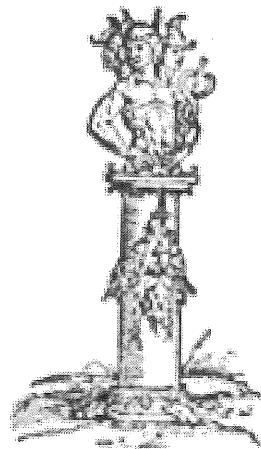


102266000

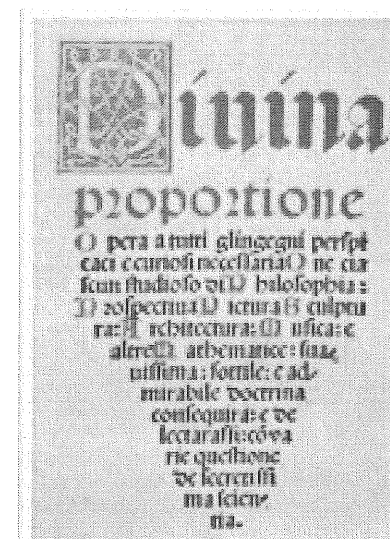
Adatto per i corsi di Laurea in:
Adetti professionali in corsi di Laurea
Matematica applicata.



102266000

Abstract

Une main dessine une figure géométrique sur une ardoise. Il s'agit d'un détail d'une peinture d'il y a 500 ans, représentant un cours de mathématiques. La main appartient à quel professeur? Qui est le peintre? Qui est l'élève? Quel est le sujet du cours? En partant du tableau, nous tâcherons de reconstruire ce cours historique et de l'adapter à nos élèves de l'an 2000. Ceci nous amènera auprès des Éléments d'Euclide, des artistes-mathématiciens de la Renaissance et de l'histoire des polyèdres.



1 Le tableau

À Naples, sur une colline verte qui surplombe la ville, se trouve le somptueux *Museo di Capodimonte*. Dans ce musée, la peinture reproduite dans la Figure 1 n'est, pour la plupart des visiteurs, qu'une toile parmi d'autres. Mais pour nous, professeurs de mathématiques, elle constitue un document capital concernant l'histoire de la géométrie et de son enseignement. Du moins, si l'interprétation de NICK MACKINNON¹ [5] est exacte.

La toile est peinte à Venise il y a environ un demi-millénaire, en pleine Renaissance. Le professeur représenté au milieu est le franciscain LUCA PACIOLI, né en 1445 à *Borgo San Sepolcro*, en Ombrie (Italie centrale), village natal du peintre et mathématicien PIERO DELLA FRANCESCA qu'il a bien connu. Pacioli est l'auteur de *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proporzionalità*, traité encyclopédique des mathématiques rédigé en italien (et non en latin) et publié à Venise en 1494, contenant entre autres un compte-rendu des *Éléments* d'EUCLIDE. C'est le gros bouquin à droite sur la peinture, sur lequel repose le dodécaèdre. Il a également écrit *La divina proporzione*, un petit livre sur les polyèdres et la section d'or, recopié en grande partie du *Libellus* de Piero della Francesca, et illustré par le grand LEONARDO DA VINCI, ami de Luca Pacioli. Plutôt qu'un grand innovateur mathématique, Pacioli était un vrai professeur ambulant, voyageant dans les différents états de l'actuelle Italie (en guerre entre eux) afin d'enseigner les mathématiques.

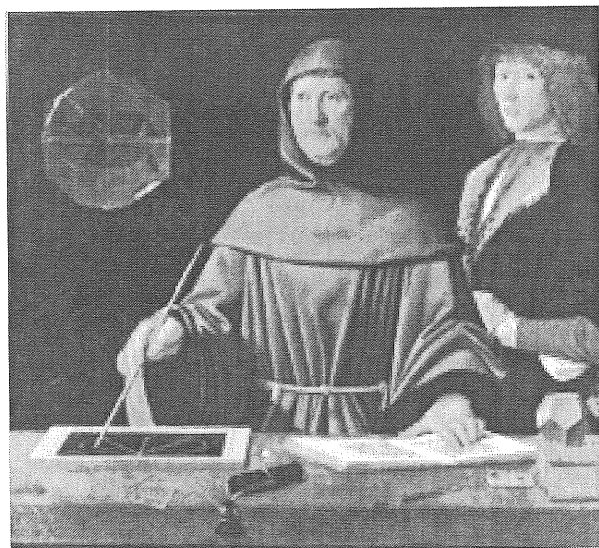


FIGURE 1 : *Le portrait du Frère Luca Pacioli*, MUSEO DI CAPODIMONTE (NAPLES)

¹que je remercie pour m'avoir autorisé à baser cet atelier sur son interprétation du tableau.

On voit Luca Pacioli dessiner d'une main une figure géométrique sur une ardoise pendant qu'il montre de l'autre main un passage dans un livre ouvert. S'agit-il, comme beaucoup d'historiens de l'art le prétendent, d'un "portrait de mathématicien entouré d'attributs mathématiques" ? Ou serait-ce plutôt un "reportage" d'un cours de mathématiques qui a vraiment eu lieu, reportage sur toile à défaut de caméra vidéo ? Même si l'on en aura peut-être jamais la certitude, cette deuxième possibilité est de loin la plus intéressante pour nous et pour nos élèves.

Le dessin sur l'ardoise représente un cercle avec un triangle équilatéral inscrit et un trait que Pacioli est en train de tracer. Ce trait est un côté d'un pentagone régulier inscrit (Figure 2).

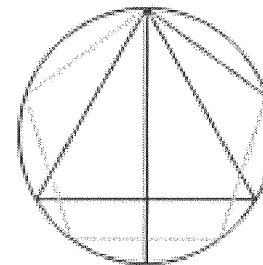


FIGURE 2. Le dessin de l'ardoise

Le livre ouvert sur la table est une traduction latine des *Éléments* d'Euclide, imprimée en 1482 à Venise par ERHARD RATDOLT. Mackinnon a même pu identifier la page exacte et le théorème que Pacioli indique : *le carré du côté d'un triangle équilatéral est le triple du carré du rayon de son cercle circonscrit*. Ceci relie le livre ouvert à la figure de l'ardoise. Reste à trouver le lien entre cette figure et les polyèdres, car le vrai sujet du cours, toujours selon l'interprétation de Mackinnon, n'est pas cette figure plane en soi, mais une propriété importante des polyèdres réguliers liée à la figure de l'ardoise. . . Le lecteur découvrira cette propriété dans le paragraphe 3.

Qui est l'élève, à droite sur le tableau ? Le tableau est dédié à GUIDOBALDO DI MONTEFELTRO, fils de FEDERICO, duc d'Urbino. Certains en concluent que Guidobaldo est l'élève. Cependant, il ne lui ressemble pas. La ressemblance avec ALBRECHT DÜRER est bien plus forte (Figure 3). La rencontre de Dürer et Pacioli n'est pas démontrée, mais on sait que Dürer était à Venise pendant l'hiver 1494-1495, où il a beaucoup appris en géométrie et en peinture. De plus, Pacioli était également à Venise pour la parution de la *Summa*. Dürer ne s'exprimait pas couramment ni en latin ni en italien, mais l'éditeur allemand de la *Summa*, le même Ratdolt qui avait imprimé les *Éléments*, pourrait bien avoir facilité la rencontre entre les deux géomètres.

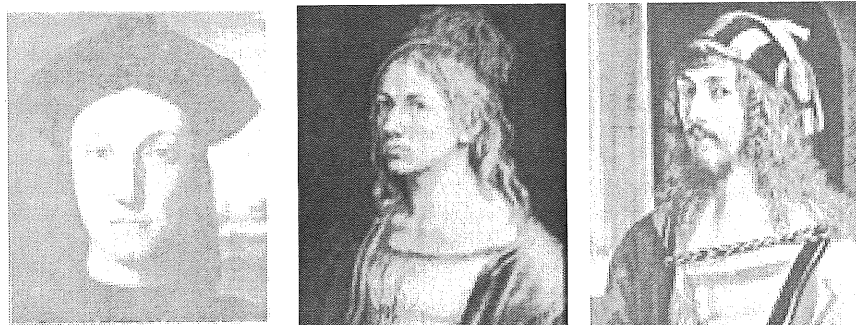


FIGURE 3. A gauche : portrait de Guidobaldo par GIACOMO FRANCIA (détail)
Au milieu : autoportrait de Dürer en 1493 (détail, image renversée)
A droite : autoportrait de Dürer en 1498 (détail, image renversée).

Un autre lien possible entre Pacioli et Dürer est le peintre du tableau. La toile est signée "Jaco. Bar.". Le peintre est donc sans doute JACOPO DE' BARBARI, quoique certains historiens de l'art le contestent et attribuent la toile à un peintre mystérieux dont aucune autre toile ne serait conservée. On sait que de' Barbari a connu aussi bien Dürer que Pacioli. Ceci est argumenté largement dans [5].

Le polyèdre en verre, à moitié rempli d'eau, est sans doute ajouté après par Leonardo da Vinci, seul peintre de la Renaissance capable de cette prouesse. La réflexion de la lumière des fenêtres dans le verre et dans l'eau est parfaite. Pacioli possédait une collection de polyèdres en verre, et on sait que da Vinci et Pacioli étaient très amis (au point d'avoir même cohabité).

2 Polyèdres réguliers et semi-réguliers

Pour comprendre l'importance historique du cours de mathématique représenté sur le tableau, il faut connaître un peu l'histoire des polyèdres.

Un polyèdre convexe est dit *régulier* si les faces sont des polygones réguliers égaux et si, de plus, à chaque sommet le même nombre de faces se rencontrent. En raisonnant sur le nombre de faces par sommet, il est aisé de découvrir qu'il n'y a pas plus que cinq possibilités. En effet, à chaque sommet il faut au moins trois faces, et la somme des angles qui s'y rencontrent doit être inférieure à 360° . A chaque sommet on ne peut donc avoir que trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux, trois carrés ou trois pentagones réguliers. Ce raisonnement démontre qu'il n'y en a pas plus que cinq. De plus, en les "construisant", on peut démontrer que les cinq polyèdres réguliers *existent* : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube (*hexaèdre*) et le dodecaèdre (noms grecs indiquant le nombre de faces). Quoiqu'ils étaient connus avant PLATON (4^e siècle a.C.), on les nomme *corps platoniciens*. Ce philosophe et mathématicien grec les associa aux éléments constitutifs de la nature : feu, air, eau, terre et l'univers (Figure 4). Le raisonnement esquissé plus haut, démontrant qu'il n'y a pas plus que cinq polyèdres réguliers, apparaît dans un texte de THEAÏÈTE, élève de Platon.

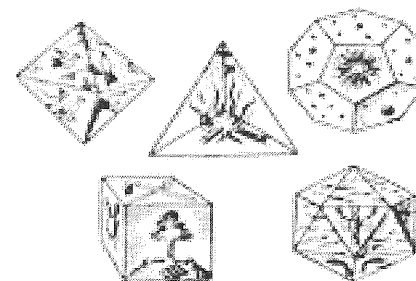


FIGURE 4. Les cinq corps platoniciens associés aux "éléments" (dessin de KEPLER)

Les *Éléments* d'EUCLIDE aboutissent, dans le treizième et dernier livre, à la construction (et donc à la démonstration de l'existence) des cinq corps platoniciens. Ceux-ci tiennent donc une place d'honneur dans la géométrie grecque; en exagérant un peu on pourrait dire que le reste des *Éléments* n'est qu'une introduction pour arriver à cette apothéose...

L'astronome, astrologue et mathématicien JOHANNES KEPLER (vers 1600) était tellement impressionné par la beauté des polyèdres réguliers, qu'il les utilisa pour expliquer l'harmonie du système solaire. Les trajectoires des six planètes connues à l'époque seraient situées sur des sphères inscrites et circonscrites aux cinq corps platoniciens (Figure 5). Plus tard, quand les observations se faisaient de plus en plus précises, il dut abandonner ce modèle et le remplacer par les "lois de Kepler" encore enseignées aujourd'hui.

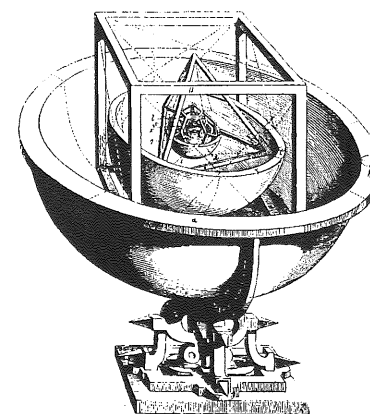


FIGURE 5. Système cosmologique de Kepler (*Mysterium cosmographicum*, 1596)

Un polyèdre convexe est dit *semi-régulier* si les faces sont des polygones réguliers de plus d'une sorte et si, de plus, à chaque sommet on retrouve la même configuration. Les treize corps archimédiens satisfont à cette définition, ainsi que deux familles infinies : les prismes et les antiprismes (Figure 6). Les treize corps archimédiens ont été découverts par ARCHIMÈDE (3^e siècle a.C.), mais son texte à ce sujet est perdu. A la Renaissance, une partie de ces treize polyèdres furent redécouverts par Piero della Francesca, Pacioli, Dürer. . . Pour une description de tous les treize, il faut attendre Kepler.

Le polyèdre du tableau (Figure 1), à moitié rempli d'eau, est un des treize corps archimédiens, le rhombicuboctaèdre (le numéro 10 dans la Figure 6). Il a la particularité d'avoir un "petit frère", moins symétrique mais satisfaisant également à la définition de semi-régularité formulée plus haut (Figure 7). On pourrait dire qu'il y a, à part les prismes et les antiprismes, 13,5 polyèdres semi-réguliers. Le rhombicuboctaèdre du tableau symbolise doublement les quatre éléments. En tant que polyèdre composé de carrés et de triangles équilatéraux, il réfère aux quatre premiers corps platoniciens. De plus, il réunit en soi l'eau, l'air, la terre (matière dure, symbolisée par le verre) et le feu (symbolisée par le reflet de la lumière).

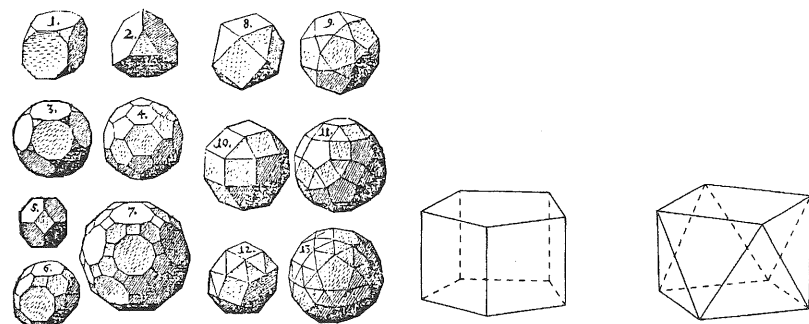


FIGURE 6. Les treize corps archimédiens (dessins de Kepler), ainsi qu'un prisme et un antiprisme

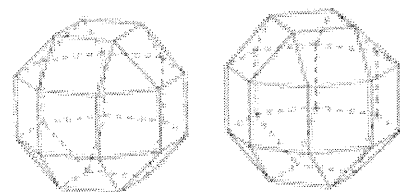


FIGURE 7. Le rhombicuboctaèdre et son "petit frère"

3 Dodécaèdre et icosaèdre selon Euclide et Pappos

Partons à la recherche du sujet précis du cours que Pacioli fait à Dürer. Il nous faut donc trouver le lien entre la figure de l'ardoise (Figure 1) et les polyèdres réguliers. (Laissons de côté le rhombicuboctaèdre puisqu'il a probablement été ajouté après).

Euclide construit le dodécaèdre en partant d'un cube pourvu de "crêtes" rectangulaires (Figure 8). Les extrémités des crêtes sont reliées aux sommets du cube de façon à obtenir des pentagones. Il s'agit de montrer qu'il est possible, en adaptant les dimensions des crêtes, d'obtenir des pentagones plans et réguliers (équilatéraux et équiangulaires). Plutôt que de lire ligne après ligne les démonstrations d'Euclide, faisons-le de notre façon, soit-elle anachronique par endroits. Grâce à la symétrie, il suffit de s'occuper d'un seul pentagone.

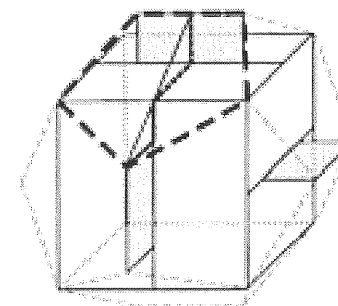


FIGURE 8. Construction du dodécaèdre selon Euclide

Dans un pentagone régulier, le rapport diagonale/côté égale

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618,$$

le nombre d'or. (Rappelons que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi^{-1} = \varphi - 1$, identités qui seront utiles à ceux qui voudront vérifier les calculs ci-dessous). Ici, la diagonale du pentagone, c'est l'arête du cube. Partons d'un cube d'arête afin d'obtenir un pentagone de côté 1. Ainsi, la longueur des crêtes est déterminée : c'est l'unité. Reste à fixer la *largeur* u des crêtes. Afin que le pentagone soit *plan*, les deux "marches" de l'escalier indiqué dans la Figure 8 doivent avoir la même pente. Ceci nous fournit l'équation

$$\frac{u}{\frac{1}{2}} = \frac{\varphi - 1}{u}$$

dont la solution est : $u = \frac{1}{2}$. Les crêtes sont donc des "doubles carrés". Vérifions maintenant que ce pentagone plan est véritablement régulier. Pour qu'il soit *équilatéral*, il suffit qu'un côté reliant la crête à un sommet du cube mesure l'unité. Et c'est bien le cas, car

$$\left(\frac{\varphi - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

On peut se convaincre de l'équiangularité du pentagone par l'argument suivant : de tous les pentagones équilatéraux de côté 1 et ayant une diagonale égale à φ , le pentagone régulier est le seul qui soit symétrique par rapport à la médiatrice de cette diagonale (Figure 9).

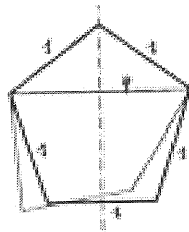


FIGURE 9. Argument de symétrie pour l'équiangularité

Remarquons qu'en reliant les "bases" des crêtes, on obtient un icosaèdre (Figure 10). Les commentaires de l'édition [3] des *Éléments* d'Euclide attribuent cette construction à un certain H. M. TAYLOR. La construction d'Euclide est un peu différente.

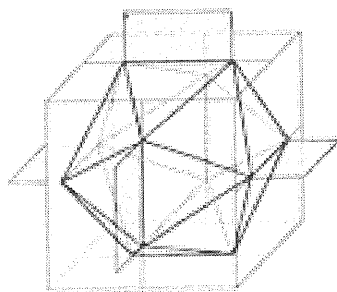


FIGURE 10. Icosaèdre dans un cube

Avons nous, jusqu'à présent, rencontré un triangle équilatéral et un pentagone régulier inscrits dans un même cercle (Figure de l'ardoise) ? Hélas non, ce qui nous contraint à poursuivre notre recherche.

PAPPOS, mathématicien Grec en Alexandrie (actuelle Egypte) vers l'an 300, construit le dodécaèdre et l'icosaèdre à partir d'une sphère (Figure 11).

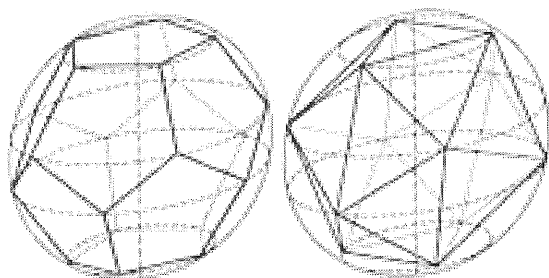


FIGURE 11. Construction du dodécaèdre et de l'icosaèdre selon Pappos

Les sommets des polyèdres sont placés sur quatre "étages" horizontaux. Pappos démontre qu'il est possible de déterminer les hauteurs de ces étages de telle façon que ces deux polyèdres soient réguliers. Calculons ces hauteurs à partir du plan équatorial et en prenant comme unité de longueur le rayon de la sphère. Limitons-nous aux hauteurs des étages supérieurs.

Commençons par le dodécaèdre. Supposons qu'il est régulier et calculons la hauteur h de l'étage supérieur.

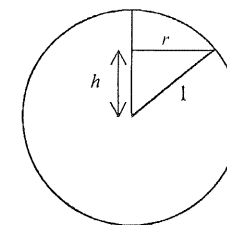


FIGURE 12.

Pour connaître h , il suffit de connaître le rayon r du cercle circonscrit à la face supérieure du dodécaèdre (Figure 12) :

$$h\sqrt{1-r^2}.$$

Rappelons le rapport suivant entre le côté z d'un pentagone régulier et le rayon r de son cercle circonscrit :

$$z = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

ce qui nous donne

$$h = \sqrt{1 - \frac{2z^2}{5-\sqrt{5}}}. \quad (*)$$

Il suffit donc de trouver la valeur de l'arête z du dodécaèdre inscrit dans la sphère de rayon 1.

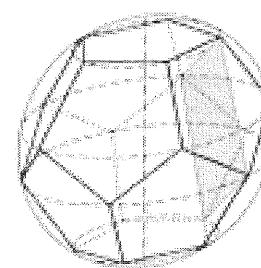


FIGURE 13a.

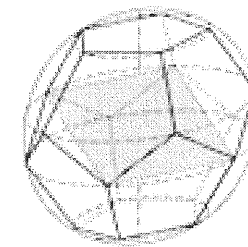


FIGURE 13b.

Le quadrilatère indiqué dans la Figure 13a est un carré. En effet, ayant deux côtés parallèles, il est plan. Un quadrilatère plan dont les sommets se trouvent sur une sphère, est nécessairement un quadrilatère inscrit. Comme de plus les quatre côtés sont égaux, c'est donc un carré. Le côté de ce carré mesure φz où z est l'arête du dodécaèdre. Le quadrilatère indiqué dans la Figure 13b est un rectangle (car les diagonales sont égales et se coupent au milieu) de largeur φz , de longueur $\sqrt{2}\varphi z$ (c'est la diagonale du carré de la Figure 13a) et de diagonale 2. Le théorème de Pythagore nous fournit la valeur de z :

$$(\varphi z)^2 + (\sqrt{2}\varphi z)^2 = 2^2$$

$$z = \frac{2}{\varphi\sqrt{3}}.$$

Substituons dans (*) :

$$h = \sqrt{1 - \frac{\frac{8}{3\varphi^2}}{5 - \sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \quad (**)$$

$$\approx 0,7947.$$

Nous avons donc calculé la hauteur de l'étage supérieur pour le dodécaèdre. Au lieu de calculer la hauteur de l'étage d'en dessous, passons plutôt à l'icosaèdre. Calculons la hauteur h' de l'étage supérieur (toujours à partir du plan équatorial et le rayon de la sphère étant toujours l'unité).

Tout comme pour le dodécaèdre, nous avons

$$h' = \sqrt{1 - r'^2}$$

où r' est le rayon du cercle circonscrit de la face supérieure. Le rapport entre le côté d'un triangle équilatéral et le rayon de son cercle circonscrit est

$$z' = \sqrt{3}r',$$

ce qui nous donne

$$h' = \sqrt{1 - \frac{z'^2}{3}}. \quad (***)$$

Recherchons donc la valeur de l'arête z' d'un icosaèdre inscrit dans une sphère de rayon 1.

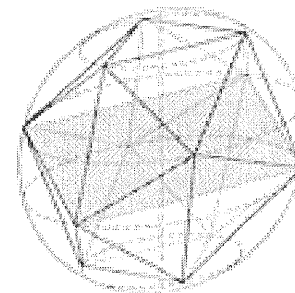


FIGURE 14.

Le quadrilatère indiqué dans la Figure 14 est un rectangle car les diagonales sont égales et se coupent au milieu. C'est même un "rectangle d'or" : sa largeur est z' et sa longueur est la diagonale d'un pentagone régulier de côté z' , donc $\varphi z'$. Le théorème de Pythagore nous fournit la valeur de z' :

$$z'^2 + (\varphi z')^2 = 2^2$$

$$z' = \frac{2}{\sqrt{\varphi + 2}}.$$

Substituons dans (***) :

$$h' = \sqrt{1 - \frac{3}{3(\varphi + 2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}.$$

C'est exactement la même valeur que (***) ! La hauteur de l'étage supérieur est la même que pour le dodécaèdre. Conclusion : *dans des sphères égales, le dodécaèdre et l'icosaèdre ont des faces qui s'inscrivent dans des cercles égaux.* C'est la figure de l'ardoise !

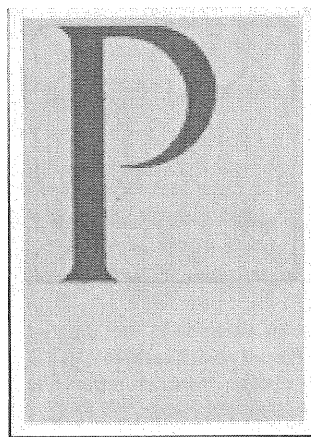
Est-ce cette propriété que Pacioli enseigna à Dürer il y a un peu plus d'un demi-millénaire, à Venise ? Il est peu probable que Pacioli ait lu l'entièreté des *Collections* de Pappos, qui n'étaient pas disponibles en Italie à cette époque. Mais on retrouve le même résultat dans le 14^e livre des *Éléments* d'Euclide. Les *Éléments* contiennent 13 livres, mais un 14^e et un 15^e livre ont été ajoutés après la mort d'Euclide. L'auteur du 14^e livre est un certain HYPsicLES. La propriété que nous venons de découvrir par le biais de la construction de Pappos, en est la deuxième proposition. La démonstration de Hypsicles repose directement sur ... le théorème que Pacioli indique de la main gauche dans le livre ouvert ! Hypsicles en déduit un peu plus loin que *le rapport entre les aires du dodécaèdre et de l'icosaèdre est égale au rapport entre leurs volumes.* (Ceci découle directement de notre résultat $h = h'$). Et dans la démonstration de ce corollaire, on retrouve exactement ... la figure de l'ardoise !

Si cette hypothèse est exacte, et j'aime bien y croire, tout se tient en rien de ce que l'on voit sur la peinture n'est disposé là par hasard. Le cours de Pacioli concerne l'apothéose de

la géométrie grecque, sauvegardée pendant le Moyen-Age grâce aux Arabes et se répandant en Italie à la Renaissance. Il transmet cette connaissance millénaire à Dürer qui à son tour la diffusera au Nord de Alpes ! Un moment historique dont nous sommes témoins en regardant cette peinture !

Références

- [1] N. BOONEN, *Platonische en Archimedische lichamen*, mémoire non-publié, KHLim Lerarenopleiding (Hasselt), 1999.
- [2] P.R. CROMWELL, *Polyhedra*, Cambridge University Press (Cambridge, New York, Melbourne), 1997, ISBN 0-521-66405-5.
- [3] EUCLID, *The thirteen books of the Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Volume III, Dover Publications (New York), 1956, ISBN 0-486-60090-4.
- [4] J.V. FIELD, *The invention of infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*, Oxford University Press (Oxford, New York, Tokyo), 1997, ISBN 0-19-852394-7.
- [5] N. MACKINNON, *The portrait of Fra Luca Pacioli*, *The Mathematical Gazette* 77/479 (1993), p. 129-219.



Une histoire des approximations successives : des équations numériques aux équations fonctionnelles

TOURNES Dominique¹
IUFM de La Réunion (France)

Abstract

Faire un essai, observer attentivement ce qu'il advient et corriger sa stratégie en conséquence : voici sans doute la démarche la plus naturelle qui soit pour résoudre un problème. Tout apprentissage n'est-il pas le fruit d'une suite consciemment organisée d'"essais-erreurs" ? En mathématiques, la *méthode des approximations successives* apparaît comme une formalisation de ce schéma général d'action. Une équation de nature quelconque peut toujours s'écrire sous la forme $x = \varphi(x)$, où x est un élément inconnu appartenant à un ensemble donné et où φ est un opérateur agissant sur cet ensemble. La valeur de x semble irrémédiablement hors d'atteinte puisqu'elle s'exprime en fonction d'elle-même. Comment sortir de ce cercle vicieux ? Imaginons qu'un certain raisonnement ait conduit à considérer comme intéressante une valeur approchée x_1 de x . Il peut être tentant d'appliquer à x_1 l'opérateur φ de manière à obtenir la valeur corrigée $x_2 = \varphi(x_1)$. Le miracle est de constater que, souvent, x_2 est une valeur plus précise que x_1 . Il paraît alors presque naturel de recommencer ce calcul auto-correctif une fois, deux fois, etc., puis, si l'on ose franchir l'obstacle conceptuel, une infinité de fois, afin de parvenir à une solution qui n'a plus besoin d'être corrigée, c'est-à-dire à la solution exacte. Face à une telle conclusion, Gaston Bachelard, qui a étudié la méthode itérative du point de vue épistémologique, n'a pas caché son étonnement : "ainsi, parti de n'importe où, en substituant n'importe quoi, par le seul jeu du système lui-même on arrive à sa solution"². Il reste toutefois à préciser la nature de ce qu'on entend par "solution" : s'agit-il d'une solution donnée *a priori* dont on construit des valeurs approchées aussi précises que l'on veut, ou bien est-ce le processus itératif lui-même qui définit un objet de type nouveau qu'on peut regarder *a posteriori* comme étant une solution ?

La méthode des approximations successives a été pratiquée sous des formes variées depuis deux mille ans, d'abord pour les équations numériques, puis pour des équations plus générales dans d'autres ensembles que les ensembles de nombres. Pendant l'atelier de l'université d'été, nous avons tenté de faire revivre cette longue histoire à travers la lecture de textes originaux. En raison de la durée limitée dont nous disposions, il a fallu se restreindre à la présentation d'un petit nombre de textes, choisis parmi les plus significatifs. Le caractère réducteur d'une telle démarche sera atténué, dans le compte rendu qui suit, par l'insertion de nombreuses références bibliographiques permettant au lecteur intéressé de donner par lui-même davantage d'épaisseur à notre étude³.

¹IUFM de La Réunion, allée des Aigues Marines, Bellepierre, 97487 Saint-Denis Cedex, et REHSEIS-CNRS, 37 rue Jacob, 75006 Paris. Courrier électronique : tournes@univ-reunion.fr.

²BACHELARD, 1973, p. 215.

³Afin de ne pas trop alourdir cette bibliographie, nous ne donnerons pas de références primaires, sauf pour les