

du stoïcisme, réintroduit dans l'actualité par Juste Lipse<sup>24</sup> puis Guillaume Du Vair, sans parler de l'écho que lui donnera ensuite Descartes.

Ceci montre que notre travail est loin d'être fini...

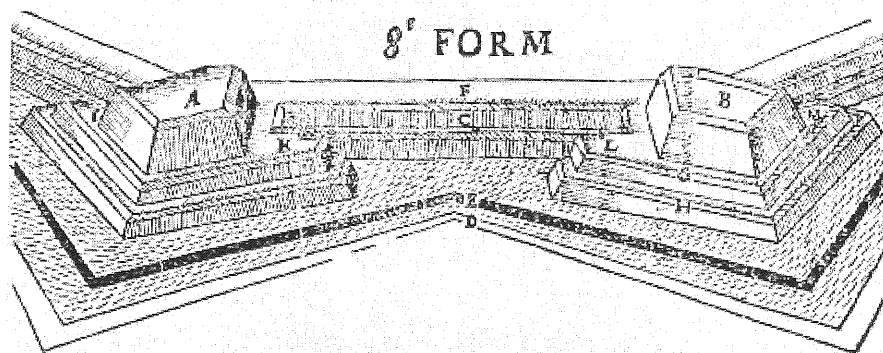


Illustration tirée du *De sterkte Bouwing* de Stevin

## Le calcul différentiel selon Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

KELLER, Olivier  
IREM de Lyon (France)

### Abstract

Le texte<sup>1</sup> choisi pour cet atelier illustre avec les deux exemples de la cycloïde et de la chaînette, la double préoccupation fondamentale de LEIBNIZ, liée à un sens aigu du tournant historique des mathématiques du 17<sup>ème</sup> siècle :

- 1- faire admettre par le monde savant un **nouvel objet**, à savoir les courbes transcendentes qui seules permettent de "construire" les problèmes transcendants, alors que Descartes n'avait traité que les courbes algébriques, dont les équations sont de la forme  $P(x, y) = 0$  où  $P$  est un polynôme.
- 2- faire connaître au monde savant un **nouveau calcul**, qu'il nomme lui-même le Calcul Différentiel, et aussi une **nouvelle forme d'équation des courbes**, la forme différentielle (ou intégrale), deux nouveautés grâce auxquelles on peut aisément résoudre les problèmes habituels, même pour les courbes transcendentes : tracé des tangentes, rectification, recherche du centre de gravité, calcul d'aires.

Les textes de LEIBNIZ sont des articles des *Acta Eruditorum* de Leipzig et ne constituent pas un traité, au contraire du *Traité des fluxions et des suites infinies* de Newton. Ils sont touffus, souvent très elliptiques pour un lecteur contemporain, et le détail des calculs manque la plupart du temps<sup>2</sup>; il est intéressant de retrouver ces détails dans *l'esprit de l'époque*, et c'est ce que nous chercherons à faire<sup>3</sup>. Les règles du nouveau calcul ont été établies dans l'article *Nova Methodus*...<sup>4</sup> d'octobre 1684 : différentiation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de puissances et de radicaux; tracé des tangentes par similitude d'un triangle et du triangle différentiel (ou caractéristique) de côtés  $ds$ ,  $dx$  et  $dy$ .

<sup>1</sup>Notre source est : LEIBNIZ, *Naissance du calcul différentiel*, 26 articles des *Acta Eruditorum*. Introduction, traduction et notes de Marc Parmentier. Paris, éditions Vrin, 1989.

<sup>2</sup>LEIBNIZ répond à cela : "J'avoue que cette démonstration ne pourra être entendue de tout le monde, parce qu'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux qui sont versés dans les nouvelles découvertes et qui savent manier les caractères ou symboles. Mais il n'y en a que trop pour ceux-ci, et il faudrait un volume pour satisfaire aux autres." Lettre à La Roche, 1673.

<sup>3</sup>À ce propos, si nous remercions Marc Parmentier pour avoir traduit pour la première fois en français un grand nombre de textes mathématiques de LEIBNIZ, nous nous permettons de le critiquer pour ses notes mathématiques qui se contentent de vérifier ce que dit l'auteur avec les méthodes actuelles, à grand renfort de fonctions logarithmes, exponentielles, cosinus et sinus hyperboliques etc.

<sup>4</sup>La traduction française du titre complet est : *Nouvelle méthode pour chercher les Maxima et les Minima*, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique.

<sup>24</sup>qui, soi dit en passant, publiera aussi un traité sur l'art militaire.

# 1 Sur la géométrie profonde et l'analyse des indivisibles et des infinis (Juin 1686)

## 1.1 L'origine des problèmes transcendants

Je dois à présent dévoiler l'origine des quantités transcendantales, et montrer pourquoi certains problèmes ne sont ni plans, ni solides, ni sur-solides<sup>5</sup>, ni d'aucun degré déterminé, mais surpassent toute équation algébrique. Je révélerai du même coup un moyen de démontrer, sans calcul, qu'il est impossible de trouver une quadratrice algébrique du cercle et de l'hyperbole.

Supposons en effet que nous en disposions, s'ensuivrait grâce à elle la possibilité de diviser un angle ou un rapport, soit encore un logarithme, dans le rapport de deux segments donnés, et cela par une construction unique et générale; par conséquent le problème de la section de l'angle ou de l'établissement d'un nombre quelconque de moyennes proportionnelles, seraient de degré déterminé, alors que, selon le nombre de divisions de l'angle, ou le nombre de moyennes proportionnelles, l'équation algébrique qu'il faut employer est de degré chaque fois différent et que, de ce fait, considéré en général, pour un nombre quelconque de divisions et de moyennes proportionnelles, le problème est de degré indéterminé et transcende toute équation algébrique.

Il n'empêche que de tels problèmes peuvent réellement se poser en géométrie, qu'il faut même les compter parmi les plus fondamentaux, et qu'ils constituent des problèmes déterminés; il est donc à tout le moins indispensable d'admettre dans la géométrie les seules courbes permettant de les construire; or ces courbes peuvent être tracées rigoureusement par un mouvement continu, la Cycloïde et les autres figures similaires le montrent bien, il ne faut donc pas les juger Mécaniques mais Géométriques, notamment parce que les ressources qu'elles offrent laissent à mille lieues derrière elles, exception faite du cercle et de la droite, les courbes de la Géométrie ordinaire, et qu'elles recèlent des propriétés très importantes, concernant directement des démonstrations de Géométrie. C'est pourquoi l'erreur qu'a commise Descartes en les excluant de la Géométrie fut aussi grave que celle des Anciens<sup>6</sup> qui rejetaient comme non géométriques certains lieux solides ou linéaires. (p.133-135).

LEIBNIZ réunit ici génialement en un seul les trois fameux problèmes de l'antiquité grecque : la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube. Ce dernier problème est équivalent à celui de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre 1 et 2. LEIBNIZ démontre que les courbes qui permettent de "construire" ces problèmes sont transcendantales, et il affirme, avant de le démontrer plus loin pour le cas de la cycloïde, que son nouveau calcul permet de les traiter aussi aisément que les courbes traditionnelles.

<sup>5</sup>Vocabulaire des géomètres grecs de l'antiquité d'après Pappus (4<sup>ème</sup> siècle de notre ère) : les problèmes plans sont ceux qui se résolvent au moyen de la droite et du cercle, les problèmes solides nécessitent l'usage des sections coniques. Les autres sont dits "sur-solides" ou "linéaires".

<sup>6</sup>Souligné par LEIBNIZ.

Sa démonstration de transcendance, particulièrement concise, signifie ceci : supposons qu'il existe une quadratrice algébrique du cercle, c'est-à-dire une courbe  $P(x, y) = 0$ , où  $P$  est un polynôme de degré fixé  $n$ ,  $x$  l'abscisse d'un point  $M$  quelconque du cercle (Figure 1) et  $y$  l'aire  $O$ .

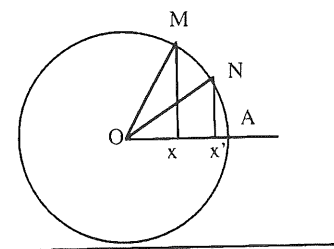


FIGURE 1

$a(\alpha)$  du secteur d'angle  $AOM = \alpha$ . La courbe  $P$  permettrait de diviser l'angle  $AOM = \alpha$  en  $m$  parties égales comme ceci : soit  $N$  tel que  $AON = \alpha/m$  (Figure 1),  $x'$  son abscisse et  $a(\alpha/m)$  l'aire du secteur  $AON$ ; comme  $a(\alpha/m) = a(\alpha)/m$ , on aura  $P(x', y/m) = 0$ , ce qui permet de construire  $x'$  (puis  $N$  sur le cercle) comme l'indique la Figure 2.

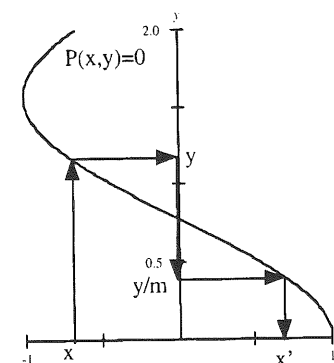
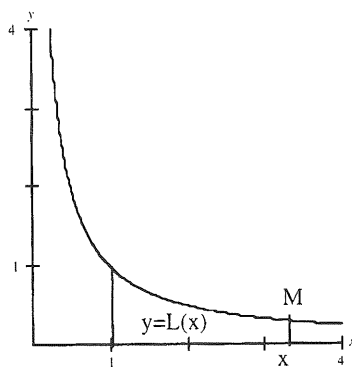


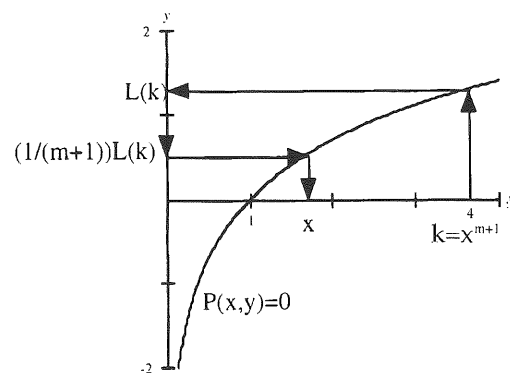
FIGURE 2

Or le calcul de  $x' = \cos(\alpha/m)$  en fonction de  $x = \cos \alpha$  est un problème de degré  $m$  puisque  $\cos \alpha$  est un polynôme de degré  $m$  en  $\cos(\alpha/m)$ , ce qui contredit la prétention de le résoudre, quelque soit  $m$ , avec une courbe de degré fixé  $n$ .

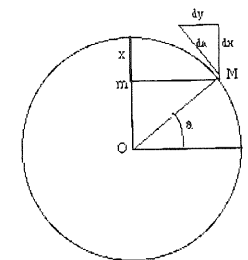
Supposons de même qu'il existe une quadratrice algébrique de l'hyperbole, c'est-à-dire une courbe  $P(x, y) = 0$ , où  $P$  est un polynôme de degré  $n$ ,  $x$  l'abscisse d'un point  $M$  de l'hyperbole et  $y$  l'aire  $L(x)$  du domaine limité par l'axe des abscisses, l'hyperbole et les verticales d'abscisses 1 et  $x$  (Figure 3).



On pourrait alors insérer  $m$  moyennes proportionnelles entre 1 et  $k$ , c'est-à-dire construire  $x$  tel que  $x^{m+1} = k$ ,  $k$  fixé supérieur à 1 : comme en effet<sup>7</sup>  $L(x) = \frac{1}{m+1}L(k)$ , il suffirait de suivre le procédé illustré par la Figure 4.



Comme pour la quadratrice du cercle, la contradiction est de prétendre résoudre un problème de degré variable  $m + 1$  au moyen d'une courbe de degré  $n$  fixé.



## 1.2 Equation de la cycloïde

Voilà comment il est possible d'expliciter par une équation même les courbes transcendentes; à titre d'exemple, soit  $a$  un arc,  $x$  le sinus verse, nous aurons  $a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-xx}}$ , et si  $y$  est l'ordonnée d'une cycloïde :  $y = \sqrt{2x-xx} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-xx}}$ , équation qui exprime complètement la relation entre l'ordonnée et l'abscisse  $x$ , et dont nous pouvons déduire toutes les propriétés de la cycloïde. Voici de ce fait le calcul analytique étendu aux courbes qu'on avait jusqu'à présent écartées, précisément parce qu'on les croyait capables de s'y plier. (p.138).

Soit  $a$  un arc et  $x$  son “sinus verse”, c’est-à-dire  $1 - \sin a$  dans un cercle de rayon 1. (Figure 5). Le triangle caractéristique, dessiné agrandi, a en réalité pour côtés des segments d’extrémités infiniment voisines, et l’élément d’arc  $da$  est assimilé à un segment de droite infiniment petit porté par la tangente au cercle.

Par similitude du triangle  $OmM$  et du triangle caractéristique de côtés  $da, dx$  et  $dy$  (angles à côtés perpendiculaires) on a :

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{mM} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Par conséquent,  $a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ .

On notera que le signe est laissé de côté, puisque par exemple lorsque  $a$  est élément de  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ,  $a$  et  $x$  varient en sens inverse et que par conséquent  $\frac{da}{dx} = -\frac{1}{2x-x^2}$  et  $a = -\int \frac{dx}{2x-x^2}$ . LEIBNIZ s'en explique dans un article antérieur, *Nova methodus...* (ouvrage de référence p.106 et 108), par des remarques sur ce qu'il appelle les "signes ambigus" : on ne calcule qu'avec des quantités positives, et on "voit" après, sur la figure, s'il faut mettre tel ou tel signe, c'est-à-dire s'il faut les ajouter ou les retrancher. On notera en outre que la formule donne l'arc  $a$  à une constante additive près.

Voici maintenant une dérivation possible de l'équation de la cycloïde donnée par LEIBNIZ. Le cercle générateur (de rayon 1) ayant roulé sur l'axe des  $y$  (horizontal chez LEIBNIZ) d'un arc  $MN = b$  depuis l'origine  $I$  des axes (Figure 6), on obtient un point  $M(y, x)$  de la cycloïde ( $C$ ) tel que  $IN = b$ ,  $y = b - \sin b$  et  $x = Nn = 1 - \cos b$ . En prenant  $a = \frac{\pi}{2} - b$  comme paramètre, les équations qui précèdent deviennent :  $y = \frac{\pi}{2} - a - \cos a$  et  $x = 1 - \sin a$ , le "sinus verse" de  $a$ ; comme  $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{2x - x^2}$ , l'équation de la cycloïde est  $y = \frac{\pi}{2} - a - \sqrt{2x - x^2}$ . Mais dans le cas de la Figure 6,  $a$  et  $x$  varient en sens inverse, donc  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -a$  à une constante additive près, en l'occurrence  $\frac{\pi}{2}$ ; l'équation de la courbe sera donc :  $y = -\sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ .

<sup>7</sup>La propriété des “aires logarithmiques”, à savoir que  $L(ab) = L(a) + L(b)$ , a été découverte par Grégoire de Saint-Vincent et son élève De Sarasa en 1647.



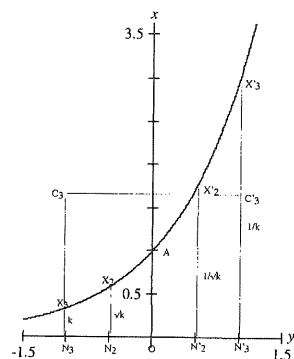


FIGURE 8

Construction point par point de la "courbe logarithmique" et, à partir de celle-ci, de la chaînette.

On porte  $OA = 1$ ,  $ON_3 = 1$ ,  $N_3X_3 = k$ ; prendre  $ON_2 = 1/2$ , et porter  $N_2X_2$ , moyenne proportionnelle entre  $OA$  et  $N_3X_3$ , c'est-à-dire  $N_2X_2 = \sqrt{OA \times N_3X_3} = \sqrt{k}$ . Placer ensuite  $ON'_2 = 1/2$ ,  $ON'_3 = 1$ , puis  $N'_2X'_2$  et  $N'_3X'_3$  tels que  $N_3X_3$ ,  $N_2X_2$ ,  $OA$ ,  $N'_2X'_2$ ,  $N'_3X'_3$  soient en progression géométrique (de raison  $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ). Les points  $X_i$  obtenus relient une progression arithmétique horizontale et une progression géométrique verticale et forment donc une courbe "que j'ai coutume d'appeler logarithmique" (p.194); le processus se continue à l'infini : prendre le milieu  $N_4$  de  $N_3N_2$ , porter  $N_4X_4$  moyenne proportionnelle de  $N_3X_3$  et  $N_2X_2$  etc.

Les points  $C_i$  et  $C'_i$  de la chaînette sont alors construits à partir de la courbe logarithmique en portant  $N_iC_i = N'_iC'_i = (1/2)(N_iX_i + N'_iX'_i)$ , soit en termes actuels  $x = \frac{1}{2}(k^y + k^{-y})$ .

La construction de la courbe logarithmique se comprend bien; mais comment LEIBNIZ a-t-il pu déduire de celle-ci la construction de la chaînette, sachant que son équation est  $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ , comme nous l'avons vu plus haut ? Nous hasarderons la procédure suivante : ayant remarqué

que  $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + 1\right) dx}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$ , qui est de la forme  $du/u$ , on en déduit que  $dy = adu/u$  et que par conséquent, en paraphrasant un passage de l'article *Nova Methodus*... (p.117) : "si les  $y$  sont en progression arithmétique, les  $u$  seront en progression géométrique, et si les  $u$  sont des nombres, les  $y$  seront leurs logarithmes."

A une constante additive près,  $y$  sera donc égal à  $aL(\sqrt{x^2 - a^2} + x)$ ; en prenant  $x = a$  pour  $y = 0$ , nous obtenons la primitive  $y = aL(\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{x}{a})$ . En prenant l'inverse de la quantité située dans la parenthèse et en utilisant son conjugué, on obtient :  $-y = aL(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1})$ , et par suite :  $\frac{x}{a} = \frac{1}{2} [L^{-1}(\frac{y}{a}) + L^{-1}(-\frac{y}{a})]$ , ce qui justifie la construction des points  $C_i$  de la chaînette à partir des points  $X_i$  de la courbe logarithmique.

Voici une déduction, probablement plus proche de la réalité historique, suggérée par Dominique Benard<sup>10</sup> à la suite de cet atelier :

<sup>10</sup>IREM du Mans.

Quant au lien si étroit avec les logarithmes, il peut provenir de l'intégration proprement dite de l'équation qui a pu (a du ?) être faite par LEIBNIZ.

Toutefois cette équation seule, considérée du point de vue de la variation, ne caractérise que la branche croissante de la chaînette. Il y a donc deux équations différentielles "symétriques" :

$$dy = a \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a \frac{dx}{s} \text{ et } dy = a \frac{-dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{dx}{s},$$

considérations que l'on peut raccrocher aux considérations similaires faites par LEIBNIZ à propos de la différentielle d'un quotient dans la "Nova Methodus".

Mieux encore :  $\frac{dx}{s} = \frac{ds}{x} = \frac{dx + ds}{x + s} = \frac{d(x + s)}{x + s} = \frac{-d(x - s)}{x - s}$ .

D'où une intégration commune des deux équations différentielles :

$(y) = a \cdot \int \frac{dx}{s} = a \cdot \text{Log}(x + s)$  pour la branche croissante et  $y = a \cdot \int \frac{-dx}{s} = a \cdot \text{Log}(x - s)$  pour la branche décroissante.

Pour que  $(y) = y = 0$  quand  $x = a$ , un jeu sur la constante d'intégration donne :

$$(y) = a \cdot \text{Log} \left( \frac{x + s}{a} \right) \text{ et } y = a \cdot \text{Log} \left( \frac{x - s}{a} \right).$$

Prendre en compte la remarque de LEIBNIZ sur la possibilité de choisir  $a = OA$  pour unité, cela revient à considérer  $Y = y/a$ ,  $X = x/a$  et  $S = s/a$ , ce qui nous donne :

$$(Y) = \text{Log}(X + S); \quad Y = \text{Log}(X - S), \quad S = \sqrt{x^2 - 1}.$$

$X$  est la moyenne arithmétique de  $X + S$  et  $X - S$ , tandis que l'unité en est bien la moyenne proportionnelle.

D'où la construction à partir de la logarithmique ...

LEIBNIZ est très fier de sa méthode, simple en effet dans le sens où elle ne fait appel qu'à des constructions de moyennes géométriques; en outre, on dispose grâce à elle d'une table "physique" de logarithmes :

"Inversement, si la chaînette est construite physiquement, en suspendant un fil ou une chaîne, nous pouvons grâce à elle établir autant de moyennes proportionnelles que nous souhaitons, et trouver les Logarithmes de nombres, ou les nombres de Logarithmes, donnés." (p.194)

Nous laissons au lecteur le plaisir de déchiffrer cela, et donnons maintenant les preuves de résultats énoncés sans démonstration par LEIBNIZ dans son article.

### 2.3 Tracé de la tangente CT en un point C de la chaînette (p.195)

En posant  $OA = a$ , et en reportant  $OR = OB$ , on a (Figure 9) :

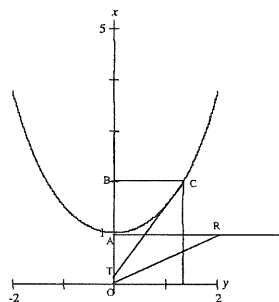


FIGURE 9

$$\frac{CB}{BT} = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{OA}{\sqrt{OB^2 - OA^2}} = \frac{OA}{\sqrt{OR^2 - OA^2}} = \frac{OA}{AR}.$$

Les triangles  $BCT$  et  $AOR$  sont donc semblables, donc l'angle  $AOR$  est égal à l'angle  $BCT$ , ce qui fournit un procédé de construction de la tangente.

#### 2.4 Trouver un segment égal à un arc $AC$ de chaînette (p.196)

On sait que (Figure 9) :

$$s = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{OR^2 - OA^2} = AR.$$

L'arc  $AC$  a donc même longueur que le segment  $AR$ .

#### 2.5 Quadrature du secteur $AONCA$ (p.196)

Cette aire est :

$$\int x dy = \int a \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a\sqrt{x^2 - a^2} = OA \times AR.$$

Le secteur a donc une aire égale à celle du rectangle de côtés  $OA$  et  $AR$ .

#### 2.6 Centre de gravité de la portion de courbe $(C)AC$ (p.196)

Soit  $(C)$  le symétrique de  $C$  par rapport au point  $B$  (Figure 9); le centre de gravité de la portion de courbe envisagée à une ordonnée nulle, et son abscisse est donnée par  $\frac{1}{s} \int x ds$ .

Mais :

$$\begin{aligned} \int x ds &= \int x \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int x \sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \left( \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) dx = \int s dx + ay \end{aligned}$$

Mais  $\int s dx = sx - \int x ds$  (Figure 10), d'où  $\int x ds = sx - \int x ds + ay$  soit :  $\int x ds = \frac{1}{2}(sx + ay)$ . L'abscisse du centre de gravité est donc :  $\frac{\int x ds}{s} = \frac{1}{2} \left( x + \frac{ay}{s} \right) = \frac{1}{2} \left( OB + \frac{OA \times BC}{AR} \right)$ . Cette dernière formule correspond à la construction indiquée par LEIBNIZ.

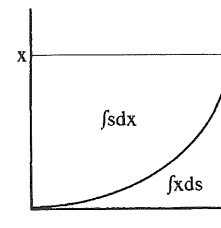


FIGURE 10 :  $\int x ds + \int s dx = sx$

On a donc vu comment, sur les deux exemples de la cycloïde et de la chaînette, les courbes transcendentes se traitent avec une grande facilité à condition d'admettre une nouvelle forme des équations, la forme différentielle, et un nouveau calcul, le calcul différentiel. Il n'y a donc plus aucune raison de les exclure de la géométrie : le Descartes de la *Géométrie* est vaincu.