Figures et lettres mathématiques :
nécessité visuelle et nécessité discursive

BARBIN Evelyne
IREM Paris 7, IUFM de Créteil (France)

Abstract

Un texte mathématique est un texte qui se lit, où se tient un discours, mais le texte mathématique est aussi un texte qui se regarde, où des traces sur le papier demandent et font compréhension, qu'il s'agissent de figures géométriques, de lettres ou de symboles. Nous nous proposons d'examiner, à partir de textes historiques, quelques aspects visuels du texte mathématique.

Dans une première partie, nous comparons nécessité visuelle et nécessité discursive à partir de démonstrations de théorèmes de géométrie élémentaire, celui sur les trois angles d'un triangle et celui dit de Pythagore[1]. Dans une seconde partie, nous nous intéressons à distinguer l'usage des lettres, selon que la stabilité visuelle de leurs traces sert uniquement à la représentation de choses, ou selon que l'agencement des traces permet aussi, de plus, d'exprimer visuellement une composition des choses représentées. Nous utiliserons les deux termes de *littération* et de *littéralisation*, pour marquer cet ajout dans le fonctionnement des lettres d'un texte mathématique. Ceci est examiné dans des textes d'Euclide, de Peletier du Mans, d'Arnauld et de Bellavitis, où nombres et grandeurs sont représentés et composés par des traces géométriques et littérales. Dans une troisième partie, la proposition VI du livre II des *Éléments* d'Euclide, telle qu'elle se lit et telle qu'elle se voit chez Euclide, Hérigone, Arnauld et Bellavitis, nous fournit un exemple très simple de la pulsation entre le discursif et le visuel[2] quand il s'agit de voir des figures comme des mots faits de droites et de voir les formules comme des figures faites de lettres.

[1]Nous reprenons ici brièvement une partie de l'article "La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif", in *Produire et lire des textes de démonstration*, IRMAR, Université de Rennes I, pp.39-67.

[2]voir GUITART, *La pulsation mathématique*, L'Harmattan, Paris, 1999, n°157, pp.160-167.

1 Nécessité visuelle et nécessité discursive

La nécessité d'une proposition comme celle qui concerne les trois angles d'un triangle peut être d'ordre visuelle. Voir de multiples triangles aux formes variées ne permet pas d'énoncer quelque chose, mais voir se composer trois copies d'un même triangle permet d'affirmer que les trois angles d'un triangle se juxtaposent pour former un angle plat ou deux angles droits (fig.1). La composition du dessin n'est pas fortuite, elle dépend d'une intelligibilité, mais c'est la stabilité de la composition, valable pour n'importe quel triangle, qui fait nécessité. La vision dépend aussi d'une intelligibilité, il faut voir en même temps les trois angles comme ceux d'un même triangle, et comme ceux formant un angle plat. C'est un regard théorique, mathématique, qui est porté sur le dessin. On voit un dessin, mais on regarde une figure. Le seul discours qui suffirait donc serait : "Regardez".

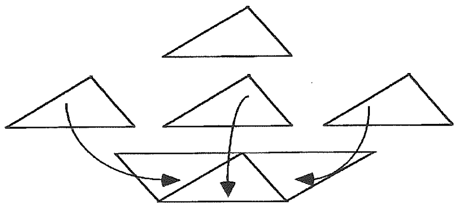


FIGURE 1

La proposition XXXII du Livre I des *Éléments* d'Euclide énonce que

> dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droit[1].

Puis, ce qui est rituel dans l'ouvrage euclidien, cet énoncé impersonnel est repris en disant une figure. Dire une figure (Figure 2) demande une littération des points, des droites[2] et des triangles, c'est-à-dire une lettre pour dire un point, deux pour une droite, trois pour un triangle. Le texte se poursuit par :

> Soit le triangle ABC, et qu'un des côtés BC, soit prolongé au-delà jusqu'en D. Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD, est égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous CAB, ABC, et que les trois angles intérieurs du triangle, ceux sous ABC, BCA, CAB, sont égaux à deux droits.

Dire une figure permet d'affirmer, de manière personnelle, la proposition : *je dis que*.

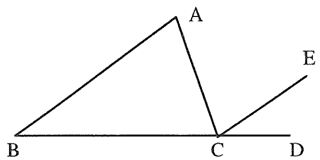


FIGURE 2

[1]EUCLIDE, *Les Éléments*, trad. Vitrac, vol.I, PUF, Paris, pp. 255-56.

[2]comme Euclide, nous appelons droite une droite finie (ce que l'on appelle aujourd'hui segment).

La démonstration qui suit est l'expression d'une nécessité discursive, selon deux modes.

D'une part, le discours exprime une nécessité déductive : cette proposition prenant place dans un système axiomatico-déductif, elle doit être déduite des axiomes et des propositions précédentes. Ces propositions sont réactivées grâce aux lettres de la figure, et le discours fait usage des mots "en effet", "puisque", "donc", etc. Euclide écrit :

> En effet, que par le point C, soit menée CE parallèle à la droite AB (prop. 31). Puisque AB est parallèle à CE et que AC tombe sur elles, les angles alternes, ceux sous BAC, ACE sont égaux entre eux. Ensuite, puisque AB est parallèle à CE et que la droite BD tombe sur elles, l'angle extérieur, celui sous ECD, est égal à celui sous ABC, intérieur et opposé (prop. 29).

D'autre part, le discours indique quels sont les angles qu'il faut regarder pour les comparer et les juxtaposer. Euclide écrit :

> Et il a aussi été démontré que celui sous ACE est égal à celui sous BAC. L'angle tout entier sous ACD est donc égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous BAC, ABC (n.c.2). Que soit ajouté de part et d'autre celui sous ACB. Ceux sous ACD, ACB sont donc égaux aux trois sous ABC, BCA, CAB. Mais ceux sous ACD, ACB sont égaux à deux droits (prop. 13); donc ceux sous ABC, BCA, CAB sont aussi égaux à deux droits (n.c.1).

Ainsi, ce discours correspond à la nécessité visuelle de la première figure (Figure 1), mais l'abréviation de la figure de la proposition (Figure 2), le fait qu'elle ne soit qu'une partie de la précédente, réclame un discours plus long que "regardez", avec des "aussi", "mais" et "donc". La démonstration est ici une "lecture raisonnée du dessin"[3].

Le discours d'Euclide est un discours raisonné sur des figures, où les figures participent elles-mêmes du raisonnement. En effet, les figures des propositions doivent nécessairement être construites à la règle et au compas, et inversement, la possibilité de telles constructions découle d'une nécessité discursive et axiomatique. Ainsi, les trois premières demandes du Livre I permettent la construction de droites et de cercles à partir de points :

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûement en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.

Les figures sont donc obtenues par composition de traces géométriques élémentaires que sont la droite et le cercle. Au long du Livre I, les propositions relatives aux constructions, par exemple plus haut celles de droites parallèles, s'entremêlent à des propositions qui, à la fois, sont nécessaires à leur déduction, et rendent nécessaires leurs possibilités.

Les autres demandes peuvent être interprétées, de ce point de vue, comme les prémisses à un discours axiomatique sur des figures. Par exemple, la demande 5, *si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits*, permet de dire l'existence d'un point de rencontre éventuellement inaccessible sur la feuille à partir de traces locales[4]. Les notions communes concernent alors la possibilité de dire l'égalité des choses, les figures, à partir de l'ajustement ou de la juxtaposition des traces, les dessins :

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.

[3]BKOUCHE, De la démonstration en géométrie, in *Le dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, IREM de Lille, 1996, pp. 197-98.

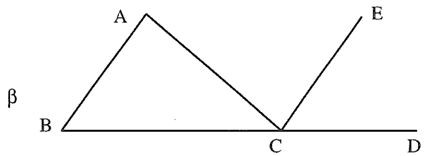
[4]GUITART, *op.cit.*, n°70, pp. 212-214.

3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les touts sont égaux.
4. Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.
5. Et les doubles du même sont égaux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.
7. Et les choses qui s'ajustent les unes et les autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.

La dernière notion commune, *deux droites ne contiennent pas une aire*, permet de dire une droite par les deux lettres qui désignent les points de ses extrémités, puisque AB désigne sans ambiguïté l'unique droite joignant A à B. Dans le texte euclidien, il peut aussi être mentionné un rectangle AB ou un carré AB, et ces deux figures ont alors A et B comme sommets opposés. Ainsi, la désignation ne peut se passer de ce qu'elle désigne, de la trace, du dessin.

L'ouvrage d'Euclide est traduit et commenté dans de nombreux ouvrages des 16ème et 17ème siècles. Le *Cours mathématique* d'Hérigone de 1634 est l'une de ces reprises des *Éléments*, elle est intéressante du point de vue de l'usage des lettres dans les figures et dans le discours mathématique. Dans les *Éléments*, l'usage des lettres ne vise pas à abréger le discours, les lettres n'ont pas un rôle opératoire sur le discours mais pour le discours. Il n'en est pas de même dans le *Cours mathématique*, qui est voulu comme un "cours mathématique démontré d'une nouvelle, brève, et claire méthode, par notes réelles & universelles, qui peuvent être entendues facilement sans l'usage d'aucune langue". La langue dont Hérigone ne fait point usage est celle de l'articulation grammaticale de vocables, car les mots de la langue vont être remplacés par des lettres ou des symboles, et la disposition en colonne va suppléer aux conjonctions de subordination.

La démonstration de la proposition XXXII, *De tout triangle, l'un des côtés étant prolongé, l'angle externe est égal aux deux internes & opposés : & les trois angles internes de tout triangle, sont égaux à deux droits*, est la suivante[5] :



	Hypoth	$\alpha.29.1$	$< ecd\,2/2 < b$,
	abc est Δ,	1.concl.	$< acd\,2/2 < a+ < b$,
	bcd est $----$.	$2.a.1$	
	Requ.π.demonstr.	β	$< a+ < b2/2 < acd$
	$< acd\,2/2 < a+ < b$.		$< acb$ commun.add.
	Prepaer.	$2.a.1$	$< a+ < b+ < acb\,2/2 < acd+ < acb$,
31.1	$ce = ba$.	13.1	$< acd+ < acb\,2/22_x$,
	Demonstr.	2.concl.	$< a+ < b+ < acb\,2/22_x$
$\alpha.29.1$	$< eca\,2/2 < a$,	$1.a.1$	

[5] HÉRIGONE, *Cours mathématique*, Le Gras, Paris, 1634, pp. 37-38.

La démonstration du théorème de Pythagore dans les *Éléments* d'Euclide est un autre exemple pour comparer nécessité visuelle et nécessité discursive. Il faut montrer que le carré $BCDE$ est égal (en aire) à la somme des carrés $ABFG$ et $ACKH$ (Figure 3).

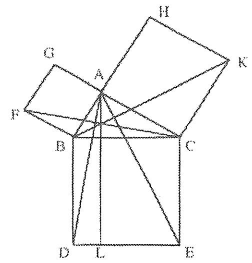


FIGURE 3

Cette proposition est l'avant-dernière du livre I, et la démonstration est donc déduite d'un bon nombre de propositions qui précèdent, en particulier, des propositions qui énoncent que deux parallélogrammes de même base et situés entre les mêmes parallèles sont égaux (en aire), et qu'un triangle est égal (en aire) à un parallélogramme de même base et situé entre les mêmes parallèles. Elle est relativement longue[6], puisqu'il faut démontrer que la figure construite est valide, par exemple que AC est aligné avec le côté AG du carré construit sur AB.

Schopenhauer, dans *Le monde comme volonté et comme représentation*, qualifie cette démonstration d'étrange et d'absurde. Il écrit :

> Elle se donne une peine infinie pour détruire l'évidence, qui lui est propre, et qui d'ailleurs est plus à sa portée, pour lui substituer une évidence logique. [. . .] A nos yeux, la méthode d'Euclide n'est qu'une brillante absurdité. [. . .] La démonstration boiteuse et même captieuse d'Euclide nous abandonne au pourquoi, tandis que la simple figure [Figure 4] [. . .] nous fait entrer du premier coup, et bien plus profondément que la démonstration, au cœur même de la question ; elle nous amène à une plus intime conviction de la nécessité de cette proposition et de sa liaison avec l'essence même du rectangle[7].

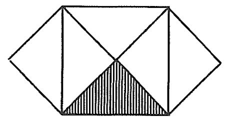


FIGURE 4

En effet, en copiant huit fois un triangle rectangle isocèle, et en faisant deux assemblages différents, on peut donner à un cas particulier du "théorème de Pythagore" un caractère de nécessité visuelle (Figure 5).

[6] EUCLIDE, *op.cit.*, pp. 282-84.
[7] SCHOPENHAUER, *Le monde comme volonté et comme représentation*, trad. Burdeau, PUF, Paris, 1966. pp. 106-110.

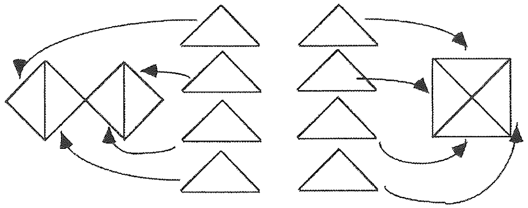


FIGURE 5

La figure de Schopenhauer peut être rapprochée de celle du dialogue du *Ménon* de Platon[8]. Ceci afin de remarquer que, dans le texte de Platon, le discours sur la figure vient suppléer à une impossibilité de dire un nombre. En effet, la première question que pose Socrate à l'esclave est de dire le côté d'un carré dont l'aire soit double de celle d'un carré d'aire deux. Cette question est remplacée, dans la deuxième partie du dialogue, par celle de montrer un carré dont l'aire soit double de celle d'un carré donné. Chaque étape de la construction indiquée par Socrate peut-être vue comme celle d'une composition de traces géométriques (Figure 6).

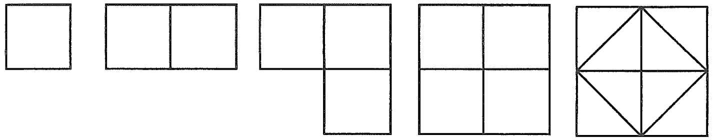


FIGURE 6

Une généralisation de la figure de Schopenhauer, produisant une nécessité visuelle du théorème de Pythagore, peut être celle de la démonstration du 3ème siècle de Liu-Hui (Figure 7) ou celle des *Éléments de géométrie* de 1753 de Clairaut (Figure 8).

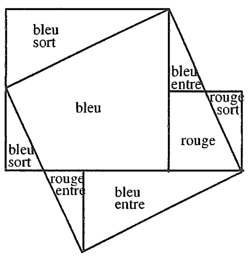


FIGURE 7

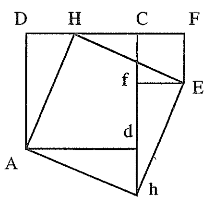


FIGURE 8

Pour Clairaut, le théorème de Pythagore est la conséquence de la construction d'un carré égal à la somme (géométrique) de deux carrés, construction qui généralise la construction d'un carré double d'un autre, c'est-à-dire la construction de Socrate. Il écrit :

[8]PLATON, *Œuvres complètes*, vol. I, trad. Robin, Gallimard, Paris, 1950, pp. 530-535.

> Supposons présentement qu'on veuille faire un carré égal à la somme des deux carrés inégaux $ABDd$, $CFEf$, ou, ce qui revient au même qu'on se propose de changer la figure $ADFEfd$ en un carré. En suivant l'esprit de la méthode précédente [Faire un carré double d'un autre], on cherchera s'il n'est point possible, de trouver dans la ligne DF, quelque point H, tel 1° Que tirant les lignes AH et HE, et faisant tourner les triangles ADH, EFH, autour des points A et E, jusqu'à ce qu'ils aient les positions Adh, Efh, ces triangles se joignent en h; 2° Que les quatre côtés AH, HE, Eh, hA, soient égaux et perpendiculaires les uns aux autres.
>
> Or ce point H se trouvera en faisant DH égal au côté CF ou EF. Car de l'égalité supposée entre DH et CF, il suit premièrement que si l'on fait tourner ADH autour de son angle A, en sorte qu'on lui donne la position Adh, le point H arrivé en h sera distant du point C d'un intervalle égal à DF.
>
> De la même égalité supposée entre DH et CF, il suit encore que HF égalera DC, et qu'ainsi le triangle EFH tournant autour de E pour prendre la position Efh, le point H arrivera au même point h, distant de C d'un intervalle égal à DF.
>
> Donc la figure $ADFEfd$ sera changée en une figure à quatre côtés $AHEh$. Il ne s'agit donc plus que de voir si ces quatres côtés sont égaux et perpendiculaires les uns aux autres.

Ce discours est celui de la visualisation de figures en mouvement (Figure 9).

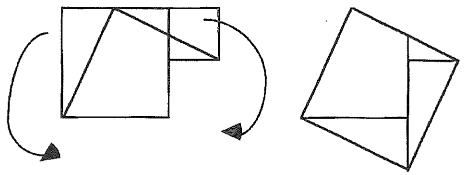


FIGURE 9

2 Nombre et grandeur : traces géométriques et traces littérales

Dans les mathématiques d'Euclide, nombre et grandeur sont des choses de genres différents : le nombre est du domaine du discret, de l'arithmétique, tandis que la grandeur est du domaine du continu, du géométrique. Mêler nombres et grandeurs serait faire un "mélange de genres", et leur traitement spécifique fait donc l'objet de livres différents, les livres VII, VIII et IX pour les nombres, les livres VI et X pour les grandeurs. Cependant, les nombres sont représentés par des droites. Ainsi, après l'énoncé de la proposition 1 du livre VII, "Deux nombres inégaux étant proposés et le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, si le reste ne mesure jamais [le reste] précédent jusqu'à ce qu'il reste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux",
Euclide écrit que

> En effet, que deux nombres AB, CD, le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, le reste ne mesure jamais le [reste] précédent jusqu'à ce qu'il reste une unité. Je dis que AB, CD sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'une seule unité mesure AB, CD.[9]

Les nombres sont donc visualisés géométriquement par des figures géométriques, qui, elles-mêmes, sont désignées par des lettres (Figure 10).

[9]EUCLIDE, *Les Éléments*, trad. Vitrac, vol.II, PUF, Paris, p. 290.

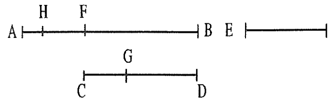


FIGURE 10

Cette littération permet de voir et de dire les différences successives de nombres sans les particulariser par des valeurs, la décomposition des traces géométriques donne à voir et à dire celle des nombres :

> Car si AB, CD ne sont pas premiers entre eux, un certain nombre les mesurera. Qu'il les mesure et que ce soit E. Et, d'une part que CD mesurant BF, il reste FA, plus petit que lui, et d'autre part que, AF mesurant DG, il reste GC, plus petit que lui, et que GC mesurant FH, il reste une unité HA.

C'est ainsi que la visualisation et la littération de la proposition 2 du Livre X sur les grandeurs, trouvent une similarité avec celles de la proposition précédente. Dans celle-ci, il s'agissait de dire une condition de primalité pour les nombres, dans l'autre la condition concerne les grandeurs :

> Si, de deux grandeurs inégales la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le [reste] précédent, les grandeurs seront incommensurables.[10]

Euclide écrit :

> En effet, AB, CD étant deux grandeurs inégales et AB la plus petite, la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, que le reste ne mesure jamais le reste précédent. Je dis que les grandeurs sont incommensurables.

La figure littéralisée et dite est semblable à la précédente (Figure 11).

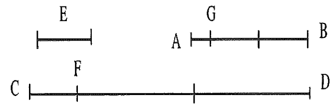


FIGURE 11

Dans l'algèbre symbolique du 16ème siècle, les irrationnels sont dé-géométrisés. D'une part, ils interviennent comme racines d'équations, et non pas dans un rapport géométrique. D'autre part, ils vont être vus et dits avec les symboles de l'algèbre, et non à partir d'une figure géométrique. Ce qui, du coup, met en évidence le statut symbolique des figures géométriques et les figures numériques. C'est ainsi que, Jacques Peletier du Mans défend l'usage des nouveaux signes de l'algèbre en écrivant :

[10]EUCLIDE, *Les Éléments*, trad. Vitrac, vol.III, PUF, Paris, p. 94.

> Et qui blamera mon Livre, pour contenir nouveaux signes ou caractères : qu'il pense, qu'à nouvel art, nouveaux commencements et nouvelle matière. Qu'il pense encore que toute l'Arithmétique ne se saurait passer de figures élémentaires : lesquelles, combien qu'elles semblent plus servir à l'œil sensitif qu'au spirituel (comme sont 1, 2, 3, 4, etc.) toutefois sans elles ne se sauraient faire aucune opérations arithmétiques sinon en l'air. La Géométrie même a ses lignes, et encore ses superficies & corps materiels : pour montrer que les sens extérieurs sont messagers sujets & moyenneurs de ceux de dedans[11].

Les signes de l'algèbre sont donc des traces assimilées à celles des nombres et des figures.

Les symboles pour les nombres radicaux s'écrivent en suivant la progression arithmétique :

$$\begin{array}{lccccccc} \text{prog. arithmétique :} & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots 16 \\ \text{nombres radicaux :} & 1, & \mathcal{R}, & \mathcal{C}, & \mathcal{T}, & \mathcal{CC}, & \mathcal{B}, & \ldots\mathcal{CCCC}. \end{array}$$

Peletier remarque que les nombres radicaux sont ainsi plus aisés à voir qu'à dire :

> Au second rang, sont les caractères des nombres radicaux qui appartiennent à l'Algèbre, portant leur dénomination. Savoir est, $\mathcal{R}$, Racine, $\mathcal{C}$, Cense, $\mathcal{T}$, Cube, $\mathcal{CC}$, Censicense, etc. Le dernier terme est Censicensicensicensique : comme vous voyez par le signe $\mathcal{CCCC}$. Et encore que le mot semble être rude, il suffit qu'il soit signifiant. Car c'est beaucoup d'avoir donné nom à choses si inusitées et si peu pratiquées[12].

Les trois sortes de "nombres appartenant à l'algèbre" sont caractérisées par la manière dont sont composés littéralement les différents symboles, ce qui permet aussi de les "prononcer". Les premiers nombres de l'algèbre sont les "nombres cossiques", ils ont un signe postposé, *comme 3* $\mathcal{R}$, *6* $\mathcal{C}$, *25* $\mathcal{T}$ *qui se prononcent trois racines, six censes, 25 cubes*. Les seconds sont les "nombres irrationaux", ils ont un signe préposé, *comme* $\sqrt{\mathcal{C}}$ *20 qui se prononce Racine censique de 20*. Les troisièmes ont un signe préposé et l'autre postposé, *comme* $\sqrt{\mathcal{C}}$ *8* $\mathcal{T}$ *qui se prononce Racine censique de huit Cubes*. Les algorithmes des opérations sur les nombres de l'algèbre sont ensuite donnés à voir et à dire à l'aide de ces symboles, et de nouveaux signes, comme $p.$ et $m.$ pour l'addition et la soustraction.

Peletier parle des "nombres de l'algèbre" pour des choses qui ne sont pas des nombres entiers, tout comme il considère que les irrationaux sont des nombres. Il écrit :

> Non sans propos se fait un doute sur les nombres irrationaux, s'ils sont nombres ou non. Car d'une part il est certain qu'ils sont quelque chose : vu que par leur aide, on parvient, non seulement à la preuve, mais aussi à la précision de nombreux théorèmes, dont les nombres rationaux ne font qu'approcher [...]. Davantage ils ont leur algorithme, leur ordre et règles infaillibles, tout ainsi que les rationaux comme nous avons à voir.

Ainsi, l'assimilation des irrationaux à des nombres repose sur celle des algorithmes des opérations sur les uns et les autres, qui repose à son tour sur une similitude visuelle et discursive.

La "grande règle générale de l'algèbre" explique comment se construit le discours de l'algèbre :

[11]Poème de Jacques Peletier sur le premier livre de son Algèbre, in PELETIER, *L'Algèbre*, Jean de Tournes, Cologny, 1609.

[12]PELETIER, *op.cit.*, pp. 8-9.

Au lieu du nombre inconnu que vous cherchez, mettez 1 $\mathcal{R}$. Avec laquelle faites votre discours selon la formalité de la question proposée : tant qu'ayez trouvé une équation convenable, et icelle réduite, si besoin est.

L'algèbre de Peletier fait usage des traces géométriques seulement lorsqu'il s'agit de résoudre un problème du second degré : "il y a deux nombres, desquels les quarrés ajoutés, font 205 : & les deux nombres multipliés l'un par l'autre font 78". Il commente :

C'est comme s'il se proposait, il y a une ligne divisée en deux parties inégales : le quarré de laquelle est fait de deux quarrés particuliers avec leurs deux suppléments [...] : les deux quarrés joints ensemble faisant 205, et l'un de suppléments 78. Quelles sont les parties de la ligne ? Je mets ceci au long à fin d'apprendre au lecteur à approprier les questions Arithmétiques aux Géométriques: lesquelles se rapportent les unes aux autres quasi partout.[...] Soit donc la ligne AB, divisée au point C. Et mettons pour la portion $AC, 1\mathcal{R}$. Dont le quarré est 1 $\mathcal{C}$. Partant l'autre quarré sera 205 $m.1\mathcal{C}$. Duquel la racine est $\sqrt{\mathcal{C}}$ 205 $m.1\mathcal{C}$[13].

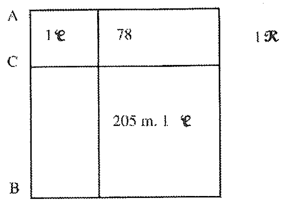


FIGURE 12

Par conséquent, le nombre inconnu est vu et dit, à la fois, à l'aide d'une lettre, par 1 $\mathbb{R}$, et d'une droite, par AC. Du coup, la droite AC n'est plus littéralisée par deux lettres, A et C, mais par une seule, $\mathcal{R}$. De la même façon, une seule lettre, $\mathcal{C}$, représente un carré. Les lettres se mêlent dans le discours de l'algèbre à des symboles de nombres et d'opérations. Alors que la géométrie grecque séparait nombres et grandeurs, l'algèbre les mélange, car, comme le dit Peletier, il est bon d'apprendre à approprier les questions arithmétiques aux géométriques, à associer les signes de l'algèbre à ceux de la géométrie.

Près d'un siècle plus tard, dans ses *Nouveaux éléments de géométrie* de 1667, Arnauld littéralise la géométrie. Mais, il ne veut rien voir derrière la lettre, que la lettre elle même. Arnauld écrit au début de son ouvrage à titre de "supposition" :

Je suppose enfin qu'on s'accoutume à concevoir généralement les choses en les marquant par des lettres sans se mettre en peine de ce qu'elles signifient, puisqu'on s'en sert que pour conclure que b est b, que c est c, ou ce qui est pris pour la même chose en matière de grandeur, sur tout en général, que b est égal à b, et c à c, ou que b multiplié par c est égal à b multiplié par c [...]. L'une des plus grandes utilités de ce traité, est d'accoutumer l'esprit à concevoir les choses de manière spirituelle sans l'aide d'aucune image sensible, ce qui sert beaucoup à nous rendre capables de la connaissance de Dieu & de notre âme[14].

[13]PELETIER, *op.cit.*, pp. 194-196.

[14]ARNAULD, *Nouveaux éléments de géométrie*, Savreux, Paris, 1667, p. 4.

Pour lui, l'étude de la géométrie permet de parvenir à la piété, parce qu'elle éloigne l'esprit de choses sensibles et sensuelles.

Cependant, dans le choix des mots "grandeur linéaire" et "grandeur plan" d'Arnauld, il est clair que les lettres se réfèrent à du géométrique. Ainsi, une seule lettre renvoie à la ligne tandis que la concaténation de deux lettres renvoient au rectangle, et donc au plan. La composition des lettres a donc une signification géométrique, on parlera ici d'une "littéralisation" de la géométrie. Arnauld écrit :

Multiplier ou Multiplication s'exprime ainsi b en c, et se marque ainsi $b \times c$, ou plus brièvement bc. [...] Où il faut remarquer qu'une grandeur marquée par un seul caractère comme b, ou c, s'appelle grandeur linéaire [...]. Que s'il n'y a eu que deux grandeurs linéaires qui aient été multipliées l'une par l'autre, ce produit s'appelle grandeur plane ou plan. [...] Lorsque les deux grandeurs ont chacune deux termes, parce que deux fois deux font 4, il faudra faire 4 multiplications partielles pour avoir le produit total

$$\text{En} \quad \begin{array}{c} b+c \\ p+q \end{array} \quad \text{produit } pb+pc+qb+qc\text{[15]}.$$

La figure du rectangle est assimilée à la multiplication de deux grandeurs droites figurée par la concaténation de deux lettres. Mais les lettres ou les concaténations de lettres peuvent aussi représenter des nombres, des plans, des solides. La possibilité de concaténer indifféremment toutes ses lettres signifie-t-il la liberté de multiplier indifféremment nombres et grandeurs géométriques de toutes dimensions ? c'est-à-dire des grandeurs hétérogènes ?

Des grandeurs de même genre s'appellent homogènes, comme deux nombres, deux lignes, deux surfaces. De divers genres hétérogènes, comme un nombre et une ligne; une surface et un solide.

Arnauld répond affirmativement :

On croit ordinairement que les grandeurs de divers genres qu'on appelle hétérogènes ne se peuvent pas multiplier. Cela ne me paraît pas vrai, ou a besoin d'explication. [...] Ce qui ne peut se multiplier par la nature se peut multiplier par une fiction d'esprit par laquelle la vérité se découvre aussi certainement que par les multiplications réelles. [...] On multiplie aussi par la même fiction d'esprit des surfaces par des surfaces, quoique cela donne pour produit une étendue de quatre dimensions qui ne peut être dans la nature.[16]

Avant lui, Descartes a montré dans *La géométrie* de 1637, comment, à condition d'introduire une droite unité, la multiplication de deux droites est une droite. Mais pour Arnauld, la vérité des "produits imaginaires" de surfaces ne saurait dépendre de la linéarisation cartésienne, qui leur est visiblement étrangère.

Tout comme on somme et on multiplie des nombres, et sans changer les formules littérales exprimant les algorithmes opérationnels, dans la méthode analytique, on somme et on multiplie des droites ayant même direction. Dans son *Exposition de la méthode des équipollences* de 1854, Bellavitis se propose de faire de même pour des droites n'ayant pas la même direction. Il introduit pour cela une méthode et un nouveau "graphisme" :

[15]ARNAULD, *op.cit.*, p. 6-11.

[16]ARNAULD, *op.cit.*, p. 38.

Cette méthode donne satisfaction au désir exprimé par Carnot, de trouver un algorithme qui représente à la fois la grandeur et la position de diverses parties d'une figure; il en résulte directement des solutions graphiques, élégantes et simples, des problèmes de géométrie[17].

Le calcul des équipollences a des règles qui s'exprime graphiquement. La règle I indique que, quels que soient les trois points A, B, C on a toujours

$$AB + BC \,\underline{\Omega}\, AC.$$

Cette règle s'exprime visuellement par la disparition de la lettre B. Bellavitis la commente en montrant qu'elle peut servir à des démonstrations visuelles, où il ne s'agit pas de regarder des figures mais d'avoir l'œil sur des lettres et des formules. Il écrit :

Cette règle est d'un continuel usage pour substituer une droite à d'autres [...]. Nous y joindrons une règle pour distinguer d'un coup d'œil qu'elles sont les équipollences identiques, de manière qu'on puisse s'assurer de leur exactitude sans aucun effort d'esprit, et sans regarder le moins du monde la figure [...]. Ainsi, par exemple,

$$AB + BC \,\underline{\Omega}\, AD - CD$$

est une équipollence identique, puisque

$$AZ - BZ + BZ - CZ \,\underline{\Omega}\, AZ - DZ - (CZ - DZ).$$ [18]

D'autres règles concernent l'addition et l'inclinaison des droites :

Règle II : Si $mIL \,\underline{\Omega}\, nMN$ et $inc.IL \neq inc.MN$
alors $m = n = 0$.

Règle III : si $LM + MN + NL \,\underline{\Omega}\, 0$ et $inc.LM = inc.MN$
alors $inc.NL = inc.MN \pm 180°$
et $gr.NL = gr.LM + gr.MN$.

Règle IV : si $LM + MN + NL \,\underline{\Omega}\, 0$
et $inc.LM + inc.LN = 2inc.MN$
alors $gr.LM = gr.NL$.

Ceci indique que la géométrie vectorielle, comme la géométrie analytique, s'appuie sur la vision des lettres et des signes autant ou plus que sur celle des figures géométriques.

3 Visuel et discursif : la proposition VI du livre II d'Euclide

La proposition énonce que

si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Puis Euclide tient un discours sur la figure lettrée (Figure 13) :

Qu'une ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au point C; qu'on lui ajoute directement une autre droite BD; je dis que le rectangle compris sous AD, DB, avec le quarré de CB est égal au carré de CD.[19]

[17] BELLAVITIS, *Exposition de la méthode des équipollences*, trad. Laisant, Gauthier-Villars, Paris, 1874, p. 2.
[18] BELLAVITIS, *op.cit.*, p. 10.
[19] EUCLIDE, *Les Éléments*, trad. Vitrac, vol. I, PUF, Paris, p. 335.

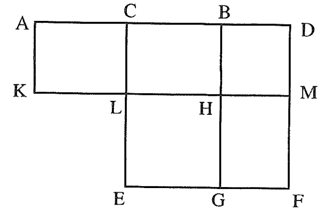


FIGURE 13

La nécessité visuelle du résultat peut tenir en un simple mouvement de la figure initiale (Figure 14). Tandis que la démonstration d'Euclide est assez longue, elle exprime une nécessité discursive en s'appuyant sur deux propositions du Livre I : la proposition XXXVI sur l'égalité des (aires de) parallélogrammes de même base et de même hauteur, qui permet d'affirmer l'égalité des (aires des) rectangles AL et CH, et la proposition XVIII qui permet d'affirmer l'égalité des (aires des) rectangles CH et HF. Le discours raisonné sur la figure indique les parties qu'il faut comparer et juxtaposer :

Que LG - qui est égal au carré sur BC - soit ajouté de part et d'autre. Le rectangle contenu par AD, DB, avec le carré sur CB est donc égal au gnomon NOP avec LG. Mais le gnomon NOP et sont le carré $CEFD$ tout entier - qui est celui décrit sur CD. Donc le rectangle [...].

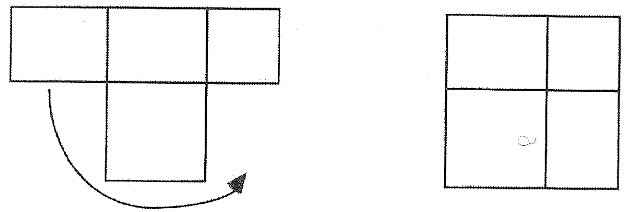
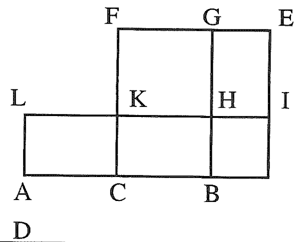


FIGURE 14

La démonstration correspondante d'Hérigone abrège le discours[20]. La disposition en colonnes évite l'utilisation des "donc", "car", "puisque", etc., et la numérotation des propositions précédentes permet d'indiquer quelle est la proposition appliquée pour affirmer une nouvelle conséquence logique. De nouveaux symboles sont introduits à la place des mots "carré","rectangle", "parallèle". La propriété de la transitivité de l'égalité est ainsi vue sur des écritures symboliques. De plus, l'indication de la juxtaposition des aires est marquée par le signe arithmétique +. Tout ceci permet de voir cette juxtaposition comme une somme.



[20] HÉRIGONE, *op. cit.*, pp. 77-78.

	Hypoth.		*Demonstr.*
	ac 2/2 cb,	const.	ce est □. cd,
	abd est —.	1.c.4.2.	kg & bi snt □
	Requ. π. demonstr.	43.1	▭ he 2/2 ▭ ch,
	▭. adb+□.cb 2/2 .cd,	α.36.1	▭ak 2/2 ▭ ch,
	Prepaer.	1.a.1	▭he 2/2 ▭ ak,
46.1	ce est □.cd,		▭ci *commun.add.*
1.p.1	fd *est diamet.*	2.a.1	*gnom*.kdg 2/2 ▭ ai,
31.1	bg = cf ⋃ de,		□ kg *commun. add.*
31.1	al = cf,	1.a.1	*gnom*.kdg+□kg 2/2 ai ▭.adb+kg□.cb
31.1	lhi=ad,	1.a.1	*gnom*.kdg+□kg 2/2 ce□.cb,
		concl. 1.a.g.	▭.adb+□.cb 2/2 □.cd.

L'abréviation symbolique d'Hérigone n'induit pas une nécessité autre que celle du discours euclidien. En revanche, la littéralisation de la géométrie d'Arnauld procure un nouveau type de nécessité, une nécessité que l'on peut qualifier de "littérale". Le livre XIV des *Nouveaux éléments de géométrie* est consacré "aux figures planes selon leurs aires, c'est-à-dire selon la grandeur des surfaces qu'elles contiennent" et commence avec le rectangle. Dans la partie intitulée "De la puissance d'une ligne comparée avec la puissance de ses parties", Arnauld énonce comme troisième axiome :

> C'est la même chose de multiplier le tout par le tout, & de multiplier le tout par chacune de ses parties, ou de multiplier chaque partie par toutes les parties.

Puis il écrit comme "avertissement" :

> Ainsi le plus grand mystère pour ne point se brouiller est de nommer chaque ligne autant que l'on peut par un seul caractère, afin que deux caractères joints ensemble puissent marquer une multiplication, c'est-à-dire un rectangle, & de marquer par un même caractère les lignes égales[21].

Dans la littération des figures par Euclide, une ligne droite (finie) est désignée par deux lettres qui dénomment deux points. Tandis que dans la littéralisation des figures par Arnauld, une ligne droite est désignée par une seule lettre. La composition ou la concaténation de deux lettres a un sens opératoire et géométrique, celui de fabriquer à partir de deux droites une "chose" hétérogène et d'une complexité supérieure, un rectangle.

Les formulations lettrées des propriétés de la somme et de la multiplication correspondent à des propriétés géométriques. Ainsi, Arnauld donne comme exemple du troisième axiome :

> la ligne b soit divisée en trois portions inégales que j'appellerai $c.d.f.$ il est visible que c'est la même chose de multiplier b par b, ce qui donne bb, que de multiplier b par toutes ces parties; c'est-à-dire par c, par d; & par f, ce qui donne $bc.bd.bf$: & par conséquent
>
> $$bb = bc + bd + bf.$$

[21] ARNAULD, *op. cit.*, p. 285.

Le discours est accompagné d'une figure (Figure 15), et la question est de savoir à quelle vision se réfère Arnauld quand il écrit "qu'il est visible que" : celle de la figure ou celle de la formule ? S'il s'agit de s'appuyer sur la vision de la figure, n'est-ce pas contraire à la "supposition" du premier livre qui demande de concevoir les choses sans l'aide d'images sensibles ? En tous les cas, à partir de là, la vision de la formule algébrique, où la lettre b se distribue sur ses parties sera suffisante pour valider des propositions géométriques.

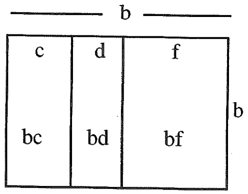


FIGURE 15

En effet, Arnauld littéralise tout le livre II des *Éléments* d'Euclide, en remarquant que :

> ainsi presque toutes les propositions du second livre d'Euclide ne sont que des corollaires de cet axiome & de cet avertissement[22].

La démonstration de la proposition VI tient seulement en la formule

$$b(b+2c) + cc = (b+c)^2.$$

Avec le "graphisme" de Bellavitis, la vision de cette formule se complexifie, car elle va être transformée en une équipollence. Une telle transformation fait l'objet d'un "théorème général" qui produit de nouveaux théorèmes. Bellavitis énonce :

> Théorème général : toute propriété des points d'une droite donne un théorème relatif aux points d'un plan, par le seul changement des équations en équipollences[23].

Suivons le premier exemple qu'il donne :

> Prenons pour exemple la formule algébrique
>
> $$b(b+2c) + c^2 = (b+c)^2 \tag{1}$$
>
> qui conduit à la propriété VI du second livre d'Euclide : si une droite BD est divisée en C également, c'est-à-dire si $BC = CD$, et que A soit un point quelconque dans son prolongement, on aura
>
> $$AB.AD + (BC)^2 = (AC)^2. \tag{2}$$

Ainsi, Bellavitis part de la formule algébrique (1), dont il commence par donner une vision géométrique (Figure 16), la formule correspondant à une littéralisation de la figure. Puis il lettre la figure et il obtient ainsi l'équation (2), qui correspond à la littération de la figure (Figure 17).

[22] ARNAULD, *op. cit.*, p. 287.

[23] BELLAVITIS, *op. cit.*, p. 21.

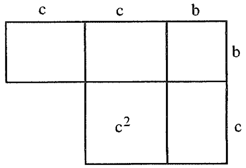


FIGURE 16

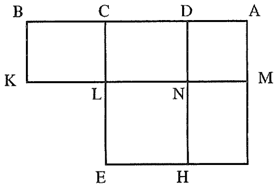


FIGURE 17

L'équation (2) concerne trois points A, B, et D d'une droite (Figure 18), donc d'après le théorème général, elle reste valable si les trois points sont des points du plan (Figure 19), c'est-à-dire encore, que l'équation (2) peut être transformée en une équipollence. Ceci est facilement démontré en utilisant la règle I, que nous avons commenté plus haut. Bellavitis écrit :

> Pour vérifier cette équation [...], observons si l'équation
>
> $$(AZ - BZ)(AZ - DZ) + (BZ - CZ)^2 = (AZ - CZ)^2$$
>
> devient identique dans l'hypothèse $BC = CD$, c'est-à-dire
>
> $$BZ - CZ = CZ - DZ.$$
>
> Après avoir fait cette vérification, nous avons le théorème suivant : Si un côté BD du triangle ABD est divisée par le milieu en C, l'équipollence suivante aura toujours lieu
>
> $$AB.AD + (BC)^2 \,\underline{\Omega}\, (AC)^2. \qquad (3)$$

En effet, le calcul est le même, que les points A, B et D soient alignés ou non, donc l'équipollence est vraie lorsque ABD est un triangle. Le passage de l'équation à l'équipollence correspond à une transformation de la figure géométrique initiale (Figure 18 et Figure 19), nous avons maintenant un théorème sur la figure du triangle.

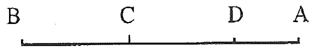


FIGURE 18

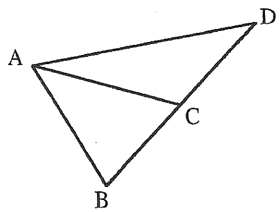


FIGURE 19

Comme le remarque Bellavitis, ce nouveau théorème, sous sa forme générale, présente peu d'utilité. Cependant, il montre qu'il admet deux corollaires importants. Le premier est le théorème dit de Pythagore, le second est l'inscription de l'angle droit dans un demi-cercle. Examinons, la déduction du théorème de Pythagore. Bellavitis écrit :

> Corollaire I. Si $2inc.CB = 2inc.AC \pm 180°$, les deux premiers termes de l'équipollence trinôme auront la même inclinaison ; d'où, par la règle III,
>
> $$gr.(AB.BD) = gr.(AC.CA) = gr.(CB)^2$$
>
> et, en outre,
>
> $$\text{inc.}BA + \text{inc.}AD = 2\,\text{inc.}CB = 2\,\text{inc.}DB.$$
>
> Cette dernière relation, appliquée à l'équipollence
>
> $$BA + DB + AD \,\underline{\Omega}\, 0,$$
>
> donne, d'après la règle IV,
>
> $$\text{gr.}AB = \text{gr.}AD.$$
>
> La condition $\text{inc.}CB$ - $\text{inc.}AC = \pm 90°$ signifie que l'angle ACB est droit, et les deux équations relatives aux grandeurs donnent le théorème de Pythagore
>
> $$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2.$$[24]

La déduction est purement calculatoire, elle repose sur des transformations de formules par application des règles III et IV. D'une certaine façon, le calcul de Bellavitis parfait celui d'Arnauld, puisqu'il permet de se passer de l'image de la figure. Ainsi, pour le théorème de Pythagore, il n'y a même plus de figures carrées, mais des puissances de grandeurs. Le "théorème général" du graphisme de Bellavitis demande une multivision d'une formule lettrée, une formule algébrique devenant une équation géométrique, une équation devenant équipollence par le seul jeu des significations accordées aux symboles. Mais notons que cette multivision correspond à des littéralités différentes d'une figure géométrique, selon que les lettres désignent des points ou des droites (finies). Notons aussi que la multivision des lettres correspond à une multivision des figures, car un triangle peut être vu comme trois points, trois droites ou une aire délimitée par trois droites. Le mathématicien tient un discours sur des figures et des lettres, mais ce discours ne dit pas toujours la multivocité de son regard.

Bibliographie

ARNAULD, *Nouveaux éléments de géométrie*, Savreux, Paris, 1667.

BARBIN, "La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif", in *Produire et lire des textes de démonstration*, IRMAR, Université de Rennes I, 1998, pp.39-67.

BELLAVITIS, *Exposition de la méthode des équipollences*, trad. Laisant, Gauthier-Villars, Paris, 1874.

BKOUCHE, De la démonstration en géométrie, in *Le dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, IREM de Lille, 1996, pp.197-98.

EUCLIDE, *Les Éléments*, trad. Vitrac, PUF, Paris, 1990-98.

GUITART, *La pulsation mathématique*, L'Harmattan, Paris, 1999.

HÉRIGONE, *Cours mathématique*, Le Gras, Paris, 1634.

PELETIER, *L'Algèbre*, Jean de Tournes, Cologny, 1609.

PLATON, *Oeuvres complètes*, vol.I, trad. Robin, Gallimard, Paris, 1950.

SCHOPENHAUER, *Le monde comme volonté et comme représentation*, trad. Burdeau, PUF, Paris, 1966.

[24]BELLAVITIS, *op. cit.*, pp. 22-23.