau, pendant que l'autre y entre; et qui ont leur centre de gravité en 1 et en 2. Mais la carène AEB n'étant formée que de la partie commune AEbF, et de la petite partie BFb qui s'élève de l'eau; puisque toutes les parties d'un corps sont en équilibre autour de son centre de gravité, & que l'équilibre ne consiste que dans cette proportion qui rend les moments égaux. Par la même raison le centre de gravité γ du solide aEb qui sert de carène pendant l'inclinaison du navire, doit être sur la ligne 3 2, qui joint les centres de gravité 3 et 2 de AEbF, et de AFa qui se plonge dans l'eau, lorsque le navire s'incline. Mais comme les petits solides BFb & AFa sont de même solidité, et qu'ils le seraient également quand même ils ne seraient pas des corps semblables, puisque le navire occupe le même espace dans la mer avant et après son inclinaison, la partie commune AEbF doit avoir même rapport au solide BFb qu'au petit solide AFa; et il doit y avoir aussi même raison de 2γ à 3γ, que de 1Γ à 3Γ. C'est-à-dire que la petite ligne $\Gamma\gamma$, qui est la distance des centres de gravité γ et Γ, divise les deux lignes 32 et 31 proportionnellement; et cette petite ligne est donc parallèle à la surface de l'eau, ou à la distance 12 des centres de gravité 1 et 2. Il est clair que ce sera encore la même chose si le navire continue à s'incliner, pourvu que la partie infiniment petite qui se plonge d'un côté, soit toujours égale à celle qui s'élève de l'autre.

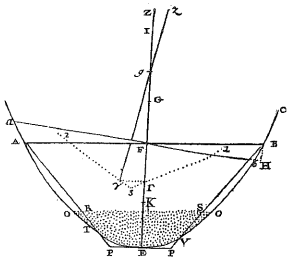


Figure 54 du Traité du Navire

II.

De ce que la partie commune AEbF est au petit solide BFb, comme 1Γ est à 3Γ, il suit aussi que la carène entière AEB est au petit solide BFb, comme 3 1 est à 3 Γ, et on aura donc encore cette proportion : la carène entiere AEB est au petit solide BFb, comme 1 2 est à $\Gamma\gamma$. Ainsi on pourra trouver la distance $\Gamma\gamma$ des centres de gravité Γ et γ, aussitôt qu'on connaîtra la solidité de la carène AEB, la solidité de la petite partie BFb, et la distance 1 2 des centres de gravité 1 et 2 des petites parties BFb et AFa. Puisque ce sont là les trois premiers termes d'une proportion, dont la distance $\Gamma\gamma$ est la quatrième.

III.

Comme la figure du vaisseau est donnée, on connaît sa coupe horizontale faite à fleur d'eau. Je nomme x les parties de l'axe de cette coupe, ou les parties de la longueur du navire, et y les demi-largeurs ou ordonnées : FB est la plus grande de ces demi-largeurs; je la nomme b; et je désigne par e la quantité verticale et infiniment petite HB, dont le point B s'élève de l'eau, lorsque le navire s'incline de l'autre côté. Je considère après cela que le petit solide BFb qui sort de l'eau, et dont BFb n'est qu'une coupe, est formé d'une infinité de petits triangles verticaux, qui étant arrangés tout le long de la longueur du navire à la distance infiniment petite dx les uns des autres, sont parallèles aux triangles BFb, et lui sont semblables. Ces petits triangles ont les demi-largeurs y pour bases, et on trouvera leur petite hauteur par cette proportion, FB = $b|$ BH = $e||y|\frac{e}{b}y$; de sorte que $\frac{e}{2b}y^2$ produit de y par $\frac{e}{2b}y$ sera l'étendue de ces petits triangles. Je multiplie cette étendue par l'épaisseur infiniment petite dx, il vient $\frac{e}{2b}y^2$ pour la solidité des petits triangles, ou plutôt des petits prismes triangulaires, dont le petit solide BFb est formé; et en intégrant on trouve $S\frac{e}{2b}y^2dx$, ou $\frac{e}{2b}Sy^2dx$ pour la grandeur de ce petit solide qui sort de l'eau par l'inclinaison du navire; c'est là une des choses qu'on cherchait.

Après cela je multiplie l'élément $\frac{e}{2b}y^2dx$ par $\frac{2}{3}y$; parce que le centre de gravité de chaque petit triangle répond aux $\frac{2}{3}$ de la base, ou de la demi-largeur y; et j'ai $\frac{e}{3b}y^3dx$ pour le moment de chaque petit prisme élémentaire par rapport au point F, ou par rapport à l'axe de la coupe du navire faite à fleur d'eau. Et l'intégrale $\frac{e}{3b}Sy^3dx$ sera donc le moment du petit solide entier BFb. Ainsi il ne reste plus qu'à diviser ce moment total par la somme de tous les petits prismes triangulaires, ou par le petit solide entier BFb; le quotient $\frac{2Sy^3dx}{3Sy^2dx}$ marquera, selon le principe général de Statique, la distance F1 du point F au centre de gravité 1 de ce solide BFb. On trouverait de la même manière la distance F2, si la carène était un corps irrégulier; mais comme les deux flancs de nos navires sont toujours égaux, on n'a qu'à doubler F1, et on aura $\frac{4Sy^3dx}{3Sy^2dx}$ pour la distance 12 des centres de gravité 1 et 2 des deux solides BFb, et AFa.

IV.

Maintenant qu'on connaît la solidité $\frac{e}{2b}Sy^2dx$ de la petite partie BFb, et la distance $\frac{4Sy^3dx}{3Sy^2dx}$ des centres de gravité 1 et 2, il ne manque plus que de connaître la solidité de la carène pour pouvoir faire l'analogie indiquée à la fin de l'Article II. La carène AEB est à la petite partie BFb, comme 1 2 est à $\Gamma\gamma$. On trouvera toujours aisément par les moyens expliqués ci-devant, ou par les autres méthodes que fournit la Géométrie, cette solidité; et supposé que p la désigne, on aura donc $p|\frac{2}{2b}Sy^2dx||\frac{4Sy^3dx}{3Sy^2dx}|\frac{2eSy^3dx}{3bp}$; ce qui montre que le centre de gravité γ de la partie aEb qui sert de carène pendant l'inclinaison du navire, est éloigné du centre de gravité Γ de la carène AEb de la distance $\frac{2eSy^3dx}{3bp}$. Enfin, si l'on fait attention que le petit triangle $\Gamma g\gamma$ qui est formé par la distance $\Gamma\gamma$ des centres de gravité Γ et γ, et par les lignes ΓZ et γz, lesquelles servent de direction à la poussée de l'eau dans les deux situations du navire, est semblable au petit triangle BFH, à cause que les trois côtés de l'un sont perpendiculaires aux trois côtés de l'autre, on aura cette dernière porportion; HB = $e|$ FB = $b||\Gamma\gamma = \frac{2eSy^3dx}{3bp}|\Gamma\gamma$. On en déduira cette formule, $\Gamma g = \frac{2Sy^3dx}{3p}$, qui apprend la plus grande hauteur Γg que peut avoir le centre de gravité du navire au-dessus du centre de gravité Γ de sa carène.

Nous ne comptons pas comme une difficulté, dans l'usage qu'on peut faire de cette formule, la nécessité où l'on est de trouver la valeur de l'intégrale Sy^3dx. Si l'on suppose que la tranche horizontale du navire faite à fleur d'eau, ait 100 pieds de long, et que ses demi-largeurs mesurées à 12 $\frac{1}{2}$ pieds de distance les unes des autres, soient, en commençant par l'extrémité de la proue, de 1 pied, de 9, de 12, de 13 $\frac{1}{2}$, de 13 $\frac{1}{2}$, de 12 $\frac{1}{2}$, de 11 $\frac{1}{2}$, de 9 $\frac{1}{2}$, et de 7 $\frac{1}{2}$, on trouvera aisément, par la méthode expliquée dans le second Chapitre de la Section précédente, l'intégrale Sy^3dx : car on aura 1,729, 1728, 2460 $\frac{3}{8}$, 2460 $\frac{3}{8}$, 1953 $\frac{1}{8}$, 1520 $\frac{7}{8}$, 857 $\frac{7}{8}$, et 421 $\frac{7}{8}$ pour les neuf cubes y^3; et si on ajoute ensemble tous ces nombres, mais en ne faisant entrer dans l'addition que la seule moitié du premier et du dernier, et qu'on multiplie la somme par 12 $\frac{1}{2}$ qui est la distance d'une largeur à l'autre, il viendra 149006. Après cela il ne restera plus qu'à diviser les $\frac{2}{3}$ de ce nombre par la solidité p de la carène, pour avoir la hauteur Γg. Si cette solidité (qu'on peut toujours trouver aisément, ou par les méthodes précises que fournit la Géométrie, ou par les moyens mécaniques que nous avons donnés dans la Section précédente) est égale à celle d'un ellipsoïde de même longueur, de même largeur et de même profondeur, et que la profondeur soit de 12 pieds, cette solidité sera de 16971 pieds cubiques, et on aura par conséquent 5 $\frac{85}{100}$ pieds pour la hauteur du métacentre g au-dessus du centre de gravité Γ de la carène. Supposé de plus que ce dernier centre soit plongé dans l'eau de 4 $\frac{1}{2}$ pieds ou des $\frac{3}{8}$ de la profondeur, comme cela se trouve dans l'ellipsoïde, le point g qui est le terme ou la limite de la plus grande hauteur du centre de gravité du navire, sera élevé d'environ 1 pied 4 pouces au-dessus de la surface de la mer.

V.

On pourra appliquer notre règle avec la même facilité à tous les vaisseaux : mais on viendra à bout de la rendre plus simple, jusque-là qu'on pourra l'employer souvent sans calcul, lorsque toutes les coupes verticales de la carène faites parallèlement à AEB, seront des figures semblables. Si, dans ce cas particulier, K est le centre de gravité de la coupe AEB, centre qu'il faut ici bien distinguer de celui Γ de la carène entière, puisque ce dernier résulte de la disposition ou de l'assemblage de tous les autres, notre formule se changera en $\Gamma g = \frac{2F\Gamma\times\overline{FB}^2}{3FK\times AEB}$, ou se réduira à cette simple analogie : le produit de la coupe AEB par la quantité FK, dont son centre de gravité K est plongé dans l'eau, est au $\frac{2}{3}$ du cube $\overline{FB}^3$ de la demi-largeur FB, comme la quantité $F\Gamma$, dont le centre de gravité de la carène est enfoncé dans l'eau, est à la hauteur Γg du métacentre g au-dessus de ce dernier centre.

Les lecteurs un peu versés dans la Statique, doivent voir déjà l'origine de ce théorème, ou de cette seconde règle, dans la conformité qu'il y a entre l'expression $\frac{2Sy^3dx}{3p}$ de Γg, et celle qu'on sait qu'a $F\Gamma$, qui ne doit être dans la circonstance présente, que $\frac{Sy^3dx}{p}$ affectée de quelques constantes. En effet, on peut trouver l'étendue de toutes les coupes de la carène qui sont parallèles à AEB par cette analogie : le carré $\overline{FB}^2$ de la demi-largeur FB est à l'étendue de la coupe AEB, comme le carré y^2 de toutes les autres demi-largeurs est à l'étendue $\frac{AEB}{\overline{FB}^2} \times y^2$ des coupes correspondantes. Et si, après avoir multiplié cette étendue par l'épaisseur infiniment petite dx, qui est la distance d'une coupe à l'autre, pour avoir l'élément $\frac{AEB}{\overline{FB}^2}y^2dx$, on fait cette autre analogie fondée encore sur la ressemblance des coupes : la demi-largeur FB est à FK, ainsi la demi largeur y des autres coupes est à la quantité $\frac{FK}{FB} \times y$ dont leur centre de gravité est au-dessous de la surface de l'eau, et qu'on multiplie l'élément $\frac{AEB}{\overline{FB}^2} \times y^2dx$ par cette quantité $\frac{FK}{FB} \times y$, on aura $\frac{FK \times AEB}{\overline{FB}^3} \times y^3dx$ pour le moment de chaque élément par rapport à la surface de l'eau, et l'intégrale $\frac{FK \times AEB}{\overline{FB}^3}Sy^3dx$ sera le moment de toute la carène. Il faut ensuite, selon le principe de la Statique, diviser ce moment par la solidité p, et le quotient $\frac{FK \times AEB \times Sy^3dx}{\overline{FB}^3 \times p}$ marquera la quantité $F\Gamma$, dont le centre de gravité Γ de la carène est enfoncé dans l'eau. Mais on voit en comparant cette valeur avec celle de $\frac{2Sy^3dx}{3p}$ de Γg découverte ci-devant, qu'elles sont l'une à l'autre comme $\frac{FK \times AEB}{\overline{FB}^3}$ est à $\frac{2}{3}$, ou comme FK $\times$ AEB est à $\frac{2}{3} \times \overline{FB}^3$; et qu'ainsi on peut faire la proportion mentionnée ci-devant, FK $\times$ AEB $|\frac{2}{3} \times \overline{FB}^3 \| F/\Gamma | \Gamma g$. De cette proportion, on en déduit l'équation, ou la formule $\Gamma g = \frac{2/3 F\Gamma \times \overline{EB}^3}{FK \times AEB}$ dont on peut retrancher, si on le veut, EΓ; et il viendra F$g = \frac{2/3 F\Gamma \times \overline{FB}^3 - F\Gamma \times FK \times AEB}{FK \times AEB}$ qui exprime la plus grande hauteur que peut avoir le centre de gravité du navire au-dessus de la surface de l'eau.

L'arche de Noé pouvait-elle couler, ou les ressources d'une parabole

C'est Yahvé qui donna ses ordres à Noé pour la construction d'un navire destiné à le sauver du Déluge ainsi que toute sa famille, et d'y rassembler des représentants de toutes les espèces animales[1].

> Fais-toi une caisse en bois de cyprès. Tu feras la caisse de cellules.
> Asphalte-là à l'intérieur et à l'extérieur avec de l'asphalte.
> Et telle, tu la feras, longueur de la caisse, trois cents coudées;
> Sa largeur, cinquante coudées; sa taille, trente coudées.
> Tu feras une lucarne à la caisse et l'achèveras, d'une coudée, en haut.
> Tu mettras l'ouverture de la caisse sur le côté.
> Tu feras des soupentes, des secondes, des troisièmes. (*Gen.* 6: 14-16).

D'habitude, on adopte pour la coudée la valeur d'un pied et demi, de sorte que la seule longueur du navire de Noé serait de 450 pieds, et l'archéologie marine a établi que les trirèmes attiques atteignaient les 40 mètres. La forme d'un parallélépipède rectangle aux proportions si remarquables, et si considérables, largement supérieures en valeur absolue à ce que nous connaissons

[1]Traduction de André Chouraqui.

des navires construits au premier millénaire avant l'ère chrétienne, a presque toujours inquiété les historiens, qui ont depuis longtemps le mot de mythe à la bouche[2]. Encore que les dimensions données dans la Genèse fussent faibles par rapport à celles fournies par d'autres traditions, comme la tradition babylonienne. Au contraire du doute, cette forme géométrique bien peu usuelle pour un navire a pourtant inspiré l'esprit mathématicien d'un savant du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Et il chercha à déterminer *a priori* si le navire était stable. C'est-à-dire si, un peu incliné par une impulsion quelconque, l'arche pouvait redresser la situation. Pierre Bouguer concluait son étude par ces mots :

> Ainsi l'inclinaison de ce Bâtiment ne pouvoit jamais devenir trop grande; il n'y avoit rien à craindre de ce côté pour les précieux restes du genre humain[3].

La sagesse talmudique avait conclu depuis longtemps qu'au moins les proportions fournies par la Genèse étaient les bonnes, c'est-à-dire assuraient ce qu'il fallait au "bon "navire, le "good ship" selon l'expression très souvent utilisée au Moyen Age anglais. Car l'important, pendant des siècles, fut de faire selon un bon modèle. Compilé à la fin du cinquième siècle de notre ère en Palestine, un commentaire de la Mishna portant sur le livre de la Genèse indiquait les bonnes proportions à respecter.

> *La Torah vous a enseigné une mesure pratique : si un homme construit un navire qui doit être capable de tenir dans un port, qu'il lui donne en largeur le sixième et en hauteur le dixième de sa longueur*[4].

Donner les conditions pour qu'un navire tienne dans un port, mais aussi bien en mer, telle devint l'ambition théorique de Pierre Bouguer, qui indiqua une formulation mathématique, utilisant une parabole afin de préciser la stabilité de l'arche, et celle d'un bâtiment en général. Ce faisant, et au vu des résultats mathématiques, il proposait sans vergogne d'abandonner la tradition de l'architecture navale, afin d'activer pratiquement l'innovation. Si nous reprenons l'explication fournie dans le texte présenté au début de ce dossier, c'est qu'elle fait joliment jouer une génération de la parabole, et le thème de cet atelier est celui des coniques. C'est aussi qu'elle indique une façon de présenter le calcul intégral sans passer par le calcul différentiel, et donc adopte un parti pris pédagogique auquel nous ne sommes pas du tout habitués. Il libère du professeur, et c'est que Bouguer donne à voir une épistémologie en mathématiques. Nous reprenons enfin la construction parce qu'elle avait la prétention de pouvoir être directement comprise par des marins habitués à certains types de calcul sur les centres de gravité, et donc donne de l'intégrale une vision mécanique. Elle est susceptible d'une intéressante mise en image par ordinateur que Roland Stowasser devait fournir, mais pour des raisons de santé il n'a pu se rendre à Louvain pour le colloque.

Il est avantageux pour un enseignant de mathématiques de lire Bouguer aujourd'hui et de le travailler; au point que je vais me limiter à ce qui relève de la didactique des mathématiques dans la situation scientifique traitée par Bouguer. Je ne fais pas ici de l'histoire des mathématiques, et je ne donne pas toutes les variantes du texte de Bouguer en 1746 ou les commentaires qui en furent alors faits. Je ne respecte même pas toutes ses notations dans le texte fourni, mais le fait dans les citations du commentaire, avec des dessins originaux ; je ne poursuis pas plus

[2]Don Cameron Allen, *The Legend of Noah : Renaissance rationalism in Art, Science and Letters*, Urbana, University of Illinois Press, 1963.

[3]P. Bouguer, *Traité du navire, de sa construction, et de ses mouvemens*, Jombert, Paris, 1746, p. 266. Désormais la référence sera abrégée en T.N., p. 266.

[4]Edition critique de J. Theodor, Ch. Albeck, Berlin, 1912, vol. 1, p. 282.

le développement de calcul différentiel auquel la théorie de Bouguer a donné lieu, avec un splendide exposé théorique en termes de surfaces survenu en 1822 et dû à Charles Dupin[5]. Au contraire même, j'enferme la théorie de Bouguer dans le calcul intégral et j'oppose ce dernier au calcul différentiel.

Mais je n'ai aucune honte à agir ainsi : l'histoire est toujours une histoire intéressée, et mon intérêt est ici affiché pour la didactique. J'ai quelquefois beaucoup de gêne à lire des travaux d'histoire des mathématiques à prétentions didactiques ou pédagogiques dans la mesure où ils affichent une fidélité sans faille à l'original. Comme s'il était possible de retrouver toutes les conditions d'une mentalité ancienne ! S'agit-il d'ailleurs de savoir faire parler les morts ? L'exemple choisi me donne tout de suite la preuve de la difficulté d'une interprétation. Faut-il par exemple lire la remarque de conclusion de Bouguer comme étant celle d'un sceptique sur les vertus de la Providence ? Pouvait-on, au milieu de XVIIIème siècle, et en s'appuyant sur les mathématiques, être agnostique sans militantisme ? D'autres interpréteront la remarque du Breton Pierre Bouguer à la façon de Bernardin de Saint-Pierre, qui voyait un bienfait de la bonté divine dans l'arrangement de rayons sur les melons afin qu'on les découpe plus aisément en famille[6] ! Et s'il ne s'agissait chez Bouguer que d'un truc de professeur pour mieux captiver son auditoire ? Le *Traité du Navire* de Bouguer fourmille de remarques acides, vives, et sans façon.

Représentation du réel, respect du texte

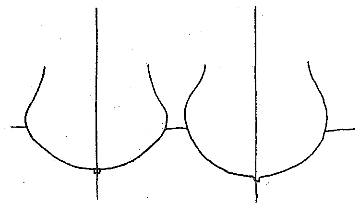
Mais restons encore un peu avec Noé, et son arche (tebhah) en forme de maison. Car nous allons pouvoir confronter un texte et son illustration, et cela nous préparera au problème analogue chez Bouguer, celui de l'illustration du calcul intégral par la mécanique du navire. Le mot hébreu pour navire est autre (oniyah) et que Chouraqui a judicieusement traduit par "caisse"; l'enfoncement de l'arche dans l'eau n'est pas spécifié dans la Genèse, mais la Mishna déjà citée assure qu'il était de onze coudées (16,5 pieds) (*op. cit.*, p. 312). Pierre Bouguer suppose que cet enfoncement était de dix coudées, et calcule un centre de gravité assez bas parce qu'on "eut sans doute l'attention de mettre en bas les choses les plus pesantes" (TN, p. 266). Etait-il au courant des discussions rabbiniques pour savoir comment étaient réparties les masses dans les trois étages de cellules (du grec *kella*, en hébreu *qelin* ou *qinnim* pour désigner les pièces en lesquelles ces cellules sont elles-mêmes réparties) ? Bouguer sait naturellement qu'en science l'oubli est souvent le meilleur des aiguillons, car il pousse à l'innovation. Bouguer sait aussi que son calcul de stabilité ne pourra être oublié, car il conduit à modifier l'aspect des navires de son époque, dont un critère d'élégance était d'avoir des flancs rentrants au niveau de la ligne de flottaison. Or Bouguer, comme résultat de son calcul, souhaitait avoir une verticalité de la carène. Il reconnaissait faire ainsi perdre

> "dans les commencements... beaucoup de grâce aux yeux des marins; mais à cela on ne sçauroit que faire; la Geométrie est une science impérieuse, & c'est à nous à trouver beau tout ce qu'elle nous prescrit". (TN, p. 274)

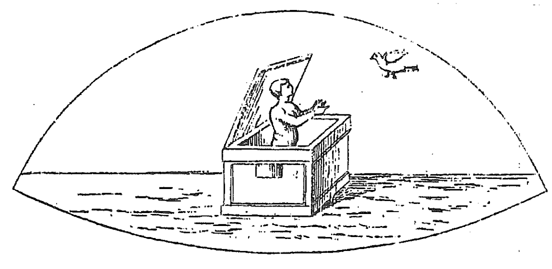
[5]C. Dupin, *Applications de Géométrie et de Méchanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc., pour faire suite aux Développements de Géométrie*, Paris, Bachelier, 1822. De fait, le mémoire original de Dupin sur la surface métacentrique avait été approuvé par la classe des sciences mathématiques de l'Institut à la fin août 1814 sur rapport de Sané, Poinsot et Carnot.

[6]Il n'est jamais facile d'interpréter un acte scientifique en termes culturels ou idéologiques; non qu'il ne faille pas le faire, mais en s'y essayant il ne faut pas oublier que la science se veut objective, donc en particulier prétend mettre de côté le discours culturel. Il y a donc nécessairement en science une mise en dehors. Vouloir remettre en dedans nécessite une forte interprétation historique. Voir J. Dhombres, *Une science à la française*, à paraître.

Sommes-nous encore prêts à entendre une telle parole aujourd'hui ? Et interprétons-nous bien ce que dit Bouguer, professeur d'hydrographie lui-même et donc ayant sa place dans la corporation des constructeurs de la marine, devant défendre leurs conceptions face à des officiers de marine, face aussi à des officiers administrateurs chargés de gérer les fonds alloués par le Ministre. En tout cas la forme des navires a bien évolué au milieu du XVIIIème siècle, comme le montrent les dessins ci-dessous.



Le travail de Bouguer fait partie de ces efforts pour standardiser l'appréciation des navires, et s'inscrit dans le grand mouvement de gestion et de prévision par l'Etat au cours du siècle des Lumières[7]. Les figures que donne Bouguer sont confrontées à sa théorie et au réel de la navigation, comme celles des peintres de l'Antiquité, et du Moyen Age. Ils n'eurent aucune difficulté à représenter l'arche de Noé en tant que maison, la maison humaine. Dans les premières représentations chrétiennes, l'arche est particulièrement simple, et sa flottaison hautement improbable. La caisse a un couvercle; il y a bien la lucarne désignée dans la Genèse, mais ce pourrait être une poignée pour la caisse.



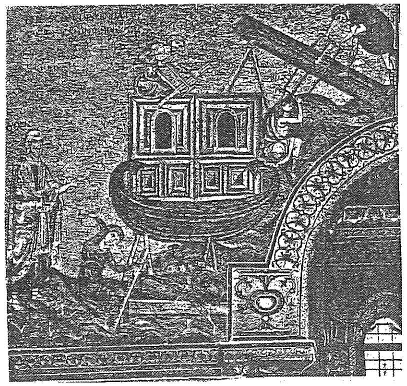
Une représentation de Noé dans une catacombe chrétienne de Rome
où l'arche a la forme d'une caisse

En dehors des représentations assez fidèles au texte, une solution ancienne fut celle de la caisse posée sur un radeau : le dessinateur peut multiplier les lucarnes, et même pose quelquefois une cheminée pour que la caisse fasse maison. Le radeau semble flotter naturellement, mais les vagues sont inquiétantes. Dans un autre cas, le bateau est remarquablement dessiné, avec tout l'appareil de la construction, les herminettes et les baux, mais l'arche elle-même est réduite à l'abstraction d'un texte venant s'inscrire dans le schéma géométrique d'une maison.

[7]E. Brian, *La Mesure de l'Etat*, Paris, A. Michel, 1996.

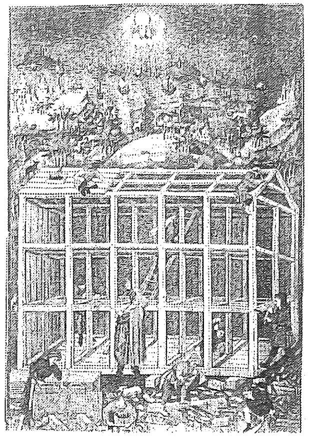
Deux représentations de l'arche. Dans celle de gauche, qui provient d'un livre imprimé en 1493, *Buch der Chroniken*, Noé est celui qui donne des ordres aux ouvriers

Un peu plus tôt, au XII^{ème} siècle, par exemple sur une mosaïque byzantine de Monreale en Sicile, on avait tenté une conciliation entre le texte et la pratique navale, l'arche étant conçue comme une caisse mais disposée sur une nef bizarrement symétrique et aux formes néanmoins exagérément recourbées. Il y avait un luxe de détails réalistes sur la construction même de l'arche.



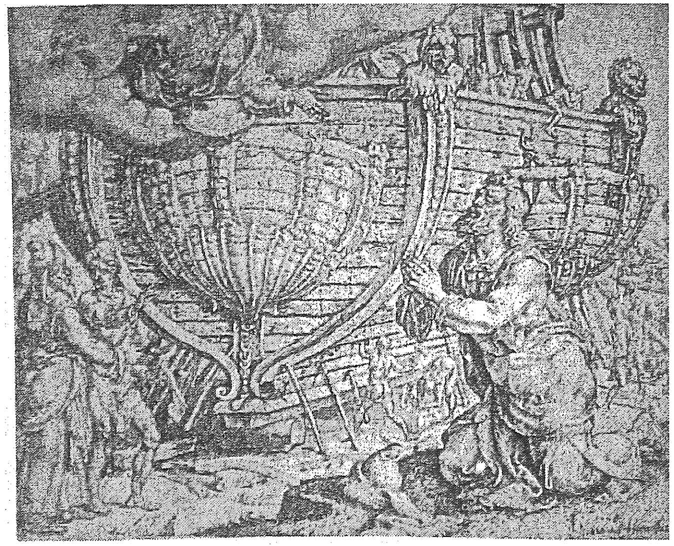
XII^{ème} siècle : mosaïque de Monreale

Ces détails sur les instruments utilisés pour la construction d'un navire se retrouvent souvent; on le voit, en particulier au XV^{ème} siècle avec la belle illustration d'u manuscrit anglais. Dieu dirige la construction de la maison qui ne semble avoir aucun rapport avec la navigation



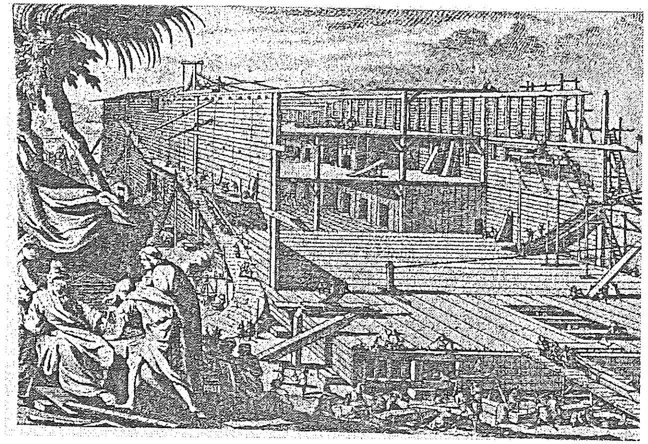
Manuscrit anglais du XV^{ème} siècle représentant la construction de l'arche de Noé (British library, MS add. 18 850, f. 15v.)

À la Renaissance, et selon un mouvement critique qui a fondé l'exégèse, et sans doute participé de la formation du jugement scientifique, les peintres rationalisent l'arche de Noé. Ils la donnent à voir comme bateau possible, et c'est un bateau usuel d'alors, un bateau de qualité. La représentation est double : Dieu donne et Noé remercie; les ouvriers construisent la barque magnifiquement décorée et toute baroque sur son étrave étroite.

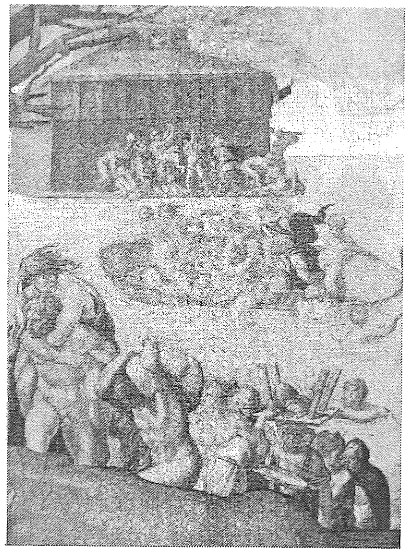


Noé recevant de Dieu les directives pour la construction de l'arche
Encre brune et craie blanche sur papier jaune (201x253cm) de Maarten van Heemskork (1558)
Copenhagen, Statens Museum for Kunst

On appréciera le goût architectural, une baroquisation de la caisse, qui présida à la représentation ci-dessous.



Michelangelo, au plafond de la chapelle Sixtine, choisit la forme du parallélépipède rectangle qu'il coiffe cependant d'une pyramide, la célèbre colombe s'échappant par l'unique lucarne représentée. La caisse flotte comme un radeau, sans marque d'enfoncement. Elle est fort différente de la barque où une mégère empêche un nageur de grimper à bord.



L'arche de Noé au plafond de la chapelle Sixtine

C'est une tout autre gravure qui peut expliquer la démarche de calcul de Bouguer; elle doit en effet montrer un nouvel outil : la mathématique. Nouvel outil car Bouguer abandonne la mathématique des proportions – la règle de trois – qui avait longtemps été le seul instrument en architecture navale.

Mais il faut commencer par le commencement : il y a bien une figure au départ chez Bouguer, toute simple. C'est une coupe verticale de l'arche parallélépipédique, selon un plan orthogonal à l'axe transversal horizontal du navire. Ce sont sur des coupes que vont se faire les raisonnements; or, puisque de toute évidence la stabilité du bateau fait jouer le corps entier du bateau, la réduction à des coupes introduit une pratique géométrique nouvelle, celle qui est liée au calcul intégral

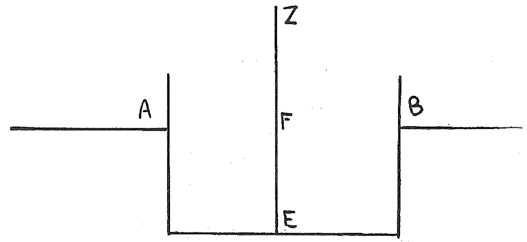


Figure 1
Coupe de l'arche de Noé, avec indication de la ligne de l'horizontale de la mer

A cette figure de Bouguer est ajoutée une autre qui correspond à un bougé du navire sous un effet quelconque (vent, vague). Mais le professeur d'hydrographie trouve plus pratique de faire bouger la ligne du niveau de l'eau, la mer, en ne changeant rien au navire : de sorte que la nouvelle ligne est ci-dessous la ligne ab, et la verticale est passée de EZ à γZ.

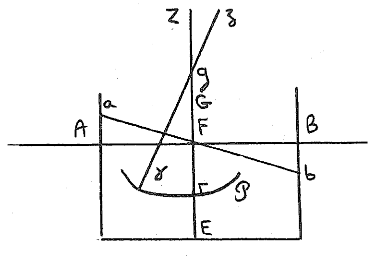


Figure 2
Représentation du bougé de l'arche de Noé

La figure du bougé indique que les droites AB et ab se coupent au point F, milieu de AB : ce n'est pas un accident ou une simplification de géomètre. Le déplacement considéré du navire est tel que les aires triangulaires AaF et BbF doivent être les mêmes, "puisque le navire occupe le même espace dans la Mer avant et après son inclinaison" (TN., p. 259). Le poids du navire reste le même qu'il bouge ou qu'il reste au repos, contrebalancé par la même poussée d'Archimède appliquée dans toutes les positions, de sorte que le volume de la carène immergée reste toujours le même. La figure choisie par Bouguer illustre ce fait physique que la géométrie réduit à l'intersection des droites AB et ab au point F.

Mais une telle intersection ne subsiste pas pour un navire dont les formes n'ont pas la symétrie du rectangle de la caisse. Il faudra comprendre autrement : Bouguer n'en parle pas tout de suite quoique la non symétrie du bateau ne soit pas un luxe de mathématicien, les gondoles de Venise étant un exemple déjà connu. Chaque chose en son temps. Bouguer prépare l'effet de réalisme de sa théorie. L'un des avantages en effet du calcul intégral sera de ne pas devoir tenir compte des effets éventuels de symétrie pensés par simplification par le théoricien, et de pouvoir s'effectuer sur le vrai du navire.

Le centre de gravité de la coupe AEB de la caisse submergée par l'eau est en Γ (milieu du segment FE); le nouveau centre de gravité de la caisse de ligne horizontale aFb est en γ, la droite γz, ou nouvelle verticale, est orthogonale à la nouvelle horizontale ab. Les verticales EZ et γz se coupent en un point g : le *métacentre* du navire. C'est à ce point que va être ici réduite l'étude de la stabilité de la caisse. Selon que le centre de gravité G du bateau est au-dessous ou au-dessus du point g il y a ou non stabilité. L'expression "méta" dans "métacentre" dit explicitement que pour qu'il y ait stabilité il faut que le métacentre soit au-dessus du centre de gravité G : le métacentre désigne un maximum à ne pas dépasser. Voilà ce qu'il faut établir, et à ce seul énoncé on comprend que la démonstration ne peut résulter d'un jeu d'égalités ou d'équations; un maximum relève d'une autre analyse que celle résultant de l'algèbre ordinaire. Il faut donc aussi voir sur la figure le centre de gravité du bateau. Mais c'est un centre de gravité de la coupe, un virtuel. Ceci sera précisé par Bouguer.

Les dessins suivants, utilisant les vecteurs pour représenter les deux forces contraires en jeu, poids et poussée d'Archimède, justifient aussitôt à nos yeux le métacentre dans le cas général. La question est de savoir où est le métacentre dans le cas de la caisse.

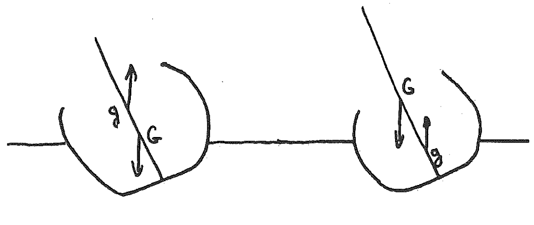


Figure 3

À droite, cas où g est au-dessus de G. Il y a un couple qui permet le redressement du mouvement d'inclinaison, donc c'est une situation stable.
À gauche, cas où les positions verticales de g et G sont inversées, le couple contribue à l'aggravation de l'inclinaison, donc la situation est instable.

Les vecteurs ne font pas partie du vocabulaire ni de l'horizon mental d'un Bouguer, ni d'ailleurs de celui de ses contemporains. Mais ce n'est pas la question que nous étudions présentement; nous voulons rendre compte des explications du calcul de Bouguer quant au point g, le métacentre, et de sa progression pour faire comprendre le calcul.

Car il fournit une fructueuse opposition entre deux méthodes. L'une qui est de calcul direct du point g parce que la forme de l'arche de Noé est bien particulière et donc le point γ,

préliminaire, peut se trouver facilement, indépendamment même du bougé de l'arche (c'est-à-dire indépendamment de la nature de l'angle d'inclinaison du navire, petit ou grand). Le calcul de géométrie analytique établit que, tant que le niveau de l'eau ne dépasse par la hauteur de l'arche, le point γ se trouve sur une parabole dont le sommet est en Γ. Bouguer ne fait pas ce calcul, car il le considère comme évident. L'autre calcul est celui d'un effet infinitésimal : Bouguer suppose que l'angle d'inclinaison est un infiniment petit, et il tente de trouver la position de γ infiniment voisine de celle de Γ, donc la direction de la droite $\Gamma\gamma$: bref, Bouguer cherche la tangente à la courbe que décrit le centre de caisse immergée γ. Insidieusement, à la manière de la persuasion, la démarche de Bouguer modifie alors la définition du métacentre, ou plutôt elle la complète. *A priori*, le point g dépend de l'inclinaison du navire, et il y a autant de métacentres qu'il y a d'inclinaisons. La Figure 3 est celle d'une seule inclinaison. Il faut voir qu'il y a en fait une courbe métacentrique. Mais est d'abord intéressante la position limite du point g lorsque l'inclinaison tend vers 0. L'autre calcul de Bouguer est destiné à montrer à la fois la tangente à cette courbe en g et l'existence même de cette courbe, sa forme. Et c'est la dépendance avec une autre courbe qui est expliquée. Cette autre courbe est celle que décrit le centre γ de la caisse, une parabole. Elle a une tangente en Γ. On peut confronter les deux calculs, celui de la parabole et celui de la courbe en général : dans cette confrontation, il y a un apprentissage.

Pour Bouguer, cet apprentissage n'est pas celui du calcul différentiel, mais celui du calcul infinitésimal : nous avons perdu ce sens aujourd'hui, mais il était usuel au milieu du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, et il est resté en fait en physique mathématique *grosso modo* jusqu'à nos jours. Ne parlons pas de rigueur, ce mot terrorisant : c'est un style qui est en cause, et par conséquent une pédagogie. Bouguer ne se limite pas à la caisse de Noé : il donne tout de suite la situation générale, et la représente sur un dessin que nous allons souvent retrouver. C'est le dessin où toutes les explications se nouent.

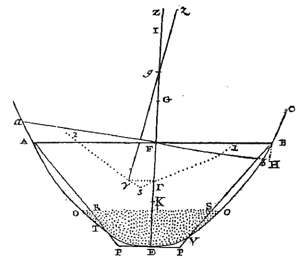


Figure 4 : C'est la figure 54 du *Traité du Navire*

Le sens du métacentre

Le métacentre apparaît de façon centrale dans le *Traité du navire*, lorsque déjà plus de deux cent cinquante pages ont été écrites. La longue table analytique des matières qui vient en premier dans l'ouvrage indique l'ordre que le professeur a choisi d'offrir à son lecteur. Trois livres, d'abord une description des termes de marine et des procédés de construction, ensuite une théorie du vaisseau en équilibre sur l'eau qu'organise le métacentre, et enfin une théorie du vaisseau en marche, d'où le métacentre ne disparaît pas. Ce plan paraît imparable dans sa banalité même.

Le métacentre est construit au livre second comme le pendant du centre de gravité décrit à la première section dont, à la seconde section, il limite la position supérieure, du moins si l'on veut que le navire soit stable "lorsqu'il ne cingle pas". Tel est le sens de "méta" dans métacentre : "De la plus grande hauteur à laquelle on peut mettre le centre de gravité du Vaisseau" est le titre adopté par Bouguer pour cette seconde section. Le lien avec le centre de gravité a valeur épistémologique : nous allons le voir car il n'est pas naturel qu'une limite supérieure relève d'un calcul analogue à celui des points qu'elle borde. Le métacentre est un centre de gravité, non par la physique qui le gouverne, mais par le calcul qui l'obtient.

La pensée du métacentre provient d'un phénomène réduit au bon sens, celui de l'équilibre d'un bouchon sur l'eau, qui ne peut être le même verticalement ou horizontalement. Telle est l'expérience de base dont la réduction fournit deux points seulement, le centre de gravité du navire d'une part et le centre de gravité de la carène immergée d'autre part. Ce dernier point est celui à partir duquel se porte verticalement la poussée d'Archimède[8].

> Le centre de gravité de la carène étant déterminé, on connoîtra le point dans lequel se réunit la poussée de l'eau, & d'où part la verticale sur laquelle cette puissance agit.[...] Mais ce n'est pas encore assez pour que la situation du Navire soit permanente : car les parties de l'eau, de même que celles de toutes les autres liqueurs, sont dans un mouvement continuel ; & il arrive sans cesse que quelqu'unes de ces parties chocquent la carène plus d'un côté que de l'autre ; ce qui suffiroit pour produire une inclinaison qui ne seroit d'abord, si on le veut, qu'insensible ; mais qui ne manqueroit jamais d'augmenter comme d'elle-même, si le centre du Navire étoit trop haut. Il n'y a personne qui n'ait éprouvé quelquefois quelque chose de semblable, en tâchant de faire floter de bout un morceau de bois, ou quelqu'autre corps leger, qui avoit beaucoup de longueur. Il s'agissoit d'abord de le placer verticalement, & de mettre son centre de gravité exactement au-dessus de celui de l'espace qu'il occupoit dans l'eau par son extrémité : mais quoiqu'on réussît peut-être à donner cette situation précise, la moindre cause extérieure suffisoit pour l'alterer ; et aussi-tôt que le corps avoit commencé une fois à s'incliner, sa propre pesanteur d'un côté, et la poussée verticale de l'eau de l'autre, tendoient conjointement à le faire incliner davantage, & à le faire tomber[9].

La conclusion de l'analogie est la suivante : "Il n'est que trop certain que la même chose doit arriver à un Navire, dont le centre de gravité est trop élevé". Sept pages plus loin, et sept pages d'un modeste format in-4°, alors même que le lecteur n'était pas supposé connaître le Calcul, Bouguer livre la formule qui, sur une verticale, fournit la distance séparant le métacentre g du centre de gravité Γ de la carène immergée, ou hauteur métacentrique[10].

[8] A titre d'une étude de la pensée vectorielle avant la lettre, il pourrait être intéressant de noter dans l'œuvre de Bouguer les différentes techniques d'application d'une force composée en un seul point (le travail sur la mâture est différent à ce propos de celui sur la poussée d'Archimède, et il y eut même une polémique à l'Académie à ce propos).

[9] Pierre Bouguer, *Traité du navire, de sa construction, et de ses mouvemens*, Paris, Jombert, 1746, livre II, section II, chapitre II, pp. 254-255. Cette référence sera abrégée en T.N. Je garde l'orthographe de Bouguer car elle est nettement plus anarchique que celle des mémoires académiques usuels. Je n'ai pas d'interprétation particulière de ce fait, alors que Bouguer est un esprit très cultivé, érudit même, mais volontiers exaspéré par les mondanités, et particulièrement les mondanités parisiennes. Peut-être aussi faut-il compter avec son emploi de la langue des professionnels de la mer ! Il est toutefois surprenant de constater que selon les bibliothèques, les ouvrages datés de 1746 ont une autre orthographe différente. Un autre exemplaire présente par exemple la correction pour le verbe "choquer", mais oublie cette fois l'accent au mot "carène". J'avoue être étonné du fait que ce sont les exemplaires à la meilleure orthographe qui sont ceux où les formules mathématiques sont les moins bien présentées, avec des erreurs de notations. L'annexe reproduit l'exemplaire dont les formules mathématiques comprennent le moins de fautes dans les formules. N'oublions pas que la correction des épreuves à cette époque, ne revenait pas toujours à l'auteur.

[10] Figures et formules ont été aménagées par rapport à l'original, afin de respecter les usages actuels. Ce n'est qu'au début du XIX[ème] siècle, et sous l'impulsion de Fourier, que l'on se mit à noter les bornes supérieure et inférieure d'une intégrale définie. Le signe de l'intégrale, inventé par Leibniz comme un S étiré à partir de *summa*,

(1) $\Gamma g = \frac{2}{3p} \int_{x_0}^{x_n} y^3 dx$
où p désigne le volume de la carène immergée, x_0 et x_n deux valeurs limites d'un pont horizontal du bateau, repéré en x selon l'axe transversal, et découpé en tranches régulièrement espacées (Figure 5). Ce sont des extraits de ces pages qui sont présentés en premier dans cet atelier, avec une orthographe modernisée.

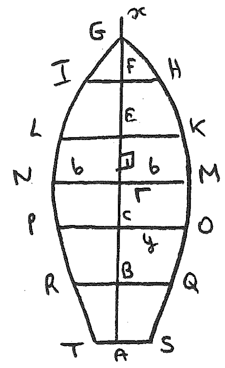


Figure 5

Découpage d'un navire sur un plan horizontal et selon la ligne de flottaison pour le calcul du métacentre. La variable x est sur l'axe ici vertical (mais néanmoins horizontal sur le bateau), et y à l'horizontale. L'origine, non décrite, est à l'intersection de AG et NM, à la plus grande largeur du bateau, largeur notée 2b.

Mon propos est maintenant d'expliquer toute la didactique qui est à l'œuvre au cours des sept pages qui font accéder à la formule (1). Car ce qu'il y a de spectaculaire dans la formule (1), celle qui fournit la stabilité du navire ou non, est que le centre de gravité du navire n'intervient pas. Le métacentre ne dépend que de la forme extérieure du bateau; il provient donc de la seule géométrie. Ou plus précisément, il ne dépend que de la forme de la carène au niveau de la ligne de flottaison. On retrouve avec cette ligne un peu de réalité physique. La géométrie ne serait-elle pas trop mince ?

Quant à l'intérêt du calcul du métacentre, un dessin suffira pour expliquer une situation fréquemment catastrophique pour un navire, survenant généralement lors de son lancement, une opération jugée délicate dans la première moitié du siècle des Lumières.

s'imposa rapidement. Pourtant, dans le *Traité*, Bouguer adopte un S majuscule et note $\frac{2Sy^3dx}{3p}$. Il y a quelque chose de fascinant dans la simplicité de la notation de Leibniz, pour une notion qui mit plus d'un siècle pour entrer dans les programmes scolaires.

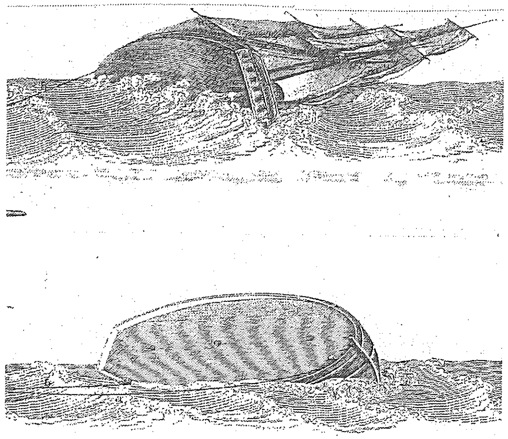


Figure 6

Interprétation nécessaire du calcul intégral : un exercice de familiarisation

Avant toute conséquence nautique de la formule (1), Bouguer prévient que l'intégrale qui y figure ne doit nullement effrayer. Car on peut en saisir la signification par la seule valeur numérique : "nous ne comptons pas comme une difficulté dans l'usage qu'on peut faire de cette formule, la nécessité où l'on est de trouver la valeur Sy^3dx"[11]. Est alors donné le calcul explicite selon les tranches en lesquelles le navire a été divisé.

> Si l'on supose que la tranche horisontale du Navire faite à fleur d'eau, ait 100 pieds de long, & que les demi-largeurs mesurées à 12 $\frac{1}{2}$ pieds de distance les unes des autres, soient, en commençant par l'extrémité de la prouë, de 1 pied, de 9, de 12, de 13 $\frac{1}{2}$, de 13 $\frac{1}{2}$, de 12 $\frac{1}{2}$, de 11 $\frac{1}{2}$, de 9 $\frac{1}{2}$, & de 7 $\frac{1}{2}$, on trouvera aisément par la Méthode expliquée dans le second Chapitre de la Section précédente, l'intégrale Sy^3dx : car on aura 1,729, 1728, 2460 $\frac{3}{8}$, 2460 $\frac{3}{8}$, 1953 $\frac{1}{8}$, 1520 $\frac{7}{8}$, 857 $\frac{3}{8}$, & 421 $\frac{7}{8}$ pour les neuf cubes y^3; et si on ajoute ensemble tous ces nombres, mais ne faisant entrer dans l'addition que la seule moitié du premier et du dernier, & qu'on multiplie la somme par 12 $\frac{1}{2}$ qui est la distance d'une largeur à l'autre, il viendra 149 006. Après cela il ne restera plus qu'à diviser les $\frac{2}{3}$ de ce nombre par la solidité p de la carène, pour avoir la hauteur Γg.

Nous lisons donc

$$(2) \qquad \int_{x_0}^{x_n} y^3 dx = \left[\frac{1}{2}y_0^3 + y_1^3 + \ldots + y_{n-1}^3 + \frac{1}{2}y_n^3\right] h_n$$

avec $y_i = y(x_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$, et $h_n = (x_i - x_0) = (x_2 - x_1) = \ldots = (x_n - x_{n-1}) = \frac{1}{n}(x_n - x_0)$, et pour la valeur de l'entier n égale à 8. Une figure sert aujourd'hui à faire comprendre la méthode des trapèzes qui permet d'approcher l'intégrale.

[11] T.N., p. 262.

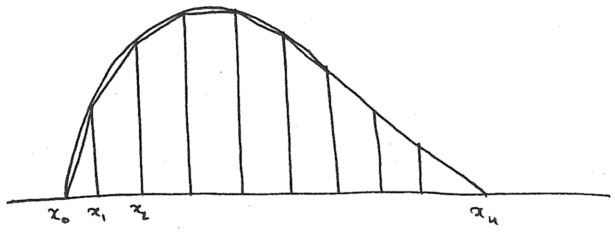


Figure 7
Calcul numérique d'une intégrale (méthode des trapèzes)

Cette figure n'est pas dans le *Traité du Navire*. Non que Bouguer répugne aux figures, mais pourrait-on dire, son utilisation des figures est épistémologique. Ainsi la Figure 5, qui est dans l'original, sert d'image pour comprendre le calcul, mais non de référence en ce sens que les calculs effectifs n'y sont pas repérés (il y a un autre nombre de tranches que le nombre 8 adopté dans l'exemple choisi par Bouguer). La figure est donc une aide pédagogique, non un raisonnement. Dans le discours explicatif, si nous lisons effectivement la méthode des trapèzes pour le calcul d'une intégrale, cette formule n'a pas besoin du support figuré et le mot trapèze, que nous utilisons comme repère aujourd'hui, n'est même pas utilisé. C'est que l'intégrale, pour Bouguer, n'a pas besoin d'être conçue comme une aire. L'aide de la Figure 7 serait contre productif. Pour le lecteur auquel Bouguer s'adresse, la formule (2) sert de repère quant à l'existence même de l'intégrale.

Bouguer poursuit en examinant un navire dont la nef est de forme ellipsoïdale et la "solidité" de 16 971 pieds cubiques, de sorte qu'il y a

> 5 $\frac{85}{100}$ pieds pour la hauteur de métacentre g au-dessus du centre de gravité Γ de la carène. Supposé de plus que ce dernier centre soit plongé dans l'eau de 4 $\frac{1}{2}$ pieds ou des $\frac{3}{8}$ de la profondeur, comme cela se trouve dans l'ellipsoïde, le point g qui est le terme ou la limite de la plus grande hauteur du centre de gravité du Navire, sera élevé d'environ 1 pied 4 pouces au-dessus de la surface de la Mer[12].

Le lecteur sait ou devine que les données numériques n'ont rien d'empirique : elles sont calculées par la mathématique au terme d'une théorie. Comme les bateaux en forme d'ellipsoïde ne sont pas habituels, mais il y en a, l'avantage de l'explication est surtout de montrer que le calcul gère des situations complexes dès que l'on connaît la ligne de flottaison, qui détermine le centre de carène. Aussi bien, c'est un ensemble de calculs qui doit aboutir au métacentre. Ces calculs se trouvent être dans le genre même des calculs effectués pour le centre de gravité. Il va falloir le vérifier.

Des exercices pour l'atelier

Le calcul du métacentre que nous allons suivre est donné par Bouguer comme général, pour une carène quelconque. Je propose de reprendre ces explications dans le cas de l'arche de Noé, c'est-à-dire le cas où toutes les coupes transversales du bateau sont égales et de forme

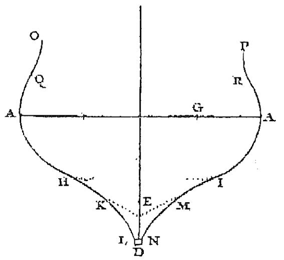
[12] T.N., livre II, section II, chap.IV, pp. 262-263.

rectangulaire. Il y aurait à trouver la parabole sur laquelle varie le centre de carène γ et donc la développée de cette parabole comme courbe métacentrique de la caisse. Le but de cet exercice serait de voir si Bouguer pouvait, avec avantage, se restreindre au cas de la caisse pour faire comprendre son calcul du métacentre et sa présentation du calcul intégral.

Comme la courbe métacentrique est la développée de la parabole, une courbe facile à construire, on pourra aussi, par l'informatique, vérifier l'effet d'un changement de ligne de flottaison. Et visualiser la correspondance entre la courbe du centre de carène et la courbe métacentrique.

Le cas d'un bateau de forme ellipsoïale pourrait être traité, avec les données numériques mêmes de Bouguer. Il y avait effectivement des carènes elliptiques au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle.

Un tout autre exercice serait de reconstituer les méthodes géométriques utilisées pour dessiner une carène comme celle ci-dessous.



Un exercice de Bouguer

Bouguer avec le métacentre donne à lire le calcul intégral. On pourra dire qu'il ne donne à lire de ce calcul que ce dont il a besoin pour le métacentre; le fait remarquable est qu'il n'ait par besoin d'une référence mathématique extérieure, et qu'il ne fasse pas appel à un avoir prérequis du lecteur.

Avant toutefois de lire à notre tour ce qui précède la formule (1), qui est "illustrée" par la formule (2), il faut envisager ce que Bouguer a l'air de présenter comme une simple application de la formule intégrale donnant le métacentre.

> On pourra apliquer notre régle avec la même facilité à tous les Vaisseaux : mais on viendra à bout de la rendre plus simple, jusques-la qu'on pourra l'employer souvent sans calcul, lorsque toutes les coupes verticales de la carène faites parallèlement à AEB, seront des figures semblables[13].

C'est en particulier le cas de l'arche de Noé. Et Bouguer énonce alors un résultat sur le métacentre, cette fois sans formule intégrale, et dans le langage écrit particulier de la théorie des proportions que nous avons du mal aujourd'hui à suivre.

> Le produit de la coupe AEB par la quantité FK, dont son centre de gravité K est plongé dans l'eau, est au $\frac{2}{3}$ du cube FB^3 de la demi-largeur FB, comme la quantité FΓ dont le centre de gravité de la carène est enfoncé dans l'eau, est à la hauteur Γg du métacentre g au-dessus de ce dernier centre.

[13] T.N., p. 263.

Nous lisons une formule qui apparaît exacte du point de vue de l'homogénéité, dès lors que l'on conçoit que AEB désigne une aire (les longueurs géométriques sont ici naturellement comptées positivement.

$$\frac{FK.AEB}{\frac{2}{3}FB^3} = \frac{F\Gamma}{\Gamma g}. \qquad (3)$$

Nous repérons les lettres sur la Figure 9 jointe, simplifiée par rapport à celle fournie par Bouguer. Par souci d'économie du nombre des figures fournies par planches rassemblées dans le livre, il rajoute sur une même figure des éléments qui serviront à d'autres explications. Mais il joue aussi de ces superpositions. Ainsi, dans la Figure 9, il faut distinguer entre ce qui relève du bateau, à trois dimensions donc, et son centre de gravité, la "solidité" que la carène délimite (volume), et ce qui relève de la coupe. Mais de toutes les coupes analogues doit se déduire la solidité, et c'est ce qu'il faut que cette figure fasse comprendre.

K	centre de gravité de la coupe de la carène (immergée)
g	métacentre
Γ	centre de gravité de la carène du bateau (en fait projection de ce centre sur la coupe)
F	point central sur la ligne horizontale de flottaison AB
AEB	coupe de la carène, et toutes les autres coupes lui sont supposées semblables pour le calcul

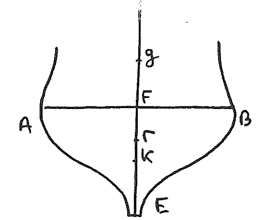


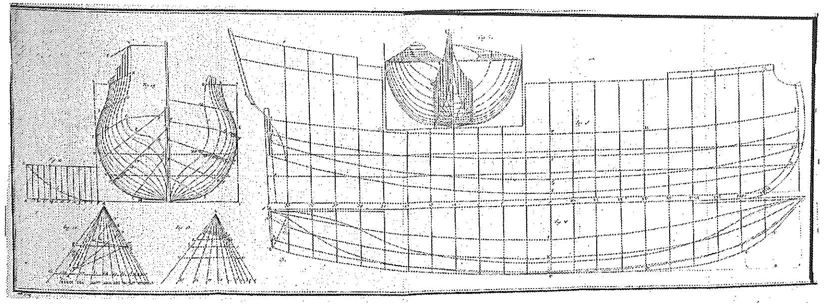
Figure 9
Coupe de la carène du navire entrepris

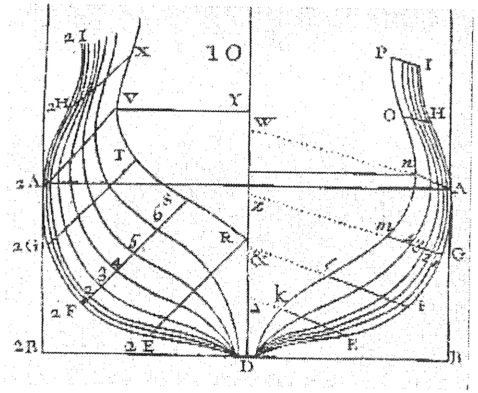
La formule (3) n'est pas une application de la formule (1); car (3) n'est pas déduite de (1) seulement. Certes (1) va être utilisée, mais à titre de comparaison. Et c'est cette comparaison qui fait compréhension. Bouguer pourrait donner une nouvelle preuve de (1), preuve adaptée au cas d'un bateau dont les coupes transversales sont toutes semblables. En comparant avec (1), il déduit (3), formule d'où toute intégrale a disparu, et d'où le centre de gravité G du bateau a lui aussi disparu. Ceci étant lié à cela. La ligne de flottaison étant le repère physique, le repère réel de cette géométrie de la coupe.

Mais la démonstration de (3) n'est pas placée comme une illustration ou simplification de (1); elle a pour but de montrer que le calcul intégral qui a été conduit pour établir (1) est plus simple que le calcul mené sur les vaisseaux, avec maniement des proportions, usuel mais inexact en général. L'intervention du point F, sur la l'horizontale de flottaison, correspond à l'habitude des professionnels de la marine. Il y avait des procédures antérieures de calcul, et elles font partie du savoir pratique supposé du lecteur de Bouguer; mais il s'agit pour lui de les faire oublier. En montrant que le calcul intégral obtient plus et plus vite dans les cas mêmes où l'on savait calculer précédemment. Les procédures anciennes tournaient essentiellement autour de la règle de trois, c'est-à-dire les proportions et les analogies qui régissent la représentation du bateau.

La nouvelle représentation est celle de la division en tranches, de la sommation des parties, bref de la mise du bateau sous la coupe réglée de l'analyse, de la division et de la sommation, et du calcul intégral. L'organisation du nouveau jeu intégral permet une autre généralité, une bien meilleure adéquation à la réalité architecturale du bateau, à sa construction même. Et il nous faut alors voir la façon dont ces bateaux étaient représentés par les constructeurs de la marine;

il nous faut pour comprendre l'organisation pédagogique et scientifique du texte de Bouguer, retrouver le savoir sur lequel il s'appuie.





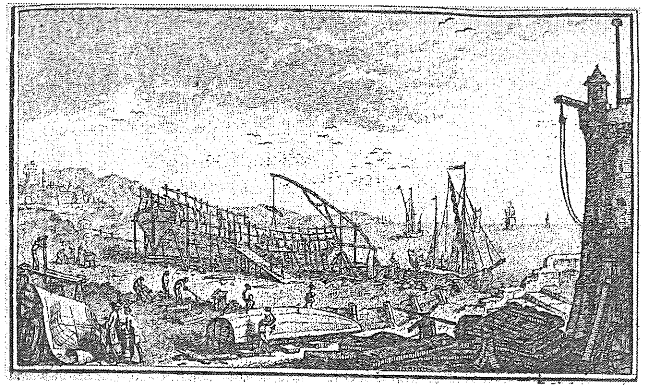


Figure 10

Quelques représentations de coupes de bateaux, connues sous le nom de plans de formes et disponibles bien avant la parution du *Traité du navire* de Bouguer. Cet auteur leur donne une interprétation de calcul intégral; le plan de formes devient le document fondamental de toute l'architecture navale, seulement remplacé aujourd'hui par les représentations d'ordinateur en 3D. Le premier dessin est ici tiré de *l'Examen maritime, théorique et pratique, ou traité de méchanique appliquée à la construction et à la manœuvre des vaisseaux et autres Bâtimens*, traduit de l'espagnol par le Nantais Pierre Lévêque, publié à Nantes en deux tomes en 1783, chez A.J. Malassis. Des plans de formes sont directement utilisés dans le *Traité du Navire*, et le deuxième dessin est l'un d'entre eux. L'importance même du plan de forme est signalé par une gravure qui est donnée par Bouguer. Les ingénieurs sont groupés autour de ce plan, ainsi attesté sur le chantier même.

En propagandiste et pédagogue remarquable, Bouguer conclut que le nouveau calcul s'avère presque "sans calcul" par rapport à l'ancien; il est non seulement naturel, mais économe de moyens par rapport au calcul par les proportions. L'exercice auquel se livre Bouguer est donc tactique. Il n'est pas encore nécessaire de disposer d'une définition mathématique du métacentre pour pouvoir suivre la démonstration de (3). En outre, le lecteur doit se rendre compte que le calcul de $F\Gamma$ (avec le centre de gravité Γ) est formellement le même que celui de Γg (avec le métacentre g), et ne peut qu'être le même.

> Les Lecteurs un peu versés dans la Statique, doivent voir déjà l'origine de ce théorème, ou de cette seconde régle, dans la conformité qu'il y a entre l'expression $\frac{2Sy^3dx}{3p}$ de Γg, & celle qu'on sçait qu'a $F\Gamma$, qui ne doit être, dans la circonstance présente, que $\frac{Sy^3dx}{p}$ affectée de quelques constantes.

La force de la mathématique est d'expliquer la raison de constantes particulières dans des formules.

Bouguer opère par une sorte de familiarité du lecteur particulier auquel il s'adresse avec le Calcul intégral; il se réfère à une connaissance de ce Calcul que procure celle de la Statique. Aucune référence n'est donnée, et il ne peut s'agir que de la nouvelle statique, celle qui a été réorganisée par le calcul intégral, au moins dans des traités savants, notamment par l'interprétation du centre de gravité. Cette statique est conçue par Bouguer comme lieu originaire du Calcul; la pratique de cette statique correspond au jaugeage des navires, à leurs centres de gravité et mêmes aux "moments" que ces centres font intervenir. De tels calculs sont ceux qui auraient fait "naître" le calcul intégral, semble dire Bouguer. Mais il n'y pas besoin chez lui de convoquer une histoire; c'est dans les termes d'un savoir déjà connu, ou supposé connu du lecteur qu'il donne à lire ses explications. Une histoire fournirait un passé qu'il s'agit d'oublier. Grâce à (3), le calcul qu'il a fourni du métacentre en (1) se donne à voir à la fois comme conception et procédure générale.

On pourrait ici se donner le temps de situer effectivement la Statique dans le cadre de l'histoire des mathématiques, et peut-être fournir une histoire des mathématiques et du Calcul prenant cette Statique des centres de gravité comme paradigme. Ce serait sortir du propos de cet atelier qui est de rendre compte d'une façon d'enseigner; ce serait aussi aller à l'encontre de la pédagogie de Bouguer qui choisit une présentation du calcul intégral. Justifier ou critiquer les références que Bouguer fait à l'histoire du Calcul relève d'une autre démarche proprement historienne. C'est bien sûr cette démarche là qu'il faut utiliser si l'on entend comparer l'innovation de Bouguer et celle d'Euler qui présente le métacentre dans sa *Scientia Navalis* de 1749.

Je raccourcis le texte de Bouguer pour le calcul de FΓ, en écrivant sous forme de fractions les proportions qui y figurent, et je souligne à chaque étape les propriétés de calcul intégral dûment utilisées, et ainsi objectivées par l'auteur. Mon commentaire n'est pas destiné à améliorer l'exposé de Bouguer, ni à préciser sa place dans l'histoire des mathématiques, ou à en effectuer une restitution lisible aujourd'hui en explicitant ses différents moyens. Il a pour but d'en faire ressortir la structure didactique. Le lecteur pourra comparer avec le texte original de Pierre Bouguer, donné en annexe, et mis en français moderne puisque c'est le contenu scientifique qui est l'objectif.

1°. Calcul de l'aire $\bar{A}$ (ou "étendue") d'une coupe quelconque de la carène parallèle au plan AEB, donc coupe pour un x donné (voir Figure 9 pour le repérage) et sous l'hypothèse de la similitude de toutes ces coupes. Le calcul donne évidemment :

$$\frac{\bar{A}}{y^2} = \frac{AEB}{FB^2}.$$

2°. Calcul de fk, relatif à une coupe quelconque de la carène, les minuscules ayant pour cette coupe les significations homologues qu'ont les majuscules pour la coupe AEB [de la Figure 4].

$$\frac{fk}{y} = \frac{FK}{FB}.$$

La linéarité ainsi exhibée de l'intégrale démontre que le rapport des distances du centre de gravité à un point d'une figure homologue à une autre est le rapport de similitude. La géométrie élémentaire ne peut envisager une telle généralité. Le lecteur a appris cette propriété de l'intégrale qu'il peut vérifier sur la formule pourtant approchée des trapèzes.

3°. Calcul du "moment de chaque élément infinitésimal" par rapport à la surface de l'eau".

L'objectif est le calcul du centre de gravité K de toute la carène, qui doit certes provenir de la connaissance du centre de gravité de chacune des coupes semblables, mais ne peut résulter d'une simple sommation, ou intégrale vectorielle comme nous le ferions aujourd'hui. Bouguer reste au niveau d'une coordonnée, ici en x selon l'axe AG (Figure 9) et prépare la sommation

en faisant intervenir le "moment", un scalaire donc, produit d'une distance par une aire en l'occurrence : produit de la distance fk par la "solidité" de l'élément infinitésimal dC. Ce dernier est le produit de l'aire $\bar{A}$ par dx.

$$fk.\bar{A}.dx = \frac{FK}{FB}y.y^2\frac{AEB}{FB^2}dx = \frac{FK.AEB}{FB^3}y^3dx.$$

4°. Intégration du "moment" I sur toute la longueur du bateau, ce que nous calculons comme une intégrale entre deux extrémités

$$\frac{FK.AEB}{FB^3}\int_{x_0}^{x_n} y^3dx.$$

5°. La valeur de FG s'obtient en divisant cette intégrale I par la solidité p de la carène immergée (son volume, celui qui compte pour l'application du principe d'Archimède) :

$$(4) \qquad F\Gamma = \frac{I}{p} = \frac{FK.AEB}{pFB^3}\int_{x_0}^{x_n} y^3dx.$$

Rappelons maintenant la formule (1), $\Gamma g = \frac{2}{3p}\int_{x_0}^{x_n} y^3dx$, car la comparaison entre les formules (1) et (4) donne effectivement (3). Est éliminée l'intégrale, aussi bien d'ailleurs que la solidité p. Et de (3), où (1) a joué, il est alors facile de déduire l'expression de Γg, la nouvelle relation (1) dans le cas envisagé, en fonction de FΓ et même Fg "qui exprime la plus grande hauteur que peut avoir le centre de gravité du navire au-dessus de la surface de l'eau"[14]. Le point F est entre Γ et g. Soit Fg = Γg-FΓ, ou $FG = \Gamma F\left(\frac{\frac{2}{3}FB^3}{FK.AEB} - 1\right)$, soit la relation

$$(5) \qquad Fg = \frac{\frac{2}{3}F\Gamma.FB^3 - F\Gamma.FK.AEB}{FK.AEB}.$$

Ainsi, c'est le sens du calcul intégral, et non l'application d'une simple formule, qui donne à comprendre en retour comment la position du métacentre peut se calculer à partir de celle du centre de gravité de la carène[15], indépendamment du centre de gravité du navire, donc de sa charge effective.

La mathématisation de la stabilité du bateau n'en est pas terminée pour autant. Bouguer doit maintenant expliquer, et calculer l'enfoncement d'un vaisseau dans l'eau, autrement dit calculer la position du point Γ. Celle-ci n'est évidemment pas le seul fruit de la forme de la carène, et importe la répartition des masses dans le navire, qui fait la ligne d'horizon AB. De cette répartition, le centre de gravité du navire donne une première idée : mais cette fois il faut savoir tenir compte du fait que le bateau n'est pas homogène, car constitué de matériaux distincts, bois, métal, etc. La technique de calcul va pouvoir être la même que celle du métacentre, avec le jeu des divisions et des sommations. Le même usage du calcul intégral gère cette "division" en vue du centre de gravité. On saisit l'astuce didactique de Bouguer : le métacentre est plus facile à calculer que le centre de gravité. Grâce au calcul intégral réduit à l'idée de sommation, il y a unité de méthode et il y a donc une possible science navale, ou science des bateaux. Et il ne se présente aucune conception du calcul intégral comme inverse d'un calcul différentiel.

[14]La formule (5) est fournie par Bouguer avec une erreur, 3/2 au lieu de 2/3. Dans certains exemplaires de l'ouvrage, on lit d'ailleurs EB^3 au lieu de FB^3.

[15]Il y a une jolie illustration de cette assertion : Bouguer donne le calcul du métacentre de l'arche de Noé, bateau parallélépipédique (longueur 300 coudées, largeur 50 coudées, hauteur 30 coudées), à partir de la supposition que le "Bâtiment enfonçait dans les eaux du déluge de 10 coudées" (T.N., pp. 265-266).

Je n'ai pas à suivre Bouguer dans cette recherche d'un discours unique lié au calcul du centre de gravité, car je ne fais pas l'histoire de la science navale. Me suffit la conclusion que le métacentre a servi pour une compréhension nouvelle, ou améliorée, du centre de gravité et cette compréhension a valeur de calcul intégral.

> Si on veut maintenant tirer la plus grande utilité possible pour la pratique de la Théorie expliquée dans les Chapitres précédens, il faut chercher par la discussion de toutes les parties du Vaisseau qu'on se propose de construire, la situation qu'aura son centre de gravité[16].

Cette discussion est une division suivie d'une sommation.

Je reviens au métacentre, et à l'établissement préalable de la formule (1) qui a reçu une si forte interprétation. C'est en progressant à rebours de l'exposé de Bouguer que je peux saisir l'histoire que je cherche à dire. Souvent trop logiciens, les historiens des sciences n'apprécient pas cette façon de faire, qui n'est pas le compte-rendu exact du déroulement de la pensée. Je suis pourtant contraint à ce rebroussement parce que j'ai annoncé que je voulais appréhender un enseignement par son objectif, moins le sujet scientifique nommé que l'objet, la méthode en cause.

Ai-je encore besoin de convaincre que Bouguer agit comme un enseignant ? Evidemment, il y a plusieurs types d'enseignants, et maintenant c'est à une caractérisation du type auquel Bouguer appartient que je m'attache, en suivant ses explications pour la formule intégrale (1). Je traque alors ce qui n'appartient pas au calcul intégral proprement dit, et ce qui relève d'un calcul infinitésimal. Car il paraît évident que la sommation –celle que le calcul du centre de gravité fait comprendre– doit porter sur un élément différentiel. Or, Bouguer fait l'économie d'un tel calcul différentiel. Comment procède-t-il ? La question relève à la fois de la didactique et de l'épistémologie.

L'inspiration géométrique du calcul infinitésimal

La Figure 11, moins simplifiée que précédemment par rapport à celle originale de Bouguer, indique le bougé du bateau, la ligne aFbH étant la nouvelle horizontale, la première horizontale de la mer étant AFB. La seule intervention de la nature dans le dessin est ce changement de l'horizontale, et donc l'on a plutôt un bougé de la mer avec un bateau fixe. Ce qui est assez paradoxal. Mais pourquoi faudrait-il plus ? La droite γz est la nouvelle verticale, remplaçant l'ancienne verticale EZ, et l'intersection de ces deux verticales crée le métacentre g. J'en reste pour le moment à cette définition de ce point, qui est purement géométrique. On ne peut manquer de remarquer que cette définition n'est pas suffisante : car il y a autant de métacentres que de situations de flottaison.

A ceci près toutefois que le mouvement de AB en ab, ce que j'appelle le bougé du navire, est un infiniment petit. Selon l'usage, cette petitesse n'est pas indiquée sur la figure, où il n'entre visuellement que des grandeurs finies. Est donc en outre à expliquer par Bouguer la façon dont on peut ainsi calculer, c'est-à-dire ce que l'on peut négliger. Le calcul infinitésimal a cette fonction, et ce n'est donc pas le calcul différentiel auquel s'attache présentement Bouguer. Je n'ai pas assez fait saisir la différence, mais elle apparaîtra mieux bientôt.

[16]T.N., livre II, section II, chapitre VI, p. 275.

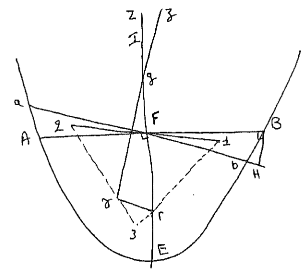


Figure 11 : Le bougé

> On voit I, qui est le centre de gravité du navire tout entier mais n'intervient pas dans la démonstration de la formule (3), le métacentre g situé en dessous de I (il y a donc instabilité) et le centre Γ de la carène. La perpendiculaire en B à la droite AFB coupe la nouvelle horizontale aFb en H. Sur la figure pourtant générale, Bouguer a laissé les droites ab et AB se couper en F. Les points notés 1, 2, et 3 sont des centres de gravité.

Pour nous l'infiniment petit est une gêne : la définition du métacentre qui s'impose dans cette lecture est celle d'un point limite, quand l'infiniment petit tend vers 0. Bouguer n'agit pas ainsi : passer à la limite, c'est faire un calcul, c'est disposer d'un savoir qui conduit le calcul, et c'est surtout risquer de mélanger les résultats limites avec les éléments des figures de l'infiniment petit. Le maintien de ce dernier est donc une preuve de rigueur chez Bouguer, et d'ailleurs chez la plupart des mathématiciens de ce début du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle.

Le calcul infinitésimal joue effectivement de la Figure 11. Sur celle-ci, doit sauter aux yeux le quasi parallélisme de $\gamma\Gamma$ et de AB (il y a en fait parallélisme avec la droite *12*). Et tel est bien l'objet de la démonstration. S'opposent aussi à l'œil deux tracés. Le premier, en traits pleins, est la forme de la carène AEB; les seconds, en pointillés, désignent des lieux mathématiques, un virtuel donc, avec les points symptomatiquement notés *1*, *2* et *3*, et les deux autres points γ et Γ. Ce dernier point désigne le centre de gravité de la carène immergée (donc supposée homogène) dans la première position (centre de poussée), et γ le centre de gravité de la nouvelle carène (c'est-à-dire de la nouvelle partie immergée de la carène, et nouveau centre de la poussée d'Archimède dirigée selon γz). Inactif pour le moment, il y a aussi I, le centre de gravité du navire.

La Figure 11 ne donne qu'une coupe du vaisseau : il y a médiation du réel par un schéma irréaliste, et non prise en compte directe. Il y a donc analyse, mais on doit percevoir qu'il ne peut que s'agir d'une étape, et qu'il faudra bien passer au bateau en entier. Il faudra donc faire appel à un calcul propre et c'est le calcul intégral. Le rappel à la réalité est signalé par le point I, qui ne devrait pas être sur cette figure : en effet la coupe transversale n'est pas nécessairement dans le plan vertical du centre de gravité du navire tout entier. Autre façon de signaler le réel, donc la science nouvelle qui en rend compte, la coupe de la figure originale est remplie en son bas de pointillés, suggérant une charge, comme un lest.

C'est néanmoins la réalité virtuelle, si l'ose dire, qui permet au dessin de la coupe d'être comme animé, en ce sens que deux horizontales sont superposées AB et ab, pour un seul navire, ou plutôt une seule et même courbe. Elle n'en représente pas moins le bougé de la carène submergée, passant de AEB à aEb : de cette unicité de la carène doit se déduire une conservation, mais elle n'est explicite sur la figure qu'à partir de la position du point F, et nous la verrons exprimée par une égalité d'aire au cours du calcul.

Le dessin que j'ai dit animé est la trace rendue manifeste de la pensée infinitésimale en physique : c'était aussi la façon la plus normale pour un mathématicien de pratiquer le calcul infinitésimal dans les années 1740.

Si la construction de g est l'objectif, la première chose à trouver est bien le point γ. Bouguer le détermine comme résultat d'une composition de centres de gravité, et va donc faire fonctionner la technique du calcul intégral au sein même du calcul infinitésimal. Du moins c'est ce que nous pouvons dire, ayant déjà lu plus loin, ayant déjà appris son assimilation de l'origine du calcul intégral au calcul des centres de gravité. En liant ainsi l'infinitésimal et l'intégral, nous pourrions dire que Bouguer abolit l'étape qu'est le calcul différentiel vers le calcul intégral : une distinction qui avait été le fruit historique d'une entreprise didactique sur le Calcul, et n'était ni dans la pensée de Newton, ni dans celle de Leibniz. On ne peut le saisir qu'en suivant scrupuleusement la démarche expliquée par Bouguer[17].

L'intérieur de la carène du navire est décomposé en trois parties, les deux parties quasi triangulaires aAF, BFb, l'une nouvellement submergée et l'autre sortie des eaux et la partie AFbEA. Ces parties ont respectivement comme centres de gravité les points notés *1*, *2* et *3*. Le jeu consiste à calculer γ comme barycentre de *1* et *2*, et Γ comme barycentre de *1* et *3*. Le calcul n'a pas besoin d'être conduit par des équations et ne sont manipulées que des proportions. Car celles-ci disent aussi des directions, et il ne faut pas oublier qu'est d'abord recherché un parallélisme. Est à cet effet utilisé un succédané de calcul vectoriel, celui que nous pourrions mener aujourd'hui sur les centres de gravité. En effet, de ces proportions provient le parallélisme de la droite joignant *1* à *2* et de la droite joignant γ à Γ.

La démonstration est typiquement de géométrie élémentaire, à ceci près qu'elle concerne aussi des infiniment petits. La pratique géométrique est accentuée par le fait qu'il y a un invariant issu de la physique. Les deux aires AFa et BFb doivent être égales "puisque le Navire occupe le même espace dans la Mer avant et après son inclinaison"[18] : il n'y a pas augmentation du volume de la carène immergée, car le bateau ne pèse pas plus à l'équilibre qu'en mouvement. Telle est l'hypothèse de conservation qui gère le calcul, et qui explique qu'un seul dessin de carène soit fourni; le point F, milieu de AB est aussi l'intersection de ab et de AB (du moins en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur, ou considérant comme égaux les arcs aA et bB, ce qui est le cas de la caisse de Noé). Le bougé du navire, qu'ayant déjà fait de la mécanique nous lisons comme un déplacement virtuel, dû dans l'explication de Bouguer à des causes accidentelles –vent, vague, etc.–, n'est pas général.

Si 1Γ désigne la distance du point *1* à Γ, et AEbF l'aire de la surface ainsi délimitée, on dispose de

$$\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{AEbF}{BFb}$$

selon le calcul caractéristique des centres de gravité. Et de même on a

$$\frac{2\gamma}{3\gamma}=\frac{AEbF}{AFa}.$$

[17] Et Bouguer n'a pas besoin de se justifier : le mathématicien fait ses choix. Alors que le commentaire, le commentaire même qualifié de scientifique, appartient au professeur. Et c'est bien pour cela qu'il y a une science, la didactique. Alors que le mathématicien pur, le mathématicien idéalisé, n'a qu'à s'occuper des concepts. De fait, le mathématicien professeur a son expérience personnelle, intime, de la didactique : le défaut est de penser que cette expérience présente un caractère scientifique. Il est rare qu'un professeur pense que sa vision est universelle, tant il maintient l'enseignement comme un art.

[18] T.N., p. 259.

De l'égalité des aires AFa et BFb, on déduit

$$\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{2\gamma}{3\gamma}.$$

Cette proportion dit le parallélisme de la droite $\gamma\Gamma$ à la droite joignant *1* et *2*.

Le bougé étant un infiniment petit, cette droite est encore à peu près parallèle à l'horizontale de la mer en position initiale, soit la droite AB (la surface de l'eau). Voilà seulement la seconde instance de simplification du calcul infinitésimal[19], et plutôt d'ailleurs un passage à la limite : la position limite de la droite *12* est l'horizontale. Cette limite ainsi trouvée n'est pas réutilisée au cours du calcul qui se poursuit avec des quantités infinitésimales : il y a là une précaution évidente, qui fait sens pédagogique. En l'occurrence, a été trouvée la tangente en Γ à la courbe que décrit le centre de carène lorsqu'il y a mouvement du navire. De cette tangente et de cette courbe, Bouguer ne parle pas tout de suite; il ne mélange pas les niveaux, et la tangente appartient en fait au calcul différentiel. Elle viendra plus tard, mais ne sera pas traitée avec la même rigueur. Bouguer tolère des rigueurs différentes dans son exposé, et ceci est un signe particulièrement net de didactique.

Le calcul de la hauteur métacentrique : l'intégrale

En attendant, il faut poursuivre le calcul de façon quantitative si l'on veut en terminer avec la détermination du point γ. Parce que les points γ et Γ sont infiniment voisins, Bouguer ne peut qu'user des proportions du triangle caractéristique (le plus ancien instrument du calcul avec les infiniment petits), et exprimer l'égalité d'un rapport entre infiniment petits à un rapport entre quantités finies[20]. Bouguer agit, et n'explique pas : le lecteur est ou bien familiarisé déjà avec cette procédure, ou bien il la découvre. Et l'essentiel est qu'il en apprenne assez pour la connaître.

De $\frac{1\Gamma}{3\Gamma}=\frac{2\gamma}{3\gamma}=\frac{AEbF}{BFb}$, vient $\frac{1\Gamma+3\Gamma}{3\Gamma}=\frac{AEbF+BFb}{BFb}$, soit $\frac{13}{3\Gamma}=\frac{AEB}{BFb}$. Le parallélisme de *12* et de $\gamma\Gamma$ (remarquons bien que n'est pas utilisé le résultat limite du parallélisme à AB), fournit la proportion $\frac{13}{3\Gamma}=\frac{12}{\Gamma\gamma}$. D'où $\frac{12}{\Gamma\gamma}=\frac{AEB}{BFb}$. Est trouvée la proportion séparant les infiniment petits des quantités finies :

$$\frac{\Gamma\gamma}{BFb}=\frac{12}{AEB}. \tag{6}$$

> Ainsi on pourra trouver la distance $\Gamma\gamma$ des centres de gravité Γ&γ, aussitôt qu'on connoîtra la solidité de la carène AEB, la solidité de la petite partie BFb, & la distance *12* des centres de gravité des petites parties BFb & Afa; puisque ce sont là les trois premiers termes d'une proportion, dont la distance $\Gamma\gamma$ est la quatrieme[21].

Il reste bien trois termes à calculer pour déterminer $\Gamma\gamma$: un infiniment petit BFb, et deux quantités finies, 12 et AEB. Les calculs vont s'enchaîner, mais ne sont pas exactement ceux sur les quantités indiquées.

Car il n'est pas possible d'en rester à une coupe transversale du bateau; c'est la totalité de ce dernier qui compte. Le calcul intégral est là pour réaliser l'intégration des effets infiniment

[19] La conservation des aires fait intervenir le fait que l'on ait un mouvement infiniment petit, du moins pour une carène générale.

[20] Bouguer maintient ici le langage des proportions, sans utiliser des écritures symboliques, faisant apparaître l'expression infinitésimale comme quatrième proportionnelle.

[21] TN, p. 259.

petits. Il appartient à Bouguer de le montrer, en donnant à voir le Calcul. Et il y a un changement significatif de figure : de la coupe transversale (Figure 11), on passe à une coupe horizontale selon le plan de flottaison (analogue à la Figure 5). Un langage analytique gère ce passage d'une figure à l'autre, et il vient s'ajouter au langage géométrique des proportions jusqu'ici adopté. Afin de le remplacer. Il est vraisemblable qu'en 1746, c'était ce passage des proportions à l'écriture algébrique qui représentait la plus grande difficulté, et c'était donc là que la sollicitude didactique de Bouguer se montrait la plus prévenante. On ne pourra qu'entendre les paroles mêmes de Descartes dans la *Géométrie*.

> Je nomme x les parties de l'axe de cette coupe, ou les parties de la longueur du navire, & y les demi-largeurs ou ordonnées... [22].

Il n'était pas d'usage de préciser une origine et une orientation, car cela aurait contraint à utiliser des quantités négatives. Ce n'est pas manque de rigueur, juste une habitude de calcul, mais en contradiction avec l'apparente généralité de la variable x. On sent qu'une origine est pensée à l'abscisse x pour laquelle la largeur du bateau est maximale (notée b dans la Figure 5).

La décomposition du bateau révélée par la coupe de la Figure 11 avait pour but de montrer ce que nous appellerions l'intégrant, dans un plan orthogonal à celui de la coupe de la Figure 5. Celle-ci indique comment on va intégrer; elle ordonne. La désignation BFb n'est donc pas changée; c'est aussi bien une aire particulière selon une coupe particulière, une fonction de x comme aire générique (donc une intégrale possible) que le résultat même de cette intégration. Pour préciser, je me sens contraint à distinguer par les notations : BFb pour l'aire de la coupe particulière, BFb(x) pour l'aire de la coupe générale en x et (BFb) pour le volume constitué par l'empilement de toutes ces coupes. Mais c'est que ma pédagogie n'est pas celle de Bouguer qui ne va pas utiliser le vocabulaire des fonctions, en cela différent de Leonhard Euler qui présentait le calcul infinitésimal en 1748.

> Je considere après cela que le petit solide BFb qui sort de l'eau, & dont BFb n'est qu'une coupe, est formé d'une infinité de petits triangles verticaux, qui étant arrangés tout le long de la longueur du Navire à la distance infiniment petite dx les uns des autres, sont parallèles aux triangles BFb, & lui sont semblables.

C'est seulement ici qu'intervient la différentielle dx; elle est scansion du découpage des tranches, et elle n'a de jeu que pour permettre une sommation. La similitude est le jeu de ce calcul, mené de telle façon qu'est évitée, à nos yeux, une intégrale triple. Ainsi on peut dire que, fidèle à la géométrie analytique de Descartes, Bouguer évite une figure à trois dimensions. Il faut mieux dire le geste de Bouguer : il montre comment le calcul intégral qui permet de passer en trois dimensions, peut se mener en réduisant à une seule variable. Il n'applique pas une recette, ne donne bien sûr aucune référence : il raisonne directement, et c'est cela qui est la pratique du "transcendant". Qui est en plus donné à voir comme un élémentaire.

Aussi bien, l'utilisation d'une même notation pour désigner des choses différentes, la différentielle et l'intégrale, n'est pas une faute de logique : elle participe du sens du calcul que le lecteur doit acquérir. Hier comme aujourd'hui, on peut trouver qu'il y a danger pédagogique dans cette faute de logique; mais me paraît illogique de ne pas la concevoir comme procédé didactique voulu. La coupe transversale est devenue une tranche; la tranche est ordonnée par la variable x, et sa sommation se réduit à des grandeurs représentables sur une seule coupe où paraît alors le centre de gravité du navire tout entier, et le métacentre, qui n'est plus celui d'une coupe.

[22] TN., p. 260.

Pour le calcul de (BFb), un solide donc mais qui n'en est pas moins un infiniment petit, le raisonnement se comprend en termes de fonctions de la variable x, fonctions déterminées à partir de la coupe faite en AEb, où pour cet x, la longueur y vaut b. Les fonctions se déduisent simplement par similitude, ce qui évite de les nommer : nous avons dû déjà voir un tel fonctionnement à l'occasion du calcul de Γg.

Ainsi, la hauteur du triangle général BFb(x) vaut $\frac{e}{b}y$, où e désigne la hauteur infiniment petite du triangle BFb, ayant par définition un angle droit en B (Figure 11). Le volume élémentaire du prisme triangulaire est $\frac{e}{2b}y.ydx$. Soit

$$(BFb) = \frac{e}{2b}\int y^2dx.$$

Bouguer ne précise pas les bornes d'intégration, pas plus que ses contemporains.

Le calcul de la distance (*12*) résulte d'une intégration de (*12*)(x), distance elle-même calculée à partir de *12*. Mais l'intégration ne peut pas automatiquement être celle de (*12*)(x) : la règle de sommation est obligatoirement celle des centres de gravité. Il y a donc intégration d'un moment, et c'est le point majeur du calcul de Bouguer. Par division du bateau en deux, le calcul est d'abord celui de *1* F(x), qui donne $\frac{2}{3}y$ car on n'a compté que les infiniment petits d'ordre 1, y étant une fonction de x. L'intégrant devient $\frac{2}{3}y\frac{e}{2b}y^2$, un moment qui est le produit d'une distance par une aire. Et vient au total

$$\frac{2e}{6b}\int y^3dx.$$

Mais on n'obtiendra (*12*) qu'en divisant encore par (BFb). Et il faut enfin multiplier par 2, car nous n'avons tenu compte que de la partie droite du bateau. On peut en effet le supposer symétrique par rapport à l'axe transversal, "flancs toujours égaux" explique Bouguer[23]. D'où :

$$(12) = \frac{4}{3}\frac{\int y^3dx}{\int y^2dx}.$$

Bouguer ne fait pas remarquer que, dans ce calcul, l'infiniment petit e a heureusement disparu : c'est au lecteur de comprendre. Et on a même là un critère que le lecteur doit se donner afin de s'assurer de sa compréhension réelle du calcul mené[24].

Bouguer ne calcule pas le dernier terme de la proportion (6) qui justifie toute cette procédure, à savoir le volume de la carène (AEB). Il se contente de lui donner un nom, p, "solidité" de la carène. Le lecteur doit encore comprendre que le calcul intégral permet aussi bien de calculer cette solidité en fonction des données géométriques de la carène : Bouguer y reviendra et montrera ainsi l'unité de la science navale. Cette solidité n'est pas le poids ou charge du navire, qui peut aussi se calculer par intégration.

On aura noté que la sommation, qui nous paraît constituer vraiment l'intégrale, ne pose aucun problème particulier à Bouguer : il ajoute d'après le principe des tranches "numérotées" par x et "espacées" par dx. C'est l'intégrale définie qui est en jeu, et Bouguer ne fait aucune

[23] Ces jeux de symétrie sont le plus souvent réglés pour éviter les questions de signe et d'orientation, dans cette géométrie qui n'est pas entièrement analytique. Plus loin, Bouguer corrigera dans le cas de non symétrie.

[24] J'ai bien conscience d'être aux limites mêmes de l'analyse que je mène sur la pratique didactique de Bouguer, interprétant positivement une absence d'indication. Mais je ne crois pas à la naïveté de Pierre Bouguer; je ne le prends pas pour un mathématicien idéalisé qui n'aurait d'yeux que pour les concepts. D'autres enseignants aveuglés par la logique croient que la pédagogie mathématique doit passer par une explicitation minutieuse de tous les calculs, au risque de confondre l'essentiel avec l'accessoire.

allusion à une interprétation par l'aire; il n'y a aucune place pour l'idée différentielle et pour l'interprétation de l'intégrale comme l'opération inverse de la différentiation.

Le calcul numérique, dont nous avons déjà vu l'expression, n'est donc pas une application de l'intégration. C'est une de ses formes. Plus tard, Bouguer précisera que le calcul intégral permet de traiter aussi bien le cas où un navire n'a pas de plan transversal de symétrie, écrivant alors au lieu d'une seule fonction y doublée, deux fonctions y et v de chaque côté, et "dx marque toujours les parties infiniment petites de la longueur du navire"[25].

> La démonstration qu'on a donnée est générale, & servant aussi bien dans le cas où la carène est un corps irrégulier des deux côtés, que lorsqu'elle a une figure régulière.

Il faut savoir que cette généralité n'est pas seulement le gage que la méthode utilisée est performante; la généralité fait comprendre le fonctionnement de la méthode. Sans aucun doute, la nouveauté pour les lecteurs de Bouguer est l'utilisation de la notion de fonction, devenue pour nous si évidente : n'est-elle pas aussi une des nouveautés majeures du Calcul, chez Leibniz et chez Newton ? Ceux-ci, et bien souvent leurs successeurs immédiats, diminuent la nouveauté fonctionnelle en faisant intervenir des courbes. C'est en tout cas ce qui permet l'interprétation de l'intégrale comme une aire. Bouguer ne la donne pas, et fait plutôt intervenir le concept fonctionnel. Sans le désigner par une notation indiquant explicitement la variable, celle-ci apparaissant uniquement avec le dx. N'est-ce pas, chez Bouguer, le seul objet de cette notation ?

Il est temps de rassembler tout ce qu'il a obtenu.

> Maintenant qu'on connoît la solidité $\frac{e}{2b}\int y^2dx$ de la petite partie BFb, & la distance $\frac{4}{3}\frac{\int y^3dx}{\int y^2dx}$ des centres de gravité *1* et *2*, il ne manque plus que de connoître la solidité de la carène pour pouvoir faire l'analogie indiquée[26].

Établie comme relation (6) sur une coupe, celle-ci se lit sur le bateau entier. Ce que je montre en utilisant l'écriture convenue avec des parenthèses

$$(6bis) \qquad \frac{(\Gamma\gamma)}{(BFb)} = \frac{(12)}{(AEB)}.$$

Mais il n'y a pas besoin d'une intégration pour valider (6bis); la démonstration de (6), lue dans l'espace toutefois, suffit. Bouguer ne l'explicite pas, et ne fait pas de figure spatiale. Par contre, il a fallu un calcul d'intégration pour exprimer chacun des termes de (6 bis). Cette relation fournit une autre relation notée (7), contenant à nouveau l'infiniment petit e, placé devant une intégrale. On a quand même pu simplifier en se débarrassant de l'intégrale du carré de y.

$$(7) \qquad (\Gamma\gamma) = \frac{2e}{3bp}\int y^3dx.$$

L'objectif est d'atteindre Γg. Et cette fois je n'ai plus à mettre des parenthèses. Car Γ est bien devenu le centre de gravité de la carène et g le métacentre. Il y a donc un dernier passage par une coupe, et c'est encore la Figure 11 qui sert. Sa versatilité est tout à fait remarquable dans la démonstration. Le dernier objectif est aisément accessible, par une similitude lisible sur la Figure 11, mais figure entendue comme une coupe prise dans le plan vertical passant pas le

[25] T.N., p. 273. Il est historiquement et épistémologiquement intéressant de noter l'écriture de Bouguer avec u et y à la place de la seule fonction y : $\Gamma g = \frac{Sdx \times y^3+u^3}{3p}$

[26] T.N., p. 261. J'ai mis le signe intégral à la place du S de Bouguer.

centre de gravité du navire I et celui de la carène Γ, et orthogonal à l'axe transversal du bateau. Il y a en effet une similitude des triangles rectangles $\Gamma g\gamma$ et BFH, puisque leurs côtés respectifs sont orthogonaux. Jouent donc le parallélisme de $\Gamma\gamma$ et de FB, la verticalité de γz par rapport à ab et celle de ΓZ par rapport à l'horizontale FB. Ainsi $\frac{(\Gamma\gamma)}{\Gamma g} = \frac{BH}{BF} = \frac{e}{b}$. Exploitant (7), la proportion obtenue fait disparaître l'infiniment petit e, et vient effectivement la relation (1), notée (8), celle de la hauteur métacentrique, qui est ainsi démontrée :

$$(8) \qquad \Gamma g = \frac{2}{3p}\int_{x_0}^{x_n} y^3dx.$$

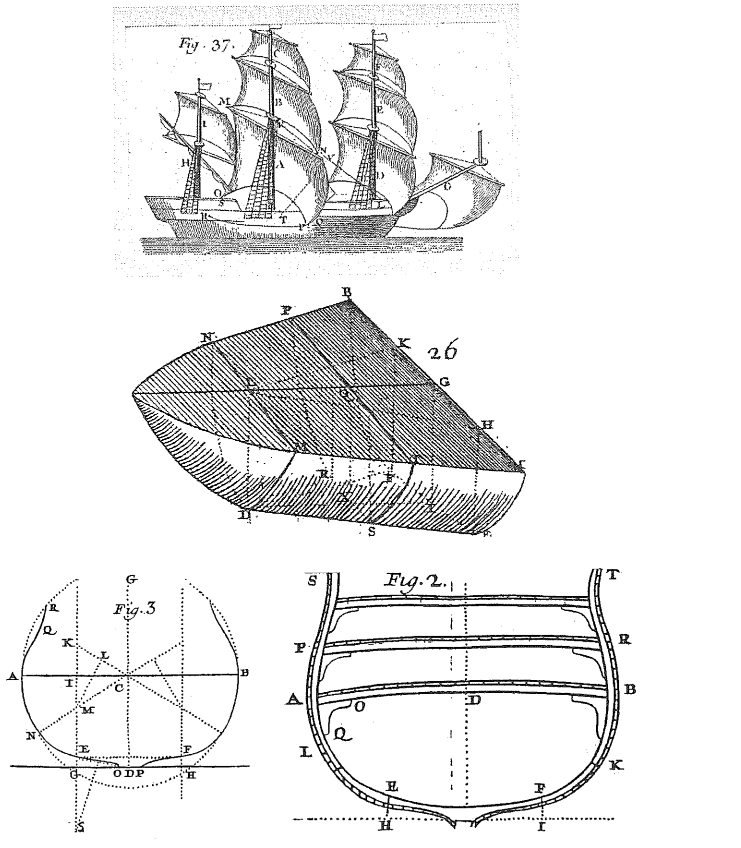


Figure 12

Quelques figures qui apparaissent dans le *Traité du Navire*, dans les planches. Celle qui sont dans l'espace sont très rares, mais nous avons donné ici des exemples. Ces figures sont traitées avec des ombres. La Figure 4, que nous avons utilisée en la réduisant comme Figure 11, joue quelquefois comme figure spatiale ainsi que nous l'avons vu pour la hauteur métacentrique.

Utilisation qualitative de la géométrie différentielle

Si Bouguer visait une illustration de l'intégrale, il pourrait s'arrêter là, et passer à l'exploitation de la formule (1). Mais il oublierait alors de démontrer le rôle de la forme de la carène; or dans l'intégrale de la relation (1), cette forme n'intervient que par la section horizontale du bateau, c'est-à-dire par sa ligne de flottaison. Est-ce physiquement raisonnable ? Le calcul intégral n'aurait-il pas inconsidérément réduit le réel du bateau ?

Bouguer dit tout le contraire. L'analyse n'est pas allée à son terme. Ce qu'on pourrait dire d'une autre manière, technique cette fois, ou plutôt synthétique : il n'a pas été rendu compte de la disparition de l'infiniment petit e dans l'établissement de la formule (8). Le chapitre V comble cette lacune : *Recherches plus étendues sur les métacentres.* C'est bien sûr le pluriel qui attire l'attention, renforcée par l'ironie de Bouguer sur l'assurance que l'on doit ou non avoir :

> Mais quoique les Recherches précédentes soient utiles, nous ne devons pas dissimuler qu'elles ne suffisent pas encore pour nous rassurer entierement sur nôtre état; parce que la solution que nous avons donnée, est limitée au cas trop particulier, dans lequel le Navire n'est exposé tout au plus qu'au choc irrégulier de quelques molécules d'eau ou d'air[27].

Il faut examiner le cas où le bougé du navire n'est pas un infiniment petit, mais une quantité finie. Pour mieux faire comprendre que ce que nous avions qualifié de mouvement virtuel est bel et bien un mouvement réel, Bouguer revient à l'origine toute pratique de son problème :

> On n'a que trop souvent des exemples de ce dangereux accident. Certains Navires conservent bien leur situation horizontale tant qu'ils sont dans le Port : mais aussitôt que quelque puissance un peu forte, comme l'impulsion du vent sur les voiles, les fait pencher d'une quantité un peu grande, ils ne se relevent que très difficilement; et ce qui est le comble du malheur, puisqu'il faut périr, ils continuent quelquefois à s'incliner, quoique la cause qui a fait commencer leur inclinaison, cesse d'agir[28].

Bouguer est d'autant plus alerte qu'il est sûr de son affaire : la disparition de e dans l'établissement de (8) montre que l'analyse peut se poursuivre, ou plutôt s'itérer à toute situation, et les mouvements infinitésimaux peuvent faire succession, à la manière même dont on somme en calcul intégral. Mais Bouguer n'estime pas nécessaire de le dire. Il lui suffit de montrer que la Figure 11, une nouvelle fois utilisée, n'est pas restreinte à une position d'équilibre en mer calme, ou d'une verticale terrestre; elle représente n'importe quelle position de flottaison. C'est dire que le raisonnement ne tient pas à ce que la ligne verticale EF divise le bateau en deux régions symétriques. Par contre, joue toujours l'utilisation d'un infiniment petit.

Ainsi la conclusion de calcul infinitésimal du parallélisme de $\Gamma\gamma$ à l'horizontale se transforme en un parallélisme de $\Gamma\gamma$ à la surface de l'eau. Chaque situation de flottaison entraîne donc l'existence d'un métacentre. Il y a non pas un métacentre, mais une *courbe métacentrique*, et cette courbe répond à la courbe des centres de carènes successivement envisagés. C'est par ce raisonnement "intégral" qu'est réintroduite la forme géométrique de la carène que la formule intégrale (8) semblait oublier; autrement dit, l'idée généralisée de métacentre parvient à prendre en compte la variation de la ligne de flottaison et les parois de la carène. Une figure est éloquente, et la correspondance qu'elle établit entre deux courbes montre bien que l'on a quitté l'analyse infinitésimale pour aborder la géométrie différentielle. Bouguer peut-il aussi servir de guide pour l'apprentissage de celle-ci ?

[27]T.N., p. 269.
[28]T.N., p. 269.

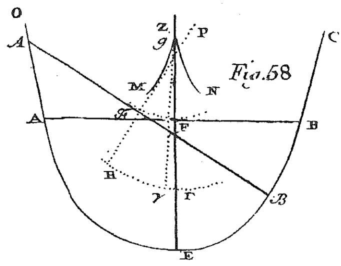


Figure 13

La courbe métacentrique MgN est construite à partir de la courbe (en pointillés) des centres de carène, et d'ailleurs de la courbe également en pointillés du point horizontal F (qui correspond à la variation de la ligne de flottaison). Cette Figure 13 est la figure originale de Bouguer (numérotée par lui figure 58). On voit bien qu'entre AB et $\mathcal{AB}$, il n'y a pas mouvement infiniment petit; d'ailleurs l'intersection F des deux droites n'est pas le milieu F de la droite AB. Le rappel qu'il y a un infiniment petit est fourni par la droite γg. Ce que l'œil doit voir par cette figure, c'est le parallélisme entre $\mathcal{AB}$ et la tangente en H à la courbe du centre de carène. On remarquera que Bouguer, s'il a transformé la Figure numérotée 4 –figure 54 dans le *Traité du Navire*– n'est pas passé à une figure dans l'espace.

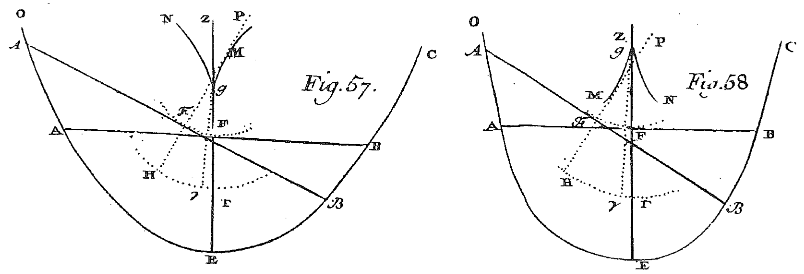
Le centre de carène est successivement en Γ, γ (bougé infiniment petit) ou H (bougé fini); la direction de verticalité est successivement ΓZ, γz, HP; les métacentres sont sur une courbe MgN et "la poussée de l'eau agit toujours selon les perpendiculaires à la courbe qui est le lieu géométrique des centres de gravité dans lesquels elle se réunit"[29]. Cette phrase suffit à faire saisir géométriquement la génération de la courbe métacentrique; elle s'obtient en prenant sur des normales à la courbe des centres de carènes des points qui sont l'intersection de deux normales successives.

J'ai volontairement changé de vocabulaire pour désigner le point caractéristique sur l'enveloppe des normales, et faire apparaître la courbe métacentrique comme la développée de la courbe des centres de carène. J'ai utilisé la description qui figure chez Huygens en 1692, et qui sera le vocabulaire constant de Monge dans le dernier tiers du siècle. Bouguer ne l'utilise pas : il ne fait aucune référence, il emploie juste la qualification de développée. Ou bien le lecteur sait ce dont il s'agit et comment on peut obtenir cette courbe par le calcul différentiel (détermination du centre de courbure, qui constitue un calcul différentiel du second ordre), ou bien il se laisse guider par l'image, par la sensation de voir se constituer la courbe métacentrique dont il a appris à connaître la tangente, en chaque point, normale à la ligne correspondante de flottaison, et le nom de développée n'est que le résumé de cette impression. C'est en fait au lecteur de faire son choix, si l'on peut dire, car en fait ce choix est déterminé par ses propres connaissances.

Certes, dans le dernier cas d'un savoir moindre, le lecteur ne peut en déduire un nouveau calcul du métacentre à partir des dérivées secondes. Mais il n'en a pas plus utilité que Bouguer. Puisqu'un premier calcul, celui aboutissant à la formule intégrale (1) a déjà été obtenu. Le professeur d'hydrographie n'a vraiment pas l'intention de montrer le fonctionnement du calcul

[29]T.N., p. 270.

différentiel. Car, contrairement à celui du calcul intégral, il n'en a pas usage, et le calcul infinitésimal lui fut suffisant. Désormais, de la correspondance entre les courbes, courbe du centre de carène et courbe métacentrique, il n'utilise que de conséquences visuelles, ou géométriques. Bouguer donne seulement deux figures qui explicitent deux situations inverses quant au métacentre, dont la courbe présente un rebroussement : ce sont aussi deux situations opposées pour la science des bateaux (Figures 14). Dans le cas d'un échappement vers le haut pour la courbe métacentrique, il n'y a pas de modification dans l'imposition sur le centre de gravité quant à la stabilité; mais il risque d'y avoir instabilité dans l'autre cas, lors d'une inclinaison un peu trop grande du bateau[30], le centre de gravité passant au-dessus du métacentre. C'est exactement cette division en deux situations antagonistes que Bouguer recherchait; elle établit une situation intégrale, et non une situation réduite au mouvement petit du navire.



Figures 14

Les deux situations possibles pour la courbe métacentrique. La situation reste stable, à gauche, puisque le métacentre ne peut que monter; elle peut devenir instable à droite selon l'emplacement du centre de gravité.

Si donc l'on comprend l'arrêt des explications de Bouguer et son refus de faire pour le calcul différentiel le travail pédagogique effectué tant pour le calcul intégral que pour le calcul infinitésimal, on ne peut manquer de noter qu'il y a un approfondissement, pour ne pas dire un changement de la définition du métacentre. De point géométrique, défini par un bougé infiniment petit, le métacentre est devenu le point générique d'une courbe. Du coup, la géométrie des figures reprend son ascendant, et la perception du marin, son sens de la verticale, est en quelque sorte matérialisé par la normale HM à la courbe du centre de carène, qui est aussi la tangente à la courbe métacentrique. Et c'est au final une figure qui justifie la stabilité du bateau en forme de caisse, et la phrase de Pierre Bouguer sur la confiance bien placée en la Providence. C'est bien, par cette nouvelle figure de l'arche de Noé mathématisée que nous concluons ce voyage marin, débuté par une caisse de Noé.

[30]Bouguer précise qu'il considère des inclinaisons allant jusqu'à 12 degrés pour les navires de premier rang, et plus encore pour des navires plus petits.

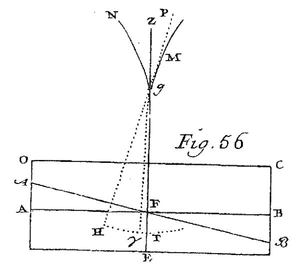


Figure 15

Nouvelle interprétation du métacentre à partir d'une tangence

Références

RAPHAEL PATAI, *The Children of Noah. Jewish Seafaring in Ancient Times*, Princeton University Press, Princeton, 1998.

FRANÇOIS DE DAINVILLE, *La géographie des Humanistes*, Genève, Slatkine reprints, à partir du texte original de 1940, 1969.

DANIEL ROCHE, *Les républicains des lettres : gens de culture et de lumière au XVIII^{ème} siècle*, Paris, Fayard, 1988.

DANIEL ROCHE, *Le siècle des Lumières en province : académies et académiciens provinciaux 1680-1789*, Paris, Mouton, 1978.

PAUL HAZARD, *La crise de la conscience européenne (1680-1715)*, Paris, Boivin, 1934 ; réédition, Paris, Gallimard, 1968.

CLIFFORD TRUESDELL, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies (1638-1788)*, Introduction to *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, vol. X, XI, Turici, Orell Fussli, 1960.

PIERRE BOUGUER, *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvemens*, Paris, Jombert, 1746.

CHARLES DUPIN, *Applications de Géométrie et de Méchanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc., pour faire suite aux Développements de Géométrie*, Paris, Bachelier, 1822.

JEAN DHOMBRES, PATRICIA RADELET-DE GRAVE, "Contingence et nécessité en mécanique : étude de deux textes inédits de d'Alembert", *Physis*, vol. XXVIII (1991), nuova serie, fasc. 1, pp. 35-114.

JEAN et NICOLE DHOMBRES, *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997.

HORST NOWACKI, Splines im Schiffbau, à paraître.

JEAN DHOMBRES, Mettre la géométrie à crédit, *Sciences et techniques en perspective*.