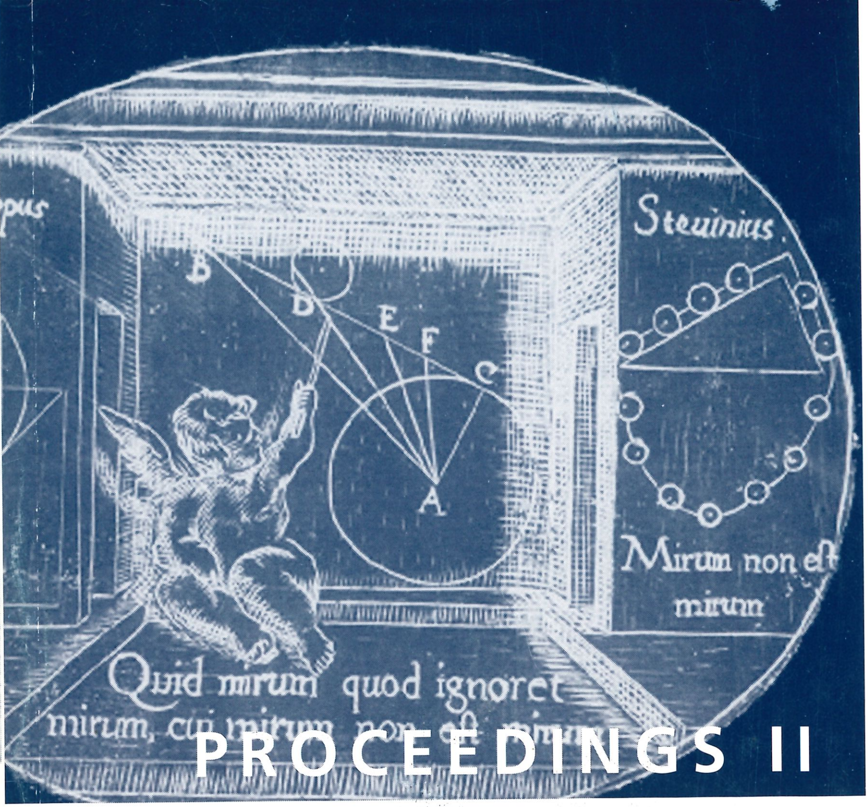


PROCEEDINGS II

Troisième université d'été européenne
Derde europese zomeruniversiteit
Third european summer university

Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique

«De la maternelle à l'université»

Geschiedenis en Epistemologie in de Wiskundedidactiek

«Van de kleuterschool tot de universiteit»

History and Epistemology in mathematical Education

«From play school to university»

UCL Université catholique de Louvain
KULeuven Katholieke Universiteit Leuven
LOUVAIN-LA-NEUVE (15/07/1999 - 18/07/1999)
LEUVEN (18/07/1999 - 21/07/1999)

BELGIQUE
BELGIË
BELGIUM

1999

Third european summer university
Troisième université d'été européenne
Derde europese zomeruniversiteit

PROCEEDINGS
Volume II

Editeur : PATRICIA RADELET-DE GRAVE
avec la collaboration de C. BRICHARD

Organised by
Organisée par
Georganiseerd door

Université catholique de Louvain (UCL) – Katholieke universiteit Leuven (K.U.Leuven)

with the collaboration of
avec la collaboration
met de collaboratie van

Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix (FUNDP)
Facultés universitaires de Saint-Louis (FUSL)
Katholieke Hoogschool Limburg (KHL)
Université Libre de Bruxelles (ULB)
Université de Liège (ULg)
Université de Mons-Hainaut (UMH)
Universiteit Gent (RUG)
Vrije Universiteit Brussel (VUB)

Supported by
Sous le Patronnage
met de steun

- de l'Union internationale d'Histoire et de Philosophie des Sciences;
- the Commission inter Union for History of Mathematics;
- the Commission on Teaching of the History of Science;
- du Comité national belge de logique, d'histoire et de philosophie;
- van het Ministerie van de Vlaamse Gemmenschap, Departement Onderwijs;
- du Fonds national de la Recherche scientifique;
- the FWO Research Network WO.011.96N;
- de l'UCL, Faculté des Sciences (COSIF);
- van de K.U.Leuven, Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Faculteit Wetenschappen, Departement Wiskunde, AVL, Vliebergh-Sencie Centrum;
- Formation en cours de carrière enseignement non confessionnel;
- du Ministère de la Communauté française, Enseignement et Recherche scientifique;
- du Ministère de l'Éducation Nationale (France);
- du Rectorat de l'Académie de Lille (France);
- ADHEREM (Association pour le Développement des Recherches en Histoire et Épistémologie des Mathématiques);

Table des Matières -- Table of Contents -- Inhoud

ATELIERS / WORKSHOPS / WERKGROEPEN

Ateliers
Workshops
Werkgroepen

The study of Nicomedes' Conchoid and Descartes' Folium, according to the Portuguese mathematician Francisco Gomes Teixeira in his *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*

ALVES, Maria da Graça Universidade Portucalense
ESTRADA, Maria Fernanda Universidade do Minho
CORREIA de Sá, Carlos Universidade do Porto
(Portugal)

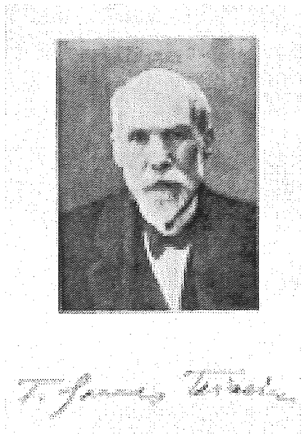
Abstract

One of the most interesting works of the Portuguese mathematician FRANCISCO GOMES TEIXEIRA (1851-1933) is the *Traité des Courbes Spéciales Planes et Gauches*.

This author analyses a great number of curves and gives, for each of them a detailed mathematical treatment that includes historical data with reference to original sources, as well as his personal contributions. As examples, we shall present the study of Nicomedes' conchoid and of Descartes' folium. For each one of these curves, we shall give:

- a brief historical summary;
- copies of texts by GOMES TEIXEIRA and by other authors whom he quotes;
- a work sheet inviting participants to collaborate, which will include some of the problems and challenges historically related with the curve.

Finally, the resolution of those problems will be presented in *data-show*.



1 The Portuguese mathematician FRANCISCO GOMES TEIXEIRA

1851-1933

1.1 Brief biographical details

FRANCISCO GOMES TEIXEIRA graduated from the University of Coimbra in 1875, and submitted a thesis on *Integração das equações às derivadas parciais da* 2^a *ordem* [Integration of Second Order Partial Differential Equations] for his doctorate.

While still a student in his third year, he submitted and published his first work, entitled *Desenvolvimento das funções em fracção contínua* [Expansion of Functions into Fractions Continuous], and in his fourth year he published the article *Aplicação das fracções contínuas à determinação das raizes das equações* [Application of Continuous Fractions to the Determination of Roots of Equations], which he submitted to the Academia das Ciências de Lisboa [Lisbon Academy of Science].

His dissertation for his application for a post at the Faculty was entitled *Sôbre o emprego dos eixos coordenados na mecânica analítica* [On the Use of Co-ordinate Axes in Analytical Mechanics], showing that

> ... Poinsot se enganara ao afirmar que, contrariamente à suposição de Lagrange, tais coordenadas são impróprias para a resolução dos problemas da Mecânica por meio do princípio do trabalho virtual. (Beires, 1950-1951, p. 11)
>
> [... Poinsot was mistaken in stating that, contrary to Lagrange's supposition, such coordinates are unsuitable for resolving problems of mechanics by means of the principle of virtual work].

That same year he was appointed substitute Professor of the Faculty of Science of the University of Coimbra, and he remained a Professor of that institution until he was appointed director of the Escola Politécnica do Porto [Porto Polytechnic] in 1883. There he took over the course of Differential and Integral Calculus, which he continued to teach throughout his time as a teacher.

In 1911 the University of Porto was founded, and GOMES TEIXEIRA was elected and designated as its first Rector. In 1918 he was proposed as, and became, honorary Rector. Although, in 1921, he had reached the legal age limit for the exercise of a public office, the Academia do Porto arranged a tribute at the University to bring him back to control of the course he had always taught.

GOMES TEIXEIRA was professor *honoris causa* of the Universidad Central de Madrid (1922) and the Université de Toulouse (1923). He took part in various international conferences: Boston, Caen, Besançon, Toronto, Zurich, Salamanca, Porto, Cambridge, Seville, Bilbao, etc.

His prestige was internationally recognised as he was a member of many institutions, among which, for their geographical diversity, let us quote: Madrid Royal Academy of Sciences, Lisbon Royal Academy of Sciences, Circolo Matematico da Palermo, Prague Academy of Sciences, Barcelona Royal Academy of Sciences and Arts, Liège Royal Society of Sciences, Krakow Mathematical Society, Lima Faculty of Sciences, Moscow Mathematical Society.

He belonged to the *Commission Internationale de l'Enseignement mathématique*, the *Comité Permanent International du Répertoire Bibliographique des Sciences Mathématiques* [Permanent International Committee for the Bibliographical Repertoire of Mathematical Sciences], the International Catalogue of Scientific Literature, and, from its foundation, the *Comité de

Patronage de l'Enseignement Mathématique [Committee for the Patronage of the Teaching of Mathematics.

At the invitation of the organisers he was part of several international committees as a tribute to Lobatschewski, Lavoisier, Hermite, Mittag-Leffler, Descartes, Battaglini, etc.

Owing to his prestige as a man connected with teaching, GOMES TEIXEIRA held government positions connected to education: he was a member of the *Conselho Superior de Instrução Pública* [Higher Council for Public Instruction] and a Member of the *Junta Orientadora dos Estudos* [Studies Orientation Group].

1.2 The work of GOMES TEIXEIRA

Due to historical and social reasons it was during a period of weak scientific development, hardly favourable to research work, that GOMES TEIXEIRA began his career as a teacher and as a mathematician.

As a consequence of so little scientific production, the teaching of pure Mathematics in Portugal was carried out with the aid of compendia which, apart from rare exceptions, were translations of foreign books, essentially French ones, sometimes expanded and annotated.

Aware of the problems that this situation involved, GOMES TEIXEIRA published two books on Analysis in the Portuguese language, *Curso de Analyse Infinitesimal – Cálculo Diferencial* [Course in Infinitesimal Analysis – Differential Calculus] (1887) and *Curso de Analyse Infinitesimal – Cálculo Integral* [Course in Infinitesimal Analysis – Integral Calculus] (1889), whose contents dealt with the most up to date work of the time. These works were innovative and groundbreaking, as they contributed greatly to informing Portuguese mathematicians of the new currents in the Mathematical Analysis of the time. They also had the merit of introducing the precision of principle, the strictness of deduction and the amplitude of results already obtained in Europe into the teaching in Portuguese higher education institutions.

Study of his correspondence –more than 2 000 letters received from scientists in Europe, South America, Canada, Japan and the United States– shows that the work in question was not only noted in Portugal, as many foreign mathematicians gave him great praise, either personally or in scientific journals.

GOMES TEIXEIRA received two prizes for publications on Analysis: in 1888 in Portugal, he won the D. Luiz I prize for the book, *Curso de Analyse Infinitesimal – Calculo Diferencial*; in 1895, the memoir *Sobre o desenvolvimento das funções em série* [On the Expansion of Functions in Series] was submitted to the open competition organised by the Academia Real de sciencias exactas, physicas e anturaes de Madrid, winning a prize in 1897, and being published later. According to Vilhena

> O prémio era pecuniário e com diploma e medalha (1936, p. 125)
> [The prize was money, with a diploma and a medal]

but as it had been written in Portuguese, and as it was a condition that the languages adopted were Castilian or Latin, he was not awarded the medal.

In 1896 the Madrid Royal Academy of Sciences set the competition:

> Catálogo ordenado de todas las curvas de cualquier clase que han recibido nombre especial, acompañhado de una idea sucinta de la forma, ecuaciones y propriedades generales de cada una, con noticia, de los libros ó autores que primeramente las han dado à conocer. (TEIXEIRA, 1905, p. V)

[An ordered catalogue of all the curves of any class which have received a special name, accompanied by a succinct idea of the shape, equations and general properties of each, with notification of the books or authors who first made them known]

GOMES TEIXEIRA then produced a noticeable work entitled *Tratado de las curvas notables* [Treatment of the Noticeable Curves], written in Castilian, which was awarded a prize by the aforementioned academy, *ex aequo* with the Italian Gino Loria. The treatment was revised, enlarged and translated into French by the author, with the title *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, for which he was awarded the Binoux prize of the Paris Academy of Sciences in 1917. In the report on GOMES TEIXEIRA's work for this prize, Appell wrote:

> ... Sans doute des monographies de courbes de certaines espèces ou même des travaux plus complets ont été publiés à diverses époques... Mais il manquait un Ouvrage systématique et complet formant un catalogue ordonné de toutes les courbes remarquables, indiquant leurs équations et leurs propriétés essentielles, avec une Notice bibliographique des auteurs qui les ont étudiées. C'est cet Ouvrage qu'a composé le professeur F. Gomes Teixeira,... L'œuvre de M. Teixeira constitue également une histoire des Mathématiques envisagée sous un point de vue spécial. On trouve en effet, en étudiant les diverses courbes qui se sont introduites en Géométrie, l'illustration des progrès de la Géométrie pure, de la Géométrie analytique, de l'Analyse infinitésimale, de l'Algèbre et de la théorie des invariants et covariants, de la théorie moderne des fonctions, de la Mécanique, de la Physique et de l'Astronomie... En dressant un catalogue raisonné de ces courbes, en donnant leur histoire dans un important ouvrage, M. F. Gomes Teixeira a rendu à la Science un grand service, que la Commission propose de reconnaître en lui décernant le prix Binoux. (1918, pp. 126-128)
>
> [Without a doubt, at various times monographs on curves of certain kinds or even more complete works have been published... But what was missing was a systematic and complete Work, forming an ordered catalogue of all the noticeable curves, showing their equations and essential properties, with a bibliographical note on the authors who studied them. This is the Work that Professor F. Gomes Teixeira has composed,... The work of M. Teixeira is also a history of Mathematics, considered from a special point of view. As a matter of fact in studying the various curves which are introduced in Geometry, one finds the illustration of the progressions in Pure Geometry, Analytical Geometry, Infinitesimal Analysis, Algebra and in the theory of invariants and covariants, modern theory of functions, Mechanics, Physics and Astronomy... In establishing a rational catalogue of these curves, in supplying their history in an important work, M. F. Gomes Teixeira has done a great service to Science, which the Committee proposes to recognise by awarding him the "Binoux" prize.]

The "*Traité* ..." was re-published in French in the United States in 1971 by the publisher Chelsea, and the French publisher Editions Jacques Gabay made a new edition in 1995, after a favourable opinion from many mathematicians and with an extremely positive review published in the French journal *Bulletin de l'APMEP*, n° 318, April-May 1995.

In 1902 the Portuguese government decided to publish all of GOMES TEIXEIRA's works, which were compiled in seven volumes with the title *Obras sobre Mathematica* [Works on Mathematics]. To illustrate how these works were appreciated, I quote the French mathematician M. Appell, who, in a report on GOMES TEIXEIRA at the time of the Bidoux prize already mentioned, among many other eulogies said:

> ... Il nous est impossible de donner une analyse de la substance si riche des sept volumes.... (1918, pp. 126-128)
>
> [It is impossible for us to provide an analysis of the so-rich substance of its seven volumes...].

GOMES TEIXEIRA was also a historian; besides the many accurate historical quotes that he included in his works, and several articles that he wrote on Portuguese mathematics, at the end of his career, compiling and broadening his studies, he wrote the book *História das Matemáticas em Portugal* [History of Mathematics in Portugal]. However, he died in 1933 without completing it. It was revised and published after his death by Scipião de Carvalho in 1934. This work contains the lessons he gave from 12 to 19 April 1932, less than one year before his death.

The scientific writings of GOMES TEIXEIRA have a didactic charm inasmuch as they are accurate but clear, even when dealing with topics of great scientific difficulty. Reflecting concern about the teaching of Mathematics, in 1926 he published the book *Manual de Cálculo Diferencial* [Manual of Differential Calculus] in which, in "Advertência" [Notice] one can read:

> Èste volume contem a doutrina essencial para um primeiro estudo do Cálculo Diferencial a fazer nas cadeiras de Análise das faculdades de sciências [...] A êste volume seguir-se há por ventura outro do mesmo género, contendo os elementos do Cálculo integral. (TEIXEIRA, 1926)
>
> [This volume contains the essential doctrine for a first study of differential calculus to be done in the courses of Analysis at the faculties of sciences [...] This volume will be followed by another of the same kind, containing the elements of integral calculus].

Unfortunately, this prediction of the author was never realised, as only the first volume was published, and was not widely distributed.

But GOMES TEIXEIRA had a polyvalent side, and was not only interested in the study and teaching of pure mathematics. He was a traveller and a mountain climber, and in 1926 he published the book *Santuários de Montanha* [Mountain Sanctuaries] in which he told of his trips. In this work GOMES TEIXEIRA gives his opinion on the education of young people, arguing that

> ... uma sociedade bem organizada deve dar à juventude perfeita educação moral, uma boa educação física e uma esmarada educação intelectual [...] Não basta preparar homens que saibam trabalhar bem; é necessário dar-lhes o vigor necessário para o poderem fazer.... (TEIXEIRA, 1926, pp. 23-24)
>
> [... a well organised society should give its youth a perfect moral education, a good physical education and an ideal intellectual education [...] It is not enough to prepare men who know how to work well; it is necessary to give them the strength needed for them to be able to do it...].

In the last years of his life, in parallel with the publication of historical and scientific material, he also dedicated himself to writing on religious themes: *Apoteose de S. Francisco de Assis* [Apotheosis of St. Francis of Assisi] (1928) *Uma santa e uma sábia* [A saint and a sage] (1930) and *Santo António de Lisboa* [St. Anthony of Lisbon] (1931).

1.3 Opening to the international scientific community: the contribution of GOMES TEIXEIRA

In the historic eulogy he made to the Portuguese mathematician Daniel da Silva, GOMES TEIXEIRA states:

> Nada há de mais prejudicial para a sciência de um povo do que o seu isolomento no meio da sciência dos outros. Este isolamento foi quási completo em Portugal na maior parte do século XIX, e o

motivo principal estava no desconhecimento da nossa língua nos meios scientíficos estranjeiros [. . .] As nossas revistas eram pouco lidas lá fora e os nossos sábios não recorriam às revistas mais vulgarizadas dos grandes países para apresentar os resultados das suas investigações. (TEIXEIRA, 1920, p. 6)

[There is nothing more harmful to the science of a people than their isolation in the midst of the science of others. This isolation was almost complete in Portugal in the greater part of the 19th century, and the main reason is the lack of knowledge of our language in foreign scientific environments [. . .] Our journals are little read outside this country and our scholars do not turn to the most popular journals of the large countries to present the results of their research].

These words of GOMES TEIXEIRA show how aware he was of the difficulties of communication between the Portuguese scientific community and the rest of the world owing to the language problem. So, he published his articles in various international mathematics journals, writing in French, Italian, Castilian and English.

GOMES TEIXEIRA was also the founder of the first Portuguese journal of mathematics, the *Jornal de Ciências matemáticas e astronómicas* [Journal of Mathematical and Astronomical Science], which was published from 1877 to 1904. While it was initially a journal aimed at a public covering those who were in some way connected with mathematics or its teaching, it quickly became a journal dedicated to mathematical research, with a view to making known in Portugal the most recent advances in the world. Mathematicians of international reputation, including Hermite, Bellavitis, Birger Hansted, Maurice d'Ocagne, Cesàro, Lerch, Gino Loria, Loriga, and Pirondini, therefore worked with the magazine, contributing research articles. To continue this policy, in 1905, GOMES TEIXEIRA started publishing the journal *Annaes Scientíficos da Academia Polytechnica do Porto* [Scientific Annals of the Porto Polytechnic Academy].

With his view of openness to the world, many articles, which related deep, precise and long research, were published in the most prestigious journals of the time, such as, *Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von Crelle; Bulletin des Sciences mathématiques; Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville; Bulletin de la Société Mathématique de France; Mathesis; Intermédiaire des Mathématiciens; Reale Accademia dei Lincei; Nouvelles Annales de Mathématiques; Acta Mathematica; Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris; L'Enseignement mathématique; Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.*

2 Traité des Courbes Remarquables Planes et Gauches

GOMES TEIXEIRA's work *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches* is included in volumes IV, V and VII of the Complete Works of GOMES TEIXEIRA. In 1907, in volume IV, in the preface to the first two volumes mentioned, the author wrote:

Le présent ouvrage est la traduction, avec plusieurs additions, d'un travail intitulé: *Tratado de las curvas especiales notables*, que l'Académie des Sciences de Madrid nous a fait l'honneur de couronner en 1899 et de publier en langue espagnole plus tard dans le tome XXII de ses *Mémoires*. Ce travail, qui répondait en même temps au programme proposé par cette Académie et à un programme proposé par M. Haton de La Goupillière dans le tome I de l'*Intermédiaire des mathématiciens*, a mérité l'approbation de cet éminent savant, et nous en publions, vivement encouragés par lui-même, cette traduction française. (1908, p. VII)

[This work is the translation, with some additions, of a work entitled: *Tratado de las curvas especiales notables*, which the Madrid Academy of Science did us the honour of awarding a prize in 1899 and later publishing in the Spanish language, in Volume XXII of its *Mémoires*. This work, which at the same time responded to the programme proposed by that Academy and to a programme proposed by M. Haton de la Goupillière in Volume I of L'*Intermédiaire des mathématiciens*, earned the approval of this eminent scholar, and we publish this French translation enthusiastically encouraged by him].

Still in the same preface, GOMES TEIXEIRA explains the structure of volumes IV and V:

. . . nous étudions la forme, la construction, la rectification et la quadrature, les propriétés et l'histoire de chaque courbe; nous considérons les relations de chaque courbe avec les autres; nous indiquons les problèmes où les courbes étudiées apparaissent; etc. Les auteurs de chaque question considérée sont mentionnés, quand cela nous a été possible [. . .] Cet ouvrage sera composé de deux volumes. Le premier est consacré aux courbes algébriques planes, à degré déterminé, de plus grand interêt. Dans l'autre seront envisagées de nombreuses courbes trancendantes planes, quelques classes de courbes planes et quelques courbes gauches plus remarquables. Dans la partie du deuxième volume consacré à l'étude de diverses classes de courbes planes, nous serons naturellement menés à envisager encore quelques courbes algébriques planes à degré déterminé qui en sont des cas particuliers. (1908, p. VII)

[. . . we study the shape, the construction, the rectification and the quadrature, the properties and the history of each curve; we consider the relationships of each curve to the others; we show the problems where the curves studied appear; the authors of each question are mentioned whenever this is possible [. . .] This work will be composed of two volumes. The first is dedicated to the algebraic plane curves, with a determined degree, of most interest. The other will consider the numerous plane transcendent curves, some classes of plane curves and some of the most noticeable skew curves. In the part of the second volume devoted to the various classes of plane curves, we will naturally be led to consider again some algebraic plane curves, with a determined degree, which constitute a particular case].

In this work GOMES TEIXEIRA. studies more than 150 curves, some of which, dealt with in the first volume, are taken up again in the second. Some examples are the Astroid, Cappa's Curve, Talbot's Curve, Watt's Curve, Circular Cubics, Planar Cubics, the Piriform Quartic, Agnesi's witch, etc.

Although the two volumes cited are, alone and together, a noticeable work of scientific and historical gathering, with important personal contributions, the author, in his constant and rigorous research and anxiety for knowledge, went still further and wrote Volume VII, which contains a supplement to Volumes IV and V.

In the preface to Volume VII, the author defines the goals of the work:

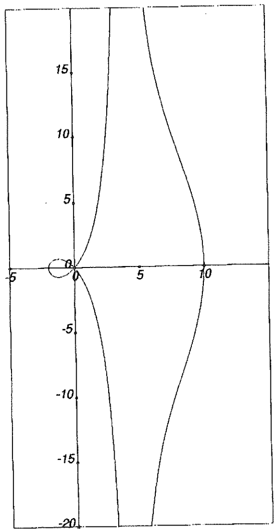
Nous revenons sur quelques-unes des courbes considérées dans cet ouvrage, pour ajouter de nouveaux développements à leur théorie, histoire et bibliographie, et nous exposons les théories de bien d'autres courbes remarquables qui n'ont pas été envisagés dans les volumes précédents. Parmi les pièces qui forment ce volume, on trouve les reproductions de quelques travaux sur les courbes spéciales que nous avons insérés en divers recueils scientifiques après la publication de l'ouvrage mentioné. (1915, p. VII)

[We return to some of the curves considered in this work, to add new developments to their theory, history and bibliography, and we explain the theories of many other noticeable curves which were not considered in preceding volumes. Among the pieces which make up this work are the reproductions of some works on spatial curves which we inserted in various compilations after publication of the work referred to].

There follows a list of works that show that GOMES TEIXEIRA constantly kept up to date with what he was writing about at the time.

But the author went even further, and added an Appendix dedicated to the famous problems of Geometry that cannot be solved with ruler and compass, whose solutions are found through various curves, focusing on the history of those problems which is closely linked to these curves. The author deals with the problems of duplication of the cube, trisecting the angle, and quadrature of the circle, giving a clear and complete exposition of the various solutions and methods related to each problem.

3 Nicomedes' Conchoid



3.1 Gomes Teixeira's approach to the conchoid

GOMES TEIXEIRA starts his study of Nicomedes' conchoid from the polar equation of the curve,

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + h,$$

and deduces from it the cartesian equation

$$y^2 = \frac{x^2(h+a-x)(h-a+x)}{(x-a)^2}.$$

This, however, might not be adequate to pupils not yet familiar with polar coordinates, and so we present a direct deduction of the cartesian equation, involving only the proportionality of the

sides of similar triangles. In order to simplify some computations, we have introduced a line segment z such that $h^2 = z^2 + (x-a)^2$. In doing so, we were inspired by Isaac Newton's determination of the tangents to the conchoid in his *Treatise of the Method of Fluxions and Infinite Series*, which GOMES TEIXEIRA does not cite (NEWTON 1966, 51). We have interchanged the position of the coordinate axes of Newton's text, though, in order to obtain the equation in a form closer to the one in GOMES TEIXEIRA's treatise.

After establishing the polar and cartesian equations, GOMES TEIXEIRA proceeds with a detailed study of the conchoid, covering topics such as the points at infinity, normals, curvature and the points of inflexion, quadrature and volumes of solids of revolution generated by the curve. He then turns to the history of the conchoid, giving references that go from Antiquity up to Johann Bernoulli and Roger Cotes. Finally, he gives a detailed account of the use of the conchoid for the *neusis* construction of the solutions of the famous problems of the *angle trisection* and of the *cube duplication*.

3.2 The methodology for the workshop

In this workshop we rely extensively on texts that are not refered to by GOMES TEIXEIRA, but all the classroom material presented in the workshop is the result of the study of his *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*. It was the reading of this treatise that inspired us not only to follow his clues and check his references, but also to look for other historical sources which he does not mention.

In this workshop, an analysis of the problem always precedes the corresponding synthesis. The former is sometimes provided (much in the way it could be done on the blackboard by the teacher) and at other times is asked for in a work-sheet; the latter is either included in a historical text of mathematics (the reading of which may be proposed to the class), or takes the form of a work-sheet, or both. By means of these few combinations we hope to call the teachers' attention to the great variety of possible strategies for the use of historical problems from Antiquity in the teaching of mathematics.

Although our source of inspiration for this part of the workshop was the reading of GOMES TEIXEIRA's treatment of the conchoid, our option was not to maintain the lettering of his diagrams. It was important to unify the notation in the related documents, and we have tried to keep closer to the original historical texts.

We deal with the trisection of the angle first, for the related constructions are much simpler than those of the cube duplication. This leads to the concept of *neusis* constructions and to the manipulation of a model of Nicomedes's trammel for the drawing of conchoids. We then take a look at the duplication of the cube.

3.3 The trisection of the angle

We start with a construction for the angle trisector presented by Pappus of Alexandria as proposition 32 of the fourth book of the *Mathematical Collection*. We introduce the construction by an analysis meant to prepare for the synthetic proof that follows; it is essentially the analysis in Heath (1981).

The synthesis that corresponds to this analysis is presented in two ways. The first one consists of the reading of an excerpt of Pappus' *Mathematical Collection*, where the synthetic treatment is provided.[1] An alternative to the reading of Pappus' text is the presentation of a work-sheet with the same synthesis.

3.4 Neusis constructions and the conchoid

The construction given by Pappus presuposes the insertion of a line segment of given length between two lines, in such a way that a given point lay on the segment produced. This is called *neusis* constructions.

An interesting question is whether such a construction is always reducible to a construction with ruler and compass, or not. The issue is not the object of any classroom material presented in this workshop, but the following short comment may be appropriate. The first known historical instance of a neusis construction dates from the fifth century B.C. (the construction of the third lunule of Hippocrates of Chios) and may indeed be carried out with ruler and compass alone, for it is the equivalent of applying a rectangle with a given area to a given line segment and exceeding by a square[2], which is a particular case of Euclid's.[3] In general, however, neusis constructions are not reduceable to ruler and compass constructions. Pappus proves that they may always be carried out through the intersection of a circle and a hyperbola (proposition 31 of the *Mathematical Collection* **IV**).

The extremities of the sought line segment are not always necessarily on two straight lines; they may be required to lie on two given curves. A neusis between a line and a circle is used by Archimedes to trisect the angle (proposition 8 of the *Book of Lemmas*). Besides, there are still other uses of the word *neusis* to describe more complex geometric constructions, in the ancient mathematical literature: usually the determination of a line segment, with a given point on its extension, and with a certain geometrical property other than having a given length. A famous instance may be found in Archimedes's construction of the regular heptagon.[4] Another one occurs in the Heronian construction of the two mean proportionals, mentioned below.

The simpler sort of neusis constructions (as defined at the beginning of this section) is suggestive of how the conchoid may have been discovered by ancient geometers and also of how it may be conceived by nowadays learners. Several ancient commentators relate Nicomedes (third and second centuries B.C.) to the invention of the conchoid. The most important of them are Pappus of Alexandria, Proclus of Lycia and Eutocius of Ascalon.

In book IV of the *Mathematical Collection*, Pappus gives the definition of the conchoid and states, without proof, some of its properties established by Nicomedes. Next, he explains how the conchoid may be used to effect a neusis construction (of the sort in which the line nearest to the given point is a *straight* line). Finally, Pappus presents Nicomedes' solution for the problem of the cube duplication.[5]

In his comment to Euclid's proposition concerning the bisection of a given rectilinear angle[6], Proclus links the discovery of the conchoid to the problem of the angle trisection.[7]

[1]VER EECKE 1982, **1**, 212-214.
[2]HEATH 1981, 1, 195-196
[3]*Elements* VI, 29.
[4]DIJKSTERHUIS 1987, 414-416.
[5]VER EECKE 1982, **1**, 185-190.
[6]*Elements* I, 9
[7]VER EECKE 1948, 233-234.

Eutocius collected an impressive amount of solutions of the Delian problem (the duplication of the cube, or its equivalent form of the finding of two mean proportionals to a line segment and its double) in his *Commentaries to Archimedes' treatise On the Sphere and the Cylinder*. Concerning the conchoid, he conveys information much on the line of Pappus, but often in greater detail. He tells about a book of Nicomedes called *On conchoid Lines*, in which the author defined the curve and described a trammel to draw it; Eutocius gives Nicomedes' deduction of two properties of the conchoid (those mentioned without proof by Pappus) and, like Pappus, presents the neusis construction by means of which Nicomedes duplicated the cube.[8]

Nicomedes' work *On conchoid Lines* is now lost, but both book IV of Pappus' *Mathematical Collection* and Eutocius' *Commentaries to Archimedes* may provide very interesting excerpts to be used in class, with the definition of the conchoid. We also use a model of the trammel described by Eutocius.[9] Exercises may be proposed to the effect of understanding how Nicomedes' curve is instrumental in obtaining the neusis construction implied in the angle trisection studied before. A word of caution may be appropriate, though: each angle amplitude requires a different conchoid. One may choose either the distance from the pole to the basis or the fixed length inserted between the basis and the curve according to the particular trammel at one's disposal, but then the other one will turn out too long or too short, except for one particular amplitude of the angle to be trisected. In other words, the given problem may easily adjust to one of the two parameters of a conchoid, but not to both.

3.5 The duplication of the cube

Before seeing how Nicomedes is reported by Pappus and by Eutocius to have used the conchoid in order to solve the problem of cube duplication, it is perhaps advisable to make two easy technical remarks. The first one concerns the equivalence of this problem to the one of finding two mean proportionals between a given line segment and its double, a fact accounted for in most history books on ancient mathematics, for example Heath (1981).

The second remark concerns proposition II, 6 of Euclid's *Elements*, which is used a few times in the rest of the workshop and should be reminded as a preliminary result.[10]

W.R. Knorr has shown that Nicomedes' procedure for the cube duplication transmitted by Pappus and Eutocius is an elaboration (and a simplification) of the solution given in the *Mechanics* and the *Belopoeica* of Heron of Alexandria; an analysis based on Heron's solution leads in a straightforward way to the synthesis attributed to Nicomedes by Pappus and Eutocius.[11] The classroom material presented in the workshop is directly inspired by Knorr's historical reconstruction.

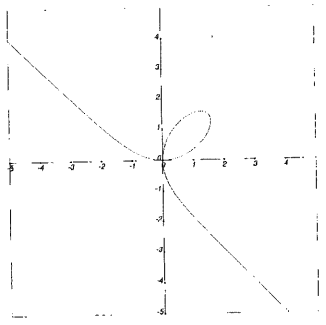
We start with an analysis for Heron's duplication of the cube. Once the pupils have been guided through such an analysis, we expect them to be able to reverse the argument and thus provide the synthesis. As before, however, we propose an alternative which we believe to be instructive: the reading of a historical excerpt that contains the synthesis, the interpretation of which being made simpler by the previous activity. This text is based on Eutocius' transcription of Heron's *Mechanics* and *Belopoeica*, in his commentaries to Archimedes[12]; however, we have reversed

[8]VER EECKE 1960, 2, 615-620.
[9]VER EECKE 1960, **2**, 615.
[10]HEATH 1956, **1**, 385.
[11]KNORR 1986, 225-226.
[12]VER EECKE 1960, **2**, 590-592

the diagram and changed the lettering of Eutocius' original, so that it conforms to the discussion above and to the next task on Nicomedes' method of cube duplication.

The construction involved in the Heronean solution is in itself a non-trivial problem. The best approach is by means of an analysis suggestive of the Nicomedean solution for the problem of the duplication of the cube. Once again, we provide the synthesis by means of an excerpt of Eutocius' *Commentaries* to Archimedes.[13]

4 Descartes' Folium



4.1 Forward

In this concise presentation of Descartes' folium, I must say that our main source is the text of GOMES TEIXEIRA on this curve, taken from the *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches*.[14]

All his references are given with accuracy as we could check, and some other references we give are related with the GOMES TEIXEIRA text.

Besides, we do not refer to all the points studied by GOMES TEIXEIRA, but only to some of them.

4.2 Definition and graphic; analytic equation

In 1637, the same year when *La Géometrie* of Descartes was firstly published, Fermat wrote a manuscript *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* (Method of finding Maxima and Minima). (Méthodes pour trouver les Maxima et les Minima) (FERMAT, Œuvres, 3).

It was as an appendix to that method that he gave his own method of finding tangents. Explicitly he wrote: "La théorie des tangentes est une suite de la méthode [...]"
(The theory of tangents is a continuation of the method [...]).

Apparently, Descartes did not interpret it well and he thought that it could not be universally applied, as Fermat claimed. So, Descartes, as a challenge to Fermat, in a letter to Mersenne of January 1638[15], wrote that Fermat's method could not be applied to the curve that he defined

[13]VER EECKE 1960, **2**, 618-620.
[14]TEIXEIRA, Obras, IV, 85-91.
[15]DESCARTES, Œuvres, I, 490

as:

> La ligne courbe BDN que je suppose être telle, qu'en quelque lieu de sa circonférence qu'on prenne le point B, ayant tiré la perpendiculaire BC, les deux cubes des deux lignes BC & CD soient ensemble esgaux au parallelepipede des deux mêsmes lignes BC&CD& de la ligne donnée P. [...]
> Car elle [la méthode de Fermat] ne se peut appliquer, ny a cet exemple, ny aux autres qui sont plus difficiles [...]

> (The curve line BDN that I assume such that, taking any point B and taking the perpendicular BC, the sum of the two cubes of the lines BC&CD equals the parallelipiped on BC&CD& other given line P. Because it is not possible to apply Fermat's method not only to this but also to others still more difficult).

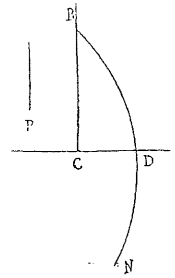


Fig.III.1

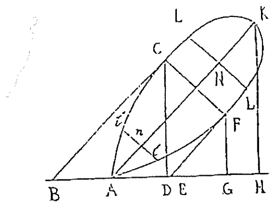


Fig.III.2

The drawing annexed by Descartes to his definition is, obsviously, not correct (Fig. III.1).

The first to consider the form of the curve was Roberval, that gave it the name of "galand" or "nœud de ruban", ("ribbon knot"). He also called it "fleur de jasmin", ("jasmine flower"). However in another letter to Mersenne, dated 23rd August 1638,[16] Descartes gives the correct drawing of the part of the curve situated in the first quadrant (Fig.III.2). We may wonder the reasons for this incompleted graphic. Descartes also writes the analytic equation of the folium, assuming that n is the length of the given line $P: x^3 + y^3 = xyn$.

According to GOMES TEIXEIRA, the first to give the correct drawing of the folium was Huygens[17], in 1692, (Fig.III.3), which we may compare with the modern graphic that can be easily drawn.

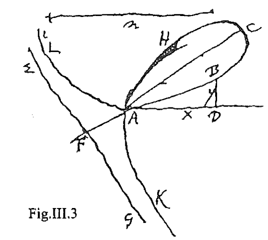


Fig.III.3

[16]DESCARTES, Œuvres, II, 313
[17]Œuvres, X, 351-352

4.3 The tangents

According to GOMES TEIXEIRA, the tangents to the folium, with an inclination of 45° on the x-axis were firstly determined by Descartes himself, in the same letter of 23$^{\text{rd}}$ August 1638. Afterwards, they were also determined by Fermat in a letter to Mersenne of 22$^{\text{nd}}$ October 1638[18], Sluse in a letter to Huygens in 1662[19] and by Barrow in his *Lectiones geometricae*, lesson X.

All the references given so accurately by GOMES TEIXEIRA challenge us to follow them, reading the original texts and learning how to find the tangents to the folium, specially according to the methods of Descartes and Fermat. We can also check the results, using the tools of the Infinitesimal Calculus and try to comment the statement of Morris Kline: Descartes' method was purely algebraic and did not involve any concept of limit, whereas Fermat's did, if rigorously formulated.[20]

4.4 The Quadrature

In his historical notes on the folium, GOMES TEIXEIRA states that the first to determine the areas of the folium was C. Huygens in a letter to L'Hospital, in 1692.[21] L'Hospital himself also solved the same problem in two letters to Huygens in 1693. Finally, the problem was also solved by Jean Bernoulli, who also determined the complete graphic of the folium in his *Lecciones mathematicæ*.[22]

GOMES TEIXEIRA determined these areas, through the known formulas of the Infinitesimal Calculus, as we are now going to show. He assumes the equation of the folium to be

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0. \tag{1}$$

He starts to remark the symmetry of the curve, in relation to the bisector of the first quadrant. Therefore, GOMES TEIXEIRA takes this axis, as the new x-axis, which corresponds to a rotation of 45° of the plane around the origin. He gives the formulas to do the rotation

$$x = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}};\, y = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

and obtains the new equation of the folium

$$Y^2 = \frac{X^2(3a - \sqrt{2}X)}{3(a + \sqrt{2}X)}. \tag{2}$$

GOMES TEIXEIRA believes that Descartes was the first to have done this kind of transformation in the same letter of the 23$^{\text{rd}}$ August 1638. It is worthwhile following his references and making an incursion in Descartes' text. He was refering to the pleasure of Roberval in the consideration of the curve and added: [the segments mentioned in the text are the ones shown in Fig.III.2].

> [...] ie luy en veux ici donner une autre qui ne merite pas moins que celle-la les mesmes noms, & qui est beaucoup plus aisée a descrire, en ce que l'invention de tous ses poins ne depend d'aucune

[18] FERMAT, Œuvres, II, 169

[19] HUYGENS, Œuvres, IV, 246

[20] KLINE, 345.

[21] Œuvres, x, 351 and 374.

[22] Opera, III, 403.

> equation cubique. Celle cy donc est telle, qu'ayant pris AK pour l'aissieu de l'une de ses feuilles, & en AK le point N a discretion, il faut seulement faire que le carré de l'ordonnée LN soit au carré du segment AN comme l'autre segment NK est a l'aggregat de la toute AK& du triple d'NA& ainsy on aura le point L, c'est a dire tous ceux de la courbe, puisque le point N se prend a discretion.
>
> ([...] I want to give him another curve, that does not deserve less the same names, but that is much easier to describe, since its points do not depend on a cubic equation. This curve is such that, taking AK as an axis of one of the leafs and on AK any point N, it is enough to state that the square of the ordinate LN is to the square of the segment AN as the other segment NK is to AK added with the triple of AN and in this way we will obtain the point L, that is, all the points of the curve, since N is any point on AK.

We can translate this rethoric description in the proportion:

$$\frac{LN^2}{AN^2} = \frac{NK}{AK + 3AN}$$

that corresponds exactly to the equation (2), found by GOMES TEIXEIRA. Besides, this little extract of Descartes' letter makes us think about the meaning of some of his expressions, namely: "does not deserve less the same names", "one of the leafs", "its points do not depend on a cubic equation".

Afterwards, GOMES TEIXEIRA obtains the corresponding graphic, after the rotation (Fig.III.4).

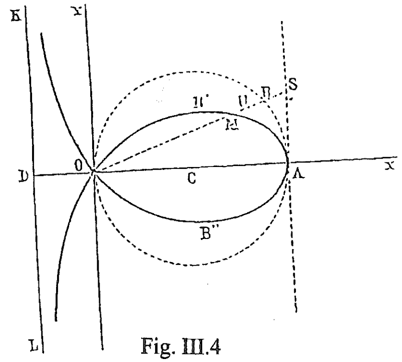


Fig. III.4

This allows him to obtain easily the equation of the asymptote $X = -\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, the coordinates of the vertex $A\left(\frac{3}{2}a\sqrt{2}, 0\right)$, the tangents parallel to OA, passing through the points B and B', the area limited by the "leaf" and also the area limited by the curve and its asymptote.

GOMES TEIXEIRA applies the usual method of the Integral Calculus, as was already said. In order to determine the area of the "leaf" he uses the formula:

$$A = 2\int_{x_0}^{x_1} X\sqrt{\frac{3a - \sqrt{2}X}{a + \sqrt{2}X}}dX$$

where $X_0 = 0$ and $X_1 = \frac{3}{2}a\sqrt{2}$.

Next, GOMES TEIXEIRA makes the change of variables $\frac{3a-\sqrt{2}X}{a+\sqrt{2}X} = z^2$ obtaining, by integration

$$A = -\frac{8a^2}{\sqrt{3}}\left[\frac{z_1^3}{(1+z_1^2)^2} - \frac{z_0^3}{(1+z_0^2)^2}\right],$$

where $z_0 = \sqrt{3}$ and $z_1 = 0$. Finally he obtains $A = \frac{3}{2}a^2$.

He also obtains the same value for the area between the folium and its asymptote. So, GOMES TEIXEIRA concludes that the folium is a quarrable cubic, in the algebraic sense.

Again, his results challenge us to draw the square with the same area of the "leaf", using only a staight-edge and a compass.

Afterwards, GOMES TEIXEIRA clearly says that the fact of the folium being a quarrable cubic suggested him to look for all the cubics satisfying this condition. He referred to the results already obtained by Maximilien Marie, the first to consider the problem and claimed that those results were incompleted.

He writes that his basis for that work was the book of Newton *Enumeratio Linearum tertii ordinis* and he claims that his own research was successfully completed.

4.5 Parametric Equations

According to the definition of M. Kline[23], a curve is said unicursal when it has the maximum number of double points, which for a curve of degree n is $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. As Kline says,this definition was firstly given by Colin MacLaurin in his *Geometria Organica*, in 1720.

It is assuming that the folium is an unicursal curve that GOMES TEIXEIRA determines his parametric equations. He makes $y = tx$, which represents a line through the double point. In fact, that line cuts the curve in just another more point and so, it is possible to obtain x and y as rational functions of t. Consequently, he obtains:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Although this not mentioned by GOMES TEIXEIRA, the parametric equations of the folium, allow us to determine the area of the "leaf" by an easier calculation.

In fact, through the formulas of the Infinitesimal Calculus, the area of leaf is given by

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} x^2 dt.$$

In this case, we easily obtain:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}dt = \frac{3}{2}a^2.$$

This result leads us once more to formulate some questions and to do the effective calculations.

We can conclude that the GOMES TEIXEIRA text is as rich as stimulating and that, by its accuracy, it constitutes an excellent second source for the authors referred to. In addition, it is the essencial primary source for the GOMES TEIXEIRA's innovations and for his work of a very talented historian of Mathematics.

[23]KLINE, 2, p. 552

Bibliography

APPELL, M. (1918), Rapport de M. Appell sur les travaux de M. F. Gomes Teixeira, *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, Volume XII, N° 2, Coimbra: Imprensa da Universidade.

BEIRES, R.S. (1950-1951), Evocação da vida e da obra do professor Gomes Teixeira, *Anais da Faculdade de Ciências do Pôrto*, tomo XXXV, N° 3, Porto: Imprensa Portuguesa.

BOYER, C.B., (1956) *A history of Analytic Geometry*, New York: Scripta Mathematica.

DESCARTES, R. (1896-1912), *Œuvres Complètes*, éditées par Adam et P. Tannery, Paris: Vrin.

DESCARTES, R. (réedition 1954), *La Géométrie, Appendice au Discours de la Méthode*, New York: Dover.

DIJKSTERHUIS, E., J. (1987), *Archimedes*. Princeton.

DUHAMEL, P. (1864), *Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes*, Paris: Gauthier-Villars.

FERMAT, P. (1891-1912), *Œuvres de Fermat* éditées par Paul Tannery et C. Henry, Paris: Gauthier-Villars.

GRÉGOIRE, M., La Querelle entre Descartes et Fermat a propos des tangentes, Seminaire "Autour de L'histoire du Calcul différentiel" par Jean-Luc Verley, in MNÉMOSINE, 2, décembre, 1992.

KLINE, M. (re-ed.1990), Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, 3 vols., New York: Oxford University Press.

HEATH, T. (1956), *Euclid - The Thirteen Books of The Elements*. 3 volumes. Oxford.

HEATH, T. (1981), *A History of Greek Mathematics*. 2 volumes. Oxford.

KNORR, W., R. (1986), *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Boston.

NEWTON, I. (1966), *La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies*, Paris.

TEIXEIRA, F.G. (1896), *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Diferencial*, Porto: Typographia Occidental.

TEIXEIRA, F.G. (1892), *Curso de Analyse Infinitesimal - Calculo Integral*, Porto: Typographia Occidental.

TEIXEIRA, F.G. (1908), *Traité des Courbes spéciales remarquables planes et gauches*, vols. IV,V,VII das Obras de Mathematica, Coimbra: Imprensa da Universidade.

TEIXEIRA, F.G., (1915), *As Obras sobre Mathematica, Coimbra* : Imprensa da Universidade.

TEIXEIRA, F.G. (1908-1909-1915), *Traité des Courbes Spéciales Remarquables Planes et Gauches, Obras sobre Mathematica*, vol. VII, Coimbra: Imprensa da Universidade.

TEIXEIRA, F.G. (1920), Elogio histórico de Daniel Augusto da Silva, *História e Memórias da Academia das Ciências de Lisboa*, Nova série, 1ª classe, ciências matemáticas, físicas e naturais, Tomo VIII, N° 1, Coimbra: Imprensa da Universidade.

TEIXEIRA, F.G. (1926), *Manual de Cálculo Diferencial Extracto do Curso de Análise Infinitesimal*, Porto: Tipografia da Enciclopédia Portuguesa Lda.

TEIXEIRA, F.G. (1926), *Santuários de Montanha (impressões de Viagens)*, Lisbon: Livraria Clássica.

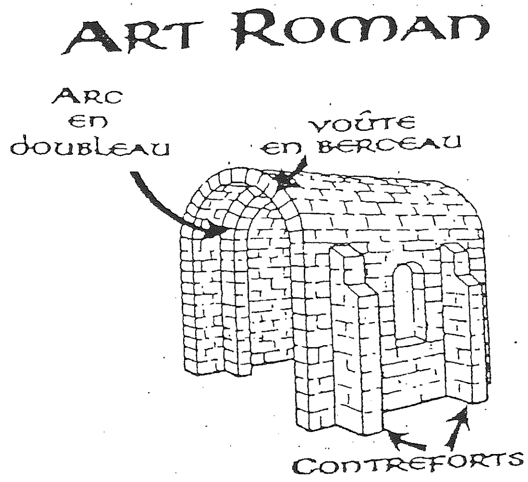
TEIXEIRA, F.G. (1934), *História das Matemáticas em Portugal*, Academia das Ciências de Lisboa, Biblioteca de Altos Estudos, Coimbra: Imprensa da Universidade.

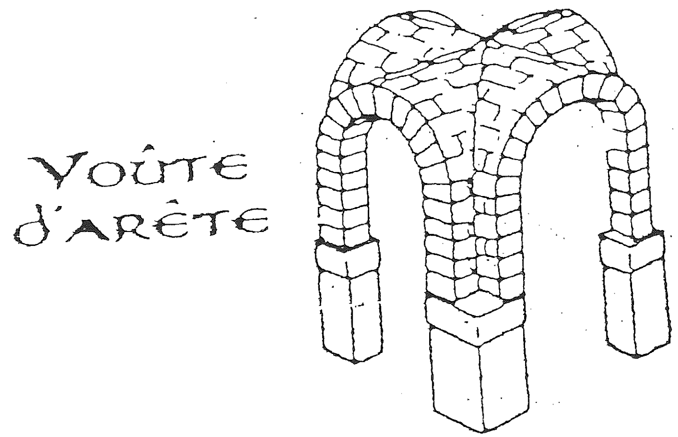
VER EECKE, P. (1948), *Proclus de Lycie - Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*. Bruges.

VER EECKE, P. (1960), *Les Œuvres Complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, 2 volumes, Paris.

VER EECKE, P. (1982), *Pappus d'Alexandrie - La Collection Mathématique*, 2 volumes, Paris.

VILHENA, H. (1936), *O professor Doctor Francisco Gomes Teixeira*, Lisboa.





De la Math. Sup. à la classe de $5^{ème}$, en passant par la lecture de textes d'Archimède....

BATHIER-FAUVET Michèle
MENEZ-HALLEZ Maryvonne
IREM Paris VII (France)

Abstract

L'idée de cet atelier est née un lundi matin, lors d'une de nos discussions dans le groupe M : A.T.H. à l'I.R.E.M. de PARIS VII. Je parlais d'un problème posé par Archimède à son ami Eratosthène et qui est aussi un exercice d'oral de l'Ecole des Arts et Métiers : il concerne le calcul du volume de l'intersection de deux cylindres de même rayon, d'axes orthogonaux et concourants. Maryvonne a été très intéressée car elle rentrait d'une visite - entre autres - du château de Falaise avec ses élèves de $5^{ème}$; c'est là qu'ils avaient appris que les premières croisées de transept ou voûtes d'arête, étaient des intersections de voûtes en berceau orthogonales, donc de demi-cylindres orthogonaux; elle voulait leur en proposer une construction.

En 5$^{\text{ème}}$:

- *Contexte* : nous travaillons dans le cadre d'un projet pluridisciplinaire intitulé "Du roman au gothique"; la partie du programme abordée ici est la représentation de l'espace; elle fut motivée par l'étonnement éprouvé par les élèves en écoutant notre guide dans les salles du château de Falaise.

- *Activités* : il s'est agi dans un premier temps de familiariser les élèves à effectuer des passages d'une réalité perçue à une mathématisation de cette réalité; dans un deuxième temps de construire un objet réel qui permette à la fois une appropriation du nouveau regard engendré par cette mathématisation et l'enrichissement de la perception qui en résulte, et donc de réinventer des procédés de construction. La dernière étape fut la représentation en deux dimensions.

Les constructions de maquettes de voûtes d'arête furent d'abord réalisées par tâtonnement expérimental à l'aide de cylindres en carton (rouleaux de papier toilettes); ensuite une maquette de voûte en berceau fut découpée dans un rouleau pour moquette avec l'aide d'un parent architecte; de même pour la voûte d'arête sur laquelle furent collés des morceaux de sucre à la manière de la pose des pierres de la voûte. Nous eûmes à répondre à de nombreuses interrogations sur la hauteur de la voûte, sur les plans d'intersection des cylindres.

Plusieurs représentations planes furent spontanément proposées par les élèves : le plus souvent en perspective approximativement cavalière, et pour une, en perspective quasi centrale; il y eut aussi deux ou trois tentatives de représentation par projection sur un plan horizontal. Une discussion passionnée mit en évidence les insuffisances de cette projection unique : le déplacement du regard et donc des élèves autour de l'objet conduisit aux projections sur deux plans perpendiculaires.

En Math. Sup. :

- *Contexte* : nous sommes en fin de 2$^{\text{ème}}$ trimestre et les techniques de calculs d'intégrales multiples n'ont pas encore été vues; il s'agit pourtant de répondre à une question des élèves : comment fait-on pour trouver le centre de gravité d'une demi-sphère (on en a besoin en physique) ? D'autre part, en cours, nous venons de traiter les courbes paramétrées.

- *Activités* : utilisation de textes d'Archimède, en interaction avec une problématique "moderne" et en passant par des résultats mathématiques pratiques; en effet, un élève de Math. Sup. se laisse difficilement convaincre de l'intérêt de ce qu'il considère comme des "digressions culturelles" (ou bien il "débranche", ou bien il considère qu'il perd son temps); pour l'entraîner sur ce terrain là, il vaut mieux qu'il soit surpris et épaté par ce qu'il découvre; il faut aussi que ça ne dure pas trop longtemps et qu'il en retire de "l'utilisable au concours".

Cette activité, sous une forme moins complète, a été faite en classe.

Comment trouver le centre de gravité d'une demi-sphère, d'une calotte sphérique ?

D'une façon générale, le centre de gravité G d'un solide homogène S est donné par la formule suivante, $V(S)$ étant son volume :

$$\overrightarrow{OG}= \frac{1}{V(S)} \int\int\int_S \overrightarrow{OP}\ (x,y,z)dxdydz.$$

Si l'on choisit comme origine du repère le centre O de la demi-sphère posée sur le plan

xOy, pour des raisons de symétrie, son centre d'inertie est sur Oz et sa cote est :

$$z_G = \frac{1}{V(S)} \int\int\int_S zdxdydz.$$

Il n'est bien sûr pas question de faire un cours théorique pour définir les notions d'ensembles cubables et d'intégrales multiples, ni d'énoncer le théorème de Fubini ; on peut cependant faire saisir quelques rudiments efficaces de ces techniques.

a) Calcul du volume de la demi-sphère (Fig. 1)

On sait que $V(S) = \int\int\int_S dxdydz$.

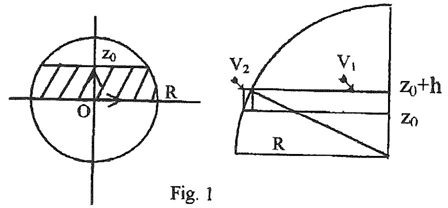


Fig. 1

Pour tout z_0 de $[0, R]$, soit $V(z_0)$ le volume de la portion de sphère hachurée. On a donc, $V(S) = V(R)$.

Soit $h > 0$, on a alors : $V_1 < V(z_0+h)-V(z_0) < V_1+V_2$, avec $V_1 = h\times[R^2-(z_0+h)^2]\times\pi$ et $V_1 + V_2 = h \times (R^2 - z_0^2) \times \pi$.

D'où, $\pi \times (R^2 - (z_0 + h)^2) < \frac{V(z_0+h)-V(z_0)}{h} < \pi \times [R^2 - z_0^2]$, et, quand h tend vers zéro, on peut en déduire que V est dérivable à droite en z_0 et que : $V_d'(z_0) = \pi \times (R^2 - z_0^2)$.

Si $h < 0$, on montre de la même façon que V est dérivable à gauche en z_0, et que

$$V_g'(z_0) = \pi \times (R^2 - z_0^2).$$ [1]

V est donc dérivable sur $[0, R]$, et $\forall z \in [0, R], V'(z) = \pi \times (R^2 - z^2)$. Remarquons que $V'(z) = S(z), S(z)$ étant l'aire du disque $D(z)$, intersection de la sphère et du plan d'équation $Z = z$, c'est-à-dire que $S(z) = \int\int_{D(z)} dxdy$.

On a donc, $V(z_0) = \int_0^{z_0} V'(z)dz = \int_0^{z_0} S(z)dz = \pi \times z_0 \times (R^2 - \frac{z_0^2}{3})$.

Comme $V(S) = V(R)$ on a $V(S) = 2\pi \times \frac{R^3}{3}$.

b) Recherche du centre de gravité de la demi-sphère

$$\int\int\int_S zdxdydz = \int_0^R z \int\int_{D(z)} dxdydz = \int_0^R zS(z)dz = \int_0^R z\times\pi\times(R^2-z^2)dz = \pi\times\frac{R^4}{4}.$$

Comme $V(S) = \frac{2}{3} \times \pi \times R^3$ on a $Z_G = \frac{3}{8}R$.

On peut comparer ce résultat avec celui énoncé (et établi) par Archimède dans la proposition 6 de *La Méthode : "Dans tout hémisphère, le centre de gravité est situé sur son axe, en*

[1] Cette idée de découpage en chips d'un volume peut être suggérée à des élèves de 5ème en leur proposant une construction de la voûte avec des feuilles de carton ou des briques de LEGO.

un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie située du côté de la surface de l'hémisphère à la partie restante soit égal au rapport de cinq à trois."[2]

c) Déterminer le centre de gravité G' d'une calotte sphérique C (Fig. 2)

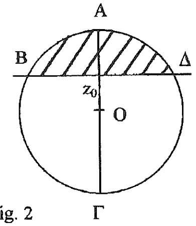


Fig. 2

$$V(C) = \iiint_C dxdydz = \int_{z_0}^{R} S(z)dz$$
$$= \int_{z_0}^{R} \pi \times (R^2 - z^2)dz = \frac{\pi}{3} \times (R - z_0)^2 \times (2R + z_0)$$

et

$$\iiint_C zdxdydz = \int_{z_0}^{R} zS(z)dz = \int_{z_0}^{R} \pi \times z \times (R^2 - z^2)dz = \frac{\pi}{4} \times (R^2 - z_0^2)^2,$$

d'où, comme

$$Z_{G'} = \frac{1}{V(C)} \times \iiint_C zdxdydz \text{ on a } Z_{G'} = 3 \times 4 \times \frac{(R + z_0)^2}{2R + z_0}.$$

La proposition 9 de ***La Méthode d'Archimède*** (Fig. 3)

Les Grecs, plus de deux siècles avant J.-C., savaient placer le centre de gravité d'une calotte sphérique, comme le montre l'énoncé suivant :

"Dans tout segment de sphère, le centre de gravité est situé sur l'axe du segment, en un point qui divise l'axe de manière que le rapport de la partie du côté du sommet du segment à la partie restante soit égal au rapport entre la somme de l'axe du segment et du quadruple de l'axe du segment opposé, d'une part, et la somme de l'axe du segment et du double de l'axe du segment opposé."[3]

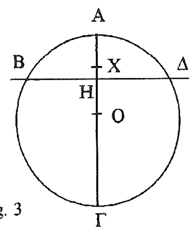


Fig. 3

Archimède assure donc que le centre de gravité de la calotte $AB\Delta$ est le point X de ΓA tel que : $\frac{AX}{XH} = \frac{AH+4\Gamma H}{AH+2\Gamma H}$.
En utilisant un calcul analytique moderne et en munissant l'axe ΓA d'un repère d'origine O, son milieu, de telle sorte que

$$\Gamma(-R), A(R), H(z_0), \text{et } X(\alpha),$$

cette égalité se traduit par :

$$\frac{R-\alpha}{\alpha - z_0} = \frac{R-z_0+4(R+z_0)}{R-z_0+2(R+z_0)} = \frac{5R+3z_0}{3R+z_0}.$$

D'où, par un calcul élémentaire : $\alpha = \frac{3}{4}\frac{(R+z_0)^2}{2R=z_0}$.
On retrouve bien le résultat précédent.

***La Méthode*, la lettre à Eratosthène** (cf. annexe 1)

Comment Archimède a-t-il bien pu établir une telle formule alors qu'il ne disposait pas du calcul intégral ? Il nous l'explique dans le traité de *La Méthode*[4].

Le seul manuscrit de ce traité qui nous soit parvenu, et qui a été découvert en 1907, a été

[2]ARCHIMÈDE, *La Méthode*, tome III, p. 102.

[3]Ibid., pp. 108-109.

[4]Le titre complet est : *La méthode d'Archimède relative aux propositions mécaniques, à Eratosthène.*

sous les feux de l'actualité l'été dernier : la Walters Art Gallery[5] à Baltimore, l'a exposé au public du 20 juin au 5 septembre 1999.

Il était une fois..., au XII$^{\text{ème}}$ siècle, dans un monastère de Constantinople, un moine qui avait besoin de parchemin pour transcrire des oraisons destinées à la guérison des malades.

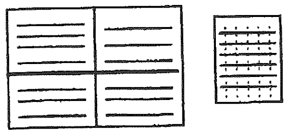


Fig. 4

Il en avait bien un sous la main, qui contenait un traité de mathématiques en grec. On le lave; on le coupe en deux dans le sens de la largeur afin d'obtenir plus de feuillets; et on réécrit dessus après avoir tourné les anciennes pages à 90° (Fig. 4)....

Sa transformation en livre de prières a sûrement été un heureux épisode pour lui car, après, cet important document religieux a été gardé précieusement dans les monastères. Il semble que, du XV$^{\text{ème}}$ siècle au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, il ait été conservé au monastère de Mar Saba, à quelques encablures à l'Est de Bethléem. Il retourna ensuite à Contantinople où le savant danois J.L. Heiberg -qui avait déjà publié en 1880 la première édition critique des œuvres d'Archimède connues à l'époque- le découvrit au monastère du Saint Sépulcre. Il avait eu vent de son existence en consultant un inventaire. Avec le temps, l'encre de la première écriture était remontée et révélait la trace d'un traité mathématique. Heiberg reconnut de quoi il s'agissait. Il se remit au travail, retranscrivit et traduisit tout ce qu'il put; entre 1913 et 1915, il fera une seconde édition critique de l'œuvre d'Archimède. Mais la tâche était difficile : il n'utilisait qu'une loupe et la lumière naturelle. De plus, comme il n'avait pas désossé le manuscrit, le texte sous la reliure lui resta inaccessible; il a donc été conduit à reconstituer les passages manquants ou illisibles.

Après la dernière étude, en 1909, on perd la trace du palimpseste; il refait surface à Paris, en 1920, dans une collection privée. Il y reste jusqu'à sa vente, chez Christies en octobre 1998, à un collectionneur privé qui souhaite rester anonyme. Mais W. Noël, le conservateur des manuscrits de la Walters Art Gallery, se lance à sa recherche, le trouve et parvient à négocier le droit d'exposer la merveille au public et celui de l'étudier...

Outre *La Méthode*, Heiberg avait découvert le *Traité des Corps Flottants* et des bribes du *Stomachion* dans ce manuscrit. Il semblerait que les premiers examens utilisant des méthodes modernes d'étude de palimpsestes aient permis de repérer six traités. Les prochaines années nous en apprendront sûrement beaucoup sur Archimède...

La Méthode est un texte d'une importance capitale : on peut presque dire que c'est le testament scientifique d'Archimède. La lettre d'introduction à son ami et pair, Eratosthène[6] (vers 276-194 av. J.-C.), que vous trouverez en annexe à cet article, est on ne peut plus significative. La lecture de cette annexe 1 donne une bonne idée de la structure habituelle des traités d'Archimède qui ne s'adresse qu'à ses pairs : il commence par une lettre d'introduction à son correspondant; viennent après les lemmes ou propriétés utiles à la compréhension de ce qui suit et, le plus souvent, établis dans des traités antérieurs; il passe ensuite à la rédaction propre-

[5]La Walters Art Gallery possède l'une des plus belles collections au Monde de manuscrits enluminés.

[6]ERATOSTHÈNE, connu de nos jours pour son "crible" qui permet de trouver les nombres premiers dans une liste de nombres, était alors le conservateur en chef de la Grande Bibliothèque d'Alexandrie. Il fut aussi précepteur des enfants royaux. Quand on saura que cette Bibliothèque était celle du *Mousséion*, institution royale abritée dans de somptueux bâtiments près des palais royaux et qui pensionnait les plus grands savants, on comprendra mieux l'importance du personnage.

ment dite des propositions et de leurs démonstrations (il y en a quinze dans *La Méthode*). Dans d'autres traités, entre la lettre amicale et les lemmes, il intercale des définitions et des postulats.

Travail demandé : 1) Lire les dix-neuf premières lignes de l'annexe 1, puis :

- **Faire la figure décrite.**
- **Ecrire la formule de volume énoncée.**
- **Vérifier, en faisant un calcul analytique moderne, qu'Archimède ne s'est pas trompé.**

2) Lire les neuf lignes suivantes et répondre aux mêmes questions.

Dans cette lettre donc, Archimède annonce la démonstration de deux résultats déjà soumis à la sagacité d'Eratosthène, que nous noterons respectivement théorèmes 1 et 2 , et qu'en langage moderne nous pouvons énoncer :

Le volume de l'onglet cylindrique vaut 1/6 de celui du cube.

Le volume de l'intersection de deux cylindres d'axes orthogonaux et concourants, inscrits dans un cube, est égal aux 2/3 de celui de ce cube.

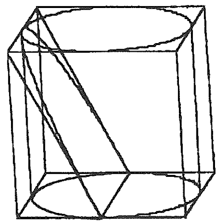


Fig. 5

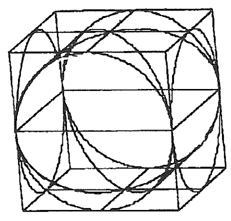


Fig.6

Ainsi, une figure partiellement curviligne *"est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans"*[7]. Voilà sans doute pourquoi Archimède estime que *"ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement"*[8]; il y pressentait probablement un pas vers la résolution du problème de la quadrature du cercle, une constructibilité d'un "rectiligne" ou d'un "plat" équivalent à du "rond".

"J'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas susceptible de démonstrations; car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la

[7] ARCHIMÈDE, *La Méthode*, tome III, p. 83.

[8] Ibid. p. 83.

recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance"[9], écrit-il ensuite.

En substance, cette méthode "ne vaut pas", mais "elle marche" parce qu'elle permet d'avoir l'intuition d'un résultat; ce qui est particulièrement important car, si la méthode "par la géométrie"[10] est une méthode démonstrative parfaitement convaincante, elle n'a, elle, aucun pouvoir heuristique : il faut connaître le résultat à l'avance pour pouvoir le prouver ainsi. C'est pourquoi Archimède rend hommage à Démocrite (vers 460-370 av. J.-C.), occupé lui aussi de problèmes de calculs de volumes, qui énonça des résultats qu'il n'établit pas, mais qu'Eudoxe (vers 408-vers 355 av. J.-C.) put ensuite démontrer : une pyramide a un volume égal au tiers de celui du prisme de même base et de même hauteur (c'est la proposition XII-7 des *Éléments* d'Euclide), et un cône a un volume égal au tiers de celui du cylindre de même base et de même hauteur (c'est la proposition XII-10 des *Éléments* d'Euclide). Archimède inscrit donc clairement son travail dans le prolongement de celui de mathématiciens qui l'ont précédé.

Et il sait à quel point sa découverte est importante : "*...je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit*"[11].

La Méthode, **proposition 1 : la quadrature de la parabole** (cf. annexe 2)

La démonstration de la formule donnant le volume de l'onglet cylindrique, difficile, est faite de deux façons différentes dans ce traité, en propositions 12-13 d'une part et 14-15 d'autre part. Celle de la formule donnant le volume de l'intersection des deux cylindres n'est pas dans la portion de traité qui nous est parvenue; on pourra cependant la déduire assez simplement de la précédente. Pour comprendre le principe de cette "méthode", étudions la première proposition, suivant ainsi la démarche pédagogique et heuristique d'Archimède qui nous dit : *"Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique..."*[12].

Travail préparatoire :

1)

- **Quel est l'énoncé de la proposition 1 ?**
- **Lire les 12 premières lignes et faire la figure correspondante.**

N.B. Actuellement, on appelle diamètre d'une conique, le lieu des milieux des cordes de direction donnée; il est inclus dans une droite (ce que nous allons établir dans les questions suivantes).

[9] ARCHIMÈDE, *La Méthode*, tome III, pp. 83-84.

[10] Cette méthode sera aussi appelée méthode d'exhaustion, méthode "par compression", "par double réduction à l'absurde", "apagogique"; elle sera utilisée jusqu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle et Pascal, Descartes... parlent de la "méthode des Anciens" lorsqu'ils y font référence.

Le nom de "méthode d'exhaustion" est dû à Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) qui l'emploie dans son *Opus geometricum Quadraturae circuli et sectionum coni* (i.e. *Traité géométrique de la Quadrature du cercle et des sections coniques*) (1647).

Pour avoir plus d'informations concernant cette méthode, le lecteur pourra se référer à l'article de J. P. Le Goff *"De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)"* paru dans les actes du colloque INTER-IREM de Besançon des 12 et 13 mai 1989 (pp. 196-220). Il pourra aussi consulter le numéro 1 de *Mnémosyne* d'avril 1992.

[11] Ibid. p. 84.

[12] Ibid, p. 84.

2) Résultats préliminaires concernant la parabole

a) Soit (P) une parabole; elle admet donc un axe de symétrie $\Im$. Γ et B sont deux points quelconques de (P), et A est le point de (P) tel que $A\Gamma$ soit parallèle à la tangente à (P) en B.

La parallèle à $\Im$ passant par B coupe $A\Gamma$ en Δ.

- **Que peut-on dire de Δ si B est sur $\Im$?**
- **Le résultat subsiste-t-il pour un choix quelconque de B ?**
- **Que peut-on conclure de ce qui précède ?**

N.B.1 Soit $f : x \to ax^2 + bx +$. En appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[\alpha, \gamma]$ où $A(\alpha, f(\alpha))$ et $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$, retrouver le résultat précédent.

N.B.2 Ce qu'Archimède appelle "diamètre" d'une parabole, c'est son axe de symétrie; pour tous les autres "diamètres" au sens actuel, il parle de "*parallèle au diamètre*".

b) La tangente à (P) en Γ coupe $B\Delta$ en E. Que peut-on dire du point E ?

N.B. Ce résultat est celui de la proposition 2 du traité *La quadrature de la parabole* d'Archimède.

c) Soit ΞM une parallèle à $B\Delta$. Elle coupe $A\Gamma$ en Ξ, (P) en O et ΓE en M. Montrer que : $\dfrac{\Gamma A}{A\Xi} = \dfrac{M\Xi}{\Xi O}$.

On pourra se placer dans un repère de la forme : $(B$, tangente à (P) en $B, B\Delta)$[13].

3) Facultatif : compléments sur le diamètre d'une conique

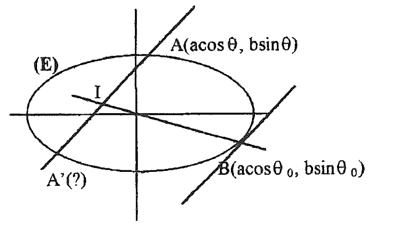
a) Dans un repère rapporté à ses asymptotes, une hyperbole admet pour équation $xy = k$.

Quels sont les diamètres de cette hyperbole ?

b) On pourra mettre en évidence les diamètres d'une ellipse par une démonstration analytique utilisant une représentation paramétrique de cette ellipse.[14]

[13] La note 16 en fournit une autre démonstration, accessible à un élève de Terminale.

[14] Cette démonstration peut être intéressante pour un élève de Terminale car elle est un exemple d'application pratique des formules de trigonométrie.



(E) admet une équation paramétrique de la forme :

$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$.

La tangente à (E) en B est donc dirigée par $\vec{V}(-a\sin\theta_0, b\cos\theta_0)$. Si $A'(a\cos\theta', b\sin\theta')$, $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à $\vec{V}$

$\iff \cos(\theta' - \theta_0) = \cos(\theta - \theta_0)$

$\iff \exists k \in \mathbf{Z} : \theta' - \theta_0 = \theta - \theta_0 + 2k\pi \quad (1)$

ou $\theta' - \theta_0 = -(\theta - \theta_0) + 2k\pi \quad (2)$

(1) donne les coordonnées de A.

(2) donne $A'\ (a\cos(2\theta_0 - \theta), b\sin(2\theta_0 - \theta))$.

Le milieu I de $[AA']$ a donc pour coordonnées : $(a\cos\theta_0\cos(\theta - \theta_0), b\sin\theta_0\cos(\theta - \theta_0))$.

Donc, $\overrightarrow{OI} = \cos(\theta - \theta_0)\ \overrightarrow{OB}$. Les milieux des cordes $[AA']$ ayant la direction celle de la tangente à (E) en B sont donc situés sur la droite OB.

On rappelle cependant qu'une ellipse peut être vue comme déduite d'un cercle par une affinité qui est, comme chacun le sait, une application affine. En utilisant cette remarque, trouver et prouver très rapidement quels sont les diamètres d'une ellipse.

Nous pouvons maintenant comprendre la démonstration d'Archimède.

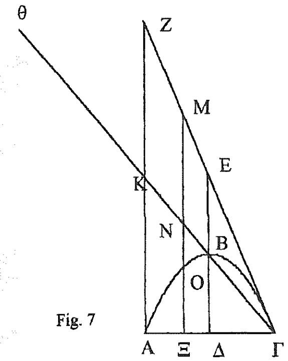


Fig. 7

On construit Θ tel que K soit le milieu de $\Theta\Gamma$ vu comme un levier de point d'appui K (Fig. 7).

La méthode consiste à montrer que le segment $AB\Gamma$ déplacé en[15] Θ équilibre, autour de K, le triangle $AZ\Gamma$ restant en place. On en déduira que :

segment $(AB\Gamma) = \frac{1}{3}$ triangle $(AZ\Gamma)$.

D'où le résultat par des considérations élémentaires sur les triangles $AB\Gamma$ et $AZ\Gamma$: en effet, l'aire du triangle $AZ\Gamma$ vaut le quadruple de celle du triangle $AB\Gamma$.

Soit $M\Xi$ une sécante parallèle à ΔE.

On a : $\frac{\Gamma A}{A\Xi} = \frac{M\Xi}{\Xi O}$[16]. D'où $\frac{M\Xi}{\Xi O} = \frac{\Theta K}{KN}$ car $\frac{\Gamma A}{A\Xi} = \frac{\Gamma K}{KN}$ et $\Gamma K = K\Theta$.

N étant le milieu de $M\Xi$, il est le centre de gravité du segment $M\Xi$, donc le segment $O\Xi$ déplacé de façon que Θ soit son milieu, équilibre par rapport à K, le segment $M\Xi$ restant en place[17]. Le même raisonnement s'appliquant à toutes les parallèles $M\Xi$ à $E\Delta$,

[15] "*Le segment $AB\Gamma$ déplacé en Θ* " signifie que ce segment (c'est-à-dire la portion de plan comprise entre la droite et l'arc de parabole $AB\Gamma$) est déplacé de façon que son centre de gravité coïncide avec Θ, ou soit à l'aplomb de Θ.

[16] • Ce résultat a été établi dans le travail préliminaire.

• Voici l'argumentation d'Archimède : d'après la proposition 5 de *La Quadrature de la parabole* : $\frac{O\Xi}{OM} = \frac{A\Xi}{\Xi\Gamma}$, donc $\frac{\Xi T}{A\Xi} = \frac{OM}{\Xi O}$ et on peut en déduire que $\frac{(A\Xi + \Xi\Gamma)}{A\Xi} = \frac{(\Xi O + OM)}{\Xi O}$, soit $\frac{A\Gamma}{A\Xi} = \frac{M\Xi}{\Xi O}$.

• Pour un élève de Terminale : montrons que $\frac{O\Xi}{OM} = \frac{A\Xi}{\Xi\Gamma}$.

Pour cela, considérons la parabole (P) d'équation $y = ax^2$, et les points $A(\alpha)$ et $\Gamma(\gamma)$. Soit Ξ le point de la corde $[\Gamma A]$ d'abscisse δ, O le point de (P) d'abscisse δ et M le point d'intersection de la droite ΞO et de la tangente à (P) en Γ.

On a : $\Xi(\delta, a(\alpha + \gamma)\delta - a\alpha\gamma)$, $O(\delta, a\delta^2)$, $M(\delta, \gamma a(2\delta - \gamma))$.

Si A'' et Γ'' ont même abscisse que A et Γ respectivement, et même ordonnée que Ξ, on peut écrire :

$$\frac{A\Xi}{\Xi\Gamma} = \frac{A''\Xi}{\Xi\Gamma''} = \frac{\delta - \alpha}{\gamma - \delta}.$$

Or $\frac{O\Xi}{OM} = \frac{O\Xi}{MO} = \frac{a\delta(\gamma+\alpha) - a\alpha\gamma - a\delta^2}{a\delta^2 - 2a\delta\gamma + a\gamma^2} = \frac{(\delta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\delta-\gamma)^2} = \frac{\delta-\alpha}{\gamma-\delta}$. D'où le résultat.

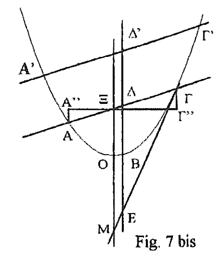


Fig. 7 bis

[17] D'après ARCHIMÈDE, *De l'Equilibre des Figures Planes I*, tome II, proposition 6 et proposition 7.

... toutes les parallèles à $E\Delta$ menées dans le triangle $ZA\Gamma$ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point K. Et du moment que le triangle ΓZA est constitué par les segments de droites menés dans le triangle ΓZA, et le segment $AB\Gamma$ constitué par les segments de droites pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞO, le triangle $ZA\Gamma$ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre de gravité Θ, l'équilibre se faisant par rapport au point K, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point K[18].

La position du centre de gravité du triangle $AZ\Gamma$ étant connue[19], on a donc $\frac{\text{segment}(AB\Gamma)}{\text{triangle}(AZ\Gamma)} = \frac{1}{3}\frac{\Gamma K}{K\Theta} = \frac{1}{3}$.

La Méthode, **propositions 12 et 13 : volume de l'onglet cylindrique, un changement de poids**

Dans ces propositions, Archimède va, selon ses termes, *"faire voir"*[20] que le théorème 1 (volume de l'onglet cylindrique) est vrai avant d'en faire une démonstration par la méthode d'exhaustion en proposition 15. La proposition 14 établit aussi le résultat, autrement.

a) Proposition 12. La rédaction est un peu différente de celle des propositions précédentes : Archimède décrit une figure, développe un raisonnement et il faut attendre les dernières lignes pour savoir où il voulait en venir. C'est une démonstration qui paraît plus spontanée; par exemple, il ne considère un levier qu'au moment où il s'avère utile dans la réflexion.

La figure 8-a n'est pas dans le texte original, mais elle donne sous forme condensée la description de plus d'une page des constructions faites et des notations utilisées.

N.B. : Dans le texte original, N est employé deux fois en des sens différents, c'est pourquoi, afin d'éviter toute confusion, le N archimédien de la figure 8-b sera remplacé par N'. Le lecteur qui se référera aux textes remarquera que, en fait, $I = X$, et $E = \Pi$[21].

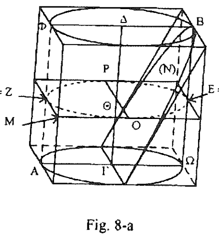


Fig. 8-a

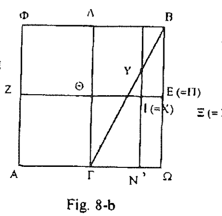


Fig. 8-b

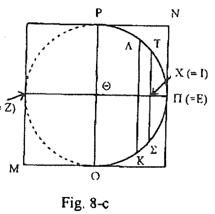


Fig. 8-c

On coupe le demi-cylindre de section droite OEP par un plan vertical ($\Im$) parallèle à son axe et parallèle à OP. La trace de l'intersection de ce plan ($\Im$) et du demi-cylindre dans le plan ME (plan qui est parallèle à la base du cylindre et passe par le milieu de son axe (Fig.8-c)) est ΣT; ($\Im$) coupe donc :

[18] ARCHIMÈDE, tome III, pp. 87-88.

[19] *Equilibre des Figures Planes I*, proposition 14 et *La Quadrature de la parabole, proposition 6*.

[20] Ibid, p.114.

[21] Ces erreurs peuvent cependant être le fait du copiste; à moins qu'il ne s'agisse de conventions de notations : le même point étant noté différemment suivant la section plane dans laquelle il est situé.

- le demi-cylindre suivant un rectangle de base ΣT et de hauteur $B\Omega$.
- l'onglet suivant un rectangle de même base ΣT et de hauteur YN (Fig.8-b).

On a donc : $\frac{E\Theta}{\Theta I} = \frac{\Omega\Gamma}{\Gamma N} = \frac{B\Omega}{YN} = \frac{\text{rectangle découpé du cylindre}}{\text{rectangle découpé de l'onglet}}$.

Or $E\Theta = \Theta\Xi$, donc $\frac{\Theta\Xi}{\Theta I} = \frac{\text{rectangle découpé du cylindre}}{\text{rectangle découpé de l'onglet}}$.

Donc, le rectangle du demi-cylindre, de centre de gravité I, restant en place, est équilibré autour de Θ, par le rectangle de l'onglet déplacé en Ξ.

En conséquence, le demi-cylindre, restant en place, est équilibré autour de Θ, par l'onglet déplacé en Ξ.

Archimède s'est ainsi débarrassé d'une des inconnues du système : le centre de gravité de l'onglet. Mais il lui en reste encore trop pour pouvoir conclure : le centre de gravité du demi-cylindre, le volume de l'onglet, le volume du demi-cylindre. Il va régler le problème en proposition 13 par une substitution de poids.

b) Proposition 13

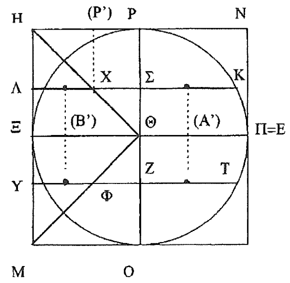


Fig. 9

N.B. Nous avons conservé les notations du texte archimédien; on revient à la même coupe que celle faite à la figure 8-c (N retrouve la signification qu'il avait au départ et n'est donc pas à confondre avec le point que nous avons noté N'); mais les lettres $\Lambda, X, \Sigma, K, T, Z, \Phi$ ont une autre signification que celles qu'elles ont eu jusqu'à présent.

L'idée est d'équilibrer, autour de Θ, le demi-cylindre par le prisme triangulaire de base droite $H\Theta M$ et de hauteur celle du cube; ce prisme triangulaire, substitué au demi-cylindre dans l'équilibre précédent (proposition 12) donne un système qui n'a plus qu'une seule inconnue : le volume de l'onglet cylindrique.

Des plans orthogonaux à PO rencontrent cette droite en deux points Σ et Z symétriques par rapport à Θ et découpent;

– dans le prisme triangulaire, des rectangles de bases ΛX et $Y\Phi$ et de hauteur celle du cylindre, que nous noterons, nous, $\{\Lambda X\}$ et $\{Y\Phi\}$.

– dans le demi-cylindre, deux rectangles de bases ΣK et ZT et de hauteur celle du cylindre.

La démonstration livrée par le manuscrit s'arrête là. En notes, C. Mugler[22] donne la reconstitution "à la manière de ..." proposée par Heiberg. Il considère deux points A' et B' qui ne sont pas sur la figure originale et que je note pour cette raison (A'), (B'). A' est à l'intersection de ΘE et du segment d'extrémités le milieu de ΣK et le milieu de ZT; A' est donc le centre de gravité de l'ensemble des rectangles $\{\Sigma K\}$ et $\{ZT\}$. De même, B' est le centre de gravité de l'ensemble des rectangles $\{\Lambda X\}$ et $\{Y\Phi\}$.

[22] C. Mugler a établi et traduit ces textes pour Les Belles lettres, édition à laquelle nous nous référons ici.

On a $\Lambda X = Y\Phi$ et $\Sigma K = ZT$, de plus les parallélogrammes considérés ont même hauteur, d'où

$$\frac{\{\Sigma K\}+\{ZT\}}{\{X\Lambda\}+\{Y\Phi\}} = \frac{\Sigma K}{\Lambda X} = \frac{\Sigma K}{\Sigma P}{}_{23} = \frac{\Sigma K^2}{\Sigma P\times\Sigma K} = \frac{\Sigma P\times\Sigma O}{\Sigma P\times\Sigma K}{}_{24} = \frac{\Sigma O}{\Sigma K}$$
$$= \frac{\Sigma P+2\Sigma\Theta}{\Sigma K} = \frac{\Lambda X+2X\Sigma}{\Sigma K} = \frac{\frac{1}{2}\Lambda X+X\Sigma}{\frac{1}{2}\Sigma K} = \frac{\Theta B'}{\Theta A'}.$$

Or B' est le centre de gravité de $\{\Lambda X\} + \{Y\Phi\}$ et A', celui de $\{\Sigma K\} + \{ZT\}$, d'où le résultat, l'ensemble de ces rectangles constituant respectivement le prisme triangulaire et le demi-cylindre.

N.B. : On ne peut qu'admirer l'astucieuse utilisation de la symétrie de la figure.

Un résumé de ce raisonnement pourra le faire mieux comprendre et apprécier toute l'ingéniosité d'Archimède ici mise en œuvre.

Etape 1.

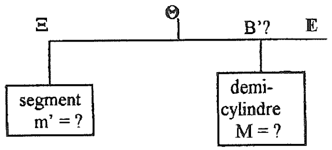


Fig. 10-a

Etape 2.

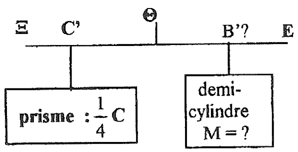


Fig. 10b

Etape 3. Dans le premier équilibre, on peut donc substituer au demi cylindre de masse et de centre de gravité inconnus, le prisme, de masse et de centre de gravité connus. Alors, il ne restera plus qu'une seule inconnue : la masse m' de l'onglet cylindrique.

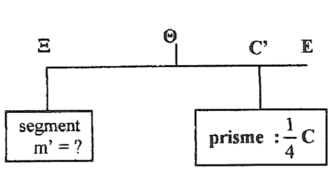


Fig. 10-c

Une traduction moderne de ce dernier équilibre donne : $\Theta\Xi \times m = \Theta C' \times \frac{1}{4}C$.
Or, $\Theta C' = \frac{2}{3}\Theta E = \frac{2}{3}\Theta\Xi$, d'où :
$m = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}C = \frac{1}{6}C$.

[24] $\Lambda X = XP' = \Sigma P, HX$ étant une diagonale du carré $\Lambda XP'H$.

[24] Le triangle PKO est rectangle en K, de hauteur $K\Sigma$, donc : $\Sigma K^2 = \Sigma P \times \Sigma O$.

Comment déduire la proposition 2 de la proposition 1 ?

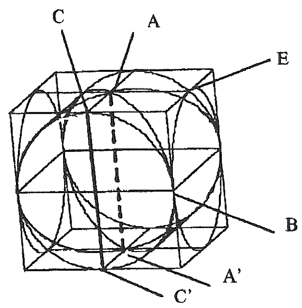


Fig. 11

Pour des raisons de symétrie, le volume V cherché, vaut 8 fois celui, noté V_1, de la portion d'espace comprise entre les plans ACC', ABA', CBC' et le cylindre d'axe parallèle à AC. Le parallélépipède rectangle $CAECA'$ ayant une base carrée et admettant le plan ABC' pour plan de symétrie, la proposition précédente assure que :
$V_1 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times C$,
c étant le volume du cube.

D'où $V = 8 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times C = \frac{2}{3}C$.

Bibliographie

ARCHIMEDE, T.II, *La Quadrature de la parabole*, T.III, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres, collection G. Budé, Paris, 1971.

"Archimède", *Les Cahiers de Science & Vie*, collection Les Pères Fondateurs de la Science, hors série n°18, Excelsior Publications, Paris, déc. 1993.

EUCLIDE, *Les Œuvres d'Euclide*, traduction de F. Peyrard, Librairie A. Blanchard, Paris, réédition de 1993.

INTER-IREM HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES, Actes du 7ème colloque les 12 et 13 mai 1989, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 1989, pp. 197-218.

Jeu de 54 cartes : Jeu Roman (Musée de Cluny), Editions Dusserre, Paris.

Mnémosyne, n°1 (avril 1992), n°14 (juin 1998), Publication de l'IREM Université Denis Diderot Paris VII, Groupe M.A.T.H..

Auteur NOM Prénom, titre de l'article, *American scientist*, Vol. 87, Juillet-Août 1999, pp. 316-318.

Annexe 1

Textes extraits de ARCHIMÈDE, T.III, *La Méthode*, texte établi par C. Mugler, Les Belles Lettres.

LA MÉTHODE D'ARCHIMÈDE RELATIVE AUX PROPOSITIONS MÉCANIQUES, A ÉRATOSTHÈNE

Archimède à Ératosthène, prospérité !

Je t'ai envoyé antérieurement certains théorèmes que j'avais découverts, en me bornant à en rédiger les énoncés et en t'invitant à trouver les démonstrations que je n'avais pas encore indiquées ; les énoncés des théorèmes envoyés étaient les suivants ; premièrement : si on inscrit dans un prisme droit, ayant pour base un parallélogramme[1], un cylindre ayant ses bases situées dans les parallélogrammes[1] opposés et (sc. certaines de) ses génératrices dans les plans restants du prisme[2], et si on mène un plan par le centre du cercle de base du cylindre et par un des côtés du carré situé dans le plan opposé, le plan ainsi mené découpera du cylindre un segment compris entre deux plans et la surface du cylindre, l'un des plans étant le plan mené, l'autre celui qui contient la base du cylindre, et la surface (sc. cylindrique) étant comprise entre les plans indiqués, et le segment découpé du cylindre est équivalent à la sixième partie du prisme entier. L'énoncé du second théorème était le suivant : si on inscrit dans un cube un cylindre ayant ses bases situées dans des parallélogrammes[1] opposés, et sa surface

1. Le contexte montre qu'il s'agit d'un carré.
2. Le cylindre est donc tangent aux quatre faces du prisme.

tangente aux quatre plans restants, et si on inscrit dans le même cube un autre cylindre, ayant ses bases dans deux autres parallélogrammes et sa surface tangente aux quatre plans restants, la figure comprise entre les surfaces des cylindres et située à l'intérieur des deux cylindres est équivalente aux deux tiers du cube entier. Mais ces théorèmes diffèrent de ceux qui ont été trouvés antérieurement ; car dans ceux-là nous avons comparé les volumes de figures, comme les paraboloïdes, les hyperboloïdes et les ellipsoïdes de révolution, et les segments de ces figures, à des volumes de cônes et de cylindres, mais aucune de ces figures n'a été trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans, alors que chacune de ces figures, comprises entre deux plans et des surfaces cylindriques, est trouvée équivalente à une figure solide limitée par des plans.

Ce sont donc les démonstrations de ces théorèmes que je t'envoie, rédigées dans ce livre.

M'apercevant, comme je l'ai déjà dit, que tu es studieux, que tu domines d'une manière remarquable les questions de philosophie et que tu sais apprécier à sa valeur l'enquête mathématique sur des problèmes nouveaux qui se présentent, j'ai jugé à propos de te décrire, et de développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique. Mais je suis persuadé que cet outillage peut servir même pour la démonstration des théorèmes ; certaines propriétés, en effet, qui m'étaient d'abord apparues comme évidentes par la mécanique, ont été démontrées plus tard par la géométrie, parce qu'une étude faite par cette méthode n'est pas suceptible de démonstrations ;

car il est plus aisé d'édifier la démonstration après avoir acquis préalablement quelque connaissance des objets de la recherche au moyen de cette méthode que de chercher sans la moindre connaissance. Pour cette raison, de ces propositions sur le cône et la pyramide, dont Eudoxe fut le premier à trouver la démonstration, en particulier des théorèmes affirmant que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme, qui ont même base et même hauteur, on doit attribuer une part notable à Démocrite, qui le premier a formulé l'énoncé au sujet de la figure indiquée sans en donner une démonstration. Or il m'arrive que, aussi pour les propositions que je vais exposer maintenant, la découverte m'est venue de la même manière que pour les propositions précédentes ; aussi ai-je voulu rédiger et publier cette méthode, à la fois parce que j'en ai parlé antérieurement[1] et que j'ai voulu éviter de paraître à certains avoir proféré de vaines paroles, et parce que je suis convaincu d'apporter une contribution très utile à la recherche mathématique. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me sont pas encore venues à l'esprit.

Je rédige donc en premier lieu la proposition qui fut aussi la première à m'être révélée par la mécanique, à savoir que tout segment de parabole est équivalent aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur, ensuite une à une les propositions qui ont été examinées de la même manière. La fin du livre sera consacrée aux démonstrations géométriques des théorèmes dont je t'avais envoyé les énoncés antérieurement.

LEMMES

1. Si on retranche une grandeur d'une grandeur, et si le même point est centre de gravité à la fois de

1. Cf. *Quadr. parab.*, fin de la lettre à Dosithée.

la grandeur entière et de la grandeur retranchée, ce même point est le centre de gravité de la grandeur qui reste.

2. Si une grandeur est retranchée d'une grandeur sans que le même point soit centre de gravité à la fois de la grandeur entière et de la grandeur retranchée, le centre de gravité de la grandeur restante est situé sur le prolongement de la droite joignant les centres de gravité de la grandeur entière et de la partie retranchée, à l'extrémité d'un segment découpé dont le rapport au segment compris entre les centres de gravité indiqués est égal au rapport entre le poids de la grandeur retranchée au poids de la grandeur restante[1].

3. Si les centres de gravité d'un nombre aussi élevé qu'on voudra de grandeurs sont situés sur la même droite, le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs sera, lui aussi, situé sur la même droite[2].

4. Le centre de gravité de tout segment de droite est le point qui divise le segment en deux parties égales[3].

5. Dans tout triangle le centre de gravité est le point d'intersection des droites menées des sommets du triangle aux milieux des côtés[4].

6. Dans tout parallélogramme le centre de gravité est le point de rencontre des diagonales[5].

7. Le centre de gravité d'un cercle est le centre même du cercle.

8. Dans tout cylindre le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

9. Dans tout prisme le centre de gravité est le point qui divise l'axe en deux parties égales.

10. Dans tout cône le centre de gravité est situé sur l'axe, en un point qui divise l'axe de manière que le segment situé du côté du sommet soit triple du segment restant.

1. Cf. *De l'équil. des fig. planes* I, 8.
2. Cf. *ibid.* I, 4 ; I, 5 ; II, 2.
3-5. Cf. notes complémentaires.

Annexe 2

[...]

1.

Soit le segment ABΓ compris entre la droite AΓ et la parabole ABΓ ; divisons AΓ en deux parties égales par le point Δ, menons la parallèle ΔBE au diamètre et les droites AB et BΓ joignant B à A et à Γ.

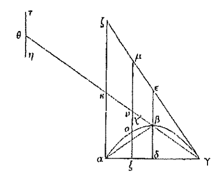


Fig. 121

Je dis que le segment ABΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle ABΓ.

Menons des points A et Γ la droite AZ parallèle à ΔBE et la droite ΓZ tangente au segment et prolongeons ΓB jusqu'au point K ; soit ΓK égal à KΘ. Imaginons que ΓΘ soit un levier de centre K, et choisissons une parallèle MΞ à EΔ.

Dès lors, comme ΓBA est une parabole[1], que ΓZ est une tangente et que ΓΔ est mené d'une manière ordonnée, EB est égal à BΔ, comme cela a été démontré dans les *Eléments*[2] ; pour cette raison, et parce que ZA et MΞ sont parallèles à EΔ, MN est égal[3] à NΞ et ZK égal à KA. Et comme ΓA est à AΞ comme MΞ est à ΞO, comme cela est démontré dans un lemme[4], que ΓA est à AΞ comme ΓK est à KN, et que, enfin, ΓK est égal à KΘ, le rapport de ΘK à KN est égal au rapport de MΞ à ΞO, Et puisque le point N est le centre de gravité[5] du segment de droite MΞ, parce que MN est égal à NΞ, si nous plaçons le segment de droite TH, égal à ΞO, de manière que son centre de gravité soit le point Θ et que TΘ soit égal à ΘH, le segment de droite TΘH fera équilibre au segment de droite MΞ restant en place, parce que ΘN est coupé en raison inverse des poids TH et MΞ et que ΘK est à KN comme[6] MΞ est à HT ; il s'ensuit que le centre de gravité de la grandeur composée de ces deux poids[7] est le point K ; de la même manière aussi toutes les parallèles à EΔ menées dans le triangle ZAΓ feront équilibre, en restant en place, aux segments, découpés d'eux par la parabole et transportés au point Θ de manière que le centre de gravité de la grandeur composée des uns et des autres soit le point K. Et du moment que le triangle ΓZA est constitué par les segments de droite menés dans le triangle ΓZA, et le segment ABΓ constitué par les segments de droite pris dans le segment (sc. de parabole) de la même manière que ΞO, le triangle ZAΓ fera équilibre, en restant en place, au segment de parabole placé autour du centre

1. παραβολή dans le texte grec, mot qui provient d'une interpolation ; Archimède appelle la parabole ὀρθογωνίου κώνου τομά.
2-7. Cf. notes complémentaires.

de gravité Θ, l'équilibre se faisant par rapport au point K, de façon que le centre de gravité de la somme des deux grandeurs soit le point K. Divisons dès lors ΓK par le point X de manière que ΓK soit triple de KX ; le point X sera donc le centre de gravité du triangle AZΓ, comme cela a été démontré dans le livre *Des équilibres*[1]. Du moment donc que le triangle ZAΓ, restant en place, fait équilibre, par rapport au point K, au segment BAΓ placé autour du centre de gravité Θ, et que le centre de gravité du triangle ZAΓ est le point X, le rapport du triangle AZΓ au segment ABΓ placé autour du centre Θ est égal au rapport de ΘK à XK. Or ΘK est triple de KX ; il s'ensuit que le triangle AZΓ est à son tour triple du segment ABΓ. Mais le triangle ZAΓ est aussi quadruple du triangle ABΓ, parce que ZK est égal à KA, et AΔ égal[2] à ΔΓ ; par conséquent, le segment ABΓ est équivalent aux quatre tiers du triangle ABΓ.

2.

La proposition qui précède n'est, certes, pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie ; pour cette raison, voyant que la propriété n'est pas démontrée, mais pressentant que la conclusion est vraie, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et publiée antérieurement[3].

[...]

1. Cf. lemme 6 et *De l'équil. des fig. planes* I, 15.
2-3. Cf. notes complémentaires.

LIVRE SINGULIER UTILE TOUCHANT L'ART ET PRATICQUE DE GEOMETRIE, COMPOSE NOUVELLEMENT EN FRANCAIS PAR MAITRE CHARLES DE BOUVELLES, CHANOINE DE NOYON 1542

prologue

Comparaiſon de. Larithmetique à la Geometrie.

LA ſcience & art de Geometrie, eſt en proportion pareille & reſpondante & ſubalterne à la noble ſcience Darithmetique, & comme depẽdãt dicelle Entre les deux ſœurs y a pareille differẽce, cõme entre lame & le corps. Larithmetique eſt dediee aux nõbres, leſquelz ſont giſans & ſituez en lame. La Geometrie cõſidere les meſures, les quantitez & dimenſions corporelles, leſquelles ſont poſees & ſituees au corps, & en toute choſe ſolide & materiele. Parquoy Larithmetique en excellence de dignité & de naturele perfection, ſurmonte la Geometrie dung hault degré: nonobſtant que les principes de lune & de laultre ſont communs, & enſemble correſpondans: comme peuent aſſez teſmoigner ceulx, qui en toutes les deux ſciences ſont bien inſtruictz. Larithmetique eſt compriſe ſur quatre principes ſeulement: ceſtaſcauoir ſur vng, deux, trois, & quatre, leſquelz conioinctz enſemble font le nombre de dix: lequel ſelon lopinion de Pythagoras, & de tous philoſophes, eſt fort myſtique, & de grande perfection. Car auſſi en luy par les quatre premiers nõbres deſſuſdictz, eſt fondee toute la ſciẽce de Muſique, & toutes les cõſonances & harmonies dicelle. La Geometrie par limitatiõ de Larithmetique eſt pareillemẽt fondee & cõtenue ſur quatre principes ſeulemẽt, nommez en latin, Punctũ, Linea, Superficies, Corpus: Ceſtadire le poĩct, la ligne, la plaine ou ſupfice, & le corps. Et na aultre choſe à conſiderer & à contempler que ces quatre, leſquelles ſont les meſures de toute choſe ferme & ſolide, ſoit celeſte, ou ſoit contenue ſoubz le ciel. Et de ces quatre choſes dirons icy particulierement, & commencerons par vne table generale, & vtile à toute la Geometrie.

Senſuyt la table generale de tout ce qui eſt traicté en la Geometrie.

Quelques éclairages sur l'enseignement de l'arithmétique depuis le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle

BOYÉ Anne
LEFORT Xavier
IREM des Pays de Loire (France)

Abstract

L'Arithmétique avait, en France, disparu depuis un certain temps des programmes de Mathématiques au lycée. Elle réapparaît progressivement ces dernières années, au collège, pour que, sans doute, les élèves aient quelques notions sur les nombres, au lycée (en terminale scientifique, spécialité maths), de manière plus approfondie.

A partir de quelques manuels du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle à nos jours, utilisés dans l'enseignement français, il nous a paru à propos de se pencher sur les différents exposés et les niveaux des connaissances exigées. Si l'enseignement est resté élémentaire, sans influence de la tradition diophantienne, jusqu'aux années 1750, on peut voir apparaître de nouveaux contenus dans les ouvrages de la fin de ce siècle.

Beaucoup de questions se posaient quant à ce qu'il fallait enseigner en Arithmétique. Le niveau devait-il rester élémentaire ou bien être approfondi ? La question du statut du nombre pouvait-elle être abordée ? Celle-ci engage alors une réflexion mathématique générale, et l'enseignement ne pouvait plus se contenter de techniques purement calculatoires.

L'atelier proposé à l'Université d'Été Européenne de Louvain-la-Neuve/Leuven a été conçu autour d'un nombre assez important de textes dont nous avons essayé d'extraire les plus significatifs, à commencer par le premier. En effet, bien que plus ancien, celui-ci célèbre avec conviction l'Arithmétique comme surmontant la Géométrie "en excellence de dignité et de naturelle perfection".

L'Arithmétique en sa perfection

François Legendre
1° édition : 1745

Preuve de la Multiplication par 9

Cette Règle, comme les précédentes, doit se prouver par son contraire, mais attendu que je n'ai pas encore expliqué la Division, qui est le contraire de la Multiplication, je me servirai par supplément de la preuve par 9, laquelle se fait ainsi.
Remarquez que c'est la preuve de la Multiplication suivante que j'explique, où le nombre à multiplier est 706, le multiplicateur 57, et le produit 40 242.
Il faut faire une croix, puis tirer la preuve de 706 dont le surplus de 9 est 4, qu'il faut poser en haut de la croix.
Ensuite, il faut tirer la preuve de 57, et écrire le surplus de 9, qui est 3, au bas de la croix. Cela fait, il faut multiplier ces deux restes l'un par l'autre, savoir 4 par 3 vient 12, dont le surplus de 9 est 3 qu'il faut écrire au côté gauche de la croix. Enfin il faut tirer la preuve de 40 242 qui est le produit, et écrire le surplus de 9, qui sera aussi 3, au bras droit de la même croix ; d'où l'on conclut que la règle est bien faite, d'autant qu'il faut que le quatrième reste que l'on trouve soit égal au troisième qu'on a posé.
Et c'est une règle générale pour la preuve par 9 de toutes les règles de Multiplications et de divisions qui suivront :

Exemple de la Multiplication pour la pratique de la preuve par 9.

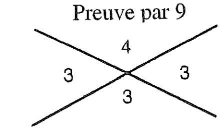
A 57 livres l'arpent de terre, combien 706 arpents ?

706 Arpents à multiplier
par 57 livres

4942
3530

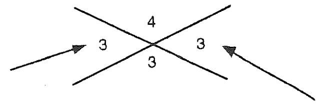
40242

Preuve par 9



Les manuels d'enseignement de F. Legendre eurent un certain succès dès leur parution, puisqu'ils furent réédités plusieurs fois. Ils furent en particulier utilisés dans les écoles tenues par les Oratoriens.
Il explique ici la preuve par 9 de la multiplication soulignant toutefois que la meilleure preuve serait celle de l'opération contraire : la division.
Son explication n'est pas suivie de vraie justification, ce qui est d'usage à l'époque dans les ouvrages d'enseignement ; il explique à travers un exemple, ce qui est aussi habituel.
"La preuve de 706 dont le surplus de 9 est 4" signifie que $7 + 0 + 6 = 13 = 9 \times 1 + 4$.
De la même façon : $5 + 7 = 12 = 9 \times 1 + 3$.
Enfin : $4 \times 3 = 12 = 9 \times 1 + 3$ (multiplication des restes).
Le même procédé est appliqué à 40 242 le produit de 706 par 57.
$4 + 0 + 2 + 4 + 2 = 12 = 9 \times 1 + 3$.

La disposition classique est :



" surplus " de " 4 × 3 "

" surplus de 40242 "

Il faut que les deux " surplus " finaux soient égaux, sinon la multiplication est sûrement fausse.
Voici comment l'on pourrait justifier cette " preuve par 9 " :
$10\,n$ a pour reste 1 dans la division par 9, quel que soit n entier. (Ou encore : $10 \equiv 1$ (9) donc $10n \equiv 1(9)$).
Donc 706 qui est $7 \times 102 + 0 \times 10 + 6$ a pour reste le même que $7 + 6 = 13$, or $13 = 9 \times 1 + 4$, donc 706 a pour reste 4 dans la division par 9.($706 \equiv 4$ (9)).
De la même façon 57 a le même reste que $5 + 7 = 12$, or $12 = 9 \times 1 + 3$, donc 57 a pour reste 3 dans la division par 9. ($57 \equiv 3$ (9)).
Le produit 706×57 a le même reste que le produit des restes, donc que $4 \times 3 = 12$, et $12 = 9 \times 1 + 3$. Donc 706×57 a pour reste 3. ($706 \times 57 \equiv 4x3$ (9) $\equiv 3$ (9)).
Il faut donc vérifier que 40 242 a bien ce même reste.
40 242 a pour reste le même que $4 + 0 + 2 + 4 + 2 = 12$, c'est à dire 3.($40\,242 \equiv 3(9)$).
La " preuve " est vérifiée.

Etienne BÉZOUT est né à Nemours en 1730 et mort près de Fontainebleau en 1783. S'il est surtout connu pour le théorème de "BACHET-BÉZOUT", dont le texte proposé présente plus une illustration qu'un réel énoncé, cet auteur a d'abord travaillé à l'élaboration d'un "Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine" en 6 volumes. Il est à remarquer que l'extrait se trouve dans le troisième tome, consacré à l'algèbre, et non pas dans le premier, intitulé "Arithmétique". Ce premier tome contient, en plus des définitions et opérations élémentaires, la théorie des logarithmes.
Ce cours parut en France de 1764 à 1771, et les rééditions des trois premiers volumes témoignent de son succès, y compris hors des frontières du royaume. BÉZOUT a publié également en 1779 une "Théorie des équations algébriques", ajoutant ainsi à son œuvre pédagogique, où les récentes avancées mathématiques ne sont pas absentes, une dimension théorique non négligeable.

ÉTIENNE BÉZOUT

Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine

Si l'on proposait cette question: *Trouver deux nombres qui pris ensemble fassent 24* en nommant x l'un de ces nombres, & y l'autre, on aurait $x+y = 24$, équation de laquelle on tire $x = 24-y$. Or cette question est susceptible d'une infinité de solutions, si par x et y on entend indifféremment des nombres entiers, ou des nombres positifs ou négatifs: il suffit, pour y satisfaire, de prendre pour y tel nombre qu'on voudra, & de conclure la valeur de x de l'équation $x = 24 - y$, en substituant pour y le nombre qu'on aura pris arbitrairement; ainsi si l'on suppose successivement

$$y = 1, y = 1\frac{1}{2}, y = 2, y = 2\frac{2}{3}, \&c,$$

on aura

$$x = 23, x = 22\frac{1}{2}, x = 22, x = 21\frac{1}{3}\&c.$$

Mais si l'on ne veut que des nombres entiers & positifs, alors le nombre des solutions est limité; car pour que x soit positif, il faut que y ne soit pas plus grand que 24. Et puisqu'on ne veut que des nombres entiers, il est évident que l'équation ne peut avoir en tout que 25 solutions en y comprenant 0 en sorte que supposant successivement $y = 0, y = 1, y = 2, y = 3$, &c on aura $x = 24, x = 23, x = 22, x = 21$, &c
Lorsqu'on impose la condition que les nombres demandés soient des nombres entiers & positifs, on ne voit pas toujours aussi facilement que dans l'exemple précédent, comment on peut satisfaire à cette condition: les questions suivantes sont propres à le faire connaître.

Question première. *On demande en combien de manières on peut payer 542 livres, en donnant des pièces de 17 livres & recevant en change des pièces de 11 livres.*

Représentons par x le nombre des pièces de 17 liv.; & par y celui des pièces de 11 liv.; on payera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pièces de 11 liv. on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x - 11y$; & puisqu'on veut payer 542 liv. on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de y, c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coefficient, & nous aurons $y = \frac{17x-542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation, mais comme la question exige que x & y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement. La valeur de $y = \frac{17x-542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \frac{6x-3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x-3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre; on aura $\frac{6x-3}{11} = u$, & par conséquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u+3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \frac{5u+3}{6}$, il faudra donc que $\frac{5u+3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier; on aura $\frac{5u+3}{6} = t$, & par conséquent $5u + 3 = 6t$ & $u = \frac{6t-3}{5} = t + \frac{t-3}{5}$; il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ fasse un nombre entier: soit s ce nombre entier, on aura $\frac{t-3}{5} = s$, & par conséquent $t = 5s + 3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y: puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$, en mettant pour t la valeur $5s + 3$ on aura $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s + 3$; & puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s + 6$; enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x-542}{11}$, en mettant pour x sa valeur, on aura $y = \frac{187s+102-542}{11} = 17s - 40$.

Ainsi les valeurs correspondantes de x & de y sont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3; en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire, plus grand que 2.

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini; ainsi posant successivement $s = 3, s = 4, s = 5, s = 6, s = 7$, &c, on aura les valeurs correspondantes de x & de y comme il suit:

$$\begin{array}{llllll} x & = & 39 & y & = & 11 \\ & = & 51 & & = & 28 \\ & = & 61 & & = & 45 \\ & = & 72 & & = & 62 \\ & = & 83 & \&c & = & 79. \end{array}$$

En fait pendant une période assez longue, l'enseignement de l'arithmétique fut cantonné à l'apprentissage des quatre opérations, et de leurs applications à des problèmes concrets de la vie courante, du commerce, des partages etc. ... A vrai dire l'arithmétique en tant que théorie et étude des nombres n'était pas vraiment une préoccupation des mathématiciens.
Fermat au XVII$^{\text{ème}}$ siècle avait retrouvé la tradition de Diophante, au travers de la traduction faite par Bachet de Meziriac en 1621. Fermat définit, le premier, le domaine des entiers comme le domaine propre de l'arithmétique. Cependant, dans les faits, ses recherches sur les nombres avaient peu influencé les mathématiciens de son temps. Il faudra attendre les générations suivantes pour que Euler par exemple reprenne ses résultats, pour les compléter ou les démontrer et faire avancer une science qui bientôt sera désignée de différents noms pour bien marquer qu'il ne s'agit plus d'arithmétique élémentaire. Nous trouverons par exemple : Théorie des nombres[1], arithmétique supérieure, ···
Il devient intéressant, à partir de la fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle en arithmétique comme dans les autres domaines des mathématiques, d'étudier les interactions entre " le savoir savant ", et le " savoir enseigné ". Les mathématiciens sont en effet de plus en plus chercheurs et enseignants, au niveau du supérieur du moins, et avec plus ou moins de retard, les découvertes et résultats nouveaux sont pris en compte dans les programmes d'enseignement des dernières classes du secondaire.
Gauss, en particulier, avec ses *Disquisitiones arithmeticæ* (1801) transforme la théorie des nombres qui était plutôt un amas de résultats isolés en une nouvelle discipline douée de méthodes propres, puissantes et très profondes.
Dans la deuxième moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle les programmes des établissements secondaires vont peu à peu intégrer les progrès des connaissances mathématiques, et l'on pourra trouver dans les manuels d'arithmétique pour la préparation au baccalauréat, la théorie des résidus quadratiques, étudiée depuis Euler et développée dans Theoria residuorum biquadraticorum de Gauss (1831) et la théorie des congruences exposée dans les *Disquisitiones*. Bien sûr, comme par exemple dans le manuel de Combette que nous présentons plus bas, ces résultats sont souvent présentés en annexe, en complément. Cela témoigne cependant du niveau de ce que l'on enseignait alors en arithmétique. Notons d'ailleurs que la théorie des nombres est redevenue arithmétique.
Nous notons déjà ce désir de sortir l'arithmétique enseignée dans le secondaire, du niveau élémentaire, dans le texte suivant extrait d'un ouvrage publié en 1842 à Saint-Malo, dont l'auteur, Fournier, indique qu'il a fréquemment employé la notation algébrique pour démontrer les principes de l'arithmétique, " *parce que l'emploi de ce procédé m'a paru préférable à celui de certains raisonnements, parfois un peu longs, et qui sont souvent très bien débités par les élèves, sans être parfaitement compris* ".

[1] A.M. LEGENDRE, 1798

Il s'agit de :

ELEMENTS D'ARITHMETIQUE ET D'ALGEBRE
à l'usage des écoles royales de navigation
La quatrième partie comprend nombre de résultats et de théorèmes, dont le suivant:

"Tout nombre N qui divise un produit AB, et qui est premier avec un des facteurs, divise nécessairement l'autre facteur".

"Supposons que N soit premier avec A, il divisera B.

Les nombres A et N étant premiers entre eux, si on leur applique le procédé (l'algorithme d'Euclide), on parviendra nécessairement à un reste égal à l'unité.

Cela posé, supposons d'abord A plus grand que N. Représentant par $Q, Q', Q'' \cdots$ les quotients consécutifs que l'on obtiendrait en appliquant à ces deux nombres le procédé (l'algorithme d'Euclide) et par $R, R', R'' \ldots$ les restes successifs des diverses divisions, nous aurons:

$$\begin{aligned} A &= NQ+R \\ N &= RQ'+R' \\ R &= R'Q''+R'' \\ R' &= R''Q'''+R'''. \end{aligned}$$

Multiplions par B les deux membres de chacune de ces égalités, et divisant ensuite par N, nous aurons encore:

$$\frac{AB}{N} = BQ+\frac{BR}{N} \tag{1}$$
$$B = \frac{BRQ'}{N}+\frac{BR'}{N} \tag{2}$$
$$\frac{BR}{N} = \frac{BR'Q''}{N}+\frac{BR''}{N} \tag{3}$$
$$\frac{BR'}{N} = \frac{BR''Q'''}{N}+\frac{BR'''}{N}. \tag{4}$$

Dans l'égalité (1), le premier membre $\frac{AB}{N}$ est un nombre entier, puisque, par hypothèse, N divise AB; donc le second membre $BQ+\frac{BR}{N}$ sera aussi un nombre entier. Mais BQ est un nombre entier, donc $\frac{BR}{N}$ sera aussi un entier et N divise BR.

Dans l'égalité (2), le premier membre B étant un nombre entier, le second membre $\frac{BRQ'}{N}+\frac{BR'}{N}$ sera aussi un nombre entier. Mais on vient de démontrer que N divise BR, donc il divise BRQ' et $\frac{BRQ'}{N}$ sera un nombre entier, et par conséquent $\frac{BR'}{N}$ sera aussi un nombre entier; d'où il résulte que N doit diviser BR'.

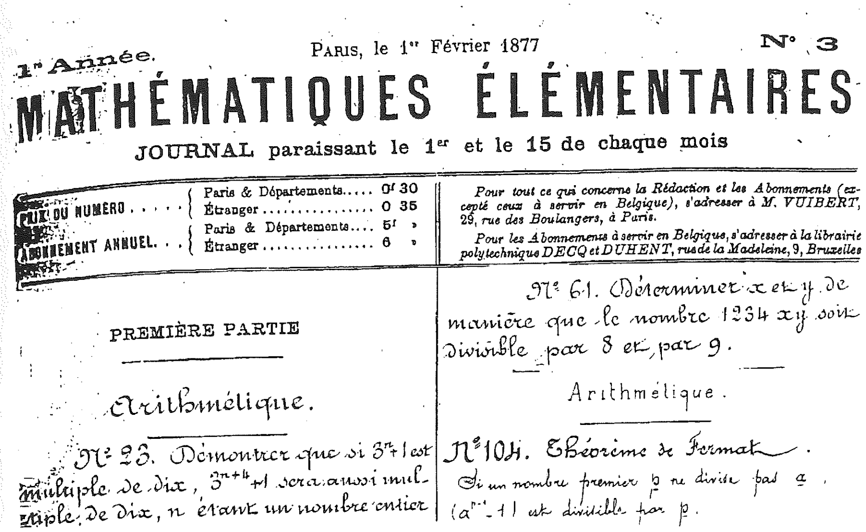
Dans la troisième égalité, $\frac{BR}{N}$ étant un nombre entier, d'après ce qui a été démontré dans la première, le second membre $\frac{BR'Q''}{N}+\frac{BR''}{N}$ sera un nombre entier. Mais N divise BR', ainsi qu'on vient de le démontrer, il divisera $BR'Q''$ et par conséquent $\frac{BR''}{N}$ sera un nombre entier, d'ou il résulte que N doit diviser BR''.

On démontrerait de la même manière que N devra diviser les produits de B par chacun des restes successifs que l'on obtiendrait en continuant l'opération commencée sur les nombres A et N pour trouver leur plus grand commun diviseur. Mais les nombres A et N étant premiers entre eux, cette opération conduira nécessairement à un reste égal à l'unité; donc le nombre N divisera le produit de B par l'unité, et par conséquent B lui-même.

Si N était plus grand que A, au lieu de diviser A par N, on diviserait N par A; puis on diviserait A par R, R par R', R' par R'' et ainsi de suite. Du reste, le raisonnement serait absolument le même."

Le *"Journal des Mathématiques élémentaires"* est un périodique bimensuel français de la seconde moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle; il fournissait aux enseignants à la fois un bulletin de liaison, un recueil d'exercices toujours renouvelé, mais aussi un stimulant certain, puisque les textes proposés émanaient des lecteurs mêmes, comme autant d'exercices soumis à la sagacité de leurs collègues. Outre la remarquable calligraphie, il faut noter le souci toujours théorique des énoncés. Sans doute la part très minoritaire de l'Arithmétique conduit à penser que celle-ci restait marginale dans l'enseignement, mais elle permet de retrouver les problèmes traditionnels de ce domaine.

Un des numéros de l'année 1877 proposait entre autres le théorème de FERMAT :


1re Année. PARIS, le 1er Février 1877 N° 3

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

JOURNAL paraissant le 1er et le 15 de chaque mois

PRIX DU NUMÉRO	Paris & Départements	0f 30
	Étranger	0 35
ABONNEMENT ANNUEL	Paris & Départements	5f »
	Étranger	6 »

Pour tout ce qui concerne la Rédaction et les Abonnements (excepté ceux à servir en Belgique), s'adresser à M. VUIBERT, 29, rue des Boulangers, à Paris.

Pour les Abonnements à servir en Belgique, s'adresser à la librairie polytechnique DECQ et DUHENT, rue de la Madeleine, 9, Bruxelles

PREMIÈRE PARTIE

Arithmétique.

N° 23. Démontrer que si 3^n+1 est multiple de dix, $3^{n+4}+1$ sera aussi multiple de dix, n étant un nombre entier

N° 61. Déterminer x et y de manière que le nombre 1234 xy soit divisible par 8 et par 9.

Arithmétique.

N° 104. Théorème de Fermat.

Si un nombre premier p ne divise pas a, $(a^{p-1}-1)$ est divisible par p.

La démonstration proposée en correction considère la suite des multiples de a ; p étant premier "absolu", il ne divisera aucun des multiples de a jusqu'à $(p-1).a$, et la division de ces multiples par p donne $(p-1)$ restes différents.

En effet, si deux restes sont égaux:

$$ma = pq_m + r_m \text{ et } na = pq_n + r_m$$

donc

$$a(m-n) = p(q_m - q_n)$$

et p devrait diviser un multiple de a plus petit que $(p-1).a$.

Ces restes sont évidemment plus petits que $p-1$, ce sont donc tous les nombres de 0 à $p-1$; on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} a.2a.3a.\cdots.(p-1).a &= mp + r_1 r_2 r_3 \cdots r_{p-1} \\ (p-1)!.a^{p-1} &= mp + (p-1)! \\ (p-1)!(a^{p-1}-1) &= mp. \end{aligned}$$

Comme p ne divise pas $(p-1)!$, il divise a^{p-1}.

(la notation ! ne figure pas dans le texte de la correction)

A la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, et dans le cadre de la préparation au baccalauréat français, l'inspecteur général de l'éducation E. COMBETTE publiait un cours d'Arithmétique très complet et suffisamment remarquable pour être réédité à de nombreuses reprises jusqu'au début du siècle suivant. Il s'agit cette fois non seulement d'un ouvrage à but pédagogique, mais encore d'un ouvrage quasiment institutionnel, vu la qualité de son auteur.
Le contenu, s'il comprend l'Arithmétique élémentaire et se complète d'applications pratiques (calculs d'erreurs, règles d'alliage...) ne se dispense pas de résultats théoriques et de leurs démonstrations. La théorie des nombres premiers est complétée par un chapitre conséquent, et le théorème de FERMAT s'y retrouve, avec bien sûr sa démonstration, et sa généralisation (dite théorème d'EULER).
Le texte proposé ci-après est tiré de la huitième édition et expose donc le théorème de FERMAT, précédé d'un lemme nécessaire. La démonstration est remarquablement claire et concise, rejoignant, sans doute dans un autre ordre, celle du "Journal des Mathématiques élémentaires".

§ II. — THÉORÈMES DE FERMAT ET D'EULER.

237. — THÉORÈME XXV. — *Si* A *est premier avec* B, *les restes de division par* B *des* (B — 1) *premiers multiples de* A :

$$A\times 1,\ A\times 2,\ A\times 3 \ldots A\times(B-1)$$

forment, dans un certain ordre, la suite des (B — 1) *premiers nombres entiers.*

1° *Aucun de ces restes n'est égal à zéro*, car B ne peut diviser aucun de ces multiples de A, puisqu'il diviserait le second facteur qui est inférieur à B.

2° *Tous ces restes sont différents*, car si deux multiples A × K et A × K′ donnaient des restes égaux, leur différence :

$$A\times(K'-K)$$

serait divisible par B (104), ce qui est impossible puisque (K′ — K) est inférieur à B.

Donc ces restes, en nombre (B — 1), tous différents et inférieurs à B, forment, dans un certain ordre, la suite des nombres :

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ B-2,\ B-1.$$

238. — Corollaire. — *Si* A *est premier avec* B, *les restes de division par* B *des produits de* A *par chacun des entiers premiers avec* B *et inférieurs à* B, *sont dans un certain ordre les entiers premiers avec* B *et inférieurs à* B.

Ces restes sont tous différents, aucun d'eux n'est nul, et ils sont tous premiers avec B; car B étant premier avec le dividende est aussi premier avec le reste.

239. — THÉORÈME XXVI. — (THÉORÈME DE FERMAT.) *Si p est un nombre premier absolu qui ne divise pas a, p divise*

$$a^{p-1}-1$$

En effet, soit

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_{p-1}$$

les restes de division par p des nombres :

$$a\times 1,\ a\times 2,\ a\times 3,\ \ldots\ a\times(p-1):$$

le reste de division par p du produit de ces $(p-1)$ multiples de a sera le même que le reste de division par p du produit des restes (115) :

$$r_1 r_2 r_3 \ldots\ r_{p-1}.$$

Si donc nous représentons par N le produit

$$1\times 2\times 3 \ldots \times(p-1),$$

d'où il résultera (237) :

$$N = r_1\times r_2\times r_3 \ldots \times r_{p-1}.$$

nous aurons :

$$a^{p-1}\times N - N = \text{m}^{\text{e}} \text{ de } p,$$

donc :

$$(a^{p-1}-1)\times N = \text{m}^{\text{e}} \text{ de } p.$$

or, p est premier absolu, il doit donc diviser l'un des deux facteurs du premier membre (168). — De plus, p est premier avec chacun des nombres qui lui sont inférieurs, c'est-à-dire avec tous les facteurs du produit N, c'est-à-dire avec ce produit (171); donc p divise $(a^{p-1}-1)$, c'est ce qu'il fallait prouver.

Ainsi, 13, nombre premier ne divise pas 25, donc en divisant 25^{12} par 13 on aura pour reste l'unité.

L'enseignement en général, et l'enseignement des mathématiques en particulier va subir tout au long du XX$^{\text{ème}}$ siècle l'influence à la fois du politique et des autorités scientifiques, plus encore que dans le siècle précédent. C'est en effet le siècle de la démocratisation progressive de l'enseignement secondaire, et les décisions sur les programmes, les orientations pédagogiques, touchent une part de plus en plus grande de la population, donc de la vie économique et sociale d'un pays. Le siècle s'ouvre avec le début de la réforme des programmes de 1902, sur un débat entre la valeur éducative de la science, qui doit donc être enseignée à tous de manière égalitaire et un apprentissage utilitaire qui devrait donc être différencié selon les aspirations de chacun. Ce débat semble-t-il n'a cessé tout au long du siècle.
L'enseignement de l'arithmétique sera bien sûr marqué du sceau des réformes successives.
Durant la première moitié du siècle, l'on passe rapidement de l'arithmétique pratique de la première classe du secondaire à des problèmes d'un niveau non élémentaire. Ainsi, il était nécessaire, pour le brevet de 1920, de savoir non seulement ce qu'est un plus grand commun diviseur, mais aussi de le rechercher par la méthode de décomposition en facteurs premiers.
La première moitié du siècle a vu les lycéens français se pencher, dès les premières classes, sur les caractères de divisibilité, les plus petits multiples communs et les plus grands communs diviseurs.
Peu à peu, la notion de structure va prendre une importance grandissante dans les mathématiques, et pénétrer les programmes des lycées dès le début des années 1960. Le contenu est cette fois très conséquent, puisqu'il inclut l'étude de l'anneau Z des entiers relatifs et les congruences. On recherche le plus grand commun diviseur par l'algorithme d'EUCLIDE, et on parle sans hésiter de relation d'équivalence... Nous ne sommes pourtant pas encore à la révolution des "Maths modernes" qui marqueront l'enseignement en France comme ailleurs !
Ces années 70 vont couronner l'arithmétique comme une science particulièrement abstraite, un endroit privilégié d'apprentissage de la notion de structure. Dès le début de l'enseignement secondaire le PGCD de deux nombres sera connu par exemple comme le plus grand élément de l'intersection de l'ensemble des diviseurs de chacun de ces deux nombres, mais le sens élémentaire restera sûrement caché aux yeux de la plupart des élèves. C'est le triomphe de la conception ensembliste des entiers.
En réaction à cette conception, l'arithmétique théorique va disparaître du programme des dernières classes du lycée. Seules restent au début des années 80 dans les classes des collèges (11 à 15 ans) les notions de décomposition en produit de facteurs premiers, de PGCD et de PPCM, d'un point de vue très pratique, essentiellement pour les calculs et les simplifications de fractions par exemple.
Peu à peu, le collège devenait ouvert à tous, les préoccupations pédagogiques prenant le pas sur les contenus, il se fait jour que les élèves doivent construire eux-mêmes leur savoir. Cette arithmétique très élémentaire va donc aussi disparaître des programmes des collèges français.
Jusqu'à ces dernières années, un élève français avait son premier contact avec l'arithmétique en arrivant dans l'enseignement supérieur, s'il commençait des études de mathématiques.
Comme souvent l'autorité varie, la dernière réforme en cours vient de réintroduire une petite dose d'apprentissage du nombre dans les classes de collège : quelques caractères de divisibilité, recherche de PGCD, reconnaissance des nombres premiers dans les futurs programmes des classes de seconde (premières classes des lycées, élèves d'environ 16 ans).
Puis l'arithmétique un peu savante est réapparue il y a deux ans au programme de la classe de terminale scientifique des lycées, pour les élèves qui choisissent la spécialité "mathématiques". Cet enseignement cependant n'a que peu de rapport avec celui qui était dispensé du temps des " maths modernes ". La notion de structure n'est plus du tout à l'ordre du jour. L'accent est mis sur l'algorithmie, l'usage bien sûr de l'informatique. C'est que l'arithmétique a maintenant

une très grande importance pratique, par exemple dans la cryptographie. Apparemment, la connaissance du " nombre " n'est toujours pas une préoccupation. Utilité sociale, utilité pratique des mathématiques, formation de l'esprit ? Le débat est toujours le même, et l'histoire de l'enseignement de l'arithmétique en est une belle illustration.

Aperçu sur l'enseignement de l'arithmétique, en France, du XVII$^{\text{ème}}$ siècle à nos jours, au travers de quelques manuels.
Chronologie

Noms et dates	Savoir enseigné	Savoir savant
BACHET (1581-1638)		Traduction de Diophante Énoncé du théorème dit de " BACHET-BÉZOUT "
FERMAT (1601-1665)		
RIVARD (XVIII$^{\text{ème}}$)	Techniques de calcul. (Parfois l'arithmétique inclut les logarithmes)	
F. LEGENDRE (XVIII$^{\text{ème}}$)	" L'arithmétique en sa perfection " 1745	
EULER (1707-1783)		Recherches sur les nombres
BÉZOUT (1730-1783)	" Cours de mathématiques à l'usage des gardes... "	
BOSSUT (XVIII$^{\text{ème}}$) LACAILLE (XVIII$^{\text{ème}}$)	Manuels Techniques de calcul	
A.M. LEGENDRE (1752-1833)		" Essai sur la théorie des nombres " (1798)
GAUSS (1777-1855)		" Disquisitiones arithmeticae " (1801) Congruences.
FOURNIER (mi-XIX$^{\text{ème}}$) TOMBECK (XIX$^{\text{ème}}$) COMBETTE (XIX$^{\text{ème}}$)	Manuels	
FREGE (1848-1925)		" Les fondements de l'arithmétique " (1884)
PEANO (1858-1925)		Axiomes fondamentaux des entiers naturels
LESPINARD et PERNET	Manuel correspondant aux programmes de 1962	
Années 70-80	" Mathématiques modernes "	
Aujourd'hui		

Bibliographie

BELHOSTE, GISPERT, HULIN, *Les sciences au lycée*, Vuibert, Paris, 1996.

BKOUCHE, CHARLOT, ROUCHE, *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris, 1991.

COMBETTE, *Cours d'arithmétique*, Félix Alcan, Paris, 1893.

DE BOUVELLES, *Livre singulier touchant l'art et practique de géométrie, composé nouvellement en français par maître Charles de Bouvelles*, chanoine de Noyon.

DE COMBEROUSSE, *Cours de mathématiques*, tome I, Gauthier-Villars, Paris, 1900.

F. LEGENDRE, *L'arithmétique en sa perfection*, 1745.

FITZ-PATRICK, CHEVREL, *Exercices d'arithmétique*, Hermann, Paris, 1900.

FOURNIER, *Eléments d'arithmétique et d'algèbre à l'usage des écoles royales et de navigation*, 1842,

GAUSS, *Reherches arithmétiques*, 1801.

4 COURS D'ANALYSE.

la quantité opposée à $+a$. Ces remarques suffisent pour établir ce qu'on appelle *la règle des signes* [voyez la note I.re].

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On désigne une semblable quantité par une lettre prise ordinairement parmi les dernières de l'alphabet. On appelle au contraire quantité *constante*, et on désigne ordinairement par une des premières lettres de l'alphabet toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus; &c....

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un *infiniment petit* ou une quantité *infiniment petite*. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.

Lorsque les valeurs numériques successives

Conceptions et obstacles épistémologiques à propos du concept de limite d'une fonction et son influence sur l'enseignement et sur l'apprentissage de la notion

CONTRERAS DE LA FUENTE Ángel
SÁNCHEZ GÓMEZ Carmen
Université de Jaén (Espagne)

Abstract

Dans le développement du concept de limite d'une fonction et du point de vue épistémologique, on peut distinguer plusieurs étapes dans sa construction jusqu'à ce qu'il devienne objet de connaissance. C'est-à-dire, depuis la conception géométrique, liée aux principes d'Archimède et d'Eudoxe jusqu'à la conception métrico-analytique ($\varepsilon - \delta$) de Weierstrass, les conflits Socio-cognitifs qui ont jalonné l'évolution de la notion furent nombreux. Nous poserons les questions suivantes :

Est-il pertinent de poursuivre fidèlement l'enseignement de cette évolution historique ?

Quels obstacles épistémologiques sont apparus au cours de la progression du concept ?

Quels sont ceux qui se manifestent au moment de son enseignement et de son apprentissage ?

Comment envisager cet enseignement en fonction des élèves auxquels il s'adresse ?

Quels doivent être le temps employé à son enseignement et celui destiné à son apprentissage ?

En général, quelle en la transposition didactique appropriée à la notion de limite, qui convertirait le savoir scientifique en savoir scolaire ?

Durant l'atelier conformément aux idées de Contreras y Sanchez (1998) et Sanchez (1997), nous proposerons de travailler diverses situations extraites de l'analyse de manuels et des résultats obtenus à partir de questionnaires distribués aux étudiants sur l'enseignement du concept de limite où sont impliqués aussi bien les conceptions que les obstacles occasionnés par la dite notion.

Introduction

Dans un sens large, toute notion mathématique a une double dimension : une de type scientifique, comme élément conforme d'une théorie mathématique déterminée et l'autre liée à son statut comme objet d'enseignement, généralement dans les divers niveaux du système éducatif. Bien qu'il existe une relation entre ces deux dimensions, elles n'occupent pas le même espace social. Alors que la première concerne la communauté de chercheurs définie par un paradigme déterminé, restreint et donc un nombre réduit d'experts, la seconde concerne, avec plus ou moins d'extension, selon le niveau éducatif, une grande population scolaire inexperte. Par conséquent, au moment de réaliser l'enseignement de la notion il faut tenir compte de ces considérations, de telle façon que les énormes et significatives différences entre les dimensions scientifiques et celles de l'enseignement se reflètent dans la réalité, en évitant de tomber dans une conception "naïve" par rapport à l'enseignement qui est celle de croire que "ce qui s'explique clairement doit être compris par l'étudiant". En tenant compte des apports de Chevallard et Cols (1997), nous considérons que la connaissance mathématique est substantivement problématique et donc discutable au moment de son enseignement, étant très loin de "l'illusion de transparence" dans laquelle se trouvent de nombreux professeurs.

Un concept mathématique basique, aussi bien dans sa dimension scientifique que dans l'enseignement, est celui de limite d'une fonction. L'élaboration de cette notion a été très lente, jusqu'à tel point où il a fallu attendre le XIX$^{\text{ème}}$ siècle avec Weierstrass, pour que l'expression "aussi petit que nous voulons" acquière une forme mathématique libérée de toute ambiguïté. C'est alors évident que cette notion mathématique dont l'épistémologie historique nous montre que sa constitution eut un chemin rempli d'embûches doit être enseignée à travers une analyse profonde qui implique de façon systématique les trois éléments suivants de l'enseignement : l'épistémologie du concept pour son développement historique, les étudiants par rapport à leurs conceptions et leurs obstacles; et les manuels, quant aux conceptions, obstacles et actes de compréhension qu'ils induisent. Ce travail a commencé avec l'observation de ses auteurs, premièrement dans les classes de "bachillerato" et ensuite dans les classes de Calcul d'ingénierie Technique de l'Université. Nombreux étaient les étudiants qui, à la fin de la première année et malgré le changement de niveau scolaire et l'accroissement de contenu, maintenaient et même augmentaient leurs conceptions erronées, des obstacles, et des difficultés et ceci malgré le fait d'avoir réalisé de nombreuses techniques de calculs de limites de fonctions. Ceci conduit à une réflexion profonde sur l'importance pour l'enseignement d'être conscient de l'abîme qui existe entre ce que le professeur croit que l'élève a appris et ce qu'il a réellement compris; c'est ce qui, en termes techniques, représente, d'une part, le "savoir enseigné" et d'autre part, le "savoir de l'élève".

Les questions sous-jacentes à cette réflexion étaient : d'où viennent ces deux savoirs? Quelle est "l'histoire" de leur constitution? La réponse à ces questions était évidemment très complexe puisqu'elle demandait tout un processus de recherche dans laquelle il fallait analyser les manuels, les conceptions des professeurs et celles des élèves. Notre recherche s'orienta alors vers l'examen des textes mathématiques qui traitaient la notion de limite selon la méthodologie de Weber (1986) et Schubring (1988), et nous avons observé que ce traitement utilisé aux deux niveaux de l'enseignement - Bachillerato et Université- ne semblait pas suivre un développement analogue. A certaines périodes la rigueur avec laquelle on traitait ce concept dans certains livres dirigés à des élèves de l'enseignement secondaire était identique, voire supérieur, à celui que l'on trouvait dans les livres de Première année d'Ingénierie Technique. Ces faits liés à la

néfaste réalité de l'échec scolaire à l'Université dans la matière de Calcul motivèrent la formulation des trois conjectures suivantes :

"Les difficultés que les élèves rencontrent à propos de la compréhension du concept de limite d'une fonction sont dues fondamentalement à l'existence d'obstacles épistémologiques et didactiques, inhérents à la notion et à la transposition didactique. Ainsi, si au moment de l'instruction on ne facilite pas des situations d' enseignement qui provoquent l'émergence des actes de compréhension nécessaires pour que les élèves surmontent les obstacles, on n'arrivera pas à l'assimilation de ce concept."

"L'enseignement du concept de limite d'une fonction, en première année d'Ingénierie Technique, ne se réalise pas selon une réflexion basée sur la recherche de situations d'enseignements capables d'engendrer des actes de compréhension nécessaires pour que les étudiants surmontent les obstacles épistémologiques qui apparaissent tout au long du développement du concept."

"En général, les manuels de mathématiques de l'Enseignement Secondaire du Cours d'Orientation Universitaire et de la première année d'Ingénierie Technique ne tiennent pas compte des différentes conceptions historiques ni des obstacles épistémologiques du concept de limite et ne facilitent donc pas la production d'actes de compréhension nécessaires à la résolution de ces obstacles."

L'étude de la vérification ou non de ces conjectures nous a donc conduite à l'analyse de la notion de limite d'une fonction depuis une double perspective : celle des conceptions et celle des obstacles associés au concept.

Le terme conception

Dans la Didactique des Mathématiques ce terme a une importante spéciale dans la recherche, ce travail a donc pris en compte les apports suivants : EL BOUAZZOUI (1988) dit que malgré les différents termes existants pour désigner la manière avec laquelle un individu comprend et utilise un concept, dont il cite conception, représentation (mentale), modèle (conceptuel), concept-image, etc., et que le choix entre ces termes est difficile, le terme conception doit se considérer dans le sens suivant : "Une conception est un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs qui permettent ensemble de résoudre un type de situations et de problèmes de manière plus ou moins satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations dans laquelle cette conception échoue, soit parce qu'elle suggère des fausses réponses, soit parce que les résultats sont obtenus avec plus de difficulté et dans des situations plus défavorables." Il distingue : Les conceptions identifiées à l'origine historique de la notion, qui sont collectives, dans le sens où elles sont reconnues par une communauté de mathématiciens et correspondent au type de problèmes à résoudre à une époque déterminée. Les conceptions transmises par les manuels, dans la mesure où, dans le processus de la transposition didactique depuis le "savoir enseigné" jusqu'au "savoir scolaire" (CHEVALLARD & JOSHUA, 1991), le manuel transmet un contenu mathématique déterminé que peut provoquer la création et l'insertion dans l'enseignement d'objets didactiques qui ne figurent pas dans la Mathématique crée par les mathématiciens, comme : Les illustrations, les dessins, les représentations graphiques, etc.

La limite et les conceptions

Parmi les recherches qui traitent de la notion de limite d'une fonction depuis la perspective des conceptions, on considère comme spécialement remarquables les apports sur la limite et la conception de VINNER & TALL (1981), CORNU (1983) et WILLIANS (1991).

VINNER & TALL (1981) se réfèrent au terme conception à travers ce qu'ils appellent "concept image" qui décrit la structure cognitive totale de l'individu associée à un concept et qui inclut toutes ses images mentales, propriétés associées et tous les processus, et parlent de "concept définition" lorsqu'ils se réfèrent au concept mathématique défini formellement, en observant que pour chaque individu un "concept définition" génère son propre "concept image". En ayant recours au cas particulier de limite d'une fonction ils signalent que le "concept image" contient des facteurs qui peuvent entrer en contradiction avec le "concept définition", par exemple, dans certains cas on introduit le concept quand on est en train d'étudier la différentiation et avec lequel le "concept image" dans ce cas précis, peut inclure un dessin mental associé à une corde variable, une courbe ou une tangente. La dérivation peut affecter le "concept image" à travers un facteur associé à la vitesse instantanée. Dans les deux cas on traite la limite d'une fonction et on le considère comme un processus dynamique où "x" s'approche de "a" et ceci implique que "$f(x)$" s'approche de "l". L'effet est que l'étudiant associe le concept à l'idée que $f(x) = l$, alors que la définition formelle contredit cette idée. De cette recherche on tire la conséquence que le "concept image" (conception) des étudiants est variable et soumis à leur propre expérience selon les diverses situations à laquelle ils se confrontent. Ainsi, la recherche est pertinente pour analyser l'évolution de leurs conceptions sur le concept de limite d'une fonction à travers l'instruction.

CORNU (1983), dans son travail de recherche sur le concept de limite, étudie les réponses des élèves à plusieurs questionnaires et classifie les conceptions sur le concept de limite d'après deux points de vue. En prêtant attention à la nature de la réponse sur le propre concept, il les appelle conception statique et conception dynamique, et selon le moment où elles se sont produites (avant ou après avoir reçu l'enseignement de la notion), il les appelle conception spontanée et conception propre. Il affirme que les conceptions spontanées restent chez les élèves durant beaucoup de temps. L'idée de conception propre, mélange de la conception spontanée et de la notion mathématique, correspond au "concept image" de Tall et Vinner, et ainsi à la conception. Comme le signale Cornu : "Nos preuves ont démontré que la notion mathématique ne prendra pas purement et simplement le lieu de conceptions spontanées mais qu'il se formera un mélange, en faisant que chez chaque élève se formera ce qu'on appelle sa propre conception". WILLIAMS (1991) réalisa une étude des étudiants universitaires dans le but de connaître leurs conceptions sur la limite, et pour laquelle il a utilisé, dans une première phase, un questionnaire dans lequel l'élève devait choisir sa réponse à la question posée entre 6 réponses possibles : d'entre elles, les élèves en choisirent 3 majoritairement qui correspondent à :

1. Une vision dynamique de la limite.
2. Une vision de la limite comme quelque chose d'inaccessible.
3. Une vision de la limite qui s'identifie à la définition formelle.

Conceptions liées à la notion de limite d'une fonction

Pour détecter les conceptions liées à l'origine historique du concept de limite nous nous sommes basés sur les idées de Deledicq (1994). En premier lieu, une brève origine historique de cette notion a été réalisée où l'on a pris en compte quatre étapes ou périodes.

Dans la première étape, l'étape grecque, les problèmes fondamentaux qui se posaient étaient de nature géométrique, le cercle étant l'objet mathématique le plus traité. Comme CORNU

(1983) note : "le problème du calcul de l'aire d'un cercle donna l'occasion de pratiquer les outils qui constituent les prémices de la notion de limite". Les méthodes utilisées par les grecs sont géométriques et s'appliquent aux grandeurs et non aux nombres. Ainsi, la conception des grecs sur la limite d'une fonction est géométrique et nous l'appellerons CG.

Une progression importante se fait au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, lorsque Fermat, en travaillant avec des lieux géométriques, découvre une méthode pour trouver les points où une fonction polynomiale prend une valeur maximum ou minimum. Nous pouvons considérer que, malgré l'intervention de problèmes géométriques, comme celui de la tangente, avec Fermat émerge, comme évolution de la conception géométrique, une certaine conception numérique de limite d'une fonction. Newton, en traitant les problèmes physiques sur le mouvement instantané, élabora ce qui fut appelée la méthode des fluxions (la quantité en mouvement s'appelle fluent et sa vitesse est la fluxion). Dans cette méthode les notions de "raisons premières" et "d'ultimes raisons" sont apparues et elles se font explicites dans le principe suivant : "Les quantités, et la raison de quantités, qui dans n'importe quel intervalle fini de temps converge continuellement vers l'égalité, et qui avant la fin de ce temps s'approchent l'une vers l'autre plus que n'importe quelle différence donnée, se font également égales." (BOYER (1986), p. 500). Nous sommes alors devant une conception arithmétique que nous appelerons CN.

Bolzano, dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, utilise le concept de continuité et, en donnant la définition de fonction continue, il traite l'idée de limite de fonction. C'est Weierstrass qui, en donnant la définition de l'environnement d'un point, révolutionne l'Analyse et où avant il s'agissait de donner un résultat, maintenant on peut démontrer une inégalité, en prenant des cotes supérieures ou inférieures. L'utilisation de "e" et "d" dans les environnements conduit à la conception métrico-analytique de la limite d'une fonction, que nous appellerons CAM.

Plus tard, Cantor en 1883, après la création de la théorie d'ensembles infinis, introduit, entre autres, les concepts de point limite et d'ensemble dérivé. Le développement de la théorie des fonctions de Weierstrass et de la théorie des ensembles de Cantor s'est réalisée à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, et dès le début du XX$^{\text{ème}}$ siècle la généralisation de la topologie de R en espaces topologiques abstraits (Frechet, Hausdorff, Caratheodory . . .) permit de définir la limite à travers la notion d' ouvert et le point d'accumulation et nous situe dans une nouvelle conception, la topologique, que nous symbolisons par CT. Basés sur SÀNCHEZ (1997) et sur CONTRERAS & SÀNCHEZ (1998), ces conceptions détectées dans le développement historique du concept de limite seront tenues en compte dans l'étude de manuels, des élèves et des professeurs, bien que nous ayons introduit quelques variations pour clarifier les analyses effectuées. D'une part, la conception géométrique (CG), émane, comme nous l'avons indiqué, des méthodes pour mesurer les superficies des figures géométriques à l'époque d'Archimède, liée ainsi à des grandeurs, ont peu à voir avec le fait d'utiliser des images ou des représentations graphiques pour donner un signifié au concept de limite. Donc, comme tout graphique est, en général, une figure géométrique, dans cette recherche nous emploierons le terme conception géométrico-graphique (CGG) lorsqu'on utilisera la représentation graphique dans l'étude des limites.

En deuxième lieu, au moment de catégoriser les différentes réponses des étudiants aux items du questionnaire, il est utile de distinguer entre conception numérique statique (CNE) et conception numérique dynamique (CND) en prenant comme référence les idées de Cornu et de Tall et Vinner dans ce sens.

Les termes obstacles et actes de compréhension

BROUSSEAU (1983) distingue les caractéristiques suivantes :

1. Les erreurs produites dues aux obstacles sont résistantes à la correction,
2. Il s'agit toujours d'une connaissance, non d'une absence de connaissance; elle peut être incorrecte ou incomplète mais elle est cohérente,
3. C'est une connaissance qui produit des réponses correctes dans des situations déterminées ou maîtrises de problème,
4. C'est une connaissance qui engendre des réponses erronées pour certaines situations ou maîtrises de problème,
5. Les erreurs que les obstacles produisent ne sont pas sporadiques, elles se répètent systématiquement dans des situations similaires.

SIERPINSKA (1985) considère qu'"un obstacle a un caractère inévitable et se répète dans la phylogenèse et ontogenèse des concepts", c'est pourquoi "la notion d' obstacle épistémologique peut être étudiée dans le développement historique de la pensée scientifique et dans la pratique de l'éducation"; elle affirme qu'"un obstacle épistémologique est un obstacle pour comprendre" et elle considère deux aspects essentiels :

1. Un obstacle est spécifique d'un concept et seulement de lui,
2. Sa prise de conscience est indispensable pour le développement de ce concept.

SIERPINSKA (1991) signale que la compréhension est un terme qui apparaît dans toute recherche sur les obstacles épistémologiques et que la compréhension d'un concept pourrait se mesurer par le nombre et la qualité des obstacles épistémologiques relatifs à celui-ci et que quelqu'un n'a pas résolu. La rapidité de compréhension n'est pas une caractéristique qui permet de discriminer, dans la mesure où ce qui compte est la qualité du niveau de compréhension, et elle considère l'identification, la discrimination, la généralisation et la synthèse comme des différentes catégories de compréhension.

Dans ce travail, on considérera ces termes dans le sens de BROUSSEAU et de SIERPINSKA, et on se centrera sur les obstacles épistémologiques et didactiques. L'obstacle est considéré intimement associé à l'acte de compréhension, de telle façon que plus sera important le nombre d' obstacles qu'un élève devra dépasser à travers des actes de compréhension pertinents, plus riche sera la notion conceptuelle acquise.

Obstacles et actes de compréhension liés à la notion de limite d'une fonction

Parmi les chercheurs qui ont étudié les obstacles épistémologiques relatifs au concept de limite nous avons VINNER & TALL (1981), DAVIS & VINNER (1986), CORNU (1981, 83, 85, 86, 91) et SIERPINSKA (1985, 87, 91). Certains des obstacles signalés par CORNU et SIERPINSKA ont été pris en compte dans l'analyse de manuels et dans l'étude des élèves.

Les obstacles relatifs au concept de limite d'une fonction considérés dans ce travail se basent sur SÁNCHEZ (1997), SÁNCHEZ & CONTRERAS (1998) et CONTRERAS & SÁNCHEZ (1998) et sont les suivants :

O1 : Se centrer sur la forme des approximations des valeurs des variables indépendantes et dépendantes plus que sur les propres approximations. Cet obstacle, inhérent à la notion de limite, a pour conséquence que les étudiants, en calculant la limite d'une fonction f en un point $x = 2$ dont les approximations numériques sont 0.39; 0.0399; 0.003999; ... et 0.41; 0.0401; 0.004001; ..., ils croient que cette limite est 0.004. Ou, également, en calculant, ils croient que les valeurs 0.6; 0.66; 0.666; ... s'approchent de 6 au lieu de 2/3. Ou bien, pour les valeurs : 0.9; 0.99; 0.999; ... qui s'approchent de 9 au lieu de 1. La discrimination entre nombre et manière d'écrire un nombre, aussi bien pour la valeur dépendante que pour la variable indépendante permettrait la résolution de cet obstacle.

O2 : Utilisation exclusive de l'approximation graphique sans être accompagné des valeurs correspondantes des approximations numériques des variables dépendantes et indépendantes. Cet obstacle, d'origine didactique, conduit l'élève à une impasse lorsqu'il ne dispose pas d'une représentation graphique, en ne pouvant pas raisonner sans l'appui de celui-ci. En fait, dans la majorité des manuels le graphique d'une fonction abstraite apparaît pour l'interprétation géométrique de la limite. En tenant compte que, selon SIERPINSKA (1985), la manière dont les élèves utilisent la calculatrice est très naïve et la tâche de réaliser des calculs approximatifs est très peu utilisée dans l'enseignement, il y aurait des actes de compréhension nécessaires pour dépasser cet obstacle, comme l'utilisation simultanée de valeurs et de graphiques d'une fonction, l'identification du tableau de valeurs des approximations numériques avec le graphique correspondant, ainsi que discriminer entre plusieurs graphiques quel est celui relatif à la fonction dont la limite se calcule de celui dont ils connaissent les approximations numériques.

O3 : Croire que l'existence d'une limite d'une fonction en un point signifie que les valeurs de la variable dépendante s'approchent de quelque chose. Cet obstacle, de caractère épistémologique, est présent lorsque l'élève ne fait pas la distinction entre approximation et distance et donc faire la différence entre s'approcher les valeurs de la variable dépendante de la limite et s'approcher 'tant que l'on veut' d'elle est un acte de compréhension qui permet de le dépasser. Cet obstacle se présente également lorsqu'on considère le graphique d'une fonction constante, car, en ne détectant pas une approximation dans le sens physique de mouvement, les élèves disent qu'il n'y a pas de limite.

O4 : Croire que la limite d'une fonction en un point existe lorsque le nombre de valeurs de la variable dépendante qui s'approche de ce point est infini (ou très grand) et non presque tous d'entre eux. Ceci donne lieu à des cas où l'élève croit qu'une fonction qui a seulement une limite latérale a une limite au point. C'est ainsi, discriminer entre "un nombre infini de valeurs de $f(x)$ s'approchent de la limite lorsque x tend au point c" et "presque toutes les valeurs de $f(x)$ s'approchent à la limite quand x tend à c des deux côtés" serait un acte de compréhension nécessaire pour dépasser cet obstacle épistémologique.

O5 : Croire que l'environnement est toujours symétrique. Cet obstacle est lié à la transposition didactique que se fait de la notion de limite à travers l'interprétation géométrique de la conception analytique (CAM) et de la conception topologique (CT). L'élève croit que l'environnement ouvert doit être toujours symétrique, fait qui crée des erreurs quand on considère $f(x) = 2x$ si $x < 1$ et $f(x) = x+1$ si $x > 1$ et calcule la limite en $x = 1$. La discrimination entre la symétrie du graphique de la fonction et l'amplitude de l'environnement du point où l'on calcule la limite permettrait de dépasser cet obstacle.

O6 : Croire que les variables indépendantes ou dépendantes prennent la valeur de ∞. Voici l'origine du fait que certains étudiants considèrent les expressions + ∞ et - ∞ comme des nombres. Discriminer entre nombre et concept comme des quantités infiniment grandes et infiniment petites serait un acte de compréhension pour cet obstacle, qui selon notre opinion a un double caractère; d'une part, il peut être considéré d'origine didactique puisque, parfois, cette situation est induite par le professeur ou par quelque manuel en utilisant une notation inadéquate quand, en donnant la définition de limite finie en un point ils ajoutent que "a" et "L" peuvent être + ∞ et - ∞; D'autre part, dû à l'incursion du propre ∞ et à l'obstacle 4) signalé par Cornu (1983), il peut être considéré épistémologique.

O7 : Croire que les lettres ε *et* δ *qui apparaissent dans la définition formelle de limite d'une fonction en un point, représentent des grandeurs constantes ou variables.* Cet obstacle, inhérent à la notion, fait référence au langage symbolique et apparaît lié à la compréhension formelle de limite d'une fonction. Un acte de compréhension serait de discriminer entre l'usage des lettres en Algèbre et en Logique; et selon TALL (1995), comme pour dire que pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0 \ldots$, l'élève pourrait penser que pour toute valeur de ε possible il existe seulement ce δ, une lecture de la définition sous la forme : Pour chaque $\varepsilon > 0$, quoiqu'il soit, il existe $\delta > 0 \ldots$ pour "ce" $\varepsilon > 0$, l'aiderait à le dépasser. De plus, pour SIERPINSKA (1985), il ne suffit pas de connaître les quantificateurs et leurs propriétés pour se rendre compte du rôle que leur présence et leur ordre joue dans la définition de la notion de limite, ce rôle peut être plus clair dans les exemples d'inexistence de limite.

O8 : Croire que la limite d'une fonction en un point existe parce que la différence entre les valeurs successives de la variable dépendante est en train de diminuer. Cet obstacle, propre de la notion, fait que, en confondant convergence avec diminution d'une distance, pour la fonction $f(x) = l$, si x est irrationnel et $f(x) = x$, si x est rationnel, les élèves affirment qu'il y a une limite au point $f(x) = 2$ parce qu'ils observent que la différence entre les images, pour x rationnel, est chaque fois plus petite (ils identifient avec les successions de Cauchy), et donc la discrimination entre succession convergente et succession de Cauchy, dans les différents ensembles numériques, serait un des actes de compréhension nécessaires.

O9 : Croire que la limite d'une fonction en un point est la valeur de la fonction en ce point. Cet obstacle, de caractère didactique, est favorisé lorsqu'on a recours, au moment d'introduire le concept, à des exemples de type de la fonction f donnée par, où l'on demande la limite $x = 2$, et on essaie d'expliquer à l'élève qu'en étant, sauf en 2, la fonction $f(x) = g(x) = x + 2$, ses limites sont égales. La discrimination entre image d'une fonction en un point et valeur approximative, distinguer entre fonction et ensemble de valeurs; Ainsi vaut-il mieux éviter quand on introduit le concept l'utilisation d'exemples comme ci-dessus et les utiliser seulement après les théorèmes correspondants qui faciliteraient les actes de compréhension.

Méthodologie de l'étude expérimentale

Objectifs de l'étude. Spécimen

À travers l'analyse des manuels et des réponses des élèves au questionnaire, on essaye de détecter dans la lecture des manuels et des réponses erronées quelques-uns des obstacles décrits antérieurement. D'autre part, on associera également les réponses des étudiants aux conceptions signalées. Le spécimen fut pris intentionnellement aussi bien dans les manuels que chez les élèves. Pour les élèves nous avons consideré les élèves de première année d'Ingénierie Technique Industriel, d'Ingénierie Technique Topographique et d'Ingénierie Technique en Télématique de l'Université de Jaén, avec un total de 194 étudiants, au moins 25 de chaque groupe. Dans les livres la période comprend le XX$^{\text{ème}}$ siècle (1950-95), la taille est 37 manuels du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Questionnaire : questions, objetifs des questions analyse et classification des réponses des élèves

Pour l'élaboration des éléments nous avons tenu compte aussi bien des recherches de CORNU (1983), EL BOUAZZOUI (1988), Y AZCÁRATE (1990) que de l'analyse des manuels que nous avons realisée. Nous comptons en plus sur un apport personnel, fruit de la propre expérience. Le procédé utilisé dans expérience pour recueillir des informations a été le questionnaire, puisqu'il permet de s'adresser à un grand nombre de sujets à la fois, et en plus, offre une certaine facilité pour compter et corriger. Avant l'élaboration du questionnaire définitif, on utilisa un questionnaire pilote avec une épreuve réduite et un autre questionnaire, nouvelle élaboration de du précédent, qui s'appliqua sur un terrain plus important. Avec les conclusions obtenues de ces deux questionnaires, on modifia certains aspects ce qui permit de confirmer les éléments auxquels les étudiants répondirent finalement. Le questionnaire contient 6 éléments. Tout d'abord nous montrons le contenu et les objetifs de quatre questions ainsi que la manière dont nous avons classifié la reponse des élèves aux questions un et six.

<u>Question numéro un</u> : Si tu devais expliquer à un collègue ce que signifie le fait qu'une fonction ait une limite finie en un point $x = a$, que dirais-tu? Ecris brièvement de quelle manière tu le ferais.
A travers la question numéro un on pretend détecter la conception dominante chez les élèves, c'est-à-dire celle avec laquelle les élèves se sentent plus sûrs, comprennent ou croient comprendre et avec laquelle ils se sentent capables de transmettre leurs connaissances aux autres. De plus, cette question facilite l'analyse de l'influence de la T.D. aussi bien pour le professeur que celle qui se réalise dans les manuels.

<u>Question numéro deux</u> : Quels exemples donnerais-tu?
Avec la question numéro deux nous prétendons connaître le niveau de compréhension des élèves par rapport à la conception analytique, topologique, graphique et numérique de la limite d'une fonction en un point, en plus des exemples que l'étudiant considère plus importants et les types de graphique et de fonction les plus utilisés par l'étudiant.

<u>Question numéro quatre</u> : Ecris le sens qu'a pour toi le fait qu'une fonction ait une limite finie en un point.
Cette question rend possible la confrontation entre la conception qu'utilise l'élève quand il se pose des questions sur le concept de limite, son "concept definition" d'après TALL (1981),

c'est la même question que lorsque lui demande qu'il la transmettre aux autres, son "concept image"; c'est-à-dire si ce que l'élève "sait" ou "comprend" sur la limite d'une fonction en un point est la même chose que ce qu'il transmet aux autres. Ainsi nous pouvons analyser aussi bien l'influence qu'a chez l'élève la T.D. que le professeur réalise.

Question numéro six : Nous savons qu'une fonction a le tableau de valeurs indiqué ci-dessous. Etude le comportement de la fonction f en $x = 2$ dans chaque cas suivant :

a)

x	1,9	1,99	1,999	....	2	....	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,1	0,01	0,001	....	3	....	3,001	3,01	3,1

b)

x	1,9	1,99	1,999	....	2	....	2,001	2,01	2,1
f(x)	1	1	1	....	2	....	2	2	2

c)

x	1,9	1,99	1,999	......	2	......	2,001	2,01	2,1
f(x)	0,39	0,0399	0,003999	......	-	......	0,004001	0,0401	0,41

La question numéro six nous permet également d'observer plusieurs aspects : Première) si la CN est présente chez l'élève. Deuxième) si la T.D. qui se fait de la notion dans les manuels d'enseignement et par le professeur est pertinente et claire pour les élèves en enlevant ainsi les effets et les influences de cette T.D.

Catégorisation pour les réponses à la question n° 1

Après avoir classifié les réponses données par les étudiants à cette question et en faisant attention aux termes utilisés dans leurs réponses, on a pu observer qu'un même élève inclut dans sa réponse des termes correspondants aux différentes catégories considérées et que ces catégories ont des expressions correctes quant au concept objet de l'étude et d'autres expressions qui ne sont pas correctes. Les catégories considérées sont les suivantes :

a) Par rapport aux conceptions

CND (Conception numérique dynamique) : Si dans la réponse on inclut certains de ces termes "$\cdots$ s'approche de$\cdots$", "$\cdots$ tend vers$\cdots$", "$\cdots$ est en train de s'approcher de$\cdots$".

CNE (Conception numérique statique) : Si dans la réponse sont inclus des termes comme "$\cdots$ c'est la valeur de la fonction dans ce point là$\cdots$", "$\cdots$ c'est l'image de la fonction en ce point$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où la fonction n'est pas continue$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où la fonction est continue$\cdots$.

CGC (Conception géométrico-graphique) : Si la réponse contient certains des termes "$\cdots$ c'est le point du graphique où la fonction a un maximum$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où le graphique se termine$\cdots$".

CAM (Conception analytico-métrique) : Si dans la réponse on inclut la définition métrique symbolique, ou bien certain terme comme : "c'est la valeur $\cdots$ tel que sa distance par rapport à$\cdots$".

CT (Conception topologique) : Si la réponse contient la définition topologique symbolique, ou bien un des termes suivants : "$\cdots$ pour tout point de l'environnement de $\cdots$ les valeurs de la fonction sont dans l'environnement de$\cdots$".

Nous avons considéré correctes les réponses qui contenaient des expressions comme : "$\cdots$ en donnant à x des valeurs à droite et à gauche $\cdots$ la fonction s'approche autant que l'on veut de$\cdots$", "$\cdots$ valeur de laquelle s'approche tant que l'on veut la fonction en un point et qui ne dépend pas de l'existence de $f(a)$ ou de ce que vaut $f(a)$ en ce point$\cdots$", la définition métrique ou topologique.

b) Par rapport aux obstacles
On peut détecter l'obstacle O_1 lorsque la réponse inclut "mais ne l'atteint pas$\cdots$", "$\cdots$ mais ne la touche pas$\cdots$".
On peut détecter l'obstacle O_2 lorsque l'on dit dans la réponse uniquement "point du graphique duquel s'approche la fonction".
On peut détecter l'obstacle O_3 lorsque la réponse contient "$\cdots$ les valeurs de la fonction s'approchent de ou tendent vers$\cdots$", "$\cdots$ valeur de laquelle la fonction s'approche indéfiniment$\cdots$".
On peut détecter l'obstacle O_4 lorsque la réponse contient "$\cdots$ quand les valeurs de x s'approchent indéfiniment de$\cdots$".
On peut détecter l'obstacle O_6 lorsque l'on dit dans la réponse : "$\cdots$ valeur en laquelle le x et l'y sont infinis$\cdots$".
On peut détecter l'obstacle O_7 quand on inclut dans la réponse la définition métrique symbolique en n'expliquant pas le sens de ε et de δ.
On peut détecter l'obstacle O_9 lorsque la réponse contient des termes comme : "$\cdots$ c'est la valeur de laquelle on s'approche et qui coïncide avec celle de la fonction en ce point$\cdots$", "$\cdots$ c'est l'image de la fonction en ce point$\cdots$", "$\cdots$ c'est la valeur maximum de la fonction$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où la fonction est continue$\cdots$", "$\cdots$ c'est le point où la fonction est discontinue $\cdots$".

Analyse des manuels

Ici nous décrirons ensuite quelques aspects relatifs aux obstacles extraits des textes analysés et qui sont significatifs dans cette analyse.
On peut induire les obstacles O_3 et O_4 quand apparaissent des phrases comme les suivantes :
"$\cdots$ *en approchant indéfiniment x de a, les valeurs de la fonction s'approchent indéfiniment de*$\cdots$"
"$\cdots$ *si $f(x)$ s'approche infiniment de la valeur L en tendant x vers a*$\cdots$"
"$\cdots$ *si quand x s'approche suffisamment de x_0, les valeurs correspondantes de $f(x)$ sont alors très proches de l*$\cdots$"
"$\cdots$ *c'est de la valeur y_0 que la fonction s'approche, de sorte que $y - y_0$ puisse se faire en valeur absolue aussi petit qu'on le désire en prenant x suffisamment proche de x_0*$\cdots$".

On facilite les actes de compréhension pour l'obstacle O_3 avec des expressions du type :

"$\cdots$ *la phrase $f(x)$ s'approche autant qu'on le veut de L signifie que $f(x)$ est dans l'intervalle $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ et en termes de valeur absolue s'écrit $f(x)-L<\varepsilon\cdots$*"
"$\cdots$ *c'est analogue pour x qui tend vers c, qui signifie qu'il existe un nombre positif δ de telle manière que x est situé dans l'intervalle $(c-\delta, c)$ ou dans $(c, c+\delta)$ ce qui peut s'exprimer dans la double inégalité$\cdots$*".

On facilite les actes de compréhension pour l'obstacle O_4 avec des expressions du type :
"$\cdots$ *si $f(x)$ s'approche autant qu'on le veut d'un unique numéro L, quand x tend vers c des deux côtés$\cdots$*"
"$\cdots$ *la limite à droite peut être différente de la limite à gauche mais évidemment les deux coïncident quand il existe une limite dans le sens général$\cdots$*".

On peut induire à l'obstacle O_6 quand la définition se présente sous la forme :
"*Une fonction $f(x)$ a une limite L au point $x=u$ quand pour toute succession de valeur x_n qui a pour limite u, la succession de valeurs correspondantes $f(x_n)$ a pour limite L. On peut indiquer ainsi : $\lim_{x\to u} f(x)=L$, u peut être $a^+, a^-, +\infty, -\infty$; dans le sens où de cette façon l'élève arrive à croire que $+\infty$ et $-\infty$ sont des nombres et que les variables indépendantes et dépendantes prennent véritablement la valeur $+\infty$ et $-\infty$*".
Cet obstacle est d'origine didactique et peut être évité en éludant des présentations comme la précédente ou avec des expressions comme "... ce qui prétend être décrit à travers la notion de limite en un point est que les valeurs d'une fonction s'approchent de quelque chose (un nombre, $+\infty$ ou $-\infty$)$\cdots$".

On peut induire à l'obstacle O_7 quand la définition métrique ou topologique se présente sous forme de phrases comme celle-ci :
"$\cdots$ *si donné <u>un</u> $\varepsilon>0$ on peut déterminer un <u>autre nombre</u> $\delta>0\cdots$*"
"$\cdots$ *quand à tout nombre positif eε nous pouvons faire correspondre <u>un</u> ensemble du point$\cdots$*"
"$\cdots$ *si pour n'importe quel numéro positif ε il existe un autre nombre positif $\delta\cdots$*"
"$\cdots$ *si pour tout ensemble $E(l)$ il existe un ensemble réduit $E^*(xo)\cdots$*".

On facilite des actes de compréhension pour l'obstacle O_7 quand on inclut des expressions comme :
"$\cdots$ *ε et δ dans la définition de limite sont des quantificateurs de l'approximation (de x à c d'une part, et de $f(x)$ à la limite d'autre part)$\cdots$*"
"$\cdots$ *si pour <u>chaque</u> $\varepsilon>0$ il existe <u>un</u> nombre $\underline{\delta=\delta(\varepsilon)}>0\cdots$*"
"*Aussi petit <u>que soit</u> $\varepsilon>0$, nous considérons <u>l'ensemble</u> $E(-2,\varepsilon)$, il existe un $\delta>0$ ... qui dépend de ε; et plus ε sera petit plus on devra choisir un δ aussi petit$\cdots$*"
"$\cdots$ *le fait de trouver une valeur appropriée de δ pour un ε concret ne démontre pas l'existence d'une limite $\cdots$ ceci requiert la preuve qu'il est possible de trouver un δ adéquat pour chaque $\varepsilon\cdots$*".

On peut induire à l'obstacle O_9 à travers l'interprétation géométrique de la définition en n'excluant pas le point dans l'ensemble, quand le calcul de limite en un point pour une fonction continue se pose dans l'introduction.

On facilite des actes de compréhension pour l'obstacle O_9 en ajoutant des explications telles que :

"$\cdots$ *la fonction peut, également, ne pas être définie au point$\cdots$*"
"$\cdots$ *dans l'exemple$\cdots$ la fonction a une limite au point mais manque de valeur en celui-ci$\cdots$*"
"$\cdots$ *la valeur de f en $x=c$ n'intervient pas dans la définition de limite et pour l'exprimer simplement on dit que $x-c$ est positif, en valeur absolue, et nous utiliserons les inégalités $0<|X-c|<\delta$ pour exprimer que X est un nombre de l'intervalle $(c-\delta, c+\delta)$ distinct de $c\cdots$*"
"$\cdots$ *dans la définition n'intervient pas la valeur de f au point a (valeur qui ne peut être même pas définie)$\cdots$*" *et après un exemple* "$\cdots$ *il est intéressant d'observer que la fonction <u>dans ce cas</u> est définie au point qui se considère et sa valeur coïncide avec la limite$\cdots$*"
"$\cdots$ *on peut remarquer que dans le cas où $f(a)$ existerait, le point de coordination $x=a, y=f(a)$ n'est pas obligé d'appartenir au rectangle antérieur$\cdots$", explication qui se fait après l'interprétation géométrique de la définition*".

Conclusions de l'analyse des réponses des élèves au questionnaire

Des résultats obtenus, SÁNCHEZ & CONTRERAS (1995), SÁNCHEZ (1997) nous avons pu apprécier que les élèves ont une faible tendance à utiliser la représentation graphique de la fonction pour raisonner le comportement de la fonction dans l'environnement du point. L'utilisation de la conception numérique est assez fréquente, surtout dans la conception numérique dynamique, associée à l'idée de la limite comme tendance. Finalement nous attirons l'attention sur le fait que dans leurs réponses les étudiants ont recours peu souvent à l'utilisation de δ et de ε pour justifier leur raisonnement. Selon les données obtenues lors des résultats antérieurs nous pouvons détacher quelques conclusions sur l'enseignement du concept de la limite d'une fonction dans les cours préuniversitaires.

D'une part, la très faible présence de la conception CAM chez les élèves indique que, malgré que les δ et les ε s'étudient avec une assez grande fréquence dans ces cours, on ne dirait pas qu'ils figurent dans le langage mathématique des élèves. La conception la plus fréquente est la conception numérique, surtout la dynamique, ce qui indique que les idées intuitives sont celles qui prévalent avant d'arriver à l'Université. Ainsi, il n'est pas difficile de déduire qu'en recevant un enseignement d'analyse mathématique, après l'étudiant rencontre des difficultés pour la compréhension des concepts basiques de cette matière. Dans les réponses relatives aux obstacles, on peut observer qu'une grande quantité d'élèves ne répondent pas aux questions formulées. Ainsi, beaucoup des obstacles qui se détectent chez ceux qui répondent, seraient présents dans le cas où des réponses sont données. La présence notable de l'obstacle O_9 nous indique que le calcul algébrique de limites dans le "Bachillerato" inévitable favorise la présence de cet obstacle ce qui implique que les actes de compréhension signalés devraient être tenus en compte par les professeurs. L'obstacle O_3 a une fréquence assez élevée ce qui indique que l'idée de limite comme approximation et tendance peuvent être tout d'abord de bonnes idées intuitives si l'on induit aussitôt chez les élèves des actes de compréhension préparés pour donner clairement le sens de s'approcher "autant qu'on veut". Un autre obstacle qui se détecte dans de nombreuses occasions est O_4, ce qui donne une idée des difficultés que les étudiants peuvent rencontrer en distinguant clairement les limites latérales et la limite.

Dans l'enseignement du concept de limite d'une fonction on doit tenir compte, aussi bien des conceptions avec lesquelles les étudiants rentrent à l'Université que les obstacles présents dans leurs réponses, de telle façon qu'une fois connus par les professeurs, ceux-ci posent des situations en classe qui initient à leurs élèves à la réalisation des actes de compréhension nécessaires et qui tendent au dépassement des obstacles présents dans le concept.

Quelques conclusions de l'étude des manuels. Réflexions et implications pour l'enseignement et la recherche

Dans la majorité des textes on peut détecter la présence d'obstacles relatifs au concept de limite d'une fonction et on ne trouve pas, en général, les situations suffisantes d'enseignement qui provoquent des actes de compréhension qui permettent la résolution de ceux-ci. La faible présence d'obstacles et des actes de compréhension correspondants dans d'autres textes montre le manque de situations qui aident le lecteur à la compréhension du concept. En plus nous avons pu observer les différentes mises en oeuvre des auteurs au moment de l'introduction du concept de limite, les exemples qu'ils proposent, les définitions utilisées, etc., bien que seulement quelques-uns des professeurs réalisent l'introduction à travers les exemples qui contemplent la triple représentation graphique, symbolique et numérique laquelle est la plus indiquée pour la compréhension de la notion selon de récentes recherches.

Quant au nombre des obstacles et aux actes de compréhension détectés dans les manuels, on observe que c'est indépendant de l'époque. Alors que dans certains cas (comme ceux de REY PASTOR, GUZMÁN et LARSON), SÁNCHEZ (1997), on détecte des situations qui facilitent au lecteur de nombreux actes de compréhension qui les conduisent à la résolution des obstacles présents dans les manuels; dans beaucoup d'autres cas, on ne pousse pas aux obstacles et on ne facilite pas non plus des actes de compréhension, la lecture du manuel n'aide donc pas à la compréhension du concept. Dans l'évolution des conceptions on peut observer une présence minime de la conception géométrique, ce qui semble paradoxal dans la mesure où l'utilisation de cette conception comme recours didactique facilite la compréhension du concept. Cependant, la présence de la conception géométrico- graphique est très élevée, elle apparaît dans plus de 50% des manuels, lorsque cette conception pousse le lecteur vers des obstacles déterminés comme O_2, O_5 et O_9.

Pour finir, nous pensons qu'on doit augmenter les modèles visuels de l'enseignement du Calcul de la même façon que l'on doit diminuer les calculs algorithmiques pour permettre la création "d'images de concept" qui, en évoluant, facilitent la formalisation postérieure du concept. Dans cette recherche nous avons étudié l'évolution des conceptions des étudiants quant à la compréhension du concept de limite d'une fonction, basée sur l'idée d'obstacles épistémologiques et sur l'acte de compréhension; cependant, nous n'avons pas réalisé une proposition méthodologique dans ce sens. Ainsi, notre projet est l'élaboration de ces propositions pour les étudiants universitaires, lesquelles peuvent s'enrichir grâce à l'utilisation de certains recours liés aux nouvelles technologies.

Références bibliographiques

ARTIGUE, M. 1989. Epistemologie et Didactique, Institut de Recherche pour l'enseignement des Mathématiques. París : University París VII.

ARTIGUE, M. 1994. Didactical engineering as a framework for the conception of teaching

products. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, pp. 27-39.

ARTIGUE, M. 1994. Analysis. En Tall, D. (Ed). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht/Boston/London : Kluwer Academic Publisher. pp. 167-198.

BOYER, C.B. 1959. The History of the Calculus and its Conceptual Development. Dover Publications, Inc., New York.

BOYER, C.B. 1986. Historia de la Matemática. Madrid : Alianza Editorial.

BROUSSEAU, G. 1980. Les problèmes de l'enseignement des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1, 1, pp. 11-56.

BROUSSEAU, G. 1982. Les objets de la didactique des Mathématiques. Actes du 2e École d'Été de didactique des Mathématiques, (pp. 1-16). IREM de la Universidad de Burdeos.

BROUSSEAU, G. 1983. Les obstacles epistémologiques et les problèmes en Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4, 2, 164-198.

CHEVALLARD, Y. 1991. La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : La Pensée Sauvage. (Edición original, 1985).

CHEVALLARD, I., JOHSUA, M.A. 1991. La transposition didactique. La Pensée Sauvage, éditions.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCON, J. 1997 Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. "Cuadernos de educación". ICE Universidad de Barcelona - Editorial Horsovi.

CONTRERAS, A. y SÁNCHEZ, C. 1998. Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función, en cuanto a los ejemplos. VI Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias, celebrado en Jaca (Huesca), 24-28 de junio de 1998.

CORNU, B. 1981. Grandes lignes de l'évolution historique de la notion de li-mite. Bulletin de l'APMEP, 335, pp. 627-641.

CORNU, B. 1983. Apprentissage de la notion de limite. Thèse de doctorat de troisième cycle de Mathématiques pures. Université de Grenoble.

CORNU, B. 1985. Les principaux obstacles à l'apprentissage de la notion de li-mite. Bulletin IREM - APMEP, pp. 55-63.

CORNU, B. 1986. Quelques obstacles à l'apprentissage de la notion de limite. Laboratoire de Mathématiques Pures. Université de Grenoble I.

CORNU, B. 1991. Limits. En Tall, D. (De). Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht/ Boston/London : Kluwer Academic Publisher. pp. 153-166.

DAVIS, R. & VINNER, S. 1986. The notion of Limit : Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. Journal of Mathematical Behavior 5, 281-303.

DELEDICQ, A. 1994. Les conceptions rélatives aux limites. Vingt ans de didactique des mathématiques en France. M. Artigue, R. Grass, C. Laborde y P. Tavignot (Eds.), pp. 321-327. La Pensée Sauvage, éditions.

EL BOUAZZOUI, H. 1988. Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction. PHD. Université de Bordeaux I.

ROBINET, J. 1983. Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 4, n° 3, pp. 223-292. La Pensée Sauvage, éditions.

SÁNCHEZ, C. 1997. Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. 1998. Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función : Una perspectiva desde la noción de obstáculo. Enseñanza de las Ciencias, 16 (1).

SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. 1998. Análisis de la evolución de los ejemplos que se plantean en libros de texto de Bachillerato y COU para le enseñanza del concepto de límite de una función (1950-1993). VI Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias, celebrado en Jaca (Huesca), 24-28 de junio de 1998.

SCHUBRING, G. 1988. Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leurs représentations dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1975 et 1845. En C. Laborde (Ed.), Actes du premier Colloque Franco-Allemand des Mathématiques et de l'Informatique, pp. 137-146. Grenoble : La Pensée Sauvage.

SFARD, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, pp. 1-36.

SIERPINSKA, A. 1985a. Obstacles epistemologiques rélatifs à la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 6, n° 1, pp. 5-67.

SIERPINSKA, A. 1985b. La notion d'obstacle epistémologique dans l'enseignement des mathématiques. Actes de la 37e Rencontre CIEAEM, Leiden.

SIERPINSKA, A. 1987. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics 18 , 371-397. T.

SIERPINSKA, A. 1990. Some remarks on undertanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, Vol. 10, pp. 24-36.

SIERPINSKA, A. 1991. Some remarks on undertanding in mathematics. Versión revisada del trabajo presentado al Canadian Mathematics Education Study Group. Vancouver.

TALL, D. 1994. Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.

TALL, D. 1995. Interrelationships between mind and computer : processes, images, symbols. Advanced Technologies in the Teaching of Mathematics and Science (Ed. David I. Ferguson).

TALL, D. 1995. Seminario Didáctica del Análisis y Didáctica de las Funciones. Universidad Autónoma de Barcelona.

VINNER, S. y TALL, D. 1981. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, pp. 151-169.

WEBER, J. 1986. Basic content analysis. Newbury Park, California : Sage University Press.

WILLIAMS, S. 1991. Models of limit Held by College Calculus Students. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3, pp. 219-236.

Nota : Este trabajo se ha realizado dentro del marco del Proyecto: "Fenómenos didácticos ligados a la adquisición de conceptos matemáticos fundamentaless en Educación Secundaria y Universidad", (PB 97-0851), otorgado a los autores por la Secretaría de Estado de Universidades, Investigación y Desarrollo - Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica - del Ministerio de Educación y Cultura español, dentro del Programa Sectorial de Promoción General del Conocimiento. Asi mismo está subvencionado parcialmente por el Grupo de Investigación "Aproximación y Métodos Numéricos" del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén (España).

Anexos del estudio

1) Manuales analizados

ANZOLA, M. y otros. Matemáticas 2° BUP. Ed. Santillana. Madrid, [1976].

APOSTIL, T.M. (1989) *Calculus*. Editorial Reverté. Barcelona.

DE BURGOS ROMÁN, J. (1988) *Cálculo Infinitesimal* (teoría y problemas). Madrid.

DE BURGOS ROMÁN, J. (1994) *Cálculo Infinitesimal de una variable*. Editorial McGraw-Hill. Madrid.

GARCIA CASTRO - GUTIERREZ GOMEZ. (1992) *Cálculo Infinitesimal-I*. Ediciones Pirámide. Madrid.

GRANERO, F. (1990) *Cálculo*. Editorial McGraw-Hill. Madrid.

GUZMÁN, M. de - B. Rubio. (1992) *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático*. Ediciones Pirámide. Madrid.

GUZMÁN, M.; COLERA, J. y SALVADOR, A. Matemáticas. Bachillerato 2. Ed. Anaya. Navarra, [1987].

GUZMÁN, M.y COLERA, J. Matemáticas I - COU. Ed. Anaya. Navarra, [1989].

LARSON - HOSTETLER. (1989) *Cálculo y Geometría Analítica*. Editorial McGraw-Hill. Madrid.

LARSON / HOSTETLER / EDWARDS. (1995) *Cálculo*, vol 1. Editorial McGraw-Hill. Madrid.

MARTINEZ SALAS, J. (1964) *Elementos de Matemáticas*. Impreso por Gráficas A. Martín. Valladolid.

PRIMO, A. Matemáticas COU. Ediciones S.M. Madrid, [1987].

PUIG ADAM, P. (1959) *Cursos de Análisis Matemático para Ingenieros*. (Tomo I: Curso teórico práctico de Cálculo Integral aplicado a la Física y Técnica). Cuarta edición. Madrid.

PUIG ADAM, P. (1970) *Cursos de Análisis Matemático para Ingenieros*. (Tomo I: Curso teórico práctico de Cálculo Integral aplicado a la Física y Técnica). 12ª edición. Madrid.

REY PASTOR, J. - PI CALLEJA, P. - TREJO, C.A. (1956) *Análisis Matemático*. Volumen I. Editorial Kapelusz. Buenos Aires.

REY PASTOR, J. (1973) *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Editor: Biblioteca Matemática S.L. Madrid.

REY PASTOR, J. y A. de CASTRO. (1964) *Elementos de Matemáticas*. Editorial S.A.E.T.A. Madrid.

REY PASTOR. Matemáticas 6°. Colección Didáctica Elemental. Madrid, [1954].

RÍOS, S. (1966) *Cálculo Infinitesimal*. Impreso por Ibérica. Madrid.

RÍOS, S. (1973) *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Paraninfo. Madrid.

RÍOS, S. Matemáticas Especiales (COU). Ed. Paraninfo. Madrid, [1974].

RÍOS, S. (1951) *Complementos de Matemáticas y Métodos Estadísticos*. Impreso por Díez, Madrid.

RÍOS, S. (1957) *Complementos de Matemáticas*. Impreso por Gráficas España, Madrid.

RÍOS, S. / A.R. SANJUAN. Matemáticas 5°. Ed. de los autores. Madrid, [1958].

RÍOS, S. / A.R. SANJUAN. Matemáticas 6°. Ed. de los autores. Madrid, [1966].

RÍOS, S.(1975) *Matemática Aplicada*. Editorial Paraninfo. Madrid.

THOMAS ARA, L. y RÍOS GARCÍA, Mª E. (1974) *Matemáticas-Cálculo*. Manufacturas Jean, S.A. Santander.

THOMAS, G.B. (1968) *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Aguilar S. A. de Ediciones. Madrid.

THOMAS, G.B. (1980) *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*. Aguilar. Madrid.

THOMAS, G.B. (1959) *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica.* Aguilar. Madrid.
VIZMANOS, J.; ANZOLA, M.; PRIMO, A. Matemáticas 2° BUP. Ed. S.M. Madrid, [1983].
VIZMANOS, J.R. y ANZOLA, M. Matemáticas - Algoritmo 2. 2° de BUP. Ediciones S.M. Madrid, [1990].
VIZMANOS, J.R. y ANZOLA, M. Matemáticas I. COU (Opción A y B). Madrid, [1993].

2) Clasificación de los manuales por niveles y años.

Etapa	Año	Autor - E. Universitaria	Año	Autor - E. Media
1ª	1951	Sixto Ríos		
	1956	Rey Pastor	1954	Rey Pastor-Puig Adam (6°)
	,,	Sixto Ríos		
	1957	Sixto Ríos	1958	S. Ríos-R. Sanjuan (5°)
	1959	Puig Adam		
	,,	G. B. Thomas		
2ª	1960	Rey Pastor		
	1964	Martínez Salas		
	,,	Rey Pastor		
	1966	Sixto Ríos	1966	S. Ríos-R. Sanjuan (6°)
	1968	G. B. Thomas		
	1969	Mataix Aracil		
3ª	1970	Puig Adam	1974	Sixto Ríos (COU)
	1973	Rey Pastor	1976	Anzola-otros (2°)
	,,	Sixto Ríos		
	1974	Thomas Ara		
	1975	Sixto Ríos		
4ª	1980	G. B. Thomas	1983	Anzola-otros (2°). Ed.S.M.
	1988	J. de Burgos	1987	A. Primo. COU. Ed. S.M.
	1989	Larson y otros	1987	M.Guzmán-J. Colera (2°)
	,,	Apostol	1989	M.Guzmán y Colera (COU)
5ª	1990	F. Granero		
	1992	M. de Guzmán	1990	Anzola-otros (2°)
	,,	García Castro	1993	Anzola-otros (COU)
	1994	J. de Burgos		
	1995	Larson y otros		

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Ateliers de découverte en arithmétique

COUSQUER E.
Université des Sciences et Techniques de Lille (France)

Abstract

Dans cet atelier a été présentée une expérience intitulée "Atelier mathématique" en première année d'université. Cet enseignement se déroule à raison de deux heures par semaine pendant le premier semestre. On propose aux étudiants d'expérimenter, de conjecturer des résultats et de les démontrer. Cet article présente quelques uns des ateliers, résume la progression adoptée, donne un aperçu des fiches de travail pour les étudiants et les références de textes historiques liés à ces ateliers. En conclusion, l'intérêt de l'histoire pour l'élaboration de ces ateliers est analysée.

Atelier 1 : Nombres premiers

Il s'agit dans ce premier atelier d'explorer librement les nombres premiers, la décomposition en facteurs premiers et quelques autres propriétés, en utilisant les théorèmes établis par Euclide et Gauss, et le crible d'Eratosthêne. On fournit ou non aux étudiants les textes historiques correspondants d'Euclide, de Gauss ou de Nicomaque de Gérase. Si non, on peut expliquer brièvement les méthodes.

Textes historiques fournis à l'Université d'Été

— les propositions 31 à 34 du livre 7 des "Éléments" d'Euclide sur les nombres premiers et les nombres composés,
— la proposition 20 du livre 9 des "Éléments" d'Euclide, *Les nombres premiers sont en quantité plus grande que toute quantité composée de nombres premiers. . .* ,
— le texte de Nicomaque de Gérase sur le crible d'Erathostène[1] dont on trouve un extrait dans le livre "Mathématiques au fil des Âges",[2]
— les deux premières pages de la section seconde des "Recherches arithmétiques" de GAUSS avec en particulier le théorème 16 : *Un nombre composé ne peut se résoudre que d'une seule manière, en facteurs premiers.*

Travail pour les étudiants

La fiche de travail comporte une série de tableaux à remplir, de conjectures à formuler et de démonstrations à faire. D'abord, les étudiants doivent faire le crible pour des entiers de 1 à 200 sur un tableau du modèle suivant :

Crible d'Ératosthène

	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
$\ddots$					
199	200				

entier p dont on barre les multiples	nombre de multiples de p	multiples non déjà barrés
2		
3		
$\ddots$		

Pour quelle valeur P de p est-on sûr d'avoir obtenu uniquement des nombres premiers ? Pourquoi ? *Il s'agit de faire redécouvrir que si on veut programmer le crible de 1 à N, on s'arrête quand on a atteint l'entier immédiatement inférieur à $\sqrt{N}$.*

[1]"Introduction arithmétique" livre I Chapitre XIII.
[2]DHOMBRES et al, *Mathématiques au fil des ages*, Gauthier Villars, Bordas, Paris, 1987, p. 54 et 55.

Pourquoi la disposition utilisée dans le crible est-elle intéressante ? Quelles conjectures peut-on faire sur les nombres premiers à partir de cette étude ? *Les nombres premiers supérieurs à 3 se répartissent dans deux colonnes, ceux du type $6k+1$ et ceux du type $6k-1$.*

Infinité de nombres premiers

On reprend la démonstration d'Euclide : supposons que nous connaissions seulement un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_i$. Montrons qu'on peut trouver un autre nombre premier. On considère l'entier $N = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_i + 1$. Il est facile de voir qu'il n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_i$. Si N est premier, nous avons trouvé un nombre premier qui n'est pas dans la liste initiale. Si N n'est pas premier, il possède un diviseur premier q qui n'est pas dans la liste initiale. Conclusion : la liste des entiers premiers n'est pas finie.

Consignes de travail

— Calculer les entiers premiers obtenus quand on prend successivement i de 1 à 10, en utilisant un logiciel de décomposition en facteurs premiers.

On demande ici d'abord de prendre les entiers premiers successifs et de voir les nombres premiers qui apparaissent comme plus petits diviseurs. On peut aussi rester plus proche du texte d'Euclide, prendre $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$, $\cdots$ On constate que les nombres augmentent très vite, d'où la nécessité de disposer de calculatrices formelles ou d'un logiciel de décomposition en facteurs premiers.

— Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers dans la colonne 5 du crible, en calquant l'argument d'Euclide sur l'existence d'une infinité de nombres premiers.

On suppose qu'on a déjà trouvé une famille finie $p_1, p_2, \cdots, p_n$ de tels entiers. On considère l'entier $M_n = 6p_1p_2\cdots p_n - 1$; on le décompose en facteurs premiers, on montre que l'un de ces facteurs au moins est du type $6k-1$, et on désigne par p_{n+1} le plus petit de ces facteurs du type $6k-1$, en ayant justifié qu'il ne figure pas dans la liste précédente. On fait calculer la liste des 5 premiers nombres premiers ainsi obtenus.

On fait démontrer ici un cas particulier simple du théorème de Lejeune - Dirichlet qui affirme qu'il existe une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique du type $an+b$ avec a et b entiers premiers entre eux.

Atelier 2 : Fractions irréductibles

Il s'agit de s'entraîner à utiliser des décompositions en facteurs premiers pour simplifier des fractions. On va lister les fractions irréductibles de dénominateurs petits et les compter. Pour cela, on va s'inspirer du crible d'Ératosthène pour compter pour chaque dénominateur n le nombre $\Phi(n)$ de numérateurs sans facteurs premiers commun avec ce dénominateur. On va apprendre à le calculer pour des petites valeurs.

Ici, on découvre un mode de calcul de la fonction d'Euler à partir de la décomposition du nombre n en facteurs premiers, que l'on peut justifier assez facilement jusqu'à trois facteurs premiers. On disposera donc de cette fonction pour de petites valeurs de n dans les ateliers suivants et on reviendra dans un atelier ultérieur sur cette fonction et ses propriétés.

Travail à faire

Barrer les numérateurs qui ne conviennent pas. Compter les fractions irréductibles. (On présente ici un extrait du tableau qui demande de trouver toutes les fractions irréductibles pour des dénominateurs de 2 à 30).

Dénominateur	Facteurs premiers du dénominateur	Numérateurs des fractions irréductibles	Nombre de fractions irréductibles
$\ddots$			
12	$2,3$	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ $11,12$	
13	13	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ $11,12,13$	
14	$2,7$	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ $11,12,13,14$	
$\ddots$			

Fractions irréductibles : conjectures sur $\Phi(n)$

nombre n	${p_1}^{\alpha_1}$	${p_2}^{\alpha_2}$	${p_3}^{\alpha_3}$	$\Phi({p_1}^{\alpha_1})$	$\Phi({p_2}^{\alpha_2})$	$\Phi({p_3}^{\alpha_3})$	$\Phi(n)$
$\ddots$							
12							
13							
14							
$\ddots$							

Conjectures :
Que se passe-t-il si n est premier ?
Que se passe-t-il si n est une puissance d'un nombre premier ?
Que se passe-t-il si n admet deux nombres premiers dans sa décomposition ?
Essayer de démontrer ces conjectures.

Textes historiques fournis

On a renvoyé à une présentation détaillée de l'introduction de la fonction d'Euler par GAUSS qui se trouve dans le livre "La fabuleuse histoire des nombres" et fourni l'extrait suivant.

Extrait

Calculer le nombre de fractions irréductibles de dénominateur p revient au problème suivant[3] posé par GAUSS :

> Trouver combien il y a de nombres plus petits qu'un nombre donné A et premiers avec lui.

Désignons ce nombre par $\phi(A)$. GAUSS examine les différents cas :
— Quand A est un nombre premier p, il est évident que

$$\phi(p) = p - 1,$$

— quand $A = p^m$, pour obtenir $\phi(A)$ il faut retrancher à A le nombre d'entiers inférieurs à A divisible par p, c'est-à -ire A/p, ce qui donne

$$\phi(p^m) = p^m - p^{m-1} = p^m\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

— quand A est décomposé en facteurs premiers entre eux $M \times N \times P \ldots$ alors GAUSS montre que

$$\phi(A) = \phi(M) \times \phi(N) \times \phi(P) \times \ldots$$

GAUSS applique ensuite cette relation au cas où A est décomposé en facteurs premiers :

$$A = a^\alpha b^\beta c^\gamma \Longrightarrow \phi(A) = A\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots$$

Un exemple pour comprendre. Cherchons le nombre de fractions irréductibles de dénominateur $18 = 2 \times 3^2$: on écrit les nombres de 1 à 18, on enlève les $18/2$ multiples de 2, on enlève les $18/3$ multiples de 3, mais on a retiré deux fois les multiples de 6, on doit donc rajouter $18/6$.

$$\phi(18) = 18 - \frac{18}{2} - \frac{18}{3} + \frac{18}{6} = 18\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

Si nous écrivons les 18 fractions de dénominateurs 18, après simplification, elles se répartissent en fractions ayant pour dénominateurs les différents diviseurs de 18.

[3] *Disquisitiones arithmeticae* (1801), paragraphe 38.

$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{8}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{14}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{16}{18}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{18}{18}$
																	1
								$\frac{1}{2}$									
					$\frac{1}{3}$						$\frac{2}{3}$						
		$\frac{1}{6}$												$\frac{5}{6}$			
	$\frac{1}{9}$		$\frac{2}{9}$				$\frac{4}{9}$		$\frac{5}{9}$				$\frac{7}{9}$		$\frac{8}{9}$		
$\frac{1}{18}$				$\frac{5}{18}$		$\frac{7}{18}$				$\frac{11}{18}$		$\frac{13}{18}$				$\frac{17}{18}$	

Si on compte les fractions sur chaque ligne[4] on obtient[5] :

$$18 = \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(6) + \phi(9) + \phi(18).$$

Nous avons introduit là la *fonction d'Euler* dont GAUSS cite deux articles en référence[6]. GAUSS démontre[7] le résultat que nous avons illustré avec notre tableau : *Si a, a', a'' sont tous*[8] *les diviseurs de A, on aura :*

$$A = \phi(a) + \phi(a') + \phi(a'') + \dots$$

Atelier 3 : Suites F_n de fractions irréductibles

On considère des suites finies des fractions définies de la façon suivante : F_n est l'ensemble des fractions irréductibles $\frac{a}{b}$, comprises entre 0 et 1, avec $0 \leq a$, $0 < b \leq n$, rangées par ordre de grandeur croissante.

[4]Cette méthode n'est pas dans le livre de GAUSS, mais elle nous paraît très éclairante.
[5]en posant $\phi(1) = 1$.
[6]*Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata* comment. nov. acc. Petrop. VIII page 74 et *Speculationes circa quasdam insignes proprietates numerorum* Acta Patrop. VIII p 17.
[7]paragraphe 39.
[8]1 y compris.

Exemples :

$$F_1 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$$

$$F_2 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1})$$

$$F_3 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1})$$

$$F_4 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1})$$

$$F_5 = (\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1})$$

Activités proposées : Construire les suites F_n d'ordre inférieur ou égal à 10. Émettre des conjectures concernant ces suites. Démontrer ensuite ces conjectures.

Les suites de Farey

On exploite ici une curiosité mathématique dénommée les suites de Farey pour retrouver d'une manière différente les théorêmes de Bézout et de GAUSS. Cet atelier peut être considéré comme un atelier de travail sur le raisonnement par récurrence. Il est très difficile pour les étudiants qui n'ont pas l'habitude de faire des raisonnements un peu complexes. C'est une façon de retravailler l'arithmétique élémentaire sans refaire un cours classique.

Le premier mathématicien à avoir démontré des résultats semble être Haros qui démontre en 1802 que si on a trois fractions successives a/b, c/d, e/f d'une suite de Farey, alors $c/d = (a+c)/(b+f)$. Il montre que si on a deux fractions successives a/b et c/d, alors $bc - ad = 1$. Il semble que Farey ait énoncé sans démonstration dans un article en 1816 un de ces résultats et que Cauchy qui lut l'article, donna une démonstration de ce résultat et nomma ces suites du nom de Farey.

Textes historiques fournis

— texte original de Bézout ("Cours de mathématique à l'usage des Gardes. . . ") reproduit dans le livre "Histoire d'algorithmes"[9] p. 140 et suivantes,
— deux extraits de Pascal ("Traité de triangle arithmétique") et de Poincaré ("La science et l'hypothèse") sur le raisonnement par récurrence.

Guide de travail

Conjectures sur les suites F_n

Vérifier pour ces suites F_1 à F_{10} les propriétés A et B suivantes :
Propriété A: Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des termes consécutifs d'une suite F_n, alors $bc - ad = 1$ et $b + d \geq$

[9]IREM, collectif, *Histoires d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin, 1994.

$n+1$.
Propriété B 1 : Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des termes consécutifs d'une suite F_n et si $b+d > n+1$, alors $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des termes consécutifs de la suite F_{n+1}.
Propriété B 2 : Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des termes consécutifs d'une suite F_n et si $b+d = n+1$, alors $\frac{a}{b}$, $\frac{a+c}{b+d}$ et $\frac{c}{d}$ sont des termes consécutifs de la suite F_{n+1}.
Propriété B 3 : Si $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ sont des termes consécutifs d'une suite F_n alors $\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}$.

Propriétés préliminaires de fractions

Démontrer les propriétés C et D suivantes, (utiles pour démontrer les propriétés A et B).
Propriété C 1 : Si $bc - ad = 1$, alors $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont irréductibles.
Propriété C 2 : Si $\frac{p}{q}$ vérifie $\frac{a}{b} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{c}{d}$, alors $\frac{p}{q}$ s'écrit $\frac{ax+cy}{bx+dy}$, où x et y sont des entiers positifs ou nuls.
Propriété D 1 : Toute fraction irréductible comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ et non identique à l'une d'elles, est de la forme $\frac{ax+cy}{bx+dy}$, où x et y sont des entiers positifs non nuls, et a donc un dénominateur supérieur ou égal à $b+d$.
Propriété D 2 : Si $bc - ad = 1$, alors la fraction $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$ est irréductible et vérifie : $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$.

Démonstrations des propriétés des fractions F_n

Démontrer les propriétés A et B, par récurrence sur n. En déduire les règles de formation de F_{n+1} à partir de F_n.

Ateliers 4, 5, 6 : sur les développements illimités de rationnels

Le travail fait sur les développements illimités de rationnels en liaison avec l'étude des "Recherches arithmétiques" de GAUSS a été présenté à Louvain.

Activité proposée

Le développement décimal d'un rationnel comporte une partie entière suivie d'une partie fractionnaire. On s'intéressera à la seule partie fractionnaire, ce qui revient à s'intéresser aux fractions irréductibles, entre 0 et 1, c'est-à-dire aux fractions dont le numérateur est inférieur au dénominateur. La partie fractionnaire comporte une partie périodique de i chiffres, précédée d'un certain nombre n de chiffres. On se propose de chercher si l'on peut trouver des lois générales sur le nombre i de chiffres de la période, et sur le nombre n de chiffres précédant la partie périodique du développement, en fonction des entiers p et q.

Calculer le développement périodique illimité des fractions $\frac{p}{q}$ irréductibles, inférieures à 1, ($p < q$), pour q variant par exemple de 3 à 17. Déterminer les nombres n et i correspondant à chacune des fractions et essayer d'émettre des conjectures, sur les nombres n et i.

Trouver un critère pour grouper les développements des fractions de dénominateur q en familles. Combien trouve-on de familles ? Là-aussi, on peut émettre des conjectures et essayer de les démontrer. Tester les conjectures obtenues sur les fractions de dénominateurs compris entre 19 et 29.

Commentaires sur cette activité

C'est une activité très riche qui permet de découvrir les propriétés des rationnels, de travailler les congruences, le petit théorème de Fermat et plus généralement la formule d'Euler. On voit apparaître également la notion de racine primitive. Ces activités et l'analyse des chapitres correspondants du livre de GAUSS sont publiées dans le livre "La fabuleuse histoire des nombres"; cette étude ne sera donc pas reprise ici.

Cette activité a été d'abord élaborée pour un stage de formation continue d'enseignants, en partant d'une indication trouvée dans le livre de Hardy et Wright. Elle a fait l'objet d'un mémoire professionnel de seconde année d'IUFM, où les professeurs stagiaires avaient fait des programmes pour déterminer entre autres les nombres n et i. C'est seulement ensuite que l'histoire a été abordée avec l'étude des "Recherches arithmétiques"; il est frappant que ce texte de GAUSS ait éclairé les difficultés rencontrées dans la programmation.

L'activité présentée ici est fidèle à un aspect des recherches de GAUSS qui a beaucoup expérimenté sur des valeurs particulières, par exemple en confectionnant des tables de valeurs, avant d'induire des résultats qu'il démontrait ensuite (ou pour lesquels il indiquait ne pas avoir encore une démonstration générale). La méthode utilisée ici présente donc aussi un intérêt historique.

La méthode de GAUSS

L'ouvrage de GAUSS, (1777-1855), les *Disquisitiones arithmeticae* (1801) a marqué un tournant dans l'histoire de l'arithmétique. On y trouve dans la troisième section la théorie des congruences, et dans la sixième sont développées différentes applications dont la théorie des développements décimaux illimités figure aux pages 388 à 398 de la traduction du livre de GAUSS paru aux éditions Blanchard sous le titre *Recherches Arithmétiques*.

Contexte historique

Le problème de GAUSS était de fournir un moyen de calculer tous les développements décimaux illimités de fractions de dénominateurs premiers inférieurs à 100, avec le minimum de calculs. (Penser à l'absence alors de moyens de calculs !) Il a découvert que pour une valeur fixée du dénominateur q, les périodes des développements se groupaient par familles. Si 10 était une racine primitive modulo q, c'est-à-dire si ses puissances engendrent tous les résidus non nuls, alors les différentes périodes peuvent être obtenues à partir d'une seule, par permutation circulaire. Mais si 10 n'est pas racine primitive, GAUSS montre comment utiliser d'autres racines primitives pour obtenir tous les développements à partir de quelques uns. Il est amené à établir une table de racines primitives, à développer une théorie des indices qui sont une sorte de logarithme.

Cette question des racines primitives a été beaucoup étudiée après Euler et GAUSS. Des tables de racines primitives ont été établies, par exemple par Jacobi en 1839 pour tous les entiers premiers jusqu'à 1000, par Cunningham en 1900, pour les entiers premiers jusqu'à 10000 et la course ne s'est pas arrêtée là... On trouve une étude historique très complète sur les racines primitives et les congruences dans le deuxième chapitre du livre de Dickson sur l'histoire de la théorie des nombres, *History of the theory of numbers*.

Analyse du texte de GAUSS

Lorsque l'on fait une lecture linéaire du texte de GAUSS, les passages du chapitre trois sur la recherche de racines primitives sont très difficiles à comprendre, car beaucoup d'arguments sont des arguments ad hoc, tirés d'une pratique. Tout s'éclaire lorsque l'on part des tables I (racines primitives) et III (périodes de développements) qui sont à la fin du livre et si on commence à faire soi-même les calculs pour établir de telles tables. On a alors un exemple particulièrement évident d'une écriture a posteriori du chapitre trois, faite pour expliquer les méthodes employées pour réaliser ces tables.

Intérêt historique

Le contexte a changé et l'existence de moyens de calculs puissants rend caduque le problème posé par GAUSS d'établir des tables commodes. Mais la théorie établie à cette occasion est tout à fait d'actualité. Toute cette théorie n'est pas une curiosité historique et les idées développées dans ce chapitre sont très importantes dans les théories du codage. Bien sûr, la théorie des développements décimaux n'est pas centrale dans les recherches mathématiques actuelles. Elle a l'avantage de faire aborder ces questions d'une façon simple et naturelle.

La théorie des congruences telle qu'elle figure dans GAUSS, sans utiliser du tout le langage des structures algébriques est intéressante au niveau pédagogique : cela peut aussi être une étape dans l'enseignement où, au lieu d'utiliser la formalisation la plus récente, on fait les démonstrations dans le langage des congruences, avant de parler de groupes finis.

Ateliers suivants

Le thème suivant des ateliers porte sur l'étude des racines de l'unité, des sous-groupes et des polynômes associés à ces racines. Un premier atelier fait découvrir ces questions successivement pour les racines troisièmes, sixièmes, douzièmes et vingt-quatrièmes de l'unité. On fait placer ces racines sur le cercle, étudier les sous-groupes engendrés par les différentes racines et on dégage la notion de racine primitive n-ième de l'unité. Les étudiants découvrent avec surprise que l'arithmétique apparaît à propos de ces questions sur des nombres complexes. À partir de là, on fait travailler en atelier les nombres de Mersenne et les polynômes cyclotomiques.

En conclusion

L'histoire a été un moyen puissant pour découvrir des problématiques et des méthodes de travail à proposer aux étudiants dans ces ateliers.

Aujourd'hui avec l'introduction des outils de calculs formels, on parle beaucoup d'introduction de méthodes expérimentales en mathématiques. En fait, l'étude de GAUSS montre qu'il s'agit tout simplement de mettre les étudiants dans la posture d'avoir une activité mathématique réelle qui ne soit pas une simple reproduction d'un discours. On a oublié, depuis la vague formaliste dans l'enseignement qu'il y a autre chose qu'un exposé linéaire et axiomatique des mathématiques, qui, s'il est utile pour celui qui a déjà une pratique d'un domaine, pour clarifier, dégager les idées générales et vérifier les cohérences, reste souvent pour les débutants à l'état de discours qu'on apprend et qu'on oublie.

La difficulté pour une autre forme d'enseignement est de trouver des problématiques suffisamment riches pour être signifiantes mathématiquement, et abordables par les débutants. L'intérêt des activités élaborées à partir de l'histoire est que les moyens de calculs actuels permettent

d'avoir très vite des résultats signifiants qui permettent aux étudiants d'élaborer des conjectures et d'essayer de les démontrer. Une leçon à tirer de cette expérience est que l'intérêt manifesté par les étudiants pour cette activité de recherche ne doit pas faire sous-estimer la difficulté de leur faire rédiger des démonstrations à partir de là. C'est un exercice très formateur, car il ne s'agit pas de répondre à des questions du type, 1a suivie de 1b, etc..., mais de mettre en ordre, de dégager ce qu'on doit démontrer, les prémisses dont on dispose. C'est l'autre volet de l'activité du mathématicien : communiquer ce qu'il a trouvé.

Bibliographie

Collectif, *Arithmétique, secrets des nombres*, dans "Tangente", Éditions Archimède, hors série 1998.

Collectif, *Autour de l'algorithme d'Euclide, Algorithmes de l'arithmétique*, dans "Histoire d'algorithmes", Belin, 1994, 20 pages.

Collectif, *Les nombres*, Vuibert, 1998, 432 pages.

CONWAY, *The book of numbers*, Springer - Verlag, 1996, 310 pages.

COUSQUER, *La fabuleuse histoire des nombres*, Édition Diderot, 1998, 265 pages.

CRUBELLIER, SIP, *A la recherche des nombres parfaits*, dans "Histoire de problèmes, histoire des mathématiques", Ellipses, 1993, 20 pages.

DE KONINCK, MERCIER, *Introduction à la théorie des nombres*, collection Modulo 1994.

DEMAZURE, *Cours d'algèbre, primalité, divisibilité, codes*, Éditions Cassini 1997.

DICKSON, *History of numbers*, Chelsea publishing company.

GAUSS, *Recherches arithmétiques, (Disquisitiones arithmeticae)*, Réédition Blanchard 1979.

GUINOT, *Arithmétique pour amateurs, Pythagore, Euclide et toute la clique, Arithmétique pour amateurs, les resveries de Fermat, Ce diable d'homme d'Euler, Une époque de transition*, Aleas Editeur, Lyon, 1992 et années suivantes, série de livres.

HARDY, WRIGHT, *An introduction to number theory*, Oxford university press, 1960.

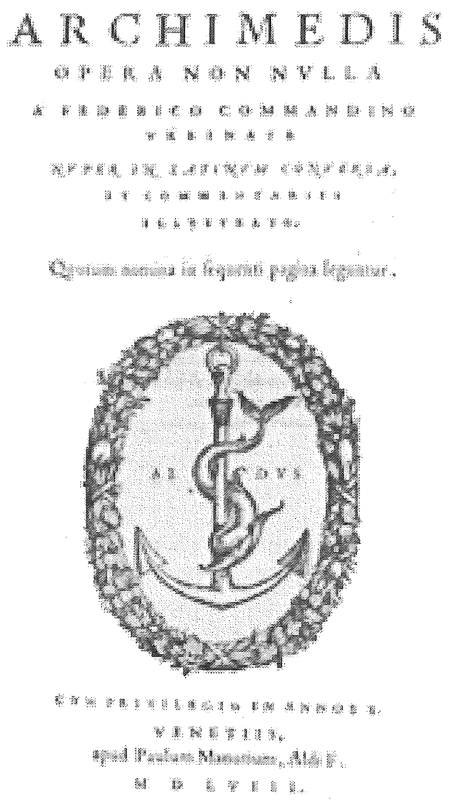
JABOEUF, *Les nombres premiers*, dans "Histoire de problèmes, histoire des mathématiques", Ellipses, 1993, 30 pages.

OYSTEIN ORE, *Number theory and its history*, Éditions Dover (1988) réédition d'un livre de 1948.

RASHED, *Analyse combinatoire, analyse numérique, analyse diophantienne et théorie des nombres*, "Histoire des mathématiques arabes", Seuil, 1997, 38 pages.

SAIDAN, *Numération et arithmétique*, "Histoire des mathématiques arabes", Seuil, 1997, 20 pages.

SILVERMANN, *A Friendly Introduction to Number Theory*, Éditions Prentice Hall (1987).


ARCHIMEDIS
OPERA NON NVLLA
A FEDERICO COMMANDINO
VRBINATE
NVPER IN LATINVM CONVERSA,
ET COMMENTARIIS
ILLVSTRATA.
Quorum nomina in sequenti pagina leguntur.

CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.
VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D LVIII.

1, 2, 3 · · · etc
de l'induction à la récurrence

DAUMAS Denis
GUILLEMOT Michel
IREM de Toulouse (France)

Abstract

Introduction

L'Un, c'est l'Être unique. Avec l'Autre, second, on ne sort pas du duo où l'autre renvoie l'image de l'Un et réciproquement, on n'est toujours pas dans l'ordre du pluriel, et certaines grammaires en gardent la trace avec, entre singulier et pluriel, le "duel". Au delà il y a la multitude, pas nécessairement nombrée, c'est le domaine du "beaucoup", "très" que l'on ne peut manquer de rapprocher avec notre "trois". L'aventure commence quand on passe de l'Un à l'unité, ou plutôt aux unités : quand on dispose d'un stock d'unités, on peut les rassembler, les compter. Pour EUCLIDE, le nombre est une *multitude composée d'unités*[1]. A cette idée de multitude, ici nécessairement déterminée puisqu'il s'agit de nombre, NICOMAQUE DE GÉRASE ajoute l'idée de *flux* que nous pouvons associer à celle de progression : on passe d'un nombre au suivant en ajoutant une unité (il faut alors envisager un stock inépuisable d'unités), et c'est sans fin. Nous voilà en présence de l'infini, potentiel car un nombre entier est toujours fini, mais néanmoins redoutable lorsqu'il s'agit de démonstration : l'observation de nombres permet de dégager des régularités, des lois, mais cette induction ne suffit pas à fonder une théorie mathématique. De la conjecture au théorème, il y a l'espace de la démonstration.

Le but de cet atelier était précisément d'explorer, à partir de quelques textes, comment une démarche inductive peut trouver sa place dans une démonstration mathématique. Ce point de vue nous a conduit au choix de ne pas aller au delà de PASCAL qui, en formulant très clairement le principe de ce que nous appelons "démonstration par récurrence" tourne une page dans l'histoire des relations induction/démonstration.

L'arithmétique, qui revient en force dans nos programmes, est un terrain incontournable, mais nous avons fait un autre choix, celui de ne pas nous y cantonner : les procédés itératifs illimités ne manquent pas et certains problèmes de géométrie conduisent également à une démarche inductive.

Nos auteurs seront, par ordre d'entrée en scène : NICOMAQUE DE GÉRASE, PASCAL DE CLERMONT FERRAND, MAUROLYCUS DE MESSINE, EUCLIDE D'ALEXANDRIE et PAPPUS D'ALEXANDRIE, avec la participation d'Archimède de Syracuse.

L'induction chez NICOMAQUE

NICOMAQUE, originaire de Gérase, est un philosophe néopythagoricien du 1er siècle de notre ère. La philosophie pythagoricienne est basée sur le nombre et l'Unité est son principe ultime. Les nombres organisent l'Univers, et c'est en étudiant les harmonies numériques que l'on peut accéder à la connaissance profonde de notre monde. Quand il écrit l'*Introduction arithmétique*, NICOMAQUE ne cherche pas à rédiger un traité d'arithmétique théorique, et l'architecture de son ouvrage n'est pas guidée par la logique démonstrative comme c'est le cas avec les *Éléments* d'EUCLIDE, mais a plutôt un but didactique : familiariser ses lecteurs avec l'arithmétique pythagoricienne. Ainsi il mêle considérations mathématiques et commentaires philosophiques, et ne se préoccupe pas de démonstrations, au sens que l'on donne à ce terme depuis les *Éléments d'Euclide*.

Le premier extrait concerne les nombres parfaits. NICOMAQUE a d'abord traité des "nombres déficients" et des "nombres redondants" dont la somme des diviseurs propres (les "parties rassemblées") est respectivement inférieure et supérieure au nombre considéré: 4 est déficient ($1+2=3$ et $3<4$), 12 est redondant ($1+2+3+4+6=16$ et $16>12$). Il en vient

[1] EUCLIDE, *Les Éléments*, Livre VII, définition 2, page 247.

alors aux nombres parfaits :

> Lors donc qu'un nombre dont toutes les parties qui peuvent être en lui ont été rassemblées et récapitulées en comparaison avec lui-même ni ne les excède par sa multiplicité ni n'est excédé par elles, alors un nombre de ce genre est dit parfait au sens propre, lui qui est égal à toutes ses parties; par exemple 6 [...]; car 6 a comme parties une moitié, un tiers, un sixième qui sont 3, 2, 1, lesquels récapitulés ensemble font 6 égal au nombre initial, ni plus ni moins.

Après la définition, il poursuit :

> Il se fait que, comme les choses belles et conformes à la vertu sont rares et faciles à nombrer, mais les choses laides et sans valeur fréquentes, ainsi les nombres redondants et déficients apparaissent nombreux et mal répartis, leur découverte se faisant dans le désordre, tandis que les nombres parfaits sont faciles à nombrer et agencés selon un ordre convenable; dans les unités, il s'en trouve un seul, 6, un autre seulement dans les dizaines, 28, un troisième seulement dans le degré des centaines, 496, un quatrième dans le domaine des chiliades, c'est-à-dire à l'intérieur des myriades, 8 128; ils ont pour caractère de se terminer alternativement par le nombre 6 ou le nombre 8, et d'être entièrement parmi les pairs.[2]

Autrement dit, pour NICOMAQUE :

1- les nombres parfaits sont pairs (c'est toujours une conjecture, on n'a encore pas trouvé de nombre parfait impair).

2- il y a un nombre parfait et un seul dans chaque intervalle $[10^n\ ;\ 10^{n+1}[$ (en fait, après 8 128 cité par NICOMAQUE, le suivant est 33 550 336) il n'y en a aucun dans $[10^4;10^5[$ ni dans $[10^5;10^6[$.

3- les nombres parfaits pairs se terminent par 6 ou par 8 : vrai.

4- les terminaisons 6 et 8 apparaissent alternativement : faux, après 33 550 336 vient 8 589 869 056 qui est aussi terminé par 6.

Il est clair que NICOMAQUE s'est contenté d'observer les premiers nombres parfaits pour en tirer des conclusions générales. Il disposait d'un procédé général pour obtenir des nombres parfaits, mais il est vrai que sa mise en œuvre devient très vite une épreuve, du fait de la taille des nombres. L'observation des premiers nombres parfaits révélant, en opposition avec les nombres déficients et redondants, des dispositions conformes à quelques idées générales sur le beau et le laid, le désir l'emporte sur les tracas d'une expérimentation plus poussée ... et d'une démonstration !

Un second extrait concerne les nombres figurés. La deuxième partie de l'*Introduction arithmétique* est consacrée à ces nombres qui occupent une grande place dans l'arithmétique pythagoricienne. Nous allons nous intéresser au chapitre concernant les nombres triangulaires.

NICOMAQUE annonce la configuration triangulaire de ces nombres, donne les six premiers (3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; 28) auxquels il ajoute l'unité qualifiée de "triangle en puissance", les précédents étant des "triangles en acte", mais il ne les représentera qu'en fin de chapitre: pour lui, l'arithmétique est première, les nombres rythment les figures et non l'inverse.
Observons plus en détail la génération de ces nombres :

[2] NICOMAQUE DE GÉRASE, *Introduction arithmétique*, Livre I, chapitre XVI, pages 75-76.

Il s'engendre quand le nombre naturel est exposé en ligne et que, toujours depuis le début, les nombres successifs sont ajoutés un à un, car les triangles bien ordonnés se réalisent à chaque addition et entassement par exemple à partir de cette ligne naturelle :

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,\quad 11,\quad 12,\quad 13,\quad 14,\quad 15,$$

en prenant le premier nombre, j'ai le premier triangle en puissance, l'unité, ensuite en entassant sur lui le suivant, j'ai le premier triangle en acte, car 3 est 2 et 1, et dans la représentation figurée, il se constitue ainsi : sous la première unité on appose deux unités côte à côte, et le nombre 3 est triangulé; ensuite 3, qui est le nombre suivant, entassé sur ceux-ci, déployé en unités et réuni, produit 6, second nombre triangle en acte, et lui donne aussi une configuration; et à son tour, le nombre qui suit naturellement, 4, entassé sur ceux-ci et noté en unités, donne le nombre 10, bien ordonné après ceux dont on vient de parler, et il prend une configuration triangulaire; et 5 après lui, puis 6, puis 7, et tous les suivants, de sorte que les côtés de chacun compteront harmonieusement autant d'unités que de nombres de la ligne naturelle réunis pour sa constitution.[3]

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \alpha \\
 & & & & & \alpha & \alpha\alpha \\
 & & & & \alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha \\
 & & & \alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha \\
 & & \alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\
 & \alpha & \alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha \\
\alpha\quad\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha & \alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha
\end{array}$$
[4]

Les nombres triangulaires se construisent donc successivement, le passage d'un nombre au suivant se faisant dans la représentation par ajout d'une ligne supplémentaire, d'une barre de alphas (dans la numération grecque, la lettre α désigne l'unité). Si nous notons T_1 l'unité, triangle en puissance, alors le principe de la construction des nombres triangulaires T_n peut s'écrire :

$$T_{n+1} = T_n + (n+1).$$

Parlant en général des nombres polygones, NICOMAQUE généralise cette technique et observe que les nombres successifs qu'il faut ajouter à un nombre polygone pour obtenir le suivant peuvent eux mêmes se déduire les uns des autres :

> c'est une règle générale que les gnomons[5] de chaque polygone diffèrent les uns des autres d'une dyade de moins que la quotité liée au nom des angles, à savoir le triangle, d'une unité, le tétragone, d'une dyade, le pentagone, d'une triade, l'hexagone, d'une tétrade, l'heptagone, d'une pentade, et toujours selon un accroissement semblable[6].

Nous pouvons énoncer cette propriété des nombres polygones en notant P_n^k le n$^{\text{ième}}$ polygone de k côtés (le premier étant l'unité) :

$$P_{n+1}^k = P_n^k + (1 + (k - -2)n).$$

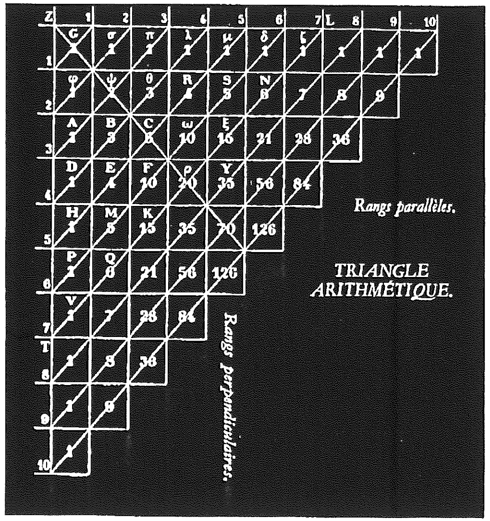
[3] NICOMAQUE DE GÉRASE, *Introduction Arithmétique*, Livre II, Chapitre VIII, p. 105.

[5] "Gnomon", terme qui désigne d'abord le cadran solaire, puis l'équerre, est utilisé par les mathématiciens grecs dans le sens donné par Héron d'Alexandrie, et rappelé par J. Bertier dans ses notes à l'*Introduction arithmétique* : "en général, un gnomon est tout ce qui, en se joignant à quoi que ce soit -nombre ou figure-, rend le tout semblable à ce à quoi il est joint."

[6] NICOMAQUE DE GÉRASE, *Introduction Arithmétique*, Livre II, Chapitre XI, p. 108.

Cela revient donc à considérer les nombres polygones de k côtés comme des sommes de termes successifs, à partir de l'unité, d'une suite arithmétique de raison $k-2$. Cette idée de somme, sous la forme d'entassement, est centrale dans l'*Introduction arithmétique* et les résultats relèvent, chez NICOMAQUE, uniquement de l'induction. Les mathématiciens grecs avaient-ils résolu le problème de leur démonstration ? On peut constater que cet aspect de l'arithmétique est absent des *Éléments* d'EUCLIDE : était-il considéré comme purement conjectural ?

PASCAL et l'induction mathématique



C'est dans le *Traité du triangle arithmétique*, écrit en français en 1654, que BLAISE PASCAL décrit ainsi la méthode de démonstration de la douzième conséquence :

> Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.
>
> Le 1, qui est évident de soi-même, que cette proposition se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 est à 1.
>
> Le 2, que si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.
>
> D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.[7]

[7] PASCAL, B. *Traité du triangle arithmétique* in *Œuvres complètes*, La Pléiade, page 103.

Cet énoncé est le premier qui expose clairement la méthode de démonstration dite aujourd'hui “raisonnement par récurrence” ou “induction mathématique”. Revenons au début du traité, quand PASCAL construit ce triangle :

- dans la première cellule (en haut, à gauche) on met un nombre arbitraire : le générateur G ($G = 1$ dans le triangle représenté).
- ensuite : *le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui le précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui le précède dans son rang parallèle*[8].

C'est la seule règle donnée par PASCAL, mais il précise dans la conséquence première, qu'il faut considérer pour les cellules du premier rang perpendiculaire (respectivement parallèle) qui n'ont aucune cellule qui les précède dans leur rang parallèle (respectivement perpendiculaire) qu'il faut ajouter 0 : les cellules de ces deux rangs sont donc égales au générateur.

PASCAL met ainsi l'accent sur deux choses :

- la généralité du triangle : de nombreux énoncés commencent par “dans tout triangle arithmétique . . . ”, (ce n'est qu'au stade des applications que le générateur est posé égal à 1) ;
- sa structure additive, mais au prix d'un défaut d'initialisation pour les premiers rangs, qu'il ne corrige pas toujours dans ses démonstrations.

Précisons que PASCAL appelle “bases” les hypoténuses des triangles successifs, tracées sur la figure. Enfin, PASCAL utilise des lettres pour noter les nombres de différentes cellules, mais ces lettres ne permettent que de respecter le choix arbitraire du générateur, elles restent inscrites dans des cellules particulières. Il ne dispose pas d'un moyen, comme les indices ou les exposants, pour accéder à une notation générale. Par commodité, nous allons nous donner une notation générale, mais pour éviter toute confusion avec les combinaisons, nous n'utiliserons pas la lettre C : nous désignerons par x_n^p la cellule de rang parallèle n et de rang perpendiculaire p. Nous pouvons donc écrire

$$x_n^1 = x_1^p = G,$$

et traduire la construction additive du triangle par

$$x_{n+1}^{p+1} = x_{n+1}^p + x_n^{p+1}.$$

La cellule x_n^p appartient à la base $n + p + 1$.

L'énoncé de la douzième conséquence est :

> En tout triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.[9]

Avec nos notations, cela se traduit par : n et p étant deux naturels non nuls quelconques,

$$\frac{x_n^{p+1}}{x_{n+1}^p} = \frac{n}{p}.$$

Mais cette traduction laisse de côté la “base” des cellules : une cellule de rang parallèle n et de rang perpendiculaire p est dans la base $n + p - 1$, la base commune des cellules est donc ici

[8] PASCAL, B. *Traité du triangle arithmétique*, page 98.

[9] PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, page 103.

de rang $n + p$, et la base initiale est la deuxième où, comme l'affirme PASCAL, la proposition se vérifie sans difficulté. Reste à prouver le “deuxième lemme”.

PASCAL fait ce que nous pouvons appeler une “démonstration quasi-générale” : prenant la quatrième base comme base quelconque, il démontre que si la proposition est vraie dans cette base, alors elle est vraie dans la suivante, en l'occurrence, la cinquième. Et encore, il ne prend dans cette cinquième base que le rapport de C à E : *on le montrera de même dans tout le reste*.

En substance, la démonstration de PASCAL est la suivante :

> si la proposition est vraie dans la base des cellules $D, B, \theta\cdots$, alors $\frac{D}{B} = \frac{1}{3}$ et $\frac{B}{\theta} = \frac{2}{2}$.
> On en déduit $\frac{D+B}{B} = \frac{1+3}{3}$ et $\frac{B+\theta}{B} = \frac{2+2}{2}$.
> Mais $D + B = E$ et $B + \theta = C$, donc $\frac{C}{E} = \frac{B+\theta}{B} \times \frac{B}{D+B} = \frac{4}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$: la proposition est vraie pour les cellules C et E.

On peut s'étonner qu'après avoir brillamment exposé le principe de l'induction mathématique, PASCAL soit obligé d'avoir recours à une autre forme d'induction : ce qui a été fait sur un cas particulier peut se faire de la même manière dans les autres cas. Si nous qualifions ce type de démonstration de “quasi-générale”, c'est que la démonstration générale se mène exactement de la même manière, la seule différence étant dans le recours à des notations permettant de se situer dans le cas général. Autrement dit, la carence de la notation n'altère pas la rigueur de la démonstration. Il suffit de la faire pour s'en convaincre :

		x_{n-1}^{p+1}
	x_n^p	$\mathbf{x_n^{p+1}}$
x_{n+1}^{p-1}	$\mathbf{x_{n+1}^p}$	

la clef de la démonstration est dans la structure additive du triangle :

$$x_n^{p+1} = x_n^p + x_{n-1}^{p+1} \text{ et } x_{n+1}^p = x_{n+1}^{p-1} + x_n^p,$$

et dans la charnière occupée par la cellule x_n^p:

$$\text{si } \frac{x_n^p}{x_{n+1}^{p-1}} = \frac{n}{p-1} \text{ et } \frac{x_{n-1}^{p+1}}{x_n^p}, \text{ alors}$$

$$\frac{x_n^{p+1}}{x_{n+1}^p} = \frac{x_{n-1}^{p+1}}{x_n^p} \times \frac{x_n^p}{x_n^p + x_{n+1}^{p-1}} = \frac{p+(n-1)}{p} \times \frac{n}{(p-1)+n} = \frac{n}{p}.$$

On peut cependant remarquer que PASCAL a omis d'envisager le cas où une des deux cellules occupe le premier rang parallèle ou le premier rang perpendiculaire.

Pourquoi PASCAL a-t-il attendu la conséquence douzième pour exposer le principe de la démonstration par récurrence ? Prenons par exemple la conséquence cinquième :

> En tout triangle arithmétique, chaque cellule est égale à sa réciproque.[10]

[10] PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, page 100. La réciproque d'une cellule est, dans la même base, la symétrique par rapport au milieu de la base. Avec nos notations, la réciproque de x_n^p est x_p^n.

Pour la démonstration, PASCAL n'envisage pas le cas où une cellule est sa propre réciproque et commence donc à la seconde base. Dans celle-ci, comme dans la troisième, les seules cellules concernées sont égales au générateur et le résultat est "évident". Dans la quatrième base, les cellules extrêmes sont aussi égales au générateur. Restent B et θ :

$B = A + \Psi$, $\theta = \Psi + \pi$ et, comme A et π sont réciproques dans la troisième base, on a bien $B = \theta$. Et PASCAL conclut :

> Ainsi l'on montrera dans toutes les bases que les réciproques sont égales, parce que les extrêmes sont égales à G, et que les autres s'interpréteront toujours par d'autres égales dans la base précédente qui sont réciproques entre elles.

PASCAL ne fait pas ici une démonstration par récurrence, en dégageant clairement le premier lemme et le second. S'il traite d'abord des bases 2 et 3, c'est davantage pour leur spécificité (les cellules concernées sont toutes égales au générateur), et ce n'est qu'à partir de la quatrième base qu'il met en route un procédé qui pourra s'appliquer aux suivantes. Nous parlerons ici de "démonstration de proche en proche", avec l'idée que c'est une démonstration que l'on peut poursuivre jusqu'à une base donnée, quelle qu'elle soit. On pourrait alors penser que la rigueur de PASCAL est incertaine, mais le problème n'est certainement pas là : pour PASCAL, démontrer consiste avant tout à éclairer, à rendre évident. Ainsi, il rejette par principe le raisonnement par l'absurde qui n'éclaire pas mais oblige à admettre quelque chose parce que son contraire est impossible. La cinquième conséquence est simple et s'impose aisément quand on a observé ce qui est en œuvre dans les premières bases, la douzième est beaucoup plus compliquée et PASCAL lui réserve un type de raisonnement plus élaboré.

Autre question : PASCAL est-il le premier a avoir dégagé clairement les deux temps d'un raisonnement par récurrence ? Dans cette recherche de l'antériorité, un débat, lui-même récurrent, oppose des chercheurs. Nous n'allons pas présenter ces divergences, mais nous pouvons citer par exemple, Freudenthal s'opposant à Vacca au sujet de MAUROLYCUS, Vitrac à Itard à propos d'EUCLIDE[11]... et faire une rapide incursion chez MAUROLYCUS, puis chez EUCLIDE.

MAUROLYCUS : retour aux nombres figurés

En écrivant, sous le pseudonyme de Monsieur Dettonville, une lettre à Carcavi traitant de la roulette, PASCAL lui-même donne la piste de MAUROLYCUS :

> Or tout nombre triangulaire, pris deux fois et diminué de son exposant, est le même que le carré de son exposant; comme, par exemple, le troisième nombre triangulaire 6, étant doublé, est 12, qui diminué de l'exposant 3, il reste 9, qui est le carré de 3.
> Cela est aisé par Maurolic et de là paraît la vérité de ma proposition.[12]

MAUROLYCUS (ou Maurolyco), mathématicien (et abbé) sicilien (Messine, 1494-1575) écrit en 1557 une arithmétique en deux Livres, publiée à Venise en 1575.[13] Dans les prolégomènes, MAUROLYCUS précise que son traité est consacré aux figures numériques planes et

[11] G. VACCA, Sur le principe d'induction mathématique, *Revue de Métaphysique et de morale*, dix-neuvième année - 1911, pp. 30-33.
H. FREUDENTHAL, Zur Geschichte des vollständigen induktion, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 6, 1953, pp. 18-37.
J. ITARD, *Les livres arithmétiques d'*EUCLIDE, Hermann, Paris, 1961, pp. 73-75.
B. VITRAC, EUCLIDE, *Les Éléments*, volume 2, PUF, Paris, 1994, pp. 467-472.

[12] PASCAL, *La roulette et traités connexes*, in *Œuvres complètes*, page 237.

[13] Nous remercions Jean Cassinet de nous avoir procuré des extraits de cet ouvrage qui avait connu une notoriété certaine, comme en témoigne PASCAL.

solides (triangles, carrés, pentagones, hexagones...), et annonce une méthode de démonstration nouvelle et plus simple que celles de ses prédécesseurs. Parmi les propositions que l'on peut associer au problème de la démonstration par récurrence, prenons le couple des propositions 13 et 15.

La treizième proposition est

> Tout carré forme avec l'impair suivant le carré suivant.

Si l'on note C_n le n$^{\text{ième}}$ carré et I_n le n$^{\text{ième}}$ nombre impair, la proposition devient

$$C_n + I_{n+1} = C_{n+1},$$

et renvoie à une de nos "identités"

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

La démonstration, qui est menée sur un cas particulier (démonstration "quasi-générale") n'a pas de rapport avec l'induction, mais la proposition 13 intervient dans la démonstration de la proposition 15 :

Quinzième

> De la réunion des nombres impairs pris successivement dans l'ordre à partir de l'unité sont construits les nombres carrés, sans interruption à partir de l'unité, eux-mêmes collatéraux à ces impairs. En effet, d'après l'avant dernière proposition, l'unité pour commencer, avec l'impair suivant donne le carré suivant, à savoir 4. Et 4 lui-même, avec le troisième impair, 5, donne le troisième carré, 9. De même que 9, troisième carré , donne avec le quatrième impair, 7, le quatrième carré, 16 et ainsi de suite à l'infini, la proposition est démontrée par l'application répétée de la 13$^{\text{ème}}$ proposition.

Il s'agit donc de démontrer que la somme des n premiers nombres impairs est le n$^{\text{ième}}$ carré. MAUROLYCUS commence avec $n = 2$, certainement parce qu'un seul nombre ne fait pas une "réunion", mais implicitement, il est dit que l'unité est à la fois le premier impair et le premier carré.

Le schéma de la démonstration est le suivant :

$I_1 = 1 = C_1$ et $C_1 + I_2 = C_2$, d'après 13, donc $I_1 + I_2 = C_2 (= 4)$.
$I_1 + I_2 + I_3 = (I_1 + I_2) + I_3 = C_2 + I_3 = C_3 (= 9)$, d'après 13.
$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = (I_1 + I_2 + I_3) + I_4 = C_3 + I_4 = C_4 (= 16)$ d'après 13,
...

et ainsi de suite à l'infini. Et MAUROLYCUS précise que ce qui permet de passer d'un rang au suivant est toujours la proposition 13.

Rédigeons, pour comparer, une démonstration par récurrence de la proposition :

$$\text{quel que soit le naturel } n (n \geq 2), \sum_{p=1}^{n} I_p = C_n.$$

1) La proposition est vérifiée au rang initial 2 : $I_1 + I_2 = 1 + 3 = 4 = C_2$.

2) Si elle est vraie au rang n, elle l'est au rang $n + 1$:

si, pour $n \geq 2$, $\sum_{p=1}^{n} I_p = C_n$, alors $\sum_{p=1}^{n+1} I_p = \sum_{p=1}^{n} I_p + I_{n+1} = C_n + I_{n+1}$ et, d'après 13, $C_n + I_{n+1} = C_{n+1}$, donc $\sum_{p=1}^{n+1} I_p = C_{n+1}$.

Dans la démonstration de MAUROLYCUS nous ne trouvons pas les deux lemmes de PASCAL :

- pour le premier, nul besoin d'invoquer la proposition 13 pour vérifier la proposition au rang initial, 2.
- quand au deuxième lemme de PASCAL, n'est-il pas fait précisément pour éviter la répétition à portée inductive à laquelle se livre MAUROLYCUS ?

EUCLIDE et la quantité des nombres premiers

Bien que ne traitant pas des nombres figurés, EUCLIDE utilise quelques démarches inductives dans ses *Éléments*. Citons l'application de la division euclidienne à la recherche de la plus grande commune mesure de deux nombres (connue sous le nom d'"algorithme d'Euclide"), la construction de proche en proche de la plus grande commune mesure de trois nombres ou davantage, la même chose concernant cette fois le plus grand multiple commun, l'étude de certains aspects des proportions continues (suites géométriques). C'est la proposition 20 du Livre 9 que nous avons choisie :

> Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombre premiers proposée.[14]

On dit aujourd'hui que l'ensemble des nombres premiers est infini, l'infini étant réalisé, en acte, dans l'ensemble des nombres premiers. EUCLIDE dans son énoncé reste, comme les mathématiciens grecs, dans le domaine de l'infini potentiel, et donc dans le fini. Mais ce qui nous intéresse dans cette proposition, c'est qu'EUCLIDE démontre que si on se donne une quantité quelconque de nombres premiers, alors on peut en construire un de plus. Et on ne peut s'empêcher de penser au deuxième lemme de PASCAL où le passage de n à $n+1$ assure dans l'infinité des nombres naturels une proposition vérifiée pour le premier.

Nous allons présenter la démonstration d'EUCLIDE sur trois colonnes : dans la première le texte d'EUCLIDE (sa traduction par Vitrac), dans la seconde un commentaire pas à pas de ce texte, et dans la troisième un essai de démonstration générale qui respecte les grandes articulations de la démonstration d'EUCLIDE.

[14] EUCLIDE, Les Éléments, page 444.

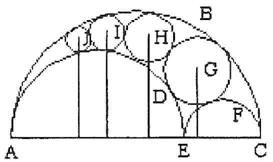
Soient les nombres premiers proposés A, B, C. Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que A, B, C.	Comme nous l'avons déjà observé, la proposition générale est démontrée en utilisant seulement trois nombres premiers.	Soient $A_1, A_2, \ldots A_n$ des nombres premiers (distincts), je dis qu'il y a plus de n nombres premiers.
En effet, que soit pris le plus petit [nombre] mesuré par A, B, C, et que ce soit DE et que l'unité DF soit ajoutée à DE. Alors ou bien EF est premier ou bien non.	Le plus petit nombre mesuré par A,B,C (nous disons aujourd'hui le plus petit commun multiple de A,B,C) est le produit ABC car ces trois nombres sont premiers, mais Euclide évite la multiplication, problématique chez les Grecs pour lesquels le produit de deux nombres est plan, de trois nombres, solide, mais que peut être le produit de deux plans ? Posons D = PPCM(A,B,C)+1.(ici D = ABC+1).	Soit $X = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n + 1$.
D'abord qu'il soit premier ; donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, EF plus nombreux que A, B, C.	1) si D est premier, D étant par construction distinct de A, de B et de C (Euclide n'éprouve pas ici le besoin de préciser ce point), nous avons maintenant quatre nombres premiers distincts : A, B, C et D.	1) Si X est premier, on a les nombres premiers $A_1, A_2, \ldots A_n$, X, plus nombreux que les nombres premiers $A_1, A_2, \ldots A_n$ puisque X est, par construction, distinct de chacun des nombres $A_1, A_2, \ldots A_n$.
Mais alors que EF ne soit pas premier ; il est donc mesuré par un certain nombre premier (VII.32). Qu'il soit mesuré par le [nombre] premier G. Je dis que G n'est pas le même que l'un quelconque des A, B, C.	2) si D n'est pas premier, D admet au moins un diviseur premier (Euclide démontre cela aux propositions VII-31 et 32). Soit donc E un diviseur premier de D : démontrons, par l'absurde, que E est distinct de A, de B et de C.	2) Si X n'est pas premier, il a au moins un diviseur premier Y. De plus, Y n'est aucun des nombres premier A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$.
En effet, si c'est possible, qu'il le soit. Or A, B, C mesurent DE ; donc G mesurera aussi DE. Mais il mesure aussi EF : il mesurera aussi l'unité DF restante tout en étant un nombre ; ce qui est absurde. G n'est donc pas le même que l'un des A, B, C. Et il est supposé premier.	Supposons en effet que E = A ou E = B ou E = C. E est alors un diviseur de ABC et de D, et par conséquent un diviseur de la différence D - ABC qui vaut 1. Or un nombre ne peut diviser 1, on a donc E ≠ A et E ≠ B et E ≠ C.	En effet, s'il existe au moins un i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tels que $Y = A_i$, Y divise à la fois X et $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Y divise donc $X - A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ qui vaut 1, ce qui est impossible.
Donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, G, plus nombreux que la multitude proposée des A, B, C. Ce qu'il fallait démontrer.	A, B, C, E sont donc quatre nombres premiers distincts. Il y a donc plus de trois nombres premiers.	Nous avons donc dans les deux cas n+1 nombres premiers distincts : il y a donc plus de n nombres premiers..

Nous étions partis du problème que pose l'infinité des nombres pour débusquer, entre induction conjecturale et récurrence des pratiques démonstratives (par itération, de proche en proche) propres à établir des propositions vraies pour tout nombre entier. Ici nous avons un changement important : nous pouvons opposer une démarche "de proche en proche" comme par exemple celle du crible d'Eratosthène à celle d'EUCLIDE. Ce crible permet de trouver des nombres premiers, mais trouverons-nous toujours de nouveaux nombres premiers ? Avec PAPPUS, nous allons passer de l'arithmétique à la géométrie et voir qu'établir une proposition au rang initial n'est pas toujours chose facile.

PAPPUS D'ALEXANDRIE : **l'arbelon**

Nous ne savons presque rien sur PAPPUS D'ALEXANDRIE, un des derniers grands mathématiciens de l'antiquité grecque. Il a vécu à une période que l'on situe généralement entre la fin du troisième et le début du quatrième siècle. Son œuvre principale, la *Collection Mathématique* qui nous est parvenue de manière incomplète, est un témoignage important concernant les mathématiques grecques. PAPPUS y expose les travaux de ses prédécesseurs en les complétant, les généralisant ou simplifiant certaines démonstrations. Il propose aussi des résultats nouveaux tout en se préoccupant de la démarche analytique conduisant à leurs preuves. La traduction latine de la *Collection Mathématique* effectuée par Commandin (1509-1575) a beaucoup contribué au développement des mathématiques au dix-septième siècle : pour notre propos, elle ne pouvait être ignorée ni de PASCAL ni de FERMAT.

L'objet de notre étude concerne ici les chapitres XIV à XX du quatrième livre : nous utilisons la traduction de Paul Ver Eecke en transformant, pour une meilleure compréhension, les lettres grecques en les lettres latines et en gardant, dans la mesure du possible, les mêmes notations tout le long de notre exposé. Écoutons ce que nous dit PAPPUS au chapitre XIV que nous citons en entier:

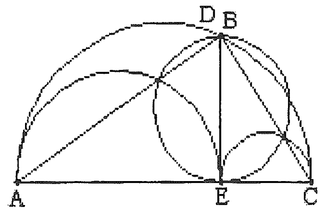


> La proposition suivante est rapportée dans certains ouvrages anciens. Supposons trois demi-cercles ABC[15], ADE, EFC, tangents entre eux, et inscrivons, dans l'espace compris entre leurs arcs, qu'on appelle l'**Arbelon**, tant de cercles qu'on voudra, tangents aux demi-cercles et tangents entre eux, tels que ceux qui sont décrits autour des centres G, H, I, J.
>
> On démontrera que la perpendiculaire menée du centre G sur la droite AC est égale au diamètre du cercle décrit autour de G; que la perpendiculaire menée du point H est le double diamètre du cercle décrit autour de H; que la perpendiculaire menée du point I est le triple, et que l'inscription de cercles étant faite à l'infini, les perpendiculaires successives seront des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent continuellement d'une unité. Mais nous allons démontrer d'abord les choses qui seront admises pour cela (pp. 158-159).

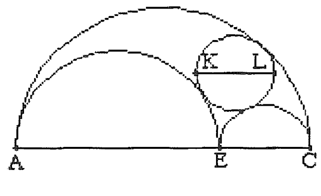
Que nous dit PAPPUS ? Que la proposition en question "est rapportée dans certains ouvrages anciens". La *Collection Mathématique* comporte de nombreux témoignages du même genre.

[15]PAPPUS désigne un cercle par trois de ses points ou aussi parfois par son centre.

En l'absence d'autres écrits qui ne nous sont pas parvenus nous sommes amenés à attribuer à PAPPUS peut être plus que ce qui lui est dû. En fait, la figure de base "trois demi-cercles ABC, ADE, EFC tangents entre eux" et "l'espace compris entre leurs arcs" sont connus : il s'agit de l'arbelon qui ressemble au tranchet du cordonnier. Le mot grec, arbelon, a été conservé par Commandin dans sa version latine et par Ver Eecke dans la traduction française.



On retrouve cet *arbelon* dans *Le Livre des Lemmes* d'Archimède (vers 287-212 avant Jésus-Christ) ouvrage qui nous a été seulement transmis dans sa version arabe. Nous considérons seulement ici les propositions IV et VI. Dans la proposition IV Archimède démontre que l'aire de l'*arbelon* $ABCD$ est égale à l'aire du cercle tangent en E au diamètre AC et passant par B, point du cercle ABC tel que BE soit orthogonal à AC[16]. Dans la proposition VI Archimède prend une position particulière du point E et considère le cercle tangent aux trois demi-cercles : désignons son diamètre parallèle à AC par KL.



> prenons sur son diamètre, un point E tel que AE soit égal à une fois et demie EC.[...]. Il s'agit de trouver le rapport du diamètre AC au diamètre KL.[...]
>
> Nous avons donc trouvé le rapport en question. Si AC était à KL dans un rapport quelconque tel que celui de quatre à trois, ou de cinq à quatre ou dans un autre, on procéderait et raisonnerait comme nous venons de le faire (p. 531).

Autrement dit, Archimède traite le cas particulier de "une fois et demie" c'est-à-dire du rapport de 3 à 2 pour engager le lecteur à procéder de même lors de la considération de tout autre rapport d'entiers[17].

On mesure mieux la distance qui sépare ce texte d'Archimède de l'écrit de PAPPUS en traduisant celui-ci sous une forme plus moderne. Dans l'*arbelon* PAPPUS inscrit une suite de cercles dont le premier de centre C_1 est tangent aux demi-cercles délimitant l'*arbelon* et dont le second est tangent à ce cercle et aux demi-cercles ABC et ADE. Désignons par C_2 son centre.

[16]L'aire de l'arbelon est $\frac{\pi}{8}(AC^2 - AE^2 - EC^2)$ soit $\frac{\pi}{4}AE.AC$ ou encore $\frac{\pi}{4}BD^2$ qui est l'aire du cercle de diamètre BE.

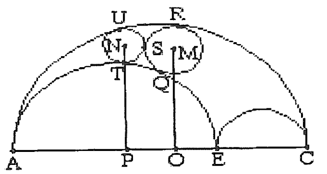
[17]Si $\frac{AC}{AE} = r$, alors $\frac{AC}{KL} = \frac{r^2+r+1}{r}$. Par exemple si $r = \frac{3}{2}$, alors $\frac{AC}{KL} = \frac{19}{6}$.

Plus généralement, on peut définir par récurrence la suite des cercles (C_n) de centre C_n tels que (C_{n+1}) soit tangent au cercle (C_n) et aux demi-cercles ABC et ADE. Si nous désignons par h_n la distance de C_n au diamètre AC et par d_n la mesure du diamètre de (C_n), nous pouvons traduire la proposition rapportée par PAPPUS sous la forme suivante :

$$h_1 = d_1, h_2 = 2d_2, h_3 = 3d_3$$

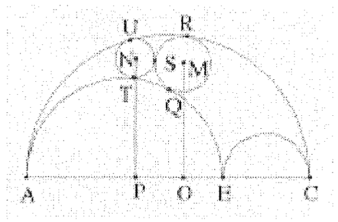
et "l'inscription des cercles étant faite à l'infini", si n est un entier naturel quelconque

$$(1)\ \ h_n = nd_n$$



Autrement dit, à la différence d'Archimède, PAPPUS ou un de ses prédécesseurs ne se contente pas d'un cas particulier qu'il suffit de répéter pour tout autre cas. Ici, en quelque sorte, avec nos notations d'aujourd'hui, la construction par récurrence de la suite (C_n) et la nature de la relation (1) imposent un changement de type démonstratif : le raisonnement par récurrence rentre alors en jeu.

PAPPUS ne met pas en évidence ce mode de preuve mathématique. Mais, comme l'a remarqué Hussein Tahir dans son article "PAPPUS and the mathematical induction" paru en 1995 dans *Australian Mathematical Gazette*, il en précise les étapes essentielles[18]



- rang initial : *"la perpendiculaire menée du centre G sur la droite AC est égale au diamètre du cercle décrit autour de G"* (p. 158)
- passage du rang n à $n+1$: *"Proposition 15 : les mêmes choses étant posées... je dis que la droite NP est au diamètre du cercle STU comme la droite MO, conjointement avec le diamètre du cercle QR est au diamètre de ce cercle"*. (pp. 166-167)

PAPPUS démontre ce passage de n à $n+1$ dans un cadre plus général que celui de la suite des cercles (C_n). Plus précisément, dans l'*arbelon*, il considère deux cercles tangents entre eux et tangents aux demi-cercles ABC et ADE. Le premier de centre M est tangent respectivement à ABC et ADE aux points R et Q tandis que le second, de centre N, l'est respectivement en

[18]Thus, it seems to me that PAPPUS understood the essential ideas in the mathematical induction.

U et T, ces deux cercles étant tangents en S. Si O et P désignent les projections respectives de M et N sur le diamètre AC et si nous notons par d et d' les diamètres respectifs des cercles de centre M et N, nous pouvons traduire l'affirmation de PAPPUS sous la forme de l'égalité suivante

$$(2)\ \ \frac{NP}{d'} = \frac{MO+d}{d}$$

d'où, nous déduisons aisément que, pour la suite des cercles (C_n),

$$\frac{h_{n+1}}{d_{n+1}} = \frac{h_n + d_n}{d_n}.$$

Il est alors clair que de

$$(1)\ \ h_n = nd_n$$

on déduit

$$h_{n+1} = (n+1)d_{n+1}$$

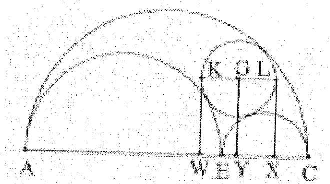
d'où le passage de "n à $n+1$".

Il n'est pas question d'examiner ici toutes les démonstrations proposées par PAPPUS pour aboutir à ses fins : nous renvoyons, pour une étude plus complète, à la brochure que prépare notre collègue Fréderique Pasturel à l'I. R. E. M de Toulouse. Nous nous contentons de préciser les outils mis en jeu par PAPPUS. Tout d'abord, puisque (2) se présente sous la forme d'une proportion, les transformations de celles ci, bien connues des mathématiciens de l'Antiquité, sont abondamment utilisées. Par exemple, avec nos notations d'aujourd'hui, les égalités

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ et } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

sont équivalentes.

S'agissant de cercles, l'inscription de l'angle droit à l'aide d'un diamètre et la puissance d'un point par rapport à un cercle sont aussi repris par PAPPUS. Enfin, les perpendiculaires au diamètre sont parallèles entre elles. Dès lors, les relations de Thalès, les angles alternes-internes, les triangles semblables et enfin les alignements sont des objets démonstratifs très utiles.



Il reste à démontrer la propriété au rang initial. Nous donnons en annexe le début de la proposition 16 avec quelques commentaires afin d'aider à sa compréhension. Contentons nous, ici, d'en préciser quelques étapes. Soient W, X et Y les projections respectives de K, G et L sur AC, K et L désignant les extrémités du diamètre parallèle à AC. Il faut donc démontrer que :

$$GY = KL.$$

D'après la proposition 14, on a,

$$AC \cdot AW = AX \cdot AE,$$

d'où, avec nos notations d'aujourd'hui,

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AX}{AW} = \frac{AE + EC}{AE} = \frac{AW + WX}{AW},$$

d'où, d'après les propriétés des rapports

$$(3)\ \frac{EC}{AE} = \frac{WX}{AW}.$$

On obtient de même, toujours d'après la proposition 14 :

$$CA \cdot CX = CW \cdot CE,$$

d'où

$$(4)\ \frac{EC}{AE} = \frac{CX}{WX}.$$

Par conséquent de (3) et (4) on déduit

$$(5)\ \frac{WX}{AW} = \frac{CX}{WX} \quad \text{ou} \quad AW \cdot CX = WX^2.$$

Mais dans le chapitre XVI où est prouvée la proposition 14 PAPPUS démontre, en plus, que

$$(6)\ AW \cdot CX = GY^2.$$

Les égalités (5) et (6) fournissent l'égalité cherchée.

Contrairement aux cas habituels, la démonstration du "rang initial" n'est pas immédiate. Il en est de même du "passage de n à $n+1$" que nous n'avons pas, ici, explicité longuement. En fait, ces points essentiels de ce que nous nommons, aujourd'hui, le raisonnement par récurrence, sont, chez PAPPUS, une partie d'un corpus beaucoup plus vaste où les résultats sont formulés et démontrés dans le cadre le plus général possible. Peut être que ceci explique la découverte tardive de ce type de démonstration dans la *Collection Mathématique*.

Bibliography

ARCHIMÈDE, *Le Livre des Lemmes* $\cdots$, trad. C. Mugler, Paris, Les Belles Lettres, 1971, pp. 131-164.

EUCLIDE, *Les Éléments*, volume 2. Livres V à IX, Éd. Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1994.

NICOMAQUE DE GÉRASE, *Introduction arithmétique*, Éd. Janine Bertier, VRIN, Paris, 1978.

PASCAL, *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléïade, nrf, Gallimard, Paris, 1954.

PAPPUS D'ALEXANDRIE, *La Collection Mathématique*, trad. P, Ver Eecke, réed. Paris, Blanchard, 1982.

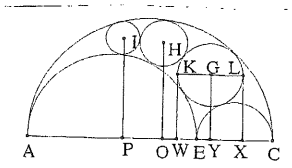
TAHIR, H., Pappus and Mathematical Induction, *Australian Mathematical Gazette* 22 (1995) 166-167.

Annexe : proposition 16

Proposition 16.

" Ces choses étant démontrées au préalable, posons le demi-cercle ABC et posons un point quelconque E sur sa base ; décrivons les demi-cercles ADE et EFC sur les droites AE et EC ; inscrivons dans l'espace situé entre les trois arcs appelé l'Arbelon, des cercles tant qu'on voudra, tangents aux demi-cercles et tangents entre eux tels que ceux décrits autour des centres G, H, I et menons de leurs centres, perpendiculairement sur la droite AC, les droites GY, HO, IP. Je dis que la droite GY est égale au diamètre du cercle décrit autour du point G que la droite HO est le double du diamètre du cercle décrit autour du point H, que la droite IP est le triple du diamètre du cercle décrit autour du point I, et que les perpendiculaires suivantes sont des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent continuellement d'une unité.

Menons le diamètre KL parallèle à la droite AC et les perpendiculaires KW et LX. Dès lors, en vertu de ce qui a été démontré antérieurement, le rectangle compris sous les droites AC, AW équivaut au rectangle compris sous les droites AX, AE et le rectangle compris sous les droites CA, CX équivaut au rectangle compris sous les droites CW, CE. Par conséquent, la droite WX est à la droite XC comme la droite AW est à la droite WX ; car l'un et l'autre rapport sont les mêmes que celui de la droite AE à la droite EC. En effet, puisque le rectangle compris sous AC, AW équivaut au rectangle compris sous AX, AE, il s'en suit que AE est à AW comme AC est à AX ; que, par division, WX est à AW comme EC est à AE, et que inversement, AW est à WX comme AE est à EC. Derechef, puisque le rectangle compris sous AC et XC équivaut au rectangle compris sous WC, EC, il s'ensuit que EC est à XC comme AC est à WC ; que par division WX est à XC comme AE est à EC. Or, AW est aussi à WX comme AE est à EC ; donc WX est à XC comme AW est à WX. En conséquence, le rectangle



Les cercles : $C_1(G, d_1)$ $GY = d_1$

$C_2(H, d_2)$ $HO = 2d_2$

$C_3(I, d_5)$ $IP = 3d_3$

$\vdots$

$C_n(O_n, d_n)$ $O_nH_n = nd_n.$

Pappus commence par démontrer que :

$$GY = KL$$

De la proposition 14 il déduit

$$(1)\ AC.AW = AX.AE \text{ et}$$

$$(2)\ (2)\ CA.CX = CW.CE$$

Par "rectangle sous les droites AC, AW" nous entendons aujourd'hui le produit AC . AW.

Pappus affirme une conséquence de (1)

$$(3)\ \frac{WX}{XC} = \frac{AW}{WC}$$

qu'il démontre comme conséquence de

$$(4)\ \frac{WX}{XC} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{et } (5)\ \frac{AW}{WX} = \frac{AE}{EC}.$$

En effet de (1) on a : $\frac{AE}{AW} = \frac{AC}{AX}$

implicitement, $\frac{AX}{AW} = \frac{AC}{AE}$, d'où

$$\frac{(AW + WX)}{AW} = \frac{(AE + EC)}{AE}$$

et "par division" $\frac{WX}{AW} = \frac{EC}{AE}$

et par suite (4).

De même de (2) on obtient (5) et par

compris sous les droites AW, XC équivaut au carré de la droite WX.
Or on a démontré (Prop.14) que le rectangle compris sous les droites AW, XC équivaut aussi au carré de la droite GY; donc la droite GY est égale à la droite WX, c'est-à-dire au diamètre KL du cercle décrit autour du point G
Et puisqu'il a été démontré précédemment que la droite HO est au diamètre du cercle décrit autour du point H comme la droite GY conjointement avec la droite KL est à la droite KL et puisque la droite GY, conjointement avec la droite KL est le double de la droite KL il s'ensuit que la droite HO sera aussi le double du diamètre du cercle décrit autour du point O
En conséquence, la droite HO, conjointement avec le diamètre du cercle décrit autour du point H est le triple de ce diamètre. De plus, la droite IP est dans le même rapport avec le diamètre du cercle décrit autour du point I ; par conséquent, la droite IP est aussi le triple du diamètre du cercle décrit autour du point I
Et pareillement, la perpendiculaire relative au cercle suivant est le quadruple de son diamètre ; les perpendiculaires suivantes seront trouvées des multiples des diamètres respectifs dans la mesure des nombres qui se dépassent successivement l'un l'autre d'une unité, et l'on démontrera que cela se présente ainsi à l'infini. "

conséquent (3).
De (3) on déduit : $AW \cdot XC = WX^2$.
De la proposition 14, Pappus déduit aussi

$$AW \cdot XC = GY^2.$$

d'où l'égalité cherchée :

$$GY = WX = KL = d_1.$$

Pappus démontre ensuite que : $HO = 2d_2$.
De la proposition 15, il déduit

$$\frac{HO}{d_2} = \frac{(GY + d_1)}{d_1} = \frac{2d_1}{d_1}$$

d'où : $h_2 = HO = 2d_2$.

Pappus opère aussi avec le troisième cercle

$$HO + d_2 = 2d_2 + d_2 = 3d_2$$

et d'après la proposition 15

$$\frac{IP}{d_3} = \frac{(HO + d_2)}{d_2} = \frac{3d_2}{d_2} = 3$$

d'où : $h_3 = 3d_3$

Il affirme que, de même, nous obtenons ce que nous notons :

$$h_4 = 4d_4$$

et, plus généralement, que

$$h_n = nd_n.$$

Avec ou sans maître ?
Modes d'appropriation du savoir mathématique
(quelques traitements historiques des coniques)

With or without a teacher ?
How to capitalize mathematical knowledge
(Historical variations on conics)

Atelier pluridisciplinaire
BESSOT Didier, DHOMBRES Jean, RADELET-DE GRAVE Patricia
IREM de Basse-Normandie
EHESS, Paris
Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve

Abstract

Au cours de l'histoire, la nécessité d'un maître en mathématiques fut soumise à question. Car il y a souvent scandale pour la raison que la mathématique n'aille pas de soi; comme il y a scandale que la mathématique en impose au bon sens et au réel. Si l'enseignement des mathématiques fut néanmoins maintenu, son obligation dans les cursus secondaires ne date que du début du XIXème siècle, et fut de temps à autre contestée, ou mollement appliquée. On n'a pas toujours enseigné les mathématiques dans les classes; on ne l'a pas toujours fait pour les mêmes raisons, et l'obligation actuelle, apparemment universelle, ne répond pas partout aux mêmes nécessités intellectuelle, culturelle, politique ou sociale. La mise en perspective historique des différents modes d'appropriation du savoir mathématique permet donc de questionner les priorités intellectuelles d'une société. Et parce qu'elle interroge en profondeur son rôle, elle donne à l'enseignant la possibilité de dépasser le consensus de sa profession pour découvrir les antécédents et les filiations de sa pratique d'enseignement. Ce sont des filiations intellectuelles et déontologiques qui ne résultent pas du seul jeu de la mathématique.

Comment favoriser auprès d'enseignants la mise en perspective historique de leurs savoirs et de leurs pratiques afin de leur permettre un recul réflexif et une appréciation de leur place dans un processus général ? L'histoire des mathématiques, qui est devenue à la mode, est souvent un bon prétexte pour faire des mathématiques autrement, c'est-à-dire d'une façon autre que celle requise par le programme. Or, celui-ci représente un consensus. Aussi, l'histoire proprement historienne des mathématiques ne peut-elle pas recevoir auprès des enseignants le succès escompté. La fidélité à une situation historique donnée exige d'envelopper les mathématiques de considérations très diverses qui tiennent aux raisons mêmes d'enseigner telles mathématiques plutôt que telles autres. Ces considérations paraissent le plus souvent inutiles à l'enseignant. Car il est placé dans une situation historique et sociale précise, et partage nécessairement l'idée de progrès qui fait regarder le passé comme définitivement passé. Pourquoi cette histoire, qui parle d'autre chose que ce qui concerne les enseignants, les remettrait-elle en cause, et les aiderait-elle dans leur tâche selon les objectifs qu'ils s'assignent ? L'histoire des mathématiques, contrairement à quelques discours lénifiants, ne va pas de soi pour l'apprentissage des mathématiques.

Si nous voulons qu'une réflexion prenne corps sur le rôle de l'histoire des mathématiques en vue de l'enseignement, et donc sur le rôle de l'histoire professionnelle des mathématiques, il faut une meilleure prise en compte de l'histoire de la pratique enseignante. Favoriser le regard historique sur cette pratique est l'objectif poursuivi dans cet atelier. Il est donc essayé de combiner deux recherches en une même activité, recherche historique et recherche didactique. Conformément au titre général de cette III^{ème} Université d'été, programme qui requiert une réelle réflexion.

Il aurait été possible de faire directement de la sociologie des enseignants de mathématiques, en montrant comment les contenus interviennent pour organiser cette sociologie. Telle n'est pas la solution adoptée. Car ce n'est pas l'enseignant qui est ici visé, mais le savoir qu'il diffuse. Ou plutôt ce qui de ce savoir, partie et non totalité de son savoir, est organisé par l'idée que l'enseignant se fait du rôle de la pensée mathématique. Dès lors, nous sommes libérés d'avoir à focaliser sur l'enseignant et son réseau social; il suffit pour notre objectif d'atelier à Leuven d'évoquer quelques mathématiciens du passé, confrontés à l'enseignement à d'autres. Autrement dit, nous pouvons user de la plus vieille habitude des historiens des mathématiques, celle qui valide leur travail, et c'est de servir le commentaire à des textes précis.

Mais il faut dans ces commentaires répondre à des questions d'enseignement, et ne pas se contenter de dire que nous satisfaisons une légitime curiosité historique. L'une des questions peut se résumer ainsi : pourquoi telle stratégie d'exposé mathématique est-elle adoptée dans un texte ? Cette question requiert de détecter d'abord une stratégie d'enseignement dans les textes étudiés, et la volonté de prendre en compte jusqu'à la rhétorique qui en est la tactique. Il faut aussi se débarrasser et de la volonté de corriger un texte pour mieux faire (car ce ne peut être que dans un autre contexte scolaire), et de la volonté de tout expliquer, (en particulier de tout expliquer historiquement, même les erreurs). Il y a souvent de l'incompréhension dans le reproche fait à des auteurs anciens de manquer de rigueur. La mathématique a heureusement cela d'économique que, dans une présentation d'histoire, on puisse omettre certaines choses sans perdre l'essentiel de la preuve, ni l'esprit d'une démonstration; le lecteur mathématicien sait comment combler ce qui n'a pas été dit ou explicité, et qu'importe qu'il le fasse par un biais différent de l'auteur étudié. L'histoire des mathématiques en cause n'est pas dirigée vers un ignorant des mathématiques. L'important pour nous, ici, est d'interpréter un texte dans un sens pédagogique particulier. Ce qui revient à lire la spécificité d'un auteur au-delà de la nécessité mathématique, et ne pas prendre un texte mathématique comme donnant la seule bonne méthode, mais comme résultant de

la décision d'un auteur en vue d'une compréhension. Aussi nous a-t-il été particulièrement utile de ne choisir que des textes où les auteurs tentaient d'éviter le passage par le commentaire du maître, en s'adressant directement au lecteur supposé pouvoir tout maîtriser, tout comprendre de ce qui était dit sans qu'un tiers intervienne. La mathématique sans maître n'est pas une revendication pour nous; juste un moyen de mieux juger l'effort pédagogique inhérent à toute mathématique.

L'organisation de l'atelier est simple puisqu'il s'agit finalement de donner à lire quelques textes courts afin de dégager ce qui, dans l'écriture même, favorise un apprentissage direct, sans la médiation d'un expliquant. La question en retour, pour l'enseignant qui suit cet atelier, est celle de savoir en quoi il a besoin d'un commentateur historien chargé de lui expliquer le contenu des textes retenus, doublé d'un commentateur didacticien pour lui faire saisir une technique pédagogique. Cet atelier interroge donc directement la pratique d'histoire pour un didacticien et la pratique de didactique pour un historien. Sans sortir des mathématiques : c'est bien là la gageure.

Il fallait, pour qu'ils soient utilisables en commun, que les textes retenus touchent tous à un même thème mathématique : furent choisies les coniques, et même plus particulièrement la parabole. La sélection était l'opération la plus difficile : il manque, nous le savons tous, des anthologies de textes historiques mathématiques où soient données les raisons pour lesquelles les textes ont été retenus. Il y a une certaine paresse intellectuelle à se contenter de reproduire de façon exhaustive des textes anciens; on a ici poussé l'intervention jusqu'à couper dans certains extraits afin de mieux servir l'objectif de l'atelier. Il fallait entourer les textes de leur environnement culturel, mais en réduisant ce commentaire à l'essentiel utile pour la compréhension de la démarche didactique. Ce sont plutôt des dossiers que nous avons constitués et portant sur plusieurs périodes historiques. Était prévu un cinquième texte du XX^{ème} siècle, et de Lebesgue sur la parabole, mais l'ensemble est déjà trop long pour un seul atelier.

1° Texte d'Auguste Comte (1843) sur la similitude des paraboles, dossier établi par Jean Dhombres, avec comme titre : *pourquoi toutes les paraboles sont-elles semblables ?*

2° Textes de Galilée (1638) sur la parabole, dossier établi par Patricia Radelet-de Grave, avec comme titre : *la parabole comme trajectoire des projectiles*.

3° Textes de Serenus d'Antinoé réécrits par Francesco Maurolico (1494-1575) sur l'ellipse, dossier établi par Didier Bessot avec comme titre : *Ellipses conique et cylindrique*.

4° Texte de Bouguer (1746) sur la parabole, dossier établi par Jean Dhombres, avec comme titre : *l'arche de Noé pouvait-elle couler, ou les ressources d'une parabole*.

Summary : The purpose is to read some short texts from mathematicians of the past, all texts related to conics, in order to grasp the way mathematicians have avoided the mediation by a teacher. Conversely, from an historical point of view, or from a didactical point of view, what is required from a commentator of such texts ? This workshop aims at understanding a practice of history for a didactician and a practice of didactics for a historian.

DOSSIER 1, ÉTABLI PAR JEAN DHOMBRES

Pourquoi toutes les paraboles sont-elles semblables ?

Extraits du *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux ou trois dimensions, contenant toutes les théories générales de géométrie accessibles à l'analyse ordinaire*[1] publié par Auguste Comte en 1843 (pp. 189-204)

Théorie de la similitude des courbes.

64. La notion de similitude convient évidemment, par sa nature, à toutes les figures possibles, envers lesquelles les observateurs les plus étrangers à la géométrie rationnelle emploient journellement les qualifications de semblables ou dissemblables, en y attachant un sens, vague et confus peut-être, mais au fond essentiellement juste. Quand les géomètres se sont spécialement emparés de cette conception universelle et spontanée pour la systématiser convenablement après l'avoir nettement analysée, ils ont dû considérer premièrement les figures purement rectilignes, dont les éléments sont directement appréciables, ainsi que les lois de leur assemblage. C'est là que la similitude se montre avec une pleine évidence comme consistant dans l'égalité des angles respectifs et la proportionnalité des côtes homologues : toute l'élaboration scientifique n'a pu consister, à cet égard, qu'à réduire au moindre nombre possible les conditions d'une telle définition ou appréciation, d'abord envers les triangles, et ensuite pour les polygones quelconques, suivant les explications de la géométrie élémentaire. Mais il s'agit maintenant d'étendre convenablement aux diverses courbes planes ces notions primordiales, afin de découvrir, en chaque cas, les conditions précises de la similitude, ou de constater que l'identité d'espèce n'exige aucune relation particulière; question dont il serait superflu de faire ici ressortir expressément la haute importance.

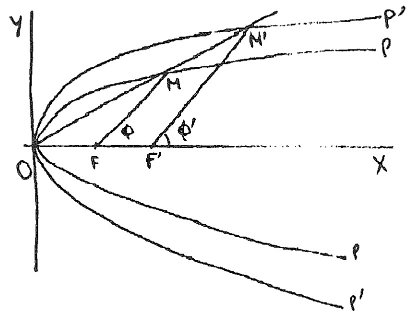
Au premier aspect, une telle extension semble ne pouvoir s'opérer, en général, que d'après l'analyse transcendante, qui, en considérant les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés infiniment petits, permettrait d'y exprimer distinctement l'égalité directe des angles et la proportionnalité des côtés, sans être alors arrêté par la nature infinitésimale des uns et des autres. Mais un examen plus approfondi de cette importante théorie géométrique conduit à reconnaître que l'analyse ordinaire suffit réellement à l'instituer d'une manière tout aussi générale et beaucoup plus commode. Il faut seulement, pour cela, choisir convenablement, parmi les propriétés essentielles des polygones semblables, celles qui sont susceptibles de devenir immédiatement appréciables envers les courbes, sans exiger la considération de côtés infiniment petits et d'angles infiniment obtus, et en réduisant l'inévitable notion de l'infini à n'influer que sur le nombre des sommets, à l'égard desquels l'uniformité de leur caractère analytique permet aisément de surmonter une telle difficulté, d'après le simple examen d'un point indéterminé, propre

[1]Paris, Carilian-Goeury et V^{GR} Dalmont, Paris, mars 1843, Imp. de Fain et Thunot, VIII-598 p. et 3 planches de 82 figures gravées par Hibon. Ce traité est ici référé par l'abréviation TEGA. Il a connu une seconde édition dans les années 1890, et une traduction en portugais au Brésil. Les coupures dans le texte sont signalées par [. . .].

à les représenter tous, suivant un artifice logique déjà familier, à beaucoup d'autres titres, en géométrie analytique.

On ne peut d'abord employer à cet indispensable office la proposition fondamentale, trop exclusivement mentionnée dans l'enseignement habituel de la géométrie élémentaire, sur la décomposition des polygones semblables en triangles semblables. Car, en l'étendant aux courbes, cette décomposition offrirait, comme la définition primitive elle-même, quoiqu'à un moindre degré, l'inconvénient capital d'obliger à considérer des angles et des côtés infinitésimaux. Mais, la théorie de la similitude des figures rectilignes fait aussi connaître, à leur égard, deux autres propriétés générales, dont chacune est, par sa nature, éminemment propre à s'étendre aux courbes, comme spontanément exempte d'un tel vice; de manière à pouvoir fournir ensuite, plus ou moins commodément, un fondement suffisant à la théorie analytique que nous voulons constituer ici.

65. D'après la première de ces propriétés, les contours semblables, ont leurs divers sommets déterminés par des triangles respectivement semblables ayant tous, dans chaque figure, une base commune; et réciproquement, deux figures ainsi construites seront nécessairement semblables, quel que soit le rapport de ces deux bases homologues. Les côtés et les angles de ces triangles artificiels, indépendants de la figure proposée, restant naturellement finis quand le polygone devient infinitésimal, rien n'empêche d'étendre aux courbes un tel caractère, avec la seule obligation de l'y vérifier envers un point indéterminé, comme le permet toujours l'uniformité de la définition, géométrique ou analytique, afin d'éviter l'embarras direct d'un nombre infini de points. C'est ainsi, par exemple, qu'on démontrerait aisément la similitude constante de deux cercles, surtout en y prenant pour bases deux diamètres respectifs; puisque les triangles, dès lors constamment rectangles, se trouveraient spontanément semblables, en ne comparant entre eux, suivant l'esprit de ce théorème, que des points pour lesquels un des angles à la base offrirait, de part et d'autre, la même grandeur.
Considérons encore l'exemple de la parabole, d'après la définition du n° 20.[2]



En prenant pour bases les droites OF, OF' qui joignent chaque point fixe au sommet, et faisant d'ailleurs coïncider les axes et les sommets des deux paraboles, on mènera encore, de l'origine O, une droite arbitraire $y = mx$, dont l'intersection M avec la première parabole $y^2 = 2dx$, donnera $x = \frac{2d}{m^2}$, $y = \frac{2d}{m}$. En joignant ce point M à l'autre extrémité F de la base, on aura tang.

[2]C'est la définition par foyer et directrice de la parabole, lieu des points à égale distance d'un foyer F et d'une droite D.

$\varphi = \frac{\frac{2d}{m}}{\frac{2d}{m^2}-\frac{d}{2}}$. Or, ce résultat ne saurait changer en y remplaçant d par d' pour l'autre parabole, puisqu'il est évidemment indépendant de D. Donc, deux paraboles sont toujours semblables entre elles, comme deux cercles. Il serait aisé de constater aussi, d'après l'équation $y^2 = \frac{x^3}{2r-x}$, en choisissant convenablement les bases, qu'il en est encore de même de deux cissoïdes. Au reste, en rapprochant ces trois cas de similitude spontanée, on conçoit, à priori, qu'une telle relation est inévitable en toute espèce de courbe dont l'équation pourra être réduite à ne contenir qu'une seule constante arbitraire : car, s'il y pouvait exister une condition quelconque de similitude, elle tendrait alors à déterminer cette unique constante; en sorte que la courbe semblable à la proposée se trouverait ainsi individualisée, ce qui serait évidemment absurde.

Une telle institution analytique de la théorie générale de la similitude des courbes planes, n'offre d'autre défaut essentiel que la trop grande complication des calculs qu'elle exige, quand il s'agit d'équations peu simples, et lorsqu'on ne peut choisir assez commodément les bases homologues. Aussi adopterons-nous finalement, à ce sujet, une autre mode, fondé sur une propriété plus aisément formulable [...].

69. Afin de perfectionner davantage la théorie générale de la similitude des courbes planes, il y faut maintenant joindre une importante considération subsidiaire, qui, judicieusement appliquée, dispensera souvent de toute opération analytique, en permettant de déduire immédiatement la solution de la seule définition des lignes proposées. Cette méthode auxiliaire repose sur l'heureux aperçu, indiqué par Clairaut dans ses *Élémens de géométrie*, et suivant lequel deux figures semblables ne diffèrent que d'après l'échelle sur laquelle elles sont construites, en sorte qu'un simple changement d'échelle pourrait toujours les rendre superposables. Quoique Clairaut n'y eût en vue que les figures rectilignes, ce judicieux énoncé convient également sans aucune préparation spéciale, aux diverses figures curvilignes. On doit le regarder comme l'expression la plus concise de tous les rapprochements géométriques auxquels la similitude peut donner lieu.

D'après un tel principe, le travail à accomplir sur chaque définition proposée d'une espèce de courbe, afin d'y découvrir les conditions de similitude, consistera à y bien séparer d'abord les données, linéaires ou angulaires, indispensables à la grandeur de la courbe d'avec celles qui n'affecteraient que sa situation, et ensuite à réduire les premières au moindre nombre possible. Cette double préparation présente quelquefois, surtout sous le second aspect, des difficultés insurmontables, pour certaines définitions, envers lesquelles on ne pourra éviter, à ce sujet, l'emploi ultérieur de la méthode analytique, qui conserve donc nécessairement son privilège exclusif d'une entière généralité. Mais, quand ces deux conditions préliminaires auront été suffisamment remplies, le principe de Clairaut fournira aussitôt la solution demandée. Car, si la grandeur de la courbe est ainsi déterminable d'après une seule dimension, toutes les courbes de cette espèce sont nécessairement semblables entre elles, puisque le simple changement d'échelle pourrait les faire coïncider, en identifiant leurs dimensions respectives. Quand il faudra plusieurs données distinctes et indépendantes, la similitude exigera autant de conditions qu'il existera de ces éléments moins un, et chacune d'elles consistera naturellement dans la proportionnalité des lignes considérées, ou dans l'égalité des angles introduits, sauf à lui attribuer ensuite toute autre forme, linéaire ou angulaire, que l'on jugerait au numéro précédent. Alors, en effet, le changement d'échelle ne pourra identifier qu'une seule dimension respective, et les courbes ne seront semblables que si cette première coïncidence entraîne celle de tous les autres éléments, ce qui suppose évidemment l'universelle proportionnalité des longueurs proposées ou l'égalité mutuelle des angles considérés. On voit qu'une telle marche revient, en d'autres termes, à déduire les conditions de la similitude de celles de l'identité, en considérant, d'une part, que le nombre des unes doit toujours être inférieur d'une unité à celui des autres, et, d'autre part, que les diverses égalités linéaires simultanément prescrites par celles-ci doivent se changer en simples proportionnalités pour celles-là.

Cette méthode subsidiaire ferait aussitôt découvrir la similitude constante, déjà constatée analytiquement, dans les divers cas du cercle, de la parabole, de la cissoïde, etc. : elle nous apprend, en outre, que la même relation s'étendra aux courbes qui dériveraient de ces premières d'une manière déterminée, d'ailleurs quelconque, comme, à l'égard du cercle, la cycloïde, l'épicycloïde, les courbes de Descartes (n° 26), etc. Au contraire, les ellipses ou hyperboles, d'après la définition du n° 19, ne seront semblables qu'autant qu'il y aura proportionnalité entre les deux longueurs, évidemment indépendantes et irréductibles, qui y déterminent la grandeur de la courbe, abstraction faite de la situation. La définition commune des trois sections coniques (n° 23) exigera ainsi, pour la similitude, l'égalité du rapport spécifique correspondant. Envers les définitions de la conchoïde ou des sections toriques, on trouvera, sans plus d'embarras, des résultats analogues.

Les conditions préliminaires propres à garantir le succès de cette méthode subsidiaire sont, de la même nature que celles relatives à la méthode correspondante que comporte aussi la théorie du nombre de points déterminant : seulement, ce préambule indispensable est ici plus difficile et plus incertain envers quelques définitions, pareillement antipathiques à ces deux procédés supplémentaires; puisqu'il faut maintenant opérer, en outre, une séparation, souvent délicate, et quelquefois impossible, entre les idées de grandeur et les idées de position. C'est ainsi, par exemple, que les définitions du cercle, soit comme segment capable, soit comme lieu des points dont les distances à deux pôles sont constamment proportionnelles, ne permettraient nullement de constater, par ce moyen, la similitude nécessaire de tous les cercles, puisqu'elles semblent exiger deux données distinctes pour déterminer la grandeur de la courbe, quoiqu'une appréciation ultérieure, que l'équation peut seule, en général, diriger sûrement, doive montrer qu'il n'y a d'indispensable, à cet égard, qu'une certaine combinaison unique de ces deux éléments en apparence irréductibles. Mais l'irrécusable évidence des erreurs que pourrait produire, envers des courbes peu étudiées ou trop compliquées, l'application irréfléchie de cette méthode subsidiaire ne saurait altérer son incontestable efficacité dans le cas qui s'y adaptent suffisamment.

Pourquoi toutes les paraboles sont-elles semblables ?

Comte déclare s'adresser à ceux qui travaillent seuls. Il convient donc à notre propos. Mais cela ne suffit pas à donner envie de lire Comte.

Pourquoi lire Comte ?

L'on peut comprendre que le *Traité* de Comte n'ait guère eu de succès auprès des historiens des sciences. Car ceux-ci sont avant tout soucieux de suivre le mouvement général de la mathématique auquel apparemment ce texte du père du positivisme ne contribua pas[3]. Pour qui s'apprête à lire Comte mathématicien, son faible impact sur les épistémologues est quand même démoralisant. Peut-on se rassurer et poursuivre la lecture en prétendant que les épistémologues

[3]Ce qui suit est tiré partiellement d'un article à paraître, Jean Dhombres, "La pratique philosophique des mathématiques chez Auguste Comte : une conceptualisation de l'espace par l'éd.), *Auguste Comte et l'idée d'une science de l'homme*", colloque Paris-Sorbonne, 26-27 novembre 1998.

requièrent matière plus noble qu'un texte s'affichant "élémentaire", et dont Comte avoue qu'il présente le caractère d'une digression ?

> Ce petit ouvrage résulte d'une sorte de loisir très passager dû à l'intermittence philosophique qui devait naturellement avoir lieu chez moi entre la récente terminaison de mon système fondamental de philosophie positive et le prochain début des grands travaux dont j'y ai posé les bases[4].

Si l'on peut se réjouir de surprendre un Comte décontracté, le sens à donner à la banalité mathématique, aussi bien dans l'ordre épistémologique que dans l'ordre pédagogique, suscite-t-il vraiment la curiosité de lecture ? Il y a des interrogations immédiates sur cette banalité, manifestées dans l'extrait retenu. Car le programme somme toute banal sur la similitude s'ouvre par une introduction non banale

> La notion de similitude convient évidemment, par sa nature, à toutes les figures possibles, envers lesquelles les observateurs les plus étrangers à la géométrie rationnelle emploient journellement les qualifications de semblables ou dissemblables, en y attachant un sens, vague et confus peut-être, mais au fond essentiellement juste[5].

Il faut comprendre ce qui serait "juste"! A "cette conception universelle et spontanée" de la similitude, le philosophe – un mathématicien ne parle jamais ainsi – oppose le travail d'analyse et de systématisation des géomètres qui l'ont réduite au cas des figures rectilignes, avant de découvrir, cas après cas, que "l'identité d'espèce n'exige aucune relation particulière"[6], avant donc de penser la similitude comme opération géométrique en tant que telle, et non en tant qu'appliquée à des objets particuliers.

L'histoire des mathématiques nous a appris à reconnaître en cette dernière idée de la similitude comme transformation, une des contributions importantes de la science du XIX^ème^ siècle. Et le professeur de mathématiques peut estimer aujourd'hui utile de commencer directement par la similitude comprise en ce sens là. Mais Comte nous dit autre chose, ou quelque chose de plus, et qui conduit à une interrogation. Si, en effet, le mathématicien a seulement et avec peine abstrait ce qui était déjà justement pensé dans les métiers, qu'a-t-on besoin de la pensée mathématique ? Et qu'a-t-on besoin de l'histoire de cette pensée qui devient un encombrement, voire une gêne pour penser ? Comte semble dire que la pensée commune, celle des métiers, est en avance sur la pensée des mathématiciens. La pratique serait-elle d'emblée et de droit positive ? En ce cas, quel serait le positif dans la rigueur mathématique, rigueur que Comte paraît comparer à une subtilité inutile et qui avait déjà été reprochée au XVII^ème^ siècle aux mathématiciens par Arnauld et Nicole dans la *Logique ou l'Art de penser*. Or Comte se veut également cartésien dans le *Traité*, et on peut même dire qu'il écrit un texte qui fera la postérité géométrique de Descartes. Comte ne s'efforce-t-il pas de rendre banale cette postérité, donc d'expliquer sa genèse en tant qu'abstraction raisonnée de gestes auparavant inconscients ou mécaniques ? C'est là une réflexion sur l'enseignement des mathématiques et son rôle. Il explique les conditions d'une banalisation.

Ne peut manquer d'intervenir dans l'appréciation de l'ouvrage de 1843 le fait qu'il soit le pendant du *Traité philosophique et d'astronomie populaire* paru l'année suivante, et qu'il présente de même une vulgarisation. Or, cet autre *Traité* débute par le *Discours sur l'esprit positif* dont tous s'accordent à dire qu'il est le signe d'une pensée philosophique à sa maturité.

[4]TEGA, p. VI.
[5]TEGA, pp. 189-190.
[6]TEGA, p. 190.

Mais le parallèle entre les deux ouvrages ne va pas jusqu'au qualificatif de "juste" accordé à la pensée commune. Car chacun sait que celle-ci n'a pas adopté aisément l'héliocentrisme, et une enquête soulignait assez récemment qu'une majorité de Français voyaient le Soleil tourner autour de la Terre. La popularisation d'une idée positive fait problème en astronomie; elle n'en serait pas en mathématique. Conclusion paradoxale ! Comment la société apprend-elle en mathématiques ?

En écrivant son ouvrage, Comte songeait aux "esprits heureusement organisés qui voudraient isolément étudier ici la géométrie analytique, sans aucun secours étranger"[7]. A tout le moins, en le disant ainsi, le répétiteur d'analyse à l'École polytechnique récusait une tradition française, instaurée depuis un siècle, sortie considérablement confortée par la Révolution, et servant de garant à l'École elle-même. Posée comme fondamentale pour toute entreprise collective des ingénieurs de tous ordres, la mathématique devait requérir un assez long apprentissage, sous la férule d'un maître. Et un maître spécialisé, ayant dévoué son savoir à cette formation des autres, aux dépens peut-être de sa propre créativité. Le manuel accompagnait la formation, mais il ne pouvait servir sans la parole du maître; la mathématique était une école, c'est-à-dire une formation collective dans le cadre d'une classe dirigée par un seul, classe qui permettait en outre une disposition commune et un esprit d'élite commun. La mathématique était devenue signe de reconnaissance d'une initiation[8]. Tout le contraire d'une pensée commune.

Contre l'organisation de la méritocratie qui correspondait si bien aux valeurs politiques et morales d'une époque, et sauf imposture de Comte que nous écartons, oser proposer une mathématique assimilable en elle-même par un esprit suffisamment préparé, requérait de Comte qu'il disposât d'une assurance de type intellectuel[9]. Ne serait-elle pas celle que procure le sens d'un achèvement ? Comte aurait acquis le sens complet de la géométrie analytique dont il trouvait l'origine, et je prends ce mot en son sens husserlien[10], chez Descartes, son collègue en philosophie. Seule cette complétion permet l'enseignement de la géométrie, et celui-ci ne requiert plus nécessairement la présence d'un maître. Dans le langage de Comte, devenu trop ordinaire pour qu'il accroche la mémoire, un sens complet s'appelle la généralité de la géométrie[11]. L'interprétation de cette généralité peut justifier qu'un enseignant des mathématiques s'intéresse à un texte auquel les comtiens eux-mêmes, en tout cas ceux du XX$^{\text{ème}}$ siècle, ont accordé si peu d'importance. Il faudrait ajouter, pour le profit des maîtres d'aujourd'hui, que le livre de Comte a eu une influence sur les maîtres d'hier, en tout cas sur les professeurs des classes de mathé-

[7]TEGA, p. VI. On ne saurait oublier l'importance accordée par Comte à l'enseignement populaire; cela lui valut faveur et engouement chez les Républicains du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, qui se poursuivirent jusque chez les marxistes des années 1950.

[8]Le rôle des mathématiques, dans l'enseignement mis en place à partir de la Révolution, est analysé dans J. et N. Dhombres, *Naissance d'un pouvoir : sciences et savants en France (1793-1824)*, Paris, Payot, 1989, chap. 7; celui des manuels et des "mathématiques élémentaires" dans la seconde moitié du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, est traité dans J. et N. Dhombres, *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997, chap. 2. Je veux insister ici sur le caractère "collectif" de l'apprentissage mathématique dans le système français des grandes écoles du premier XIX$^{\text{ème}}$ siècle; il est bien repéré par Stendhal dans sa *Vie de Henry Brulard*, et Beyle l'oppose à la pratique du génie solitaire, à la vision dramatique d'une découverte individuelle du savoir, des questions philosophiques, et de la beauté artistique. Il forgeait ainsi l'opposition romantique entre savoir collectif et savoir individuel.

[9]Comte indique avec soin tout ce qui est requis du lecteur pour qu'il puisse profiter de la lecture de son *Traité*. Il avait vécu de leçons de mathématiques jusqu'à l'obtention de son poste de répétiteur à l'Ecole polytechnique. Ces leçons furent données avec une évidente satisfaction de part et d'autre : le précepteur savait jauger les niveaux et s'adapter à celui qui l'écoutait. Nous pouvons penser, *a priori*, que Comte avec son *Traité* ne se livrera pas à une exhibition fourre-tout de savoir mathématique.

[10]E. Husserl, *L'origine de la géométrie*, trad. fr. J. Derrida, Paris, PUF, 1962.

[11]"Suivant une telle appréciation, ce système final de la science géométrique devrait être rationnellement désigné par la dénomination de géométrie *générale*, comme je l'ai proposé depuis longtemps dans le tome premier de mon Système de philosophie positive" (TEGA, pp. 3-4).

matiques spéciales du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, qui retrouvaient en quelque sorte l'un des leurs ayant su le mieux exprimer leurs espoirs d'enseignants.

Il y a pourtant contradiction entre la généralité d'une théorie mathématique et sa présentation en tant que transition vers une autre. En se proclamant novateur, Comte dirige notre regard sur un ailleurs de son *Traité*, et alors qu'il fournit le programme de leçons orales à venir, il ajoute :

> Cette indication caractéristique peut surtout acquérir une véritable importance envers l'enseignement du calcul différentiel, qui constitue certainement, après la géométrie analytique, la partie la plus décisive, et jusqu'ici la plus imparfaite de l'initiation mathématique[12].

Voilà qui paraît contredire aussi le discours de géomètres comme Michel Chasles, polytechnicien tout comme Comte, et pour qui la géométrie devait rivaliser avec le Calcul, non le préparer, et pouvait le supplanter tant dans les méthodes que dans les résultats. Comte ne cherche pas cette vaine rivalité : en en faisant le tour, il entend donner à comprendre les limites mêmes de la géométrie analytique. Et en particulier montrer que la similitude, comme théorie, appartient entièrement à la géométrie analytique.

Ce genre de préoccupations est typique des réflexions des enseignants; ils doivent en effet justifier, et d'abord à leurs propres yeux, la cohérence de ce qu'ils enseignent, tout en sachant qu'il y a un au delà de leur enseignement, une mathématique qui se poursuit, et qui parviendra même à modifier ce qu'ils enseignent. Modifier ne veut pas dire détruire.

Pour accaparer du savoir mathématique mais dans les limites raisonnables, Comte doit parvenir à penser la similitude comme une opération – on dira bientôt une transformation. Transformation de quoi ? Est nécessairement en jeu quelque chose qui s'apparente à l'espace, cet absent de la tradition euclidienne, que Descartes semble avoir trouvé par l'expérience intellectuelle de la mécanique sous le nom d'étendue. Pourtant, Comte n'invente pas l'espace de la géométrie. Suffira-t-il de dire qu'il est sur la voie ? Ceci n'est pas une remarque intéressante pour l'historien des mathématiques, ou alors il lui faudrait montrer comment Comte a influé ceux qui aboutiront à l'espace euclidien. Et ce n'est pas ici le propos, qui est de saisir la disposition d'esprit dans laquelle Comte entend mettre son lecteur pour lui permettre de comprendre autrement ce qu'il sait déjà sur la similitude.

Il faut donc revenir à l'enseignement de l'époque de Comte, où l'on distinguait entre la similitude en tant qu'elle concerne des figures rectilignes, voire composée d'arcs de cercle, et celle visant des courbes. Et on le faisait au nom d'une rigueur : l'impossibilité de démontrer par les ressources de la géométrie dite élémentaire le fait que deux aires délimitées par des courbes semblables sont entre elles selon le carré du rapport de similitude. C'était même devenu une question de cours, dûment posée à l'examen oral d'entrée à l'École polytechnique. Comte ne cherche pas à prétendre englober ce résultat général dans sa théorie de la similitude. Mais, indique-t-il, de tels problèmes de quadrature "sont aujourd'hui conçus, d'une manière trop exclusive, comme ne pouvant jamais être traités que par l'analyse transcendante"[13]. De façon spectaculaire, Comte justifie par l'histoire une élémentarisation de la géométrie, c'est-à-dire une nouvelle compréhension de la géométrie dans l'ordre élémentaire.

> On a maintenant trop oublié la phase rapide, mais impérissable, que présente l'histoire de la géomé trie moderne depuis la fondation de la géométrie analytique par Descartes jusqu'à la découverte de l'analyse infinitésimale par Leibnitz. Dans ce mémorable intervalle, plusieurs géomètres, et surtout Wallis, ont heureusement concouru à développer et à systématiser de plus en plus la théorie générale

[12]TEGA, p. VII.

[13]TEGA, p. 206.

des quadratures par les seules ressources de l'analyse ordinaire; et c'est principalement pour perfectionner ces premiers efforts que le calcul intégral a ensuite été créé, tandis que le progrès de la théorie des tangentes conduisait au calcul différentiel. Il importe beaucoup que la marche individuelle de l'initiation géométrique reste toujours conforme à cette gradation spontanée du développement historique, en caractérisant ici avec soin les moyens que comporte, à cet égard, l'analyse élémentaire, et qui, quoique plus bornés qu'envers toutes les questions antérieures, sont cependant bien plus étendus qu'on ne le suppose maintenant, sans altérer d'ailleurs cette indispensable exposition par aucune vaine introduction déguisée de l'analyse transcendante[14].

Voilà une forte justification de l'intérêt de histoire des mathématiques pour l'enseignement. Et Comte s'inscrit en faux contre le récit "husserlien" qu'avait élaboré Lazare Carnot en 1797 avec ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, où se voyait l'unité du Calcul depuis son origine sous la diversité de ses formes, archimédienne, galiléenne, newtonienne, leibnizienne, eulérienne, etc. Avec le *Traité*, nous sommes aux premières loges pour assister à une utilisation didactique de l'histoire, entendue comme progrès. Ce texte a donc inspiré la rédaction des programmes de mathématiques, au moins en France, tout au long de la troisième République, à partir de l'assertion d'une "gradation spontanée du développement historique".

Et il nous faut comprendre l'expression de "partie imparfaite" que Comte a donnée pour le Calcul : elle choque dans la mesure où les historiens, en gros unanimes, en attribuent la fondation à Cauchy et, précisément, dans ses cours à l'École Polytechnique entre 1814 et 1830, en tout cas le socle communément admis en Europe jusqu'au XX$^{\text{ème}}$ siècle. Comte ne considère pas le Calcul comme terminé.

Comte déroge au consensus[15]; c'est assez rare pour un mathématicien, c'est assez étonnant pour un homme qui suit de près la science; c'est exceptionnel pour un enseignant. Voilà bien des raisons d'indiscipline pour inviter à lire Comte mathématicien, indépendamment même de sa philosophie.

Mais ne faisons pas semblant : cette philosophie intervient obligatoirement dans notre lecture; Comte n'est pas un inconnu que l'on découvrirait par hasard aujourd'hui. Je n'ai donc pas besoin d'en présenter les grandes lignes.

Des questions philosophiques ? La géométrie comparée de Comte

Philosophique, dans l'ouvrage de Comte la question de l'identité est majeure, celle des objets mathématiques comme celle des raisonnements. Car une identité, ou une équivalence, gère les classements. Et il ne fait pas de doute que l'entreprise de géométrie de Comte ait pour objectif d'ordonner le monde trop riche des objets de la géométrie, trop riche par l'histoire en particulier. Il le soumet à des rangements, qui tiennent à la fois compte de la nature de ces objets et de la façon dont on les a établis. C'est-à-dire des raisonnements qui en ont fait voir des propriétés et sont alors classables suivant leur généralité d'obtention de ces propriétés. Le projet est aussi, à la manière des poupées gigognes, une organisation de la géométrie élémentaire dans le cadre plus vaste de la géométrie chargée de dire l'étendue. L'extrait étudié du texte de Comte l'exprime en termes inhabituels pour un mathématicien, puisqu'il s'agit de découvrir

[14]TEGA, p. 206.

[15]D'autant que Comte a suivi l'enseignement de Cauchy la première année où celui-ci le donnait, en 1814 : des notes de cours sont restées dans les archives de Comte. Pourtant, Comte ne cite jamais Cauchy dans le cours de philosophie positive ! Il y a là un beau sujet de controverse à la française, car réglée par le silence.

les conditions précises de la similitude, ou de constater que l'identité d'espèce n'exige aucune relation particulière; question dont il serait superflu de faire ici ressortir expressément la haute importance[16].

La similitude ne dépend pas des objets sur lesquels elle peut porter. Le projet d'un élémentaire de la géométrie analytique présuppose que ce qui sera rassemblé sous ce nom possède les moyens de classer les objets traités, sans devoir faire appel à des techniques exogènes comme les procédés transcendants du calcul intégral, sans avoir à faire appel à la manipulation de l'infini que permet le calcul infinitésimal, et sans requérir une complication ou un contournement déraisonnable de ces méthodes[17]. La géométrie analytique élémentaire a pour champ, selon Comte, ce qu'elle peut classer. C'est en ce sens qu'elle est une structure, dont la similitude n'est qu'un élément[18].

Mais alors qu'elle est le fruit d'une histoire, en a-t-elle encore une possible et un devenir ? Comte pense que oui, donc que la structure peut encore évoluer. Par accroissement, non par réorganisation. Sans que de nouveaux objets apparaissent nécessairement. Mais l'emploi du mot "objet" est maladroit dans la description de la pensée géométrique de Comte, tout comme chez Hilbert d'ailleurs. Chez l'un et chez l'autre, il y a des questions ou problèmes qui requièrent des solutions, et les solutions sont intéressantes dans la mesure où elle indiquent le fond de la question posée, et donc la terminent. Chez Hilbert, ces questions sont issues des seules mathématiques. Une question pour la géométrie chez Comte est la forme des courbes. La similitude intervient à ce propos.

Chaque forme crée en effet son propre espace aux yeux de Comte, et la classification consiste à comparer les espaces ainsi établis. Comte annonce qu'il faut parvenir à une "géométrie comparée", non encore rationnellement établie, et qui peut-être ne le pourra jamais être : il laisse donc son champ à l'histoire à venir. L'objectif de cette géométrie serait, en classant les objets que sont les équations, d'en déduire automatiquement les formes correspondantes, c'est-à-dire les courbes. De le faire non par intuition, mais par l'immédiateté que confère l'expérience de la forme des courbes, et sans qu'un calcul s'interpose nécessairement. Naturellement, la réciproque devrait être vraie; à une forme, faire correspondre l'équation (de plus petit degré) à laquelle elle répond.

C'est à un dictionnaire des formes que Comte voue le futur de la géométrie analytique. Mais ce dictionnaire ne doit relever que de l'élémentaire, et la forme est donc conçue comme une conséquence de l'algèbre qui pourrait se dire algèbre polynomiale. En indiquant une lignée de l'histoire, "l'espace algébrique" pourrait-on dire et non l'espace euclidien, Comte la clôt. C'est par cette possible fermeture qu'il affirme philosopher sur les mathématiques, mieux que les mathématiciens auxquels il reproche de ne pas savoir conclure, et de poursuivre sans fin. La fermeture n'est que conceptuelle. Les espaces provoqués par les courbes dans la conception de Comte peuvent encore s'enrichir de formes relevant d'un au-delà de l'algèbre, qui est le calcul différentiel et intégral, le Calcul jugé encore incomplet.

Comte est fasciné par la vitalité qu'a procurée dans le passé la limitation définissant la géométrie de la règle et du compas. Les méthodes ont été enrichies en empêchant la dispersion.

[16]TEGA, p. 189.

[17]Comme l'ouvrage de Comte porte sur les courbes algébriques, la dérivation est une opération permise de la géométrie élémentaire, et elle reste dans l'algèbre polynomiale. Comte ne fera pas intervenir des idées de la théorie des équations : il sait bien que cette théorie n'est pas véritablement faite, quoiqu'il n'ait pas lu Galois.

[18]Comte n'a aucunement imaginé pour la géométrie la structure d'algèbre linéaire que nous lui associons aujourd'hui : il est notable, par exemple, que les nombres complexes, les imaginaires de Descartes pourtant, soient totalement absents du *Traité* de Comte.

Lui-même ne peut évidemment pas se limiter à ces deux instruments puisqu'il envisage *a priori* la géométrie dans les trois dimensions, et chacun voit qu'une sphère ne peut se construire avec une règle et un compas. Il choisit donc la limitation par l'élémentaire de l'algèbre des polynômes, parce qu'il en espère un progrès pour la conception de l'espace que j'ai qualifié d'algébrique.

Qu'indiquera le dictionnaire prévu ? Dictionnaire de l'espace et des formes qui le structurent ? Dans et pour l'espace, Comte distingue ce qui relève de la grandeur, de la forme et de la position. L'analyse, par vocation et fonction historique, réduit tout à la grandeur– elle est quantitative– mais le quantitatif a réussi à fixer aussi la position. Tel est précisément le rôle dévolu à la méthode des coordonnées, dont l'ouvrage de Comte constitue une réflexion philosophique sur son sens historique. Quant à la forme, elle se déduit "indirectement, à l'aide de combinaisons convenables"[19]. Convenable, le mot est plutôt d'un celui d'un grammairien, et la syntaxe de la géométrie analytique consistera en ces combinaisons là, sous la restriction que celles-ci relèvent de l'élémentaire. Provoqués par l'étude de telle ou telle courbe pour en dire l'espace ainsi construit, les nécessaires changements de repère devenaient une partie propre de la géométrie.

La similitude n'est donc conçue que comme un outil apte à dire des résultats qui ne tiennent pas à l'espace de telle ou telle courbe. La similitude chez Comte n'est une transformation de l'espace qu'en ce sens là.

Un exemple est frappant, celui où il se donne une forme courbe dans le plan (figure 1) et organise un discours pour lui associer une équation polynomiale : il ne tente pas une interpolation par points à la manière de l'approximation à laquelle les ordinateurs nous ont habitués. Son empirisme tente d'atteindre la forme en se focalisant sur les singularités reconnues de la courbe, exprimables analytiquement, tangentes horizontales ou verticales qui sont des extrémums, inflexions où change la courbure, convexité et concavité se répondant[20].

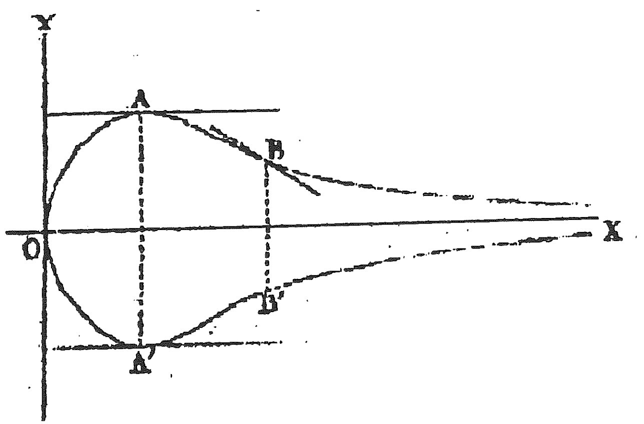


Figure 1

[19]TEGA, p. 10.

[20]La courbe en question est *a priori* posée sous la forme du carré de y égal à un quotient de deux polynômes, le numérateur étant une fonction linéaire, et le dénominateur étant une fonction affine du carré de x. Il s'agit d'ajuster ensuite les trois coefficients que ces polynômes comportent.

Incidemment, puisque Comte range en géométrie analytique tout ce qui, aujourd'hui, fait partie de l'étude élémentaire des fonctions, en gros l'essentiel de l'apprentissage mathématique dans les lycées français, on pourrait trouver là sa marque encore visible dans l'ordre pédagogique, sa marque historique parce qu'ayant figé un mouvement mathématique de la représentation des courbes.

Son ambition est d'obtenir une connaissance des formes de l'espace par le biais d'un classement qui ne soit pas réducteur du mouvement historique qui le porte, d'Euclide à Descartes. C'est cela la géométrie comparée. Il y a donc l'espoir de susciter une classification "naturelle", celle-ci s'opposant à l'artificialité des classifications présentes.

> Plus on méditera sur ce grand sujet de philosophie géométrique, à peine entrevu jusqu'ici, mieux on sentira que la classification des courbes planes d'après les degrés de leurs équations n'est pas plus rationnelle, au fond, que ne le serait une classification zoologique fondée sur la couleur ou sur la taille, etc., indépendamment de toute profonde comparaison organique[21].

A ce programme répondent les nombreux traités sur les courbes spéciales du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle[22], dans lesquels la faune des courbes est décrite à la double manière de l'histoire naturelle. D'une part, le naturel qui est une manière systématique à partir de toutes les représentations possibles avec tableau des "singularités", ou plutôt pour employer le langage comtien mais aussi cartésien, les affections de ces courbes. D'autre part, une manière de curiosité qui se manifeste par l'exhibition des propriétés évoquées par tel ou tel mathématicien, et qui paraissent ainsi provenir de l'histoire (mot qui figure bien dans histoire naturelle).

Ces traités ont toujours embarrassé les mathématiciens, rebelles au genre de l'encyclopédie. Il est difficile de voir en ces traités la genèse de la géométrie algébrique, mais on peut penser que celle-ci put débuter en réaction, afin de mettre de l'ordre dans le fouillis de toutes les courbes[23].

Il est possible de lire ailleurs, tellement ailleurs que je suis sûr de ne pouvoir qualifier cet ailleurs de suite de Comte que par son trait devenu élémentaire. La postérité véritablement mathématique de l'idée de Comte est en théorie des fonctions analytiques le théorème de Mittag-Leffler qui donne *a priori* la forme d'une fonction méromorphe lorsque l'on en connaît suffisamment bien les singularités (parties polaires)[24]. Le classement des singularités est une synthèse : il termine l'étude des formes analytiques.

Faute de pouvoir réaliser la "juste" classification qu'exigerait la géométrie comparée, faute donc de disposer de moyens de comparaison entre chacun des espaces associé à chaque courbe, Comte cherche l'identité des courbes. Que dit-on d'autre qu'une identité de forme, en effet, quand on assure que toutes les paraboles sont semblables ? Comme d'ailleurs tous les cercles,

[21]TEGA, p. 236.

[22]Les plus connus de ces traités sont ceux du Portugais Francesco Gomes Teixeira (*Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Coïmbre, Imp. de l'Université, 1908-1915; après une première version en espagnol, *Tratado de las curvas especiales notables*, publiée à Madrid en 1905), de l'Italien Gino Loria (*Spezielle algebraïsche und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, B.G. Teubner, 1902, traduit de l'italien par von Fritz Schutte), de l'Allemand Heinrich Wieleitner (*Spezielle ebene Kurven*, Leipzig; G.J. Goschen, 1908), du Français Henri Pierre Jean Brocard (*Courbes géométriques remarquables*, Paris, 1919), et jusqu'à l'Américain Robert Carl Yates, mais écrivant beaucoup plus tard (*A Handbook on Curves and their Properties*, Ann Arbor, J.W. Edwards, 1947).

[23]La différence est alors notable avec les ouvrages mentionnés dans la note précédente, comme on peut le constater par exemple sur l'ouvrage de Federigo Enriques, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable*, trad. fr. de M. Legaut, Paris, Gauthier-Villars, 1926. Il est intéressant de noter les différences en consultant la bibliographie d'une courte période fournie par H. Wieleitner, *Bibliographie der höheren Algebraische Kurven für die Zeitabschnitten 1890-1904*, Leipzig, Goschen, 1905.

[24]Voir W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, trad. J. Dhombres, Paris, Dunod, 1998, chapitre 13.

ou toutes les cissoïdes ! Question associée, pourquoi y-a-t-il plusieurs espèces d'ellipses ou d'hyperboles, la classification par la similitude dépendant alors de l'excentricité. En tout cas, puisque les différentes coniques se comportent différemment pour la similitude, l'identité de toutes les paraboles ne se résoudra pas par la seule classification cartésienne à partir du degré des courbes algébriques. Aussi utile qu'il puisse paraître, le degré n'est vraiment pas le bon critère de classification des courbes. Cependant, Comte travaille à contre-courant du mouvement de la géométrie intrinsèque et anticartésienne; selon lui, la méthode des coordonnées, loin de déposséder la géométrie de ses attributs phénoménologiques – la forme des courbes par exemple – procure à ceux-ci leur "solution" pleinement générale, d'après une convenable réduction du concret à l'abstrait[25].

Selon Comte, il n'est pas plus nécessaire de revenir à un avant de la géométrie analytique qu'il ne faut la dépasser par une nouvelle théorie. Il reste seulement, dans le cadre analytique auquel il se restreint, à abstraire des propriétés des espaces, c'est-à-dire à concevoir de nouveaux espaces.

Similitude de deux paraboles

Quelle garantie y a-t-il que la géométrie analytique élémentaire puisse régler la question de l'identité des courbes, leur similitude ? L'ancienne géométrie, celle des Grecs, ne pouvait raisonner sur des courbes en général; et Comte a éliminé d'emblée tout raisonnement qui joue de l'infini, par exemple par passage à la limite à partir de la triangulation des courbes. Il se prive ainsi de toute algèbre homologique, alors même que Cauchy venait de montrer, avec la théorie des fonctions holomorphes, tout le jeu possible sur la forme des courbes, forme entendue en un sens différent de celui de Comte[26]. Aussi, la technique qui va permettre de dire la similitude des courbes doit remonter au plus ancien, à la signification phénoménologique même de la similitude, telle qu'elle apparaît chez Euclide parlant de triangles semblables et avec comme figure type celle que nous donnons au théorème dit de Thalès. Le retour à Euclide n'est pas un luxe : il est imposé. Mais Comte assure qu'il est contenu dans l'idée de géométrie analytique chez Descartes. Ce dernier n'a-t-il pas assuré qu'il n'avait besoin pour sa *Géométrie* que du théorème de Thalès et du théorème de Pythagore !

Le point de vue est alors, pour démontrer la similitude de deux courbes, de vérifier que sont nécessairement semblables deux triangles génériques construits dans chacune des courbes. Voilà le général qui consiste à trouver dans "l'espace" de chacune des courbes deux couples de points destinés à être homologues. Par exemple les foyers F et F' pour les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, et un point commun 0 aux deux courbes, point double de l'homologie attendue. Dès lors, sont génériques les deux triangles OFM et $OF'M'$ ayant pour bases les deux segments homologues OF et OF', et pour sommet respectivement les points M et M' situés sur une même droite issue de O et coupant en M et M' les deux courbes (figure 2).

La similitude de ces deux triangles se constate par l'égalité de deux angles ϕ et ϕ'. Egalité que, tellement adaptée à la généralité de la courbe, l'équation cartésienne des courbes permet

[25] TEGA, p. 7.

[26] Une fois de plus, les travaux de Cauchy sont évités par Comte; il y aurait une étude fine à faire sur l'antagonisme intellectuel des deux hommes. L'un des ces antagonismes tient au rapport aux autres que met en place l'enseignement et la responsabilité qu'il procure. Cauchy n'a pas su créer autour de lui une école, n'a pas tenté de faire fructifier chez les autres ses propres résultats. Au moment où Comte écrit son *Traité*, le jeune Liouville abandonne toute revendication d'originalité sur le théorème qui porte son nom (toute fonction entière bornée est une constante), car Cauchy prétend qu'il s'agit d'une conséquence de sa théorie (ce qui est vrai), et qu'il l'avait indiquée déjà (ce qui est faux si l'on donne au verbe "indiquer" une signification publique).

de vérifier. Le point M étant sur la droite de pente m passant par l'origine, et l'équation de la parabole étant admise, $y^2 = 2px$, Comte vérifie que la tangente de l'angle ϕ est indépendante du paramètre p puisque l'on a $tg\phi = \frac{\frac{2p}{m}}{\frac{2p}{m^2} - \frac{p}{2}}$. Pour compléter cette preuve, il est nécessaire de remonter à la définition focale d'une parabole, qui est la définition première selon Comte qui s'est débarrassé d'une définition spatiale par le cône, "l'équation du lieu d'un point toujours équidistant d'un point fixe et d'une droite fixe"[27]. Dans des axes convenables vient donc $y^2 = 2px$.

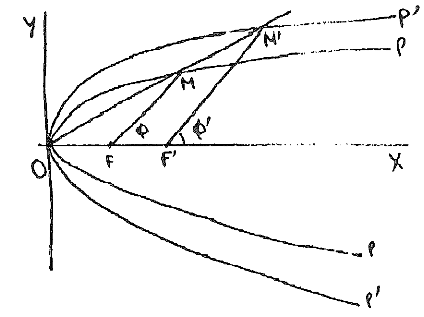


Figure 2

Il s'agit de la figure 39 du *Traité* de Comte, à laquelle a été rajoutée quelques lettres.

De cette manière, il est facile de déduire que toutes les paraboles sont semblables et que sont semblables toutes les ellipses de même excentricité, etc. Un critère d'identité des courbes a été trouvé. Il fonctionne sur l'équation : de sorte que, quelle qu'en soit l'origine – section de cône à base circulaire par un plan parallèle à une des génératrices, construction par foyer et directrice, trajectoire d'un boulet de canon –, toute parabole se ramène à une équation rapportée à des axes de coordonnées convenables où intervient un paramètre, le "paramètre" même si l'on adopte la terminologie sur les coniques remontant en français à Hérigone au XVII$^{\text{ème}}$ siècle (dans un livre paru un peu avant la *Géométrie* de Descartes).

La signification géométrique, ou issue d'Apollonius, de ce paramètre ne joue aucun rôle dans l'établissement de la similitude de toutes les paraboles. Comte œuvre à faire "oublier" ce sens ancien du paramètre au profit de celui de coefficient dans l'équation. Comte a donc réussi dans le monde scolaire : bien peu d'élèves savent lire le paramètre sur le dessin d'une parabole, et l'équation leur paraît indispensable pour le faire surgir. Il est étonnant que les maîtres d'aujourd'hui reprochent cette ignorance aux élèves, alors qu'il y a eu oubli organisé par la géométrie analytique elle-même. La signification intrinsèque du paramètre a changé d'Apollonius à Descartes. C'est Comte qui assume le seul nouveau sens comme un élémentaire.

Pourquoi ne pas s'arrêter là ? Comte ne serait pas un géomètre s'il ne dépassait pas ce calcul afin d'en saisir la signification. C'est-à-dire s'il ne débarrassait pas le raisonnement de ce qui le complique ou le localise par le choix d'axes de référence convenables. Mais il ne serait pas cohérent dans son entreprise philosophique s'il ne déduisait la similitude de l'aspect même de l'équation qui doit dire que dans le genre parabole il n'y a pas d'espèces, alors même qu'intervient un paramètre, donc a priori différentes courbes.

[27] TEGA, p. 64.

Partant d'une propriété phénoménologique de la similitude des figures rectilignes – "Il suffit de tourner un seul côté parallèlement à son homologue, pour que tous les autres se dirigent d'eux-mêmes parallèlement aux leurs" – il l'adapte au cas des courbes. Et découvre la similitude comme propriété fonctionnelle (classe de fonctions invariantes par homothétie). Il va plus loin. Il conçoit la similitude en elle-même, car elle revient à "une transposition d'axes indéterminée, portant à la fois sur la direction et l'origine"[28]. La similitude porte sur le repère, et ceci vaut pour toutes les courbes. Quelle différence entre espace et repère ? La différence qu'il y a entre la pensée géométrique de Comte et celle de Bourbaki.

Et Comte en déduit le moyen analytique et "élémentaire" de vérifier la similitude de deux courbes données par leurs équations dans des axes cartésiens quelconques par une extension manifeste de la méthode des indéterminées de Descartes.

> On examinera s'il devient possible d'identifier les deux équations
>
> $$f_2(x'\cos X' - y'\sin X' + a, x'\sin X' + y'\cos X' + b) = 0, f_1(mx, my) = 0,$$
>
> en disposant convenablement des quatre constantes arbitraires m, a, b, et X', dont les valeurs, nullement étrangères à la question, détermineront le rapport linéaire des deux courbes, et feront en même temps connaître exactement en quoi consiste la diversité effective de leurs situations actuelles[29].

La similitude se repère indépendamment des figures auxquelles elle peut s'appliquer; elle est en ce sens opération d'espace parce qu'elle affecte certains changements de repère cartésiens, indépendamment de ce qu'ils permettent de repérer. J'ai omis ce passage dans l'extrait du texte de Comte fourni pour commencer, parce que me paraît plus intéressant d'aller plus loin, de lire plus.

Comte ne termine pas ici sa théorie. Il éprouve le besoin d'expliquer plus, mais il qualifie ce plus de "méthode subsidiaire". Elle est efficace, mais elle n'est pas générale. Comte indique-t-il ainsi que le dernier mot n'est pas fourni, et que la géométrie, même élémentaire, n'est pas terminée ?

Son raisonnement consiste à dire que, sur l'équation réduite d'une courbe, la similitude impose une proportionnalité et donne une relation de moins que ce que donnerait l'identité effective de deux courbes, calculée par la méthode des indéterminées de Descartes. Dès lors, de la considération directe de l'équation réduite d'une parabole, $y^2 = 2px$, on déduit sans calcul, par l'examen de la seule dépendance du paramètre p, que toutes les paraboles sont semblables[30]. De même de la seule équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ on déduit que qu'il y ait similitude entre deux ellipses $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ il faut qu'existe un réel m tel que $a = ma'$ et $b = mb'$, soit $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Donc seules les ellipses de même excentricité sont semblables.

La question philosophique de l'identité des courbes a débouché sur un procédé géométriquement élégant de reconnaissance des formes semblables.

> On voit qu'une telle marche revient, en d'autres termes, à déduire les conditions de la similitude de celles de l'identité, en considérant, d'une part, que le nombre des unes doit toujours être inférieur d'une unité à celui des autres, et d'une autre part, que les diverses égalités linéaires simultanément prescrites par celles-ci doivent se changer en simples proportionnalités pour celles-là.[31]

[28] TEGA, p. 200.

[29] TEGA, p. 200. Cette portion du texte ne figure pas dans le document fourni, car je souhaitais attirer l'attention sur autre chose.

[30] Ainsi, avec $f_1(x, y, p_1) = y^2 - 2p_1x = 0$, l'homothétie fournit $f_1(mx, my, p_1) = m^2y^2 - 2p_1mx = 0$, soit $f_2(x, y, p_2) = y^2 - 2p_{1/m}x = 0$, ou encore $f_1(x, y, p_2) = 0$, avec comme paramètre nouveau, $p_2 = p_1/m$.

[31] TEGA, p. 203.

Dans cette méthode, la difficulté réside dans le sens à donner à l'équation réduite, ou canonique, d'une courbe, cette équation grâce à laquelle se résoudrait le problème de la géométrie comparée. Le problème du bon choix des axes de référence pour une courbe donnée, choix qui détermine l'équation réduite, revient chez Comte à caractériser l'espace associé à la courbe.

L'espace selon Comte

Même s'il ne s'agit dans l'exemple traité que de géométrie plane, en reprenant toute la démarche suivie on saisit la conception que se fait Comte de l'espace géométrique. Donc on le situe historiquement parce que ce n'est plus notre conception, ou plutôt ce n'est plus la conception que suggèrent les programmes de l'enseignement des mathématiques.

L'espace, chez Comte, est ce qui permet le raisonnement en vue du classement des formes, et ce qui règle la reconnaissance de leur identité. L'espace n'est pas une catégorie de la sensibilité, mais un outil. Dont il serait vain de vouloir démontrer l'existence, ou établir qu'il possède une réalité physique. Car il y a plusieurs espaces, selon les courbes algébriques considérées. Ce n'est pas plus un lieu indifférencié, qui ne serait représenté que par le jeu algébrique des coordonnées une fois adopté un repère.

Si la très grande majorité des figures fournies par Comte dressent impérieusement les deux axes rectangulaires, et indiquent dûment OX et OY, c'est à titre d'un ordre arbitrairement disposé sur les formes et selon la règle fameuse du *Discours de la méthode*. Le mot "coordonnées" est remarquablement adapté à cette conception, et il définit la position. Ce sont les coordonnées ou le repère qui permettent de parler d'une droite et d'une gauche, d'un haut et d'un bas, tout un vocabulaire moins conventionnel qu'ordonné en vue d'une reconnaissance des formes. Et tout ceci dès le cas de l'espace des droites, auquel il serait bon de réserver un nom, le rectilinéaire. Car l'on comprend l'un des rôles du repère, outil certes, mais outil désormais réglé par le rectilinéaire puisque les changements d'échelle s'en déduisent. Une droite n'est rectilinéaire qu'en comparaison d'autres droites, et d'abord celles du repère cartésien. A un coefficient près de normalisation $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, et à un signe près d'orientation, l'expression $ax + by + c$ fournit directement la distance du point de coordonnées (x, y) à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Bien sûr, si cette droite est l'axe des $y (x = 0)$, cette distance est tout simplement x, la coordonnée. En ce sens, parce qu'elle est toujours repère possible, une seule droite crée tout l'espace du rectilinéaire[32].

D'autres espaces viennent avec d'autres courbes et elles sont conçues comme des fonctions polynomiales. Ainsi le foyer de la parabole n'est pas seulement lié à la parabole, quoique non situé sur cette courbe considérée comme un ensemble de points ; il est une façon d'organiser l'espace de la parabole. Il permet, on l'a vu par l'équation, de déterminer l'identité entre toutes les paraboles.

Alors qu'il cherche à donner l'équation cartésienne de la parabole à partir de la définition par directrice et foyer, Comte parle distinctement des "documents" qui vont lui permettre de choisir le plus convenablement les axes du repérage[33]. Parmi ces documents figurent, en géométrie, les explications d'analyse de la variation des fonctions, extremum, tangentes horizontales ou verticales, etc. Mais ces documents peuvent être purement algébriques. Le foyer est ainsi ce point

[32] Jean Dhombres, La question du repère chez Descartes et dans la postérité cartésienne : essai sur le concept de banalisation en histoire des sciences, in J. F. Stoffel, P. Radelet-de Grave, Les "enfants naturels" de Descartes, *Réminiscience*, 4, Brepols, 2000, pp. 27-78.

[33] Il prend bien sûr l'axe de la parabole comme première droite de repère, mais abandonne la directrice au vu de l'équation cartésienne, car une parallèle à cette droite à distance p/2 du foyer lui paraît préférable, donnant l'équation réduite : n'intervient en effet qu'une seule fois le paramètre.

à partir duquel la distance à tout point de la parabole est une fonction affine des coordonnées : $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = ax+by+c$, où (α, β) sont les coordonnées du foyer. Que le foyer soit le seul point possédant cette propriété, évidente selon la définition par foyer et directrice d'une parabole, se confirme par la forme géométrique de la parabole : au moyen d'une propriété de pure représentation algébrique, celle-ci structure effectivement un espace.

L'espace n'est donc pas le lieu d'une improbable géométrie intrinsèque ; il est l'outil qui permet de nommer rigoureusement telle ou telle forme, comme par exemple la parabole que jamais un seul dessin ne permettra de nommer autrement que cette parabole là. L'espace est conçu comme une transformation sémantique, de cette parabole là à la parabole.

On ajouterait de l'inutile, ou une conception trop élargie à la Felix Klein, en disant que l'espace est le lieu des transformations qui permettent de repérer l'identique. Même si l'on précisait que c'est le lieu sur lequel opère le groupe des similitudes. Pour Comte, l'espace est ce groupe et il parle d'ailleurs de "transpositions d'axes indéterminés". Mais, selon lui, le futur de la géométrie ne se réduit pas à l'étude des changements d'axes : ceux-ci sont un outil pour la question de l'identité, outil rendu nécessaire par la pensée géométrique en tant qu'elle est analytique, et outil devenu objet. C'est la similitude, qui n'a rien d'autre à révéler, car elle est l'issue positive et complète de la réflexion mathématique sur ce chapitre. Comte sait clore un sujet. On le lui a beaucoup reproché. C'est aussi une forte méthode d'enseignement.

ANNEXE

Table abrégée des matières contenues dans le *Traité élémentaire de géométrie analytique*

GÉOMÉTRIE PLANE

PREMIÈRE PARTIE

Introduction générale

SECONDE PARTIE

Théories générales de géométrie plane, suffisamment accessibles à l'analyse ordinaire

TROISIÈME PARTIE

Discussion géométrique des équations algébriques à deux variables

QUATRIÈME PARTIE

Étude spéciale des courbes du second degré

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

PREMIÈRE PARTIE

Introduction générale

SECONDE PARTIE

Théorie générale des surfaces courbes, d'après leur classification analytique par familles vraiment naturelles

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toscana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Figure 1

La page de titre des *Discorsi e dimostrazioni matematiche* de Galilée

Le mouvement des projectiles d'après Galilée

Le thème des coniques est central dans l'histoire des mathématiques et permet de la parcourir de l'Antiquité aux Temps Modernes. Ce thème joue un rôle particulier dans les relations entre mathématiques et physique. En effet, lorsque l'on renoncera au cercle parfait de Platon comme description des mouvements, les coniques le remplaceront, principalement l'ellipse et la parabole. L'abandon de l'orbite circulaire au profit de l'elliptique par Kepler est rapidement suivi par la proposition que fait Galilée du mouvement parabolique pour les projectiles. Et il ne faudra plus attendre que cinquante ans avant que Newton ne montre l'unité, via les coniques et la gravitation universelle, de ces deux types de mouvements, célestes et terrestres. Le fait que l'on renonce au cercle, dans le contexte physique du mouvement des masses, pour le remplacer par des objets mathématiquement étudiés depuis Apollonius, ne peut que faire réfléchir celui qui s'interroge sur les rapports entre physique et mathématiques.

Cette question interpelle d'autant plus fortement aujourd'hui que nous savons que ces coniques ne fournissent pas la description parfaite du mouvement des corps célestes, mais en constituent une bonne approximation. Que s'est-il passé? N'a-t-on fait appel aux coniques que parce qu'elles avaient fait l'objet d'études approfondies? Dans quelle mesure la nature présente-t-elle réellement ces coniques? Nous ne tenterons pas de répondre à ces questions dans ce qui suit, mais le fait qu'elle se pose nous semble justifier l'intérêt que l'on peut porter à la lecture de travaux anciens et fondateurs. Il nous a dès lors semblé intéressant d'analyser en détail le texte de Galilée sur le mouvement des projectiles. Texte qui constitue la quatrième et dernière journée des *Discorsi e dimostrazioni matematiche* publiés en 1638. Outre l'importance du texte lui-même, il nous a paru d'autant plus précieux que Galilée s'y veut professeur et qui plus est professeur du plus grand nombre. Son style, l'organisation du texte ne sont pas établis à la légère et méritent notre attention. Galilée entendait que son texte fût lu sans intermédiaire.

Notre étude est destinée au professeur qui, enseignant les mathématiques et plus précisément les propriétés de la parabole, désire illustrer son cours par un texte. Sa lecture trouverait également sa place dans un cours de mécanique et il nous semble important de souligner que c'est précisément dans le mariage de ces deux disciplines que réside l'un des enseignements les plus profonds de ce texte.

DU MOUVEMENT DES PROJECTILES

Extraits du texte original[1]

Théorème I - Proposition I

Un projectile qu'entraîne un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas, décrit au cours de son déplacement une trajectoire demi-parabolique.

[1]*Discorsi e dimostrazioni mathematiche intorno a due nuove scienze Attenenti alla Mecanica & i Movimenti Locali* fut publié, comme on peut le voir sur la reproduction de la page de titre (Fig. 1), à Leiden chez Elsevier, en 1638. Il est reproduit au volume VIII, *Le Opere di Galileo Galilei,* Edizione nazionale, Ed. Favaro, Barbera, Firenze, 1890-1909, pp. 9-318. Nous nous baserons sur la traduction française publiée par M. Clavelin, *Philosophies pour l'âge de la science,* Armand Colin, 1970, où nous avons corrigé quelques fautes de frappe dans les dénominations des points. Ce texte sera référé selon *Discorsi.*

...

SALVIATI : Je désire au contraire que vous les compreniez et grâce, à l'auteur lui-même qui, lorsqu'il me permit de voir son travail et parce que je n'avais pas non plus à ma disposition les livres d'Apollonius, s'efforça de me démontrer sans qu'aucune connaissance particulière soit requise, deux des propriétés essentielles de la parabole - les seules dont nous ayons besoin dans le présent traité. Ces propriétés sont également établies par Apollonius, mais après de nombreuses autres qu'il serait trop long d'examiner; aussi mon intention est-elle de suivre une voie plus brève, en dérivant purement et simplement la première propriété de la génération de la parabole, et en m'appuyant sur elle pour obtenir immédiatement la démonstration de la seconde. Soit donc la première, de ces propriétés.

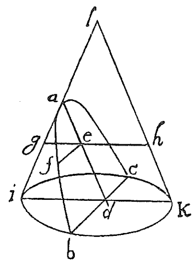


Figure 2

Représentons-nous un cône droit avec le cercle $ibkc$ pour base et pour sommet le Point l : si on le coupe par un plan parallèle au côté lk, on obtiendra la section bac, appelée parabole; sa base bc coupe à angle droit le diamètre ik du cercle $ibkc$, et son axe ad est parallèle au côté lk. Prenons un point quelconque f sur la ligne bfa et menons la droite fe parallèle à la base bd : je dis que le carré de bd a au carré de fe même rapport que l'axe da à sa partie ae. Par le point e faisons passer un plan parallèle au cercle $ibkc$ qui produira dans le cône une section circulaire dont le diamètre sera la ligne geh : comme bd est perpendiculaire au diamètre ik du cercle ibk, le carré de bd sera égal au rectangle formé par id et dk; et de même dans le cercle supérieur qui passe par les points g, f, h, le carré de fe sera égal au rectangle formé par ge et eh : par conséquent le carré de bd aura le carré de fe le même rapport que le rectangle idk au rectangle geh. Mais puisque ed est parallèle à hk, eh et dk qui sont également parallèles seront égaux; le rectangle idk aura ainsi avec le rectangle geh même rapport que id avec ge, c'est-à-dire que da avec ae : par conséquent entre le rectangle idk et le rectangle geh, c'est-à-dire entre le carré de bd et le carré de fe, existera le même rapport qu'entre l'axe da et sa partie ae, ce qu'il fallait démontrer.

Quant à la deuxième proposition nécessaire à la présente étude, nous l'établirons comme suit. Traçons une parabole dont l'axe ca est prolongé vers l'extérieur jusqu'en d, et par un point b quelconque menons la ligne bc parallèle à la base de la parabole; si nous prenons da de même longueur que la partie ca de l'axe, je dis alors que la droite tirée par les points d et b ne tombe pas à l'intérieur

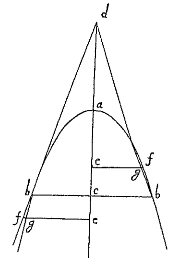


Figure 3

de la parabole, mais à l'extérieur, et de telle façon qu'elle lui est tangente au point b. Supposons, en effet, si cela est possible, qu'elle tombe à l'intérieur de la parabole, qu'elle la coupe en haut ou, après avoir été prolongée, en bas, et soit sur cette ligne un point g quelconque par lequel on fait passer la droite fge. Comme le carré de fe est plus grand que le carré de ge, il y aura entre le carré de fe et le carré de bc un rapport plus grand qu'entre le carré de ge et le carré de bc; et puisque, d'après la proposition précédente, le carré de fe est au carré de bc comme ea est à ac, ea sera avec ac dans un rapport plus grand que le carré de ge avec le carré de bc c'est-à-dire que le carré de ed avec le carré de dc (en effet, d'après les triangles dge [et dbc], ge est avec bc comme ed avec dc; mais la ligne ea est avec la ligne ac, c'est-à-dire avec ad, dans le même rapport que le quadruple du rectangle ead avec le quadruple du carré de ad, ou encore avec le carré de cd (lequel est égal à quatre fois le carré de ad) : par conséquent le quadruple du rectangle cad aura avec le carré de dc un rapport plus grand que le carré de ed avec le carré de dc, et le quadruple *du* rectangle ead sera plus grand que le carré de ed; or cela est faux, et il est plus petit, puisque les parties ea et ad de la ligne ed ne sont pas égales. Ainsi la droite db est tangente à la parabole en b, et ne la coupe pas ce que l'on devait démontrer.

...

SALVIATI : ... Nous pouvons donc reprendre le texte pour voir comment il démontre sa première proposition, dans laquelle il entend prouver que la trajectoire décrite par un mobile pesant, alors qu'il descend d'un mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et du mouvement naturel de chute, est une demi-parabole. Soit une ligne horizontale ou un plan ab, situé en hauteur, et sur lequel un mobile se meut d'un mouvement uniforme de a vers b; si le support que fournit le plan, disparaît en b, le mobile acquerra en outre, du fait de sa gravité, un mouvement naturel vers le bas le long de la perpendiculaire bn. Prolongeons directement le plan ab par la ligne be, pour représenter l'écoulement ou la mesure du temps et sur celle-ci marquons arbitrairement du nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, bc, cd, de; des points b, c, d, e, abaissons des lignes équidistantes de la parallèle bn; sur la première de celles-ci prenons une distance quelconque ci, puis sur la suivante une distance quadruple df, sur la troisième une distance neuf fois plus grande eh, et ainsi de suite sur les autres lignes en suivant la proportion des carrés de cb, db, eb, ou encore en raison double de ces mêmes lignes. Si nous supposons qu'un mobile entraîné d'un mouvement uniforme de b vers c subit en même temps une descente perpendiculaire égale à ci, à la fin de l'intervalle de temps bc il se trouvera en i. Le mouvement continuant, à la fin de l'intervalle de temps db, double de bc, la distance

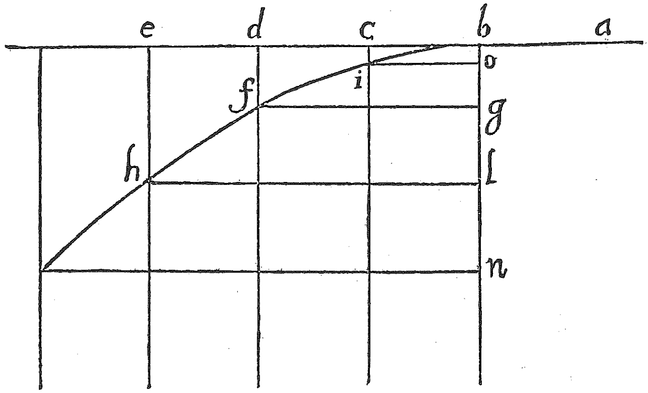


Figure 4

parcourue vers le bas sera le quadruple de la première distance ci; on a en effet démontré, dans le traité précédent, que, les espaces parcourus par un corps grave animé d'un mouvement accéléré, sont comme les carrés des temps; par conséquent la distance eh, franchie pendant le temps be, sera comme 9, d'où il s'ensuit manifestement que les espaces eh, df, ci sont entre eux comme les carrés des lignes eb, db, cb. Menons maintenant des points i, f, h, les droites io, fg, hl, équidistantes de be : les lignes hl, fg, io, seront égales respectivement aux lignes eb, db, cb de leur côté les lignes bo, bg, bl seront égales aux lignes ci, df, eh; le carré de hl sera au carré de fg comme la ligne lb à la ligne bg, et le carré de fg, sera au carré de io, comme gb est à bo : par conséquent les points i, f, h, sont situés sur une seule et même parabole. On démontrera de la même façon, en prenant une nombre quelconque d'intervalles de temps égaux et d'une grandeur arbitraire que, les points par lesquels passe un mobile animé d'un mouvement semblablement composé pendant ces mêmes intervalles de temps se trouvent sur une même ligne parabolique. D'où résulte notre proposition.

...

SAGREDO : On ne peut nier que le raisonnement soit nouveau, ingénieux et concluant; il n'en procède pas moins *ex suppositione,* car il suppose que le mouvement transversal demeure toujours uniforme, que le mouvement vers le bas conserve de même son mode propre qui est d'accélérer constamment en proposition du carré des temps, enfin que ces mouvements et leurs vitesses, en se combinant, ne s'altèrent ni ne se gênent, en sorte que la trajectoire du projectile, tout au long du mouvement, ne subit aucune transformation de nature : or cela, à mon avis, est impossible. Car c'est un fait que l'axe de la parabole le long duquel nous admettons que s'effectue le mouvement naturel des graves, se termine, par suite de sa perpendicularité à l'horizon, au centre de la Terre; et c'est un autre fait que la parabole s'écarte sans cesse de son axe; aucun projectile ne devrait donc jamais se diriger vers le centre de la Terre, ou s'il le fait, comme cela semble nécessaire, alors sa trajectoire doit se transformer en une autre courbe, fort différente d'une parabole.

...

Théorème II - Proposition II

...

SALVIATI : Poursuivant sa recherche, l'Auteur nous fait alors passer au cas d'un mobile mû à nouveau d'un mouvement composé de deux mouvements, l'un horizontal et uniforme, l'autre perpendiculaire mais naturellement accéléré, c'est-à-dire ceux-là mêmes dont dépendent le mouvement du projectile, et la trajectoire parabolique en chaque point de laquelle on cherche à déterminer l'*impeto* du mobile. En vue dei quoi l'Auteur établit en ces termes la manière, ou plutôt la méthode, permettant de mesurer cet *impeto*, sur la ligne même où le grave se meut vers le bas, d'un mouvement naturellement accéléré, à partir du repos.

Théorème III - Proposition III

...

Toutefois, avant d'aller plus loin, il me faut ici avertir d'une chose comme le mouvement dont nous allons parler est composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas (car c'est par un tel mélange qu'est formée et décrite la trajectoire d'un projectile, c'est-à-dire la parabole), nous sommes dans l'obligation de définir une commune mesure à l'aide de laquelle mesurer la vitesse, *l'impeto* ou le moment de l'un et l'autre mouvement; de plus comme les degrés de vitesse d'un mouvement uniforme sont innombrables et qu'un seul entre tous ces degrés (et non n'importe lequel) doit être réuni et composé avec le degré de, vitesse acquis grâce au mouvement naturellement accéléré, je n'ai pu trouver aucun moyen plus facile pour le déterminer que d'assumer un autre mouvement du même genre. Pour me faire mieux comprendre, soit la perpendiculaire ac élevée sur l'horizontale bc; ac sera la hauteur et cb l'amplitude de la demi-parabole ab, laquelle est engendrée par la composition de deux mouvements, dont l'un est celui du mobile quand il descend le long de ac, partant du repos en a, d'un mouvement naturellement accéléré, et dont l'autre est le mouvement uniforme transversal sur l'horizontale ad. L'*impeto* acquis en c après la descente ac est déterminé par la grandeur de cette même hauteur ac uniques et toujours semblable en effet est l'*impeto* d'un mobile, tombant de la même hauteur; en revanche sur l'horizontale ce n'est pas un mais d'innombrables degrés de vitesse qui peuvent être assignés aux mouvements uniformes. Afin de pouvoir isoler de tous les autres, et pour ainsi dire montrer du doigt, celui que je choisirai, je prolongerai la hauteur ca vers le haut et marquerai sur la ligne ainsi obtenue selon les besoins, la sublimité ae : car si je me représente un mobile tombant de cette sublimité, à partir du repos en e, il est évident que l'*impeto* qu'il acquerra au point a sera le même que celui- avec lequel je l'imaginerai en train de se mouvoir, après conversion de son mouvement sur l'horizontale ad; et ce degré de vitesse sera précisément celui par lequel, dans un temps égal à celui de sa descente le long de ea, il parcourra sur l'horizontale un espace double de la même distance ea. Tel est l'avertissement qu'il me semblait nécessaire d'introduire.

On notera en outre que j'appelle " amplitude " de la demi-parabole ab l'horizontale cb
"hauteur", c'est-à-dire ac, l'axe de la même parabole;
mais que je nomme "sublimité" la ligne ea dont le franchissement en chute libre, détermine l'*impeto* horizontal.

...

Problème I - Proposition IV

Comment déterminer l'*impeto* en chacun des points d'une parabole donnée, décrite par un projectile.

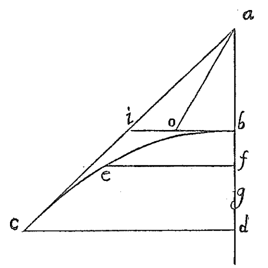


Figure 5

Soit la demi-parabole *bec* dont *cd* est l'amplitude, *db* la hauteur, et qui, prolongée vers le haut, rencontre en *a* la tangente à la parabole *ca*. Si l'amplitude *cd* est égale à la hauteur totale *da*, *bi* sera égal à *ba* et *bd* d'autre part, si nous convenons que *ab* lui-même, représente la mesure, du temps de chute le long de *ab*, ainsi du moment de vitesse acquis en *b* au terme de la descente *ab* à partir du repos en *a*, *dc* (qui est le double de *bi*) sera l'espace que le mobile parcourrait dans le même temps grâce à l'*impeto ab*, s'exerçant désormais sur une ligne horizontale; mais dans le même temps, un corps descendant le long de *bd*, à partir du repos en *b*, franchit la hauteur *bd* il est donc clair que le mobile qui, partant du repos en *a*, tombera le long de *ab*, puis verra son mouvement converti en mouvement horizontal avec l'*impeto ab*, parcourra un espace égal à *dc*. Toutefois lorsqu'il vient à descendre le long de *bd*, il franchit la hauteur *bd* et décrit la parabole *bc* dont l'*impeto* au point *c* est dû à la combinaison de l'*impeto* du mouvement transversal uniforme (dont le moment est comme *ab*) avec l'autre, *impeto* acquis après la descente *bd* au point *d*, ou encore *c* : et leurs moments sont égaux. Si donc nous admettons que ab est la mesure de l'un d'eux, soit celui du mouvement transversal uniforme, puis que *bi*, qui est égal à *bd*, mesure l'*impeto* acquis en *d* ou en *c*, la sous-tendue *ia* représentera la grandeur de l'*impeto* composé de l'un et de l'autre *impeto* - elle fournira- donc la quantité ou mesure du moment total par lequel se manifeste au point *c* l'*impeto* du projectile qui a suivi la parabole *bc*. Ce résultat présent à l'esprit, marquons sur la parabole un point quelconque *e*, où il s'agit de déterminer l'*impeto* du projectile. Menons l'horizontale *ef* et prenons *bg* moyenne proportionnelle entre *bd* et *bf* comme *ab* ou *bd*, donne par convention la mesure du temps et du moment de vitesse produit par la chute *bd*, à partir du repos en *b*, le segment *bg* donnera le temps ou plutôt la mesure du temps et de l'*impeto* au point f quand le mobile vient de *b*. Si donc nous prenons *bo* égal à *bg* et traçons la diagonale *ao*, celle-ci représentera la grandeur de l'*impeto* au point *e* : avec *ab* nous avons en effet une détermination du temps et de l'*impeto* en *b*, - *impeto* qui une fois dévié sur l'horizontale demeure identique à lui-même - et *bo* quant à lui détermine l'*impeto* en *f* ou en *e*, c'est-à-dire celui qu'engendre la descente, à partir du repos en *b*, sur la hauteur *bf* : or *ao* est égal en puissance à la somme de *ab* et *bo*. D'où suit clairement ce qui était demandé.

Figure 6

...

SALVIATI : ... Reprenons donc la vitesse et l'*impeto* acquis par un grave, tombant comme nous le disions, de la hauteur d'une pique, puisque telle est la vitesse dont nous voulons nous servir pour mesurer le cas échéant les autres vitesses et *impeto*, et supposons, par exemple, que le temps d'une telle chute soit de 4 secondes; pour déterminer à l'aide de cette mesure l'*impeto* d'un mobile au terme d'une descente quelconque, soit plus grande soit plus petite, l'erreur serait de conclure directement d'après le rapport de cette nouvelle hauteur avec la distance d'une pique et d'estimer, si l'on veut, qu'à une hauteur quadruple correspond l'acquisition d'une vitesse quadruple : en fait cela est faux, car dans le mouvement naturellement accéléré la vitesse augmente ou diminue non en proportion des espaces mais des temps, et ceux-là, comme il a déjà été démontré, varient comme les carrés de ceux-ci. C'est pourquoi si nous prenions sur une ligne droite une partie de cette ligne pour mesure de la vitesse, du temps et aussi de l'espace franchi en un tel temps (trois grandeurs que pour aller plus vite on représente souvent par un même segment), ni le temps ni le degré de vitesse relatifs à une autre distance ne seraient représentés par cette distance, mais bien par la ligne qui serait moyenne proportionnelle entre l'une et l'autre distance. je m'expliquerai mieux sur un exemple. Sur la ligne *ac*, perpendiculaire à l'horizon, nous désignons par *ab* un certain espace franchi par un grave qui descend d'un mouvement naturellement accéléré; bien qu'il soit possible de prendre une ligne quelconque, je représenterai le temps de ce parcours, pour plus de brièveté, par la même ligne *ab*, et je prendrai encore *ab* pour mesure de l'*impeto* et de la vitesse engendrés par un tel mouvement : ainsi pour toutes les distances, ultérieurement considérées les mesures s'effectueront à partir du segment *ab*. Après avoir fixé à notre guise, et au moyen d'une seule grandeur, l'expression de ces trois quantités fort différentes, savoir l'espace, le temps et l'*impeto*, proposons-nous de déterminer pour la hauteur *ac*, et le temps que durera la descente de *a* en *c*, et l'*impeto* que le mobile, aura acquis au point final *c* - l'évaluation s'effectuant par rapport au temps et à l'*impeto* mesurés pour la distance *db*. Questions auxquelles on répondra en prenant ad moyenne proportionnelle, entre *ac* et *ab*, et en affirmant que le temps requis, pour descendre le long de *ac* tout entier est comme le temps *ad* vis-à-vis du temps *ab*, par lequel on a figuré initialement le temps requis pour franchir *ab*. Nous dirons pareillement que l'*impeto* ou degré de vitesse que possédera le grave au point *c* est avec l'*impeto* qu'il possédait en *b* dans le même rapport que la ligne *ad* à la ligne *ab*, la vitesse, comme on sait, croissant en proportion directe du temps : conclusion dont l'Auteur bien qu'il l'ait prise pour postulat, a néanmoins voulu justifier l'application à la Proposition III.

...

Problème - Proposition XII

Calculer et disposer sous forme de table les amplitudes de toutes les demi-paraboles que décrivent des projectiles lancés avec un même, *impeto*.

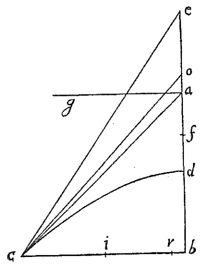


Figure 7

Il ressort des démonstrations antérieures que des paraboles données, leurs sublimités, jointes à leurs hauteurs, forment au-dessus de l'horizon des perpendiculaires d'égale longueur, alors ces paraboles sont décrites par des projectiles lancés avec un même *impeto* : en conséquence ces perpendiculaires doivent être comprises entre les mêmes lignes horizontales parallèles. Prenons la perpendiculaire ba égale à l'horizon cb, et joignons la diagonale ac : l'angle acb aura une valeur de 45°; divisons ensuite la perpendiculaire ba par le milieu en d : la demi-parabole dc, sera celle qui est décrite depuis la sublimité ad avec la hauteur db, et son *impeto* en c sera égal à celui d'un mobile qui, partant du repos en a, descend le long de la ligne ab; si maintenant l'on mène ag parallèle à bc, pour toutes les demi-paraboles, dont l'*impeto* sera égal à celui dont on vient de parler, la somme de la hauteur et de la sublimité sera égale à la distance comprise entre les parallèles ag et bc. De plus, comme il a déjà été établi que des demi-paraboles dont les tangentes s'écartent d'une même quantité, en plus ou en moins, d'une élévation de 45°, ont des amplitudes égales, les calculs que nous allons faire pour les plus grandes élévations serviront aussi pour les plus petites. Divisons ensuite en 10 000 parties la plus grande amplitude de projection, c'est-à-dire celle d'une demi-parabole dont l'angle d'élévation est de 45° : cette évaluation s'appliquera à la ligne ba ainsi qu'à l'amplitude de la demi-parabole bc. Nous choisissons ce nombre de 10 000, car nous nous servons dans ces calculs de la table des tangentes où telle est précisément la valeur de la tangente de 45°. Passant alors à l'essentiel, menons ce en formant un angle ecb plus grand (quoique toujours aigu) : le problème est de décrire la demi-parabole qui ait ec pour tangente et dont la sublimité, jointe à la hauteur, soit égale à la ligne ba elle-même. Partant de l'angle donné bce prenons, dans la table des tangentes, la valeur de la tangente be, et divisons be par le milieu en f; trouvons ensuite la troisième proportionnelle de bf et bi (moitié de bc), qui nécessairement sera plus grande que fa; et soit fo. On a ainsi découvert que la demi-parabole inscrite dans le triangle ecb avec ce pour tangente, et d'amplitude cb, aura bf pour hauteur et fo pour sublimité. Mais la longueur bo, prise en totalité, dépasse la distance comprise entre les parallèles ag et cb, alors qu'elle devrait lui être égale; si nous désirons donc qu'à la fois la parabole cherchée et la parabole dc soient décrites par des projectiles tirés de c avec le même *impeto* (et sans oublier qu'un nombre indéfini de paraboles semblables, plus grandes ou plus petites, peuvent être décrites à l'intérieur de l'angle bce), il nous faudra trouver une autre parabole,

semblable à dc, dont la sublimité ajoutée à la hauteur (celle-ci étant homologue à bc) sera égale à ba. Que, l'amplitude bc ait alors avec cr le même rapport que ob avec ba : on aura obtenu cr qui est précisément l'amplitude de la parabole ayant bce comme angle d'élévation, et dont la sublimité, jointe à la hauteur, est égale à la distance comprise entre les parallèles ga et eb, c'est-à-dire ce que l'on cherchait. L'opération par conséquent a lieu comme suit :

Ayant relevé la tangente de l'angle donné bce, on prend sa moitié, à laquelle on ajoute, fo troisième proportionnelle entre cette même moitié et la moitié de bc; puis on fait en sorte que bc ait avec une quatrième longueur même rapport que ob avec ba : cette longueur est cr, c'est-à-dire l'amplitude cherchée.

Prenons un exemple.
Soit l'angle ecb de 50 degrés; sa tangente sera 11 918, et sa moitié, c'est-à-dire bf, sera 5 959; la moitié de bc est 5 000; la troisième proportionnelle de ces deux moitiés est 4 195 qui, ajoutée à bf, donne 10 154 pour la longueur bo. Que le rapport de ob à ba, c'est-à-dire de 10 154 à 10 000, soit aussi celui de bc, c'est-à-dire de 10 000 (l'une et l'autre, en effet, sont tangentes de l'angle de 45 11) à une quatrième longueur : nous obtiendrons ainsi l'amplitude cherchée rc, soit 9 848, alors que bc (l'amplitude maxima) est égale à 10 000. Les amplitudes des paraboles entières auront une valeur double, c'est-à-dire 19 696 et 20 000; et telle est aussi l'amplitude de la parabole dont l'angle d'élévation est de 40 degrés, car elle diffère de l'angle de 45° par une même quantité.

Degrés		Degrés	Degrés		Degrés
45	10000		69	6.692	21
46	9994	44	70	6428	20
47	9976	43	71	6157	19
48	9945	42	72	5878	18
49	9902	41	73	5592	17
50	9848	40	74	5300	16
51	9782	39	75	5000	15
52	9704	38	76	4694	14
53	9612	37	77	4383	15
54	9511	36	78	4067	12
55	9396	35	79	3746	11
56	9272	34	80	3420	10
57	9136	33	81	3090	9
58	8989	32	82	2756	8
59	8829	31	83	2419	7
60	8659	30	84	2079	6
61	8481	29	85	1736	5
62	8290	28	86	1391	4
63	8090	27	87	1044	3
64	7880	26	88	698	2
65	7660	25	89	349	1
66	7431	24			
67	7191	23			
68	6944	22			

1 Le plan du texte de Galilée

1. Introduction.
2. Les deux propriétés mathématiques de la parabole utilisées.
3. Réflexion mécanique sur le mouvement de chute.
4. Mise en place des éléments mécaniques et de leur description sur la parabole.
5. Détermination de l'*impeto* en chaque point de la parabole.
6. Lien mécanique entre *amplitude, sublimité et hauteur.*
7. Les 45°, cas particulier et la symétrie par rapport à 45°.
8. Si l'on a $\frac{h_1}{S_1} = \frac{S_2}{h_2}$, alors les amplitudes sont les mêmes et l'*impeto* également.
9. *Impeto* et amplitude fournissent la hauteur.
10. Table de même *impeto.*

2 Introduction

Les deux premières journées des Discours de Galilée sont consacrées à la résistance des matériaux, et les deux suivantes sont consacrées à l'étude du mouvement. Galilée divise cette dernière étude en trois parties. Les deux premières abordent le mouvement uniforme, puis le mouvement uniformément accéléré et cela constitue la troisième journée. La quatrième journée est consacrée au "mouvement violent", c'est-à-dire au mouvement d'un projectile. Cette dernière étude est un aboutissement; elle vient à la fin du livre comme dernier chapitre. C'est la fin d'un crescendo dans la difficulté des problèmes traités. La difficulté est mécanique, et on commence par le mouvement rectiligne uniforme, puis on aborde le mouvement uniformément accéléré et finalement la composition des deux dans le mouvement du projectile. Difficulté mathématique puisque les premiers mouvements constituent un problème linéaire, alors que les seconds sont quadratiques. La difficulté du dernier réside dans la manière de composer les deux premiers.

> Dans la recherche que j'aborde à présent, je m'efforcerai de mettre en lumière et d'établir sur de fermes démonstrations certaines des conséquences particulièrement importantes et dignes d'être connues, qu'entraîne pour un mobile le fait d'être animé d'un double mouvement, à savoir un mouvement uniforme et un mouvement naturellement accéléré : car de ce genre paraît bien être le mouvement que nous attribuons aux projectiles[2].

Galilée poursuit en décrivant la génération d'un tel mouvement. Il rappelle brièvement les éléments qui ont déjà été établis dans les chapitres précédents de son livre et que l'enseigné doit avoir à l'esprit.

> J'imagine qu'un mobile a été lancé sur un plan horizontal d'où l'on a écarté tout obstacle; il est déjà certain, d'après ce qu'on a dit ailleurs plus longuement, que son mouvement se poursuivra uniformément et éternellement sur ce même plan, pourvu qu'on le prolonge à l'infini[3].

Il rappelle le principe d'inertie : en l'absence de forces extérieures, un solide poursuit éternellement son mouvement rectiligne uniforme. Cela étant acquis, que va-t-on modifier à présent ?

> Supposons en revanche *que le plan* soit limité et situé à une certaine hauteur : le mobile que j'imagine doué de gravité, parvenu à l'extrémité du plan et continuant sa course, ajoutera à son précédent mouvement uniforme et indélébile la tendance vers le bas que lui confère sa gravité : le résultat sera ce mouvement composé d'un mouvement horizontal uniforme et d'un mouvement naturellement accéléré vers le bas que j'appelle projection[4].

Tout est dit, la description est parfaite, il reste à la mathématiser pour permettre la mesure grâce à l'expérience. Telle sera la tâche effectuée dans la suite du chapitre qui se termine sur un tableau de mesures expérimentales.

Les deux propriétés mathématiques de la parabole utilisées

La première propriété : une sorte d'équation de la parabole

[2] *Discorsi*, p. 205.
[3] *Discorsi*, p. 205.
[4] *Discorsi*, p. 205.

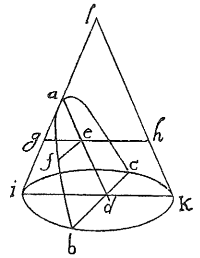


Figure 8
La parabole comme section conique chez Galilée

Cette première proposition est présentée sous la forme suivante, f étant un point quelconque de la parabole, intersection d'un cône droit avec un plan parallèle à une génératrice lh (Figure 8),

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae}.$$

La démonstration, celle d'Apollonius mais elle est refaite pour le profit du lecteur supposé sans accès à un livre de référence, est faite dans l'espace, sur un cône où il trace un cercle parallèle à la base et passant f. Sur le cercle de base, on a la relation de la puissance du point d

$$bd^2 = id.dk.$$

De même dans le cercle supérieur

$$fe^2 = ge.eh.$$

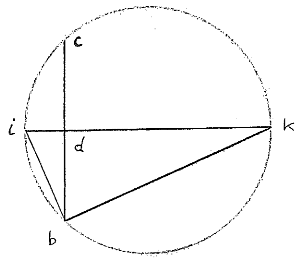


Figure 9. Coupe horizontale du cône

Pour montrer ces relations de puissance, reproduisons le cercle de base $ibkc$ avec le point d qui se trouve dans le plan de la parabole et qui, dans ce cercle, est projection sur l'axe ik de c comme de b. Le théorème de Pythagore nous donne

$$ik^2 = ib^2 + kb^2.$$

Et l'on peut introduire $ik = id + dk$

$$id^2 + dk^2 + 2id.dk = ib^2 + kb^2.$$

Mais avec le théorème de Pythagore encore, $ib^2 = id^2 + db^2$ et $kb^2 = dk^2 + db^2$.
Donc

$$id^2 + dk^2 + 2id.dk = id^2 + db^2 + dk^2 + db^2.$$

soit

$$id.dk = db^2.$$

En divisant la première relation par la seconde pour les deux cercles, on obtient

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id.dk}{ge.eh}.$$

Par construction, $ed//hk$ et $eh//dk$ donc $eh = dk$ et la relation devient

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id}{ge}.$$

Mais les points $agide$ sont dans le plan de la parabole et forment un triangle.

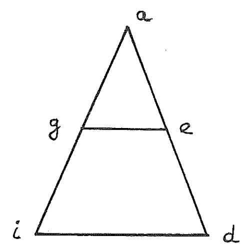


Figure 10. Section transversale du cône

On a par

$$\frac{id}{ge} = \frac{da}{ae}.$$

Ce qui achève la démonstration :

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae}.$$

Il nous appartient à présent de nous interroger sur le sens de cette propriété. Plaçons-nous dans le plan de la parabole et rappelons l'équation $y = ax^2$.

Relisons sur la figure la relation établie en la traduisant dans un langage qui nous est plus habituel, celui des coordonnées x et y que Descartes allait introduire en 1637.

$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{da}{ae},$$

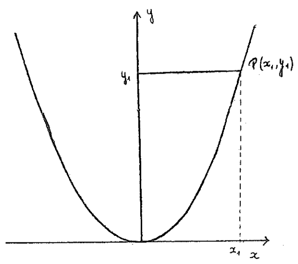


Figure 11. La parabole en coordonnées cartésiennes

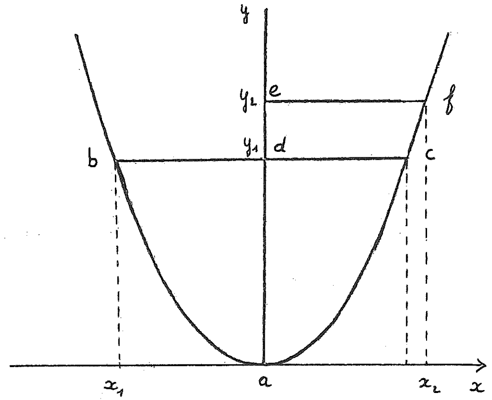


Figure 12. Lecture de la relation donnée par Galilée

$$\frac{{x_1}^2}{{x_2}^2} = \frac{y_1}{y_2},$$

où nous voyons apparaître une relation entre les coordonnées (x_1, y_1) du point b et les coordonnées (x_2, y_2) d'un autre point f de la parabole. L'apparition d'un tel rapport ne doit pas nous étonner à une époque où la théorie des proportions est constamment maniée. On l'a bien vu par la démonstration même de Galilée. Le fait que les coordonnées (x, y) soient reliées par la relation $x^2 = y$, autrement dit par l'équation de la parabole, est donc la propriété qui sous-tend celle de Galilée. Seule change la présentation de cette équation. Galilée utilise non pas deux coordonnées, mais quatre, correspondant à deux points : quels que soient deux points de la parabole, le rapport de leurs distances à l'axe vertical, bd ou fe, doit être égal au rapport des carrés des distances à l'axe horizontal da et ae.

2.1 La seconde propriété

Cette propriété donne une construction de la tangente en un point quelconque de la parabole :

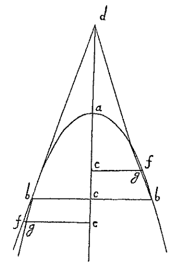


Figure 13.
Propriété de la tangente chez Galilée, deuxième figure

L'énoncé sous forme de propriété serait : Si db est tangente à la parabole en b elle coupe l'axe de la parabole en un point d symétrique de la projection c de b sur l'axe, c'est-à-dire tel que $ca = ad$.

La démonstration se fait par l'absurde. Admettons que la droite issue de b et qui coupe l'axe en d de manière à ce que $da = ac$, recoupe la parabole en un autre point.

On trace fge perpendiculaire à l'axe de la parabole. Si f est au delà de b (partie gauche de la Figure 13) comme fe est plus grand que ge, on aura

$$\frac{fe^2}{bc^2} > \frac{ge^2}{bc^2}.$$

Par la proposition précédente, on sait que

$$\frac{fe^2}{bc^2} = \frac{ea}{ac},$$

et donc

$$\frac{ea}{ac} > \frac{ge^2}{bc^2}.$$

En considérant les triangles dge et dbc de cette même figure, on a la relation de similitude

$$\frac{ge^2}{bc^2} = \frac{ed^2}{cd^2}$$

et donc

$$\frac{ea}{ac} > \frac{ed^2}{cd^2}.$$

Mais par construction $ac = ad$, donc

$$\frac{ea}{ac} = \frac{ea}{ad},$$

en multipliant haut et bas par $4ad$ on obtient

$$\frac{ea}{ad} = \frac{4ea.ad}{4ad.ad}.$$

Comme $2ad = cd$, on trouve

$$\frac{ea}{ad} = \frac{4ea.ad}{cd^2},$$

qui doit être plus grand que

$$\frac{ed^2}{cd^2}.$$

C'est-à-dire

$$4ea.ad > ed^2,$$

ce qui est faux, parce qu'ainsi a ne peut être au milieu de ed. Par construction en effet a est au milieu de cd et e et c sont distincts. Pour le montrer, Galilée fait appel à une proposition d'Euclide : dans un segment de découpé en deux parties égales par p et en parties inégales par a, on a

$$ea.ad < dp^2.$$

Puisque dp est la moitié de ed

$$4dp^2 = de^2.$$

Soit

$$4ea.ad < ed^2,$$

ce qui est l'égalité contraire.

Figure 14. Lemme d'Euclide

L'inégalité du lemme d'Euclide peut se voir immédiatement sur la Figure 15 puisque l'aire du rectangle $ea.ad$ est égale à l'aire du carré dp^2 moins l'aire du petit carré hachuré pa^2. On retrouve algébriquement ce même petit carré en comparant l'expression de

$$\begin{aligned} ep^2 &= ep.ea + ep.ap \\ &= dp.ea + ep.ap \\ &= dp.ea + ea.ap + ap^2 \\ &= (dp + pa)ea + ep^2 \\ &= ad.ea + ap^2. \end{aligned}$$

Réflexion purement mécanique sur le mouvement de chute

Galilée décrit le mouvement[5] d'un corps lancé sur un plan horizontal qui s'arrête en un point b.

[5]cf. supra

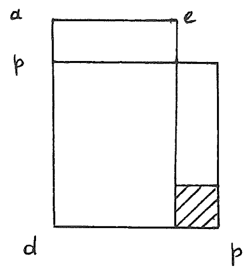


Figure 15.
Démonstration géométrique du lemme d'Euclide

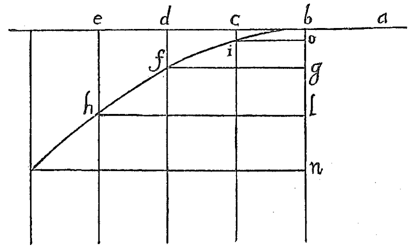


Figure 16.
Figure de Galilée sur le mouvement de chute

> Soit une ligne horizontale ou un plan ab, situé en hauteur, et sur lequel un mobile se meut d'un mouvement uniforme de a vers b.[6]

Ce corps parcourt donc des espaces égaux en des temps égaux.

> Si le support que fournit le plan disparaît en b, le mobile acquerrera en outre, du fait de sa gravité, un mouvement naturel vers le bas le long de la perpendiculaire bn.[7]

Ce mouvement de chute verticale simple a déjà été étudié par Galilée. Il sait que le corps parcourt en tombant des espaces qui sont comme les carrés des temps. Donc si l'on commence avec un temps $= 1, 2, 3, etc.$, on aura la série $1, 4, 9, \ldots$ Galilée poursuit en prenant bc comme axe des temps.

> Prolongeons directement le plan ab par la ligne be, pour représenter l'écoulement ou la mesure du temps, et sur celle-ci marquons arbitrairement du nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, bc, cd, de[8].

[6]*Discorsi*, p. 208.
[7]*Discorsi*, p. 208.
[8]*Discorsi*, p. 208-209.

> Des points b, c, d, e, abaissons des lignes équidistantes de la parallèle bn; sur la première de celles-ci prenons une distance quelconque ci, puis sur la suivante une distance quadruple df, sur la troisième une distance neuf fois plus grande eh, et ainsi de suite sur les autres lignes en suivant la proportion des carrés de cb, db, eb, ou encore en raison double de ces mêmes lignes[9].

C'est la construction point par point de la courbe de chute en combinant, sans interférence, un mouvement rectiligne et uniforme et un mouvement accéléré vertical. Il reprend son explication en termes plus mécaniques. Sur ae le mobile a, dû à son inertie, un mouvement rectiligne et uniforme. La distance qu'il parcourt est directement proportionnelle au temps. Après un temps bc, il a parcouru une distance bc. En même temps il tombe verticalement d'un mouvement accéléré. Les espaces verticaux qu'il parcourt dans sa chute son proportionnels aux carrés des temps. Pendant qu'il parcourt bc, il tombe de ci et se trouve donc en i. Après le temps db, il aura parcouru vers le bas une distance quadruple de ci, il sera en f. Retraçant verbalement la (Figure 16), Galilée aboutit à

$$\frac{fg^2}{io^2} = \frac{gb}{bo}.$$

Ce qui est la première propriété mathématique de la parabole donnée par Galilée, où nous avons reconnu l'équation $y = ax^2$. Galilée démontre ensuite la réciproque par l'absurde, puis Sagredo soulève une objection.

> On ne peut nier que le raisonnement soit nouveau, ingénieux et concluant; il n'en procède pas moins ex suppositione, car il suppose que le mouvement transversal demeure toujours uniforme, que le mouvement vers le bas conserve de même son mode propre qui est d'accélérer constamment en proportion du carré des temps, enfin que ces mouvements et leurs vitesses en se combinant, ne s'altèrent ni ne se gênent, en sorte que la trajectoire du projectile, tout au long du mouvement, ne subit aucune transformation de nature : or cela à mon avis est impossible[10].

Il souligne ainsi le fait que les deux mouvements ne doivent en aucun cas interférer.

Mise en place des éléments mécaniques et de leur description sur la parabole

Le Théorème III, Proposition III traite de la chute verticale accélérée qui a déjà été utilisé du point de vue mathématique. Galilée y donne une relation entre l'*impeto* en un point quelconque et en un point de référence. Ce point de référence, noté c sur la figure, est tel que ac représente à la fois le temps de la chute, le trajet et l'*impeto*. L'*impeto* est une grandeur encore imprécise chez Galilée. Selon lui, un poids acquiert un certain *impeto* après une chute d'une certaine hauteur. Pour nous, il est lié à l'énergie cinétique, et serait proportionnel au carré de la vitesse. Mais Galilée l'utilise aussi comme une impulsion. Cette fois, l'*impeto* serait proportionnel à la vitesse. Il n'est pas possible de lever cette ambiguïté, une ambiguïté qui va se perpétuer.

La relation que Galilée établit est

$$\frac{imp_b}{imp_c} = \frac{as}{ac}.$$

> Marquons as moyenne proportionnelle entre ba et ac : nous allons démontrer que l'*impeto* en b est à l'*impeto* en c comme la ligne sa est à la ligne ac[11].

[9] *Discorsi*, p. 209.
[10] *Discorsi*, p. 210.
[11] *Discorsi*, p. 216.

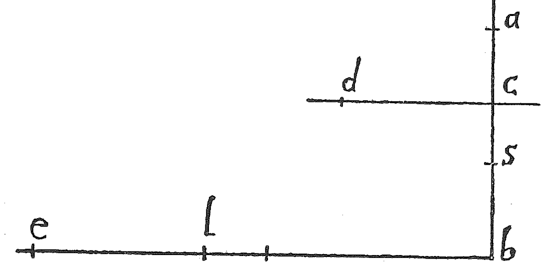


Figure 17.
Galilée établit des proportions entre l'espace vertical parcouru, le temps de parcours et l'*impeto* acquis

Le fait que as soit moyenne proportionnelle revient à écrire

$$\frac{ba}{as} = \frac{as}{ac}$$

ou

$$as^2 = ba.ac.$$

Galilée revient sur cette moyenne proportionnelle un peu plus loin dans son texte.

> Dans le mouvement naturellement accéléré la vitesse augmente ou diminue, non en proportion des espaces mais des temps, et ceux-là, comme il a été démontré, varient comme les carrés de ceux-ci[12].

Figure 18.
Détermination de la vitesse de la chute accélérée en un point, Galilée

[12] *Discorsi*, p. 221.

Après avoir fixé à notre guise, et au moyen d'une seule grandeur, l'expression de ces trois quantités fort différentes, savoir l'espace, le temps et l'*impeto*, [après le premier élément de temps] proposons nous de déterminer pour la hauteur ac, et le temps que durera la descente de a en c, et l'*impeto* que le mobile aura acquis au point final c - l'évaluation s'effectuant par rapport au temps et à l'*impeto* mesurés pour la distance ab.

Il s'agit en fixant la distance ab de fixer les unités de mesures.

Questions auxquelles on répondra en prenant ad moyenne proportionnelle entre ac et ab, et en affirmant que le temps requis pour descendre le long de ac tout entier est comme le temps ad vis-à-vis du temps ab, par lequel on a figuré initalement le temps requis pour franchir ab. Nous dirons pareillement que l'*impeto* ou degré de vitesse que possédera le grave au point c est avec l'*impeto* qu'il possédait en b dans le même rapport que la ligne ad à la ligne ab, la vitesse, comme on sait, croissant en proportion directe du temps[13].

Galilée nous dit que as mesure le temps de chute de a à b. Autrement dit le rapport qu'il trouve dit que les *impeto* sont dans le rapport des temps de chute.

Ainsi apparaît clairement le moyen de mesurer l'*impeto*, ou moment de vitesse, sur la ligne où a lieu le mouvement de descente, et cet *impeto* par définition augmente en raison directe du temps[14].

Galilée marque une pause.

Toutefois, avant d'aller plus loin... nous sommes dans l'obligation de définir une commune mesure à l'aide de laquelle mesurer la vitesse, l'*impeto* ou le moment de l'un et l'autre mouvement; de plus comme les degrés de vitesse d'un mouvement uniforme sont innombrables, et qu'un seul entre tous ces degrés (et non n'importe lequel) doit être réuni et composé avec le degré de vitesse acquis grâce au mouvement naturellement accéléré[15].

Galilée veut dire ici que l'on peut donner un mouvement rectiligne uniforme équivalent à n'importe quelle vitesse. Il s'agit donc de se donner la vitesse uniforme. Le *mouvement naturellement accéléré* a par contre un degré de vitesse en chaque point car Galilée admet tacitement que le corps part du repos.

Comment va-t-il déterminer la vitesse uniforme?

Pour mieux me faire comprendre, soit la perpendiculaire ac, élevée sur l'horizontale bc; ac sera la hauteur et cb l'amplitude de la demi-parabole ab, laquelle est engendrée par la composition de deux mouvements, dont l'un est celui du mobile quand il descend le long de ac, partant du repos en a, d'un mouvement naturellement accéléré, et dont l'autre est le mouvement uniforme transversal sur l'horizontale ad. L'*impeto* acquis en c après la descente ac est déterminé par la grandeur de cette même hauteur ac : unique et toujours semblable en effet est l'*impeto* d'un mobile tombant de la même hauteur; en revanche sur l'horizontale ce n'est pas un, mais d'innombrables degrés de vitesse qui peuvent être assignés aux mouvements uniformes. Afin de pouvoir isoler de tous les autres, et pour ainsi dire montrer du doigt, celui que je choisirai, je prolongerai la hauteur ca vers le haut et marquerai sur la ligne ainsi obtenue selon les besoins, la sublimité ae : car si je me représente un mobile tombant de cette sublimité, à partir du repos en e, il est évident que l'*impeto* qu'il acquerra au

[13]*Discorsi*, p. 222.
[14]*Discorsi*, p. 217.
[15]*Discorsi*, p. 210.

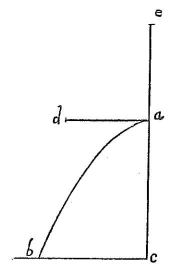


Figure 19.
Galilée. Calcul de l'*impeto* après une chute parabolique d'une hauteur déterminée

point a sera le même que celui avec lequel je l'imaginerai en train de se mouvoir, après conversion de son mouvement, sur l'horizontale ad; et ce degré de vitesse sera précisément celui par lequel, dans un temps égal à celui de sa descente le long de ea, il parcourra sur l'horizontale un espace double de la même distance ea[16].

Galilée compose un mouvement vertical naturellement accéléré, partant du repos en a avec un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse est déterminée de la manière suivante : le corps est lâché sans vitesse initale au point e, il tombe ensuite librement de e en a où on le dévie horizontalement. Il aura donc en a une vitesse qui pour nous est déterminée par la relation

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2.$$

Pour Galilée, c'est le degré de vitesse acquis après la chute ea qui est lié à l' *Impeto* acquis après cette chute. Pour comprendre cette curieuse manière de mesurer la vitesse, il faut rappeler que la mesure du temps est difficile pour Galilée. Les résultats de ces mesures sont mauvaises, ce qui rend mauvaises les mesures de la vitesse comme nous l'entendons. Une longueur, ou une hauteur se mesure beaucoup plus aisément et beaucoup plus précisément.

L'idée qui consiste à laisser tomber verticalement un objet sur sa trajectoire est jugée digne de Platon par Galilée. L'idée originale qui ne semble pas être chez Platon consiste à transformer un mouvement de chute rectiligne et accélérée d'une planète en un mouvement circulaire et perpétuel. Telle eut été la manière de procéder par Dieu au moment de la création pour choisir les vitesses de rotation des planètes. Notons qu'en 1738, Daniel Bernoulli dans ses *Commentationes de immutatione et extensione principii conservationis virium vivarum, quae pro motu corporum coelestium requiritur*[17], fixera encore de cette manière les conditions initiales dans le cas des mouvements planétaires. L'idée de Galilée est plus générale que l'idée originale attribuée à Platon puisqu'il ne s'agit pas d'une planète, ni d'un mouvement circulaire.

Les éléments mécaniques ayant été présentés, il faut à présent mettre en place les éléments mathématiques correspondants.

[16]*Discorsi*, p. 217.
[17]Commentarii academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Vol. X, 1738 (1747), pp. 116-124, reproduit dans *Die Werke von Daniel Bernoulli,* Vol. 3, Basel, Birkhäuser, 1987, p. 160.

On notera en outre que j'appelle "amplitude" de la demi-parabole ab l'horizontale cb; "hauteur" c'est-à-dire ac, l'axe de la même parabole; mais que je nomme "sublimité" la ligne ea dont le franchissement en chute libre, détermine l'*impeto* horizontal.

Ces définitions ne correspondent pas à des grandeurs intrinsèques de la parabole; aucun lien avec l'emplacement du foyer ou de la directrice n'est donné avec le paramètre.

Détermination de l'*impeto* en chaque point de la parabole

Pour ce faire, Galilée présente dans le Problème I - Proposition IV, une situation à première vue particulière.

Soit la demi-parabole bec dont cd est l'amplitude, db la hauteur, et qui, prolongée vers le haut, rencontre en a la tangente à la parabole ca. Si l'amplitude cd est égale à la hauteur totale da, bi sera égal à ba et bd[18].

En effet, il prend le cas d'une tangente à 45°. Comme, nous le verrons, l'angle de 45° va jouer un rôle important dans la suite, on est tenté de croire à une simplification injustifiée de Galilée. Mais regardons les choses autrement. Toute parabole à en un certain point une tangente à 45°. Quel est ce point? Il s'agit du point d'où une perpendiculaire à l'axe rencontre l'axe au foyer. Si nous regardons la parabole placée, comme l'entend Galilée, verticalement avec le sommet au plus haut, cette perpendiculaire est horizontale. Il s'agit ici de l'amplitude cd. Dans ce cas toujours, la hauteur galiléenne bd est la distance focale, le foyer est en d. Et la sublimité ab qui est égale à la distance focale représente la distance du sommet à la directrice. La sublimité comme la hauteur sont le demi paramètre de la parabole. En définissant la parabole au moyen de la tangente à 45°, Galilée ne fait rien d'autre que définir le paramètre de la parabole. Il ne traite donc pas un cas particulier. Mais retenons que pour Galilée la hauteur n'est pas synonyme de demi paramètre. La hauteur n'est le demi paramètre que si on considère la chute jusqu'à ce point particulier où la tangente est de 45°. Après cette digression importante reprenons le sujet réel de la Proposition IV. Il s'agit de déterminer l'*impeto* en un point quelconque de la parabole définie de la manière qui vient d'être décrite. Le résultat est obtenu en composant en chaque point de la parabole l'*impeto* dû au mouvement rectiligne uniforme avec celui qui en ce point est dû au mouvement de chute naturelle et accélérée. La composition se fait suivant la loi connue du parallélogramme que Galilée est autorisé à utiliser en chaque point car l'*impeto* dû à la chute verticale accélérée est fixe et connu en chaque point même si il varie de point en point. L'*impeto* dû au mouvement rectiligne uniforme est toujours le même ici ib. Il s'agit d'un *impeto* unitaire dû à une chute d'une distance unitaire en un temps unitaire. L'*impeto* dû au mouvement accéléré se détermine en chaque point de la manière suivante :

Marquons sur la parabole un point quelconque e, où il s'agit de déterminer l'*impeto* du projectile. Menons l'horizontale ef et prenons bg moyenne proportionnelle entre bd et bf [les distances verticales parcourues jusqu'à d et jusqu'à e] comme ab, ou bd, donne par convention la mesure du temps et du moment de vitesse produit par la chute bd à partir du repos en b, le segment bg donnera le temps ou plutôt la mesure du temps et de l'*impeto* au point f quand le mobile vient de b[19].

Ce qui permet à Galilée de conclure en appliquant la loi du parallélogramme.

[18] *Discorsi*, p. 219.
[19] *Discorsi*, p. 219-220.

Si donc nous prenons bo égal bg et traçons la diagonale ao, celle-ci représentera la grandeur de l'*impeto* au point e[20].

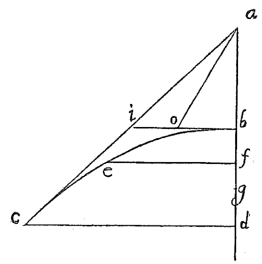


Figure 20.
Calcul de l'*impeto* en chaque point de la parabole

Lien mécanique entre *amplitude, sublimité et hauteur*

Galilée pose dans Proposition V une sorte de problème inverse. Il ne s'agit plus de déterminer la trajectoire parabolique suivie par un projectile mais étant donnée une parabole de déterminer de quelle hauteur il faut laisser tomber un poids pour qu'il parcourt cette parabole. La parabole est définie encore une fois par un de ses points et la tangente en ce point. Mais cette fois, il ne s'agit plus du point particulier où la tangente est de 45°.

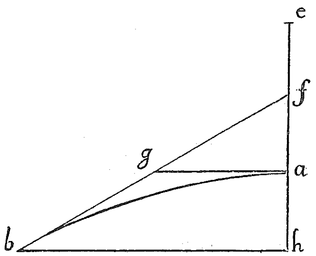


Figure 21.
Illustration de la relation entre *amplitude, sublimité et hauteur*

Soit ab la parabole, hb son amplitude, et he l'axe prolongé sur lequel il s'agit de découvrir la sublimité à partir de laquelle un corps, tombant en chute libre, puis déviant sur une ligne horizontale l'*impeto* acquis en a, décrirait la parabole ab[21].

[20] *Discorsi*, p. 220.
[21] *Discorsi*, p. 226.

Le point f de la tangente est le symétrique de h par rapport au sommet a. La tangente détermine sur la tangente au sommet la grandeur de l'*impeto* en a parce que l'*impeto* au sommet a est la moitié[22] de l'espace bh parcouru si la hauteur fh totale était franchie, et que c'est une propriété de la tangente que d'être coupée en son milieu par la tangente au sommet. Il reste à trouver de quel point il faut descendre pour avoir l'*impeto* correspondant.

> Enfin faisons ae troisième proportionnelle entre fa et ag. Je dis que e est le point cherché[23].

Il a donc

$$\frac{fa}{ag} = \frac{ag}{ae},$$

ce qui peut encore se lire ag est moyenne proportionnelle entre ea et fa. Comme fa est égale à ah, la hauteur, il a obtenu une relation entre la sublimité et la hauteur. La troisième terme est la moitié de l'amplitude bh. La relation supra peut donc aussi s'écrire

$$\frac{\text{Hauteur}}{\textit{sublimité}} = \frac{\textit{sublimité}}{\frac{\text{amplitude}}{2}}.$$

Il énonce comme corollaire :

> La moitié de la base, ou de l'amplitude, de la demi-parabole (c'est-à-dire le quart de l'amplitude de la parabole entière) est moyenne proportionnelle entre sa hauteur et la sublimité d'où un mobile, après descente en chute libre, décrit cette même parabole[24].

Ceci lui permet encore, Proposition VI, de déterminer l'amplitude en connaissant la sublimité et la hauteur.

Le cas particulier de 45° et la symétrie par rapport à 45°

La proposition VII confirme théoriquement un résultat connu des artilleurs.

> Parmi les projectiles qui décrivent des demi-paraboles de même amplitude, un *impeto* plus petit est requis pour celui dont la trajectoire a une amplitude double de la hauteur, que tout autre[25].

Cette parabole intéressante est celle qui a en son point d'arrivée ou plutôt dans le cas des artilleurs son point de départ, une tangente de 45°. Elle est la seule à avoir l'amplitude double de la hauteur, parce que dans ce cas seulement, la hauteur est égale à la distance focale et l'amplitude à la distance entre la directrice et le foyer. Galilée montre sur la Figure 22 que lorsque l'amplitude reste la même mais que la hauteur est plus petite, l'*impeto* nm est plus grand que celui de la parabole à angle de 45° ea, de même lorsque la hauteur devient plus grande, l'*impeto* nm est plus grand que ae. L'évaluation de l'*impeto* composé se fait comme précédemment.

Nous voyons clairement dans cette proposition que la hauteur n'est pas la distance focale mais qu'elle marque la distance à une parallèle quelconque à la directrice.

Galilée poursuit par un corollaire :

[22] La provenance de ce multiple 2 n'est pas très claire chez Galilée. Il fait penser au $\frac{1}{2}$ de la formule $mgh = \frac{1}{2}mv^2$.

[23] *Discorsi*, p. 226.

[24] *Discorsi*, p. 227.

[25] *Discorsi*, p. 227.

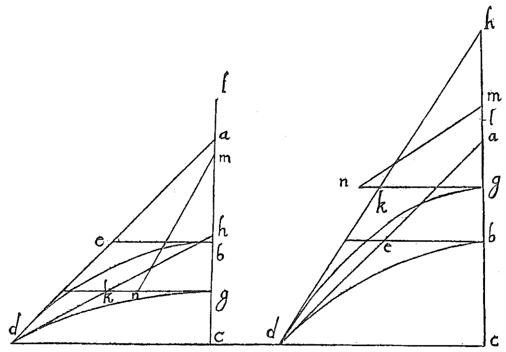


Figure 22.
Cas d'angles supérieur et inférieur à 45°

> D'où il apparaît, par la converse, qu'un *impeto* plus petit est requis pour lancer un projectile, à partir du point d, le long de la demi-parabole db, que le long de toute autre [parabole] dont l'élévation serait plus grande ou plus petite que celle de la demi-parabole bd, représentée par la tangente ad dont l'angle avec la ligne d'horizon est de 45 degrés[26].

Dans la Proposition VIII, Galilée poursuit son raisonnement en montrant une intéressante symétrie par rapport à la tangente à 45°.

> Les amplitudes des paraboles décrites par des projectiles animés du même *impeto*, et tirés selon des élévations inférieures ou supérieures d'une même quantité à l'angle de 45°, sont égales entre elles[27].

La démonstration se fait en déterminant, dans les deux cas, l'*impeto* composé et en montrant géométriquement des égalités de triangles[28].

[26] *Discorsi*, p. 229.

[27] *Discorsi*, p. 229.

[28] La démonstration montre l'égalité de ih et de gf qui n'apparaît pas sur la Figure 23.

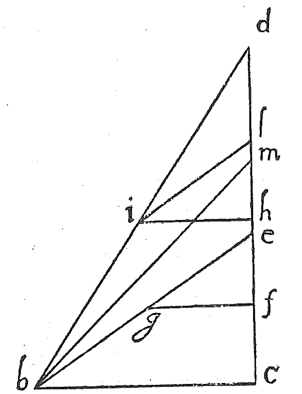


Figure 23.
Symétrie des amplitudes par rapport à 45°

Lien mathématique entre *amplitude, sublimité et hauteur*

La Proposition IX montre que

> Des paraboles, dont les hauteurs et les sublimités sont inversement proportionnelles, ont des amplitudes égales[29].

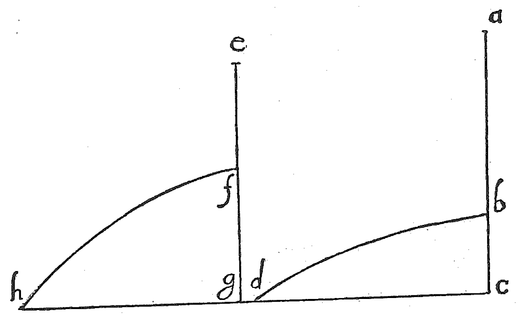


Figure 24. Seizième figure de Galilée

[29] *Discorsi*, p. 230.

Autrement dit si l'on a

$$\frac{h_1}{S_1} = \frac{S_2}{h_2}$$

alors les amplitudes sont les mêmes et il montre à la proposition X que l'*impeto* est aussi égal. La proposition IX ne fait que répéter la relation entre hauteur, sublimité et amplitude trouvée à la proposition V supra. La relecture de la relation est faite en tenant compte de la symétrie qui vient d'être démontrée et elle permet la proposition X. Cette dernière affirme que l'*impeto* en fin de parcours, d'un corps que l'on a laissé tombé sur une trajectoire parabolique d'une certaine hauteur, qu'il appelle la sublimité puisqu'on le laisse descendre le long de sa parabole sur une certaine hauteur, sera égal à l'*impeto* d'un corps en chute libre, verticale descendant une hauteur totale, somme de la sublimité et de la hauteur. Un corollaire résume l'acquis.

> De là suit qu'au point terminal de toutes les demi-paraboles, pour lesquelles la somme de la sublimité et de la hauteur est identique, l'*impeto* est pareillement identique[30].

Ceci n'est qu'un corollaire du théorème d'énergie publié en 1624, par Grégoire de Saint-Vincent dans ses *Thèses de statique*[31].

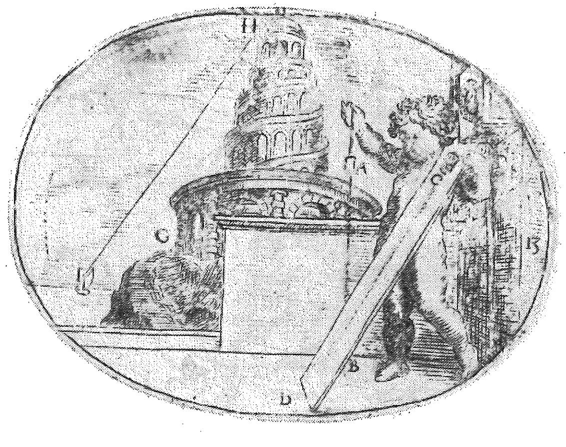


Figure 25.
Grégoire de Saint-Vincent, Thèses de statique (1624)

THEOREME 13

> a. Transportés sur une pente, tout droit ou en oblique, des poids de moments égaux, accumulent des forces égales en parcourant une égale mesure de la distance verticale, qu'ils s'en acquittent par une chute lente ou très prompte, qu'ils croisent l'horizon en une course ou plus oblique ou plus droite, qu'ils soient proches du centre de l'Univers ou qu'ils en soient éloignés d'un vaste intervalle. Et la vertu de ces forces est tout à fait difforme et composée de parts hétérogènes, tel un mouvement dont la durée est faite de pièces et de morceaux.

[30] *Discorsi*, p. 232.
[31] Theoremata mathematica scientiae staticae, Leuven, 1629.

b. Que si la masse descend un sentier en spirale s'enroulant autour d'un cylindre ou d'un cône, il faut calculer les forces à partir d'une mesure de la distance verticale, car tirer ceci de la longueur du chemin, n'est pas une bonne méthode.

a. La vertu que A acquiert en tombant vers B est égale à la vertu de ce même A tombant le long d'un plan incliné de C à D.

b. La spirale de la tour GH et la ligne HI produisent la même vertu parce qu'elles ont la même distance verticale[32].

Galilée continue à analyser les possibilités de sa relation entre sublimité, hauteur et amplitude en demandant :
Étant donné l'impeto et l'amplitude d'une demi-parabole, trouver sa hauteur.

3 Analyse du lien entre *amplitude, sublimité et hauteur*

Dans les trois dernières propositions, Galilée analyse la relation liant la sublimité, la hauteur et l'amplitude d'une nouvelle manière, en établissant des tables. Ainsi dans la proposition XII, il se donne l'*impeto* au point d'arrivée, ou de départ si l'on veut poursuivre le raisonnement en termes d'artillerie, et établit un tableau donnant la tangente à la parabole en ce même point et l'amplitude de la parabole décrite.

Calculer et disposer sous forme de table les amplitudes de toutes les demi-paraboles que décrivent des projectils lancés avec un même *impeto*[33].

Dans la proposition XIII, il complète son tableau en ajoutant pour chaque amplitude trouvée, la hauteur de chaque demi-parabole.

Étant donné les amplitudes des demi-paraboles, réunies dans la table précédente, et tout en conservant le même *impeto*, déterminer la hauteur de chaque demi-parabole.

La proposition XIV résoud de manière tout à fait générale le problème des artilleurs.

Déterminer, pour chaque degré d'élévation, la hauteur et la sublimité des demi-paraboles dont l'amplitude est constante.

Ce qui signifie étant donnée l'amplitude, la distance à la cible, déterminer pour chaque degré d'élévation, c'est-à-dire angle de la tangente au point d'arrivée, ou angle du canon au point de départ, la hauteur et la sublimité. Il détermine les autres grandeurs de la parabole dont la somme donne l'*impeto* c'est-à-dire la "vitesse" à laquelle il faut lancer l'obus.

Conclusion

Ce texte ne peut certainement pas être lu sans autres commentaires par des élèves mais il contient plusieurs idées qui peuvent faire l'objet de cours tant de géométrie sur la parabole que de mécanique sur le mouvement des projectiles. Il faut en tout cas les mettre en garde à propos de l'ambiguïté du mot *impeto*, mais cette mise en garde à elle seule peut probablement faire l'objet d'un cours qui viserait à préciser toutes les notions compatibles avec l'*impeto* galiléen. De nombreux historiens s'y sont employés.

[32]Cf. P. Radelet-de Grave, *Relativité galiléenne et lois de conservation,* "Revue des Questions scientifiques", Tome 170, 1999, N3, pp. 209-261

[33]*Discorsi*, p. 233.

DOSSIER 3, RÉUNI PAR DIDIER BESSOT

Ellipses conique et cylindrique chez Francesco Maurolico (1494 - 1575)

Abstract

Dans un appendice de ses *Grammaticorum rudimentorum libelli sex*, publiés en 1528, Francesco Maurolico annonce un vaste programme de publications et d'études de grandes œuvres de la mathématique classique grecque et médiévale; il cite les noms d'Euclide, Archimède, Ménélaüs, Théodose, Ptolémée, Boèce et Jordanus et évoque les travaux d'autres mathématiciens très pénétrants (*"acutissimi mathematici"*).

En effet, dans la première moitié des années 1530, Maurolico rédige un nombre important d'ouvrages présentés comme autant de versions latines de traités de la mathématique grecque ou médiévale, dont des *Éléments* d'Euclide, la *Quadrature de la parabole, la Mesure du cercle* et le second livre de *la Sphère et le Cylindre* d'Archimède, *les Sphères mobiles* et *Du lever et du coucher des étoiles ou des Phénomènes* d'Autolycos, *les Données arithmétiques* de Jordanus ainsi que des traités de Théodose, Héron et Hippocrate, et le traité de Serenus *De la section du cylindre.* Ni le nom d'Apollonios, ni la mention d'une œuvre générale sur les sections coniques n'apparaissent ni dans le programme de 1528 ni dans la liste des travaux réalisés de 1532 à 1535.

Ses travaux s'inscrivent dans le vaste mouvement de (re)découverte des textes de l'Antiquité classique que l'Europe occidentale connaît depuis le XIV[ème] et surtout le XV[ème] siècle, en liaison avec l'accroissement des échanges commerciaux et intellectuels dont la Méditerranée est la zone principale. L'Italie est au premier rang dans les relations avec l'Orient byzantin en raison des liens anciens et souvent chaotiques que plusieurs cités marchandes comme Gênes ou Venise entretiennent avec Constantinople. Dans la première moitié du XV[ème] siècle, les relations italo-byzantines connurent un temps fort dans la tenue du concile de Florence (1438-39) où fut tentée et presque réussie l'unification des Églises d'Orient et d'Occident; en 1453, Byzance entrait dans l'empire musulman. Tous ces événements ont favorisé l'introduction des manuscrits conservés à Byzance vers l'Italie.

Des sources nouvelles, par rapport à celles provenant du monde musulman, et probablement plus sûres étaient ainsi mises à la disposition des érudits de la Renaissance italienne. Toutefois leur découverte, leur étude restèrent lentes et progressives et leur circulation encore limitée. En outre, Maurolico réside à Messine, loin des principaux centres intellectuels italiens de l'époque que sont Florence, Venise puis Rome. Ainsi il est quasi certain que le savant sicilien ne connaissait pas, dans la période 1530-1535, de manuscrits grecs ou latins des traités d'Archimède ou d'Apollonios; de plus Maurolico ne mentionne dans ses textes de cette époque aucun ouvrage antérieur dont il se serait servi. Selon Clagett, les sources utilisées par Maurolico, notamment dans ses tentatives de reconstitution du corpus archimédien, seraient constituées d'ouvrages médiévaux reprenant des parties de traités de l'Antiquité, ayant eux-mêmes transités par le monde musulman.

Cependant, Clagett et d'autres historiens des mathématiques s'accordent sur le fait que Maurolico disposait très certainement en 1534 au moins d'une source plus récente dans l'ouvrage rédigé par Giorgio Valla et publié en 1501 sous le titre *De expetendis et fugiendis rebus opus*; cet ouvrage, consacré principalement à l'arithmétique, à la géométrie, à la musique, à l'astronomie et à l'astrologie médicale, contenait au livre XIII un chapitre IV intitulé *De cylindrica sectione* qui constitue une adaptation en latin, plus qu'une traduction, d'une partie des traités de Serenus sur la section du cylindre et la section du cône. Le travail de Valla s'est appuyé sur la consultation d'un manuscrit contenant les quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonios et les deux traités susmentionnés de Serenus, manuscrit acquis à Byzance et transporté en Italie en 1427 par le secrétaire de la légation vénitienne à Byzance, l'humaniste philologue Francesco Filelfo.

La première véritable traduction des traités de Serenus à partir de ce manuscrit sera l'œuvre de Federico Commandino qui la publiera en 1566 à la suite de sa traduction des quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonios; le travail de Maurolico sur la section du cylindre d'après Serenus se situe précisément à mi-chemin entre ceux de Valla et de Commandino.

1. Les *Sereni cylindricorum libelli duo* (1534) par Maurolico

A. Le manuscrit autographe et son édition moderne

Le manuscrit autographe contenant les *Sereni cylindricorum libelli duo*, datés du 16 août 1534, est conservé à la Bibliothèque Nationale (Paris), département des manuscrits, sous la cote *Fonds latin 7465*. Constitué de trente-deux feuillets reliés mais sans couverture, d'un format petit in-4°, il contient trois autres courts traités autographes de Maurolico : *Archimedis de circuli dimensione libellus* (f^{ii} 21v-28v), *Hippocratis tetragonismus* (f° 29r etv) et *Maurolycii tetragonismus* (f^{ii} 29v-31r); les *Sereni cylindricorum libelli duo* en forment la plus grande partie (f^{ii} 1r-20r)[1].

Ce manuscrit est resté inédit jusqu'à la publication en 1995 d'une édition critique par les soins de Roberta Tassora dans le *Bolletino di Stroria delle Scienze Matematiche*[2]. Cette édition critique, après une introduction sur Maurolico et le contexte général de ses travaux dans la période considérée (p. 135-142), donne une description détaillée du manuscrit (p. 143-153), étudie la question des sources possibles pour cette œuvre de Maurolico (p. 153-167), décrit le contenu mathématique du traité (p. 167-187) en consacrant un paragraphe particulier au problème étudié dans le second livre, qui est l'objet principal des extraits proposés à la lecture de l'atelier (p. 186, 187) et s'achève sur une partie consacrée à la question de l'identification d'un ouvrage cité en référence dans le traité de Maurolico à l'appui de plusieurs démonstrations sous le titre d'*Elementa conicorum*. L'analyse critique est suivie de trois appendices : le premier donne en trois pages une description rapide du contenu du manuscrit folio par folio, le deuxième, le plus important (40 pages), comporte le texte du manuscrit établi et annoté par R. Tassora et le troisième reproduit le chapitre *De cylindrica sectione* de l'ouvrage de Giorgio Valla susmentionné.

B. Description du contenu du manuscrit

Le traité de Maurolico est divisé en deux livres de taille très inégale; le premier comprend dix-huit définitions, réparties en deux endroits, et trente-quatre propositions tandis que le second n'en comprend que sept; certaines propositions sont complétées de corollaires et de scholies.

Le premier livre étudie des coupes planes d'un cylindre circulaire, puis quelques propriétés de la section elliptique qui permettent d'en établir une caractérisation sous forme d'une proportion liant des aires construites sur des éléments adéquats de l'ellipse; ce résultat permet au sein de l'étude menée dans les six dernières propositions de ce premier livre des sections planes d'un cylindre à base elliptique, de montrer que ces sections sont des ellipses de même genre que les bases.

Le second livre traite d'un problème voisin du précédent puisqu'il est consacré à la comparaison entre l'ellipse conique et l'ellipse cylindrique; c'est de l'examen de cette question que traite la seconde partie du présent article.

> Les tableaux A et B ci-dessous permettent d'engager une étude comparée des textes de Serenus, Valla et Maurolico. Leur examen montre une forte corrélation entre les travaux de Serenus et de Valla, même si ce dernier ne propose qu'une partie des résultats développés par Serenus; les huit premières propositions sont identiques et

[1] Pour une étude matérielle plus détaillée du manuscrit, consulter [3] et [4] (cf. bibliographie en fin d'article).

[2] Voir [3] dans la bibliographie en fin d'article.

les suivantes, dans le texte de Valla, sont ordonnées comme leurs correspondantes chez Serenus. En revanche, dès la quatrième proposition, le traité de Maurolico s'écarte notablement de ceux de ses prédécesseurs autant par le contenu des propositions que par leur organisation. Ce constat permet d'avancer que, plus qu'une reprise de la publication de Valla, le travail de Maurolico consiste en une reconstruction du traité de Serenus, qui lui restait inconnu, appuyée sur l'ouvrage de Valla (et peut-être sur d'autres sources encore non identifiées) mais surtout créée en grande partie par Maurolico, en particulier sur l'étude des cylindres à base elliptique et sur la comparaison entre ellipse conique et ellipse cylindrique.

Le style d'exposition de Maurolico est, quant à lui, tout à fait conforme au modèle grec classique; chaque proposition est présentée selon le plan déjà en vigueur dans les *Éléments* d'Euclide : l'énoncé (*protasis*) donne dans les termes les plus généraux les hypothèses (*dedomena*) et la conclusion (*zetoumenon*); les données et les hypothèses sont reprises en spécifiant, par des lettres qui les nomment, les divers éléments en jeu au cours de l'exposition (*ekthesis*) suivie de la détermination (*diorismos*) qui reprend avec les mêmes notations la conclusion attendue; si la proposition est un problème ou construction, intervient à ce stade la construction proprement dite (*kataskene*); dans tous les cas, suit la démonstration (*apodeixis*), et l'exposé s'achève par la conclusion (*sumperasma*) dans les termes de l'énoncé, bien que le plus souvent cette ultime partie soit écourtée.

Tableau A.

Mauricolo	Valla	Serenus (Ver Eecke)
Livre I		
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	-	-
5	-	-
6	-	∼11
7	-	-
8	7	7
9	8	8
Cor 9	-	∼9
10	-	∼12
11	-	-
12	-	-
13	5	5
14	-	-
15	4	4
16	6	6
17	-	-
18	-	-
19	-	-
20	∼11	∼15
21	-	-
22	-	-
23	-	-
24	-	-
25	-	-
26	-	-
27	-	-
28	-	-
29	-	-
30	-	-
31	-	-
32	-	-
33	-	-
34	-	-

Tableau B.

Serenus (Ver Eecke)	Valla	Mauricolo
1	1	I 1
2	2	2
3	3	3
4	4	15
5	5	13
6	6	16
7	7	8
8	8	9
9	-	Cor 9
(10)	-	-
11	-	∼6
12	-	∼10
13	9	-
14	10	-
15	11	∼20
16	12	-
17	13	-
18	14	-
19	-	-
20	-	-
21	-	II ∼3
22	-	∼4
23	-	-
24	-	-
25	15	6
26	16	7
27	-	-
28	-	-
29	-	-
30	-	-
31	-	-
32	-	-
33	-	-

Livre II		
1	-	-
2	-	-
3	-	~21
4	-	~22
5	-	-
6	15	25
7	16	26

Légende des tableaux :
le signe ~ signifie une correspondance approximative entre les propositions.
le signe - signifie l'absence de proposition correspondante.

2. Identification entre ellipse conique et ellipse cylindrique chez Maurolico

Le problème de l'identité de genre des ellipses résultant de coupes planes de cône et de cylindre a déjà été abordé et résolu dans l'Antiquité. La proposition 9 du traité *Sur les conoïdes et les sphéroïdes* d'Archimède énonce et démontre :

> Étant donnés une ellipse *[conique]* et un segment de droite issu du centre de l'ellipse, non perpendiculaire *[au plan de l'ellipse]* mais situé dans le plan perpendiculaire au plan de l'ellipse et passant par l'un des diamètres, il est possible de trouver un cylindre ayant son axe sur la même droite à laquelle appartient le segment érigé et tel que sa surface contienne l'ellipse donnée.[3]

Archimède n'étudie pas la situation réciproque comme le fera Serenus; la proposition 20 de son *Livre sur la section du cylindre* donne :

> Je dis donc qu'il est possible de démontrer qu'un cylindre et un cône soient coupés conjointement par une même ellipse.[4]

tandis que les propositions 21 et 22 proposent les deux constructions réciproques suivantes :

> Étant donnés un cône et une ellipse dans celui-ci, trouver un cylindre qui soit coupé par cette même ellipse du cône.[5]

et

> Étant donnés un cylindre et une ellipse dans celui-ci, trouver un cône qui soit coupé par cette même ellipse du cylindre.[6]

Les propositions 23, 24 et 26 proposent des variantes de telles constructions.

[3]Archimède, *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, texte établi et traduit par Ch. Mugler. Paris : Les Belles Lettres, 1970, p. 176, 177.

[4]Serenus d'Antinoë, *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône*, traduction et notes par Paul Ver Eecke. Paris : Albert Blanchard, 1969, p. 33.

[5]Serenus d'Antinoë, *op. cit.*, p. 37.

[6]Serenus d'Antinoë, *op. cit.*, p. 38.

Si donc le problème de l'identification des deux genres d'ellipses avait reçu des solutions plusieurs siècles avant l'époque de Maurolico, celui-ci n'avait pas connaissance dans la période 1530-1535 des résultats rappelés ci-dessus. En effet, il ne semble disposer que de l'adaptation faite par Valla du traité de Serenus et cette adaptation ne comporte pas de propositions correspondant aux propositions 20, 21, 22, 23 et 24 de Serenus; seule la proposition 26[7] de Serenus, plus spécialisée que les précédentes, trouve un correspondant dans la proposition 16[8] de Valla; Maurolico reprendra cette proposition au numéro 7 du livre II, après en avoir donné sa réciproque à la proposition 5. Toute la réflexion du savant sicilien sur la question de l'identification des deux genres d'ellipses pourrait donc trouver son point de départ dans la seule proposition 16 de Valla et serait donc largement de son propre fait.

Pour suivre le développement de cette réflexion, objet du livre II, il est utile de donner en préalables des définitions et certains résultats établis par Maurolico au livre I.

A. Définitions et caractérisations de l'ellipse cylindrique

Si Maurolico étudie des coupes de cylindres aussi bien scalènes que droits, ces coupes ne sont cependant pas quelconques. Si le plan de coupe du cylindre est parallèle à l'axe de ce dernier, la coupe est un parallélogramme; ces cas simples sont étudiés par Maurolico dès le début du livre I (propositions 2 à 7). L'autre genre de coupe, qui produit le cas le plus intéressant d'une figure non rectiligne, est précisée par les définitions 9 à 11. Le plan de coupe elliptique est déterminé en deux temps : Maurolico introduit d'abord un plan passant par l'axe et perpendiculaire aux plans des bases circulaires du cylindre, appelé *primum planum* puis plus loin *primarium planum*; ce plan, qui sera nommé ici **plan primaire** est unique dans un cône scalène et est déterminé par l'axe ab et la perpendiculaire as au plan d'une des bases du cylindre (Figure 1). Le plan de coupe est alors un plan, dit **secondaire**, perpendiculaire au plan primaire; l'intersection des plans primaire et secondaire, gh, est le premier diamètre de la section tandis que la droite kl qui dans le plan secondaire est perpendiculaire à gh et la partage par moitiés est appelée second diamètre. Enfin si ces deux diamètres sont de longueur différente, la section est appelée ellipse[9].

[7]Cette proposition énonce : "Étant donné un cylindre coupé par une ellipse, établir sur la même base du cylindre et sous la même hauteur, un cône coupé par le même plan, déterminant une ellipse semblable à l'ellipse du cylindre". Serenus d'Antinoë, *op. cit.*, p. 44.

[8]Le texte de cette proposition reprend mot pour mot la proposition de Serenus précédemment citée : "Cylindro dato secto ellpisi conum constituere in eadem basi cylindri qui sit sub eadem altitudine et eodem plano sectus faciensque similem ellipsim cylindri ellipsi."

[9]Dans le cas où les deux diamètres sont de même longueur, ce qui se produit lorsque le plan secondaire est soit parallèle aux plans des bases, soit antiparallèle à ces plans, la section est un cercle; ces cas sont étudiés respectivement aux propositions 13 et 16 du livre I.

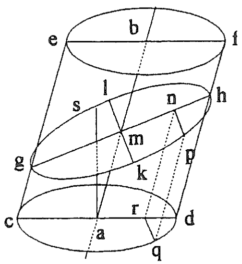


Figure 1

ab est l'axe du cylindre.
as est la perpendiculaire au plan de base cd en a.
$cdfe$ est le plan primaire.
Le plan de coupe $gkhl$ est perpendiculaire au plan $cdfe$; l'intersection gh de ces deux plans est le premier diamètre; sa perpendiculaire dans $gkhl$ en m est le second diamètre. Contrairement aux premières apparences le premier diamètre n'est pas nécessairement plus grand que le second; cela dépend de l'inclinaison du plan secondaire, donc de gh, par rapport aux parallèles ce et df.
m est le centre de la section.
$mk = ml = ac$, rayon des bases.
np est une droite menée **de manière ordonnée** sur le diamètre gh.

Ce choix particulier du plan de coupe ne permet un examen général des coupes de cylindres mais présente l'avantage de simplifier les conditions de l'étude faite : en effet, les diamètres ainsi définis, qui jouent un grand rôle dans cette étude, sont en fait les axes (de symétrie orthogonale) de la section et sont donc perpendiculaires entre eux; en outre, le second diamètre est alors de même longueur que le diamètre des bases du cylindre, ce qu'établit le corollaire de la proposition 14. Maurolico précise aussi sa définition de la similitude de deux sections en ces termes :

> Similes sectiones sunt, quarum diametris respondentibus ad eandem quotiescumque sectis, et a punctis divisionum structim eductis ad periferiam, eductæ sunt sicut diametri.[10]

Ainsi, les sections elliptiques $abcd$ et $fghk$ (Figure 2) sont semblables si, leurs diamètres de même genre (par exemple leurs premiers diamètres) étant partagés respectivement aux points m et n dans un même rapport et des droites étant menées de manière ordonnée (*structim* c'est-à-dire parallèlement aux autres diamètres bd et gk) depuis les points de division m et n jusqu'aux circonférences en p et q, alors le rapport des droites mp et nq est le même que celui des diamètres à partir desquels ces droites sont menées. En particulier, dans des sections semblables, les seconds diamètres sont proportionnels aux premiers.

[10]Cf. bibliographie, [3] Tassora, p. 203. Les citations ultérieures du texte de Maurolico seront données dans une traduction française du texte latin établi par R. Tassora.

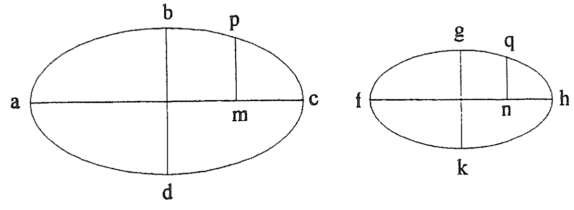


Figure 2

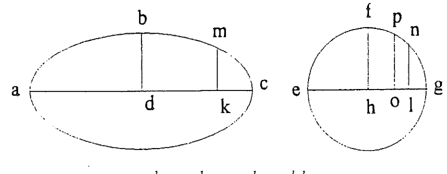
Les sections $abcd$ et $fghk$ sont semblables
si et seulement si
pour tout point m sur ac, $\frac{am}{mc} = \frac{fn}{nh} \Rightarrow \frac{mp}{nq} = \frac{ac}{fh}$

Vers la moitié du premier livre, Maurolico établit des propriétés de l'ellipse cylindrique qui peuvent être considérées comme caractéristiques de cette courbe, même si Maurolico n'énonce et ne démontre qu'un sens de l'équivalence, à savoir : "dans une ellipse, telle propriété est réalisée".

La proposition 17 met en relation les cordes d'une ellipse parallèles au second diamètre avec celles d'un cercle, en ces termes :

> Si le premier diamètre d'une ellipse et le diamètre d'un cercle sont partagés dans le même rapport et que des droites sont tirées par les points de division perpendiculairement aux diamètres vers les circonférences, la droite tirée dans l'ellipse sera à la droite tirée dans le cercle comme le second diamètre de l'ellipse est au diamètre du cercle.
>
> Réciproquement si le second diamètre de l'ellipse est au diamètre du cercle comme la droite tirée dans l'ellipse est à la droite tirée dans le cercle, les droites tirées partagent les diamètres dans le même rapport.[11]

Maurolico précise les termes de cette proposition dans l'exposition :
étant donnés une ellipse (cylindrique) abc de premier diamètre ac et de second demi diamètre bd et un cercle efg de centre h et de diamètre eg (Figure 3), les points k et l partagent respectivement les diamètres ac et eg dans le même rapport; les droites perpendiculaires aux diamètres respectifs par k et l coupent l'ellipse en m et le cercle en n. Alors le rapport de la longueur km la longueur ln est égal à celui du demi diamètre bd au rayon fh.



$\frac{ak}{kc} = \frac{el}{lg} \Rightarrow \frac{mk}{nl} = \frac{bd}{fh}$

Figure 3

[11]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 218.

La démonstration est obtenue en particularisant le cercle dont le diamètre est pris égal au second diamètre de l'ellipse, ce qui n'ôte en fait aucune généralité au raisonnement puisque hypothèses et conclusion concernent des rapports de longueurs et non des longueurs en elles-mêmes; ce cercle est donc cercle de base du cylindre (corollaire de la proposition 14). D'après la proposition 14, les diamètres de l'ellipse et du cercle de base étant divisés dans le même rapport, les droites menées des points de partage vers les circonférences de manière ordonnée[12] sont "égales", comme np et rq dans la Figure 1 et comme ici, mk et nl.

La réciproque énoncée par Maurolico est prouvée en considérant dans le cercle une droite ordonnée po vérifiant $\frac{mk}{po} = \frac{bd}{fh}$ et $eo \neq el$; puis en montrant l'égalité des longueurs po et nl, il survient une contradiction donc o et l sont confondus. En revanche, Maurolico ne propose pas la réciproque de l'ensemble de la propriété, qui s'énoncerait en substance et en termes modernes : les segments ac et bd et le cercle efg de centre h étant donnés comme précédemment, les points k et l partageant ac et eg dans le même rapport, le point m défini par $\frac{mk}{nl} = \frac{bd}{fh}$ décrit une ellipse de premier diamètre ac et de second demi-diamètre bd quand k parcourt ac.

Le résultat prouvé par Maurolico, joint à la définition donnée des ellipses semblables, permet de montrer que deux ellipses (cylindriques) dont les paires de diamètres sont proportionnelles sont semblables[13].

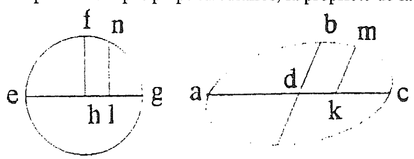
Si la proposition 18 n'est que l'homologue de la précédente, obtenue en inversant les rôles des premier et second diamètres, la proposition 21 établit, cette fois encore sans réciproque, une caractérisation de l'ellipse cylindrique interne à l'ellipse, sans référence à un cercle :

> Si on mène de manière ordonnée des droites jumelles de la circonférence de la section vers l'un ou l'autre diamètre, les carrés de ces droites seront proportionnels aux rectangles construits sous les segments du diamètre.[14]

énoncé dont l'exposition en termes spécifiés donne : deux points k et s étant pris sur l'un des deux diamètres, ac dans la Figure 4, et des droites étant menées des ces points vers la circonférence de manière ordonnée, c'est-à-dire parallèlement à l'autre diamètre, jusqu'aux points m et t, le rapport des carrés de km et de st est égal au rapport des rectangles ak, ac et as, sc.

La démonstration est obtenue par comparaison avec les figures analogues établies dans un cercle : les points k et s étant pris sur le diamètre ac, un diamètre eg d'un cercle efg est partagé aux points o et l dans des rapports égaux à ceux dans lesquels k et s partagent ac; à partir de ces points de division, dans l'ellipse et le cercle, sont menées des droites ordonnées atteignant les circonférences en m et t d'une part et p et n d'autre part. Il s'ensuit les proportions suivantes :

[12]Cette expression, d'usage permanent dans l'étude des coniques, signifie que ces droites, passant par un point d'un diamètre, sont menées parallèlement au diamètre conjugué. Ici, en raison du choix particulier du plan de coupe, les diamètres utilisés pour l'ellipse sont perpendiculaires. Il faut remarquer que si les diamètres conjugués de l'ellipse ne sont pas perpendiculaires, la propriété de la proposition 17 reste valide.

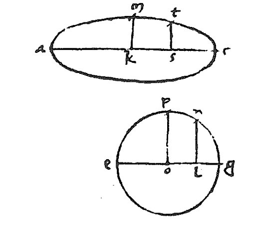


ac et bd étant des diamètres conjugués quelconques de l'ellipse, la propriété suivante est vraie :
abc est une ellipse $\iff \left[\frac{ak}{kc} = \frac{el}{lg} \Rightarrow \frac{mk}{nl} = \frac{bd}{fh}\right]$.

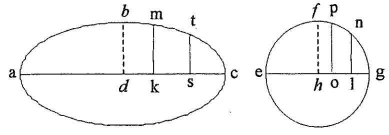
[13]Ce résultat apparaît à la proposition 23, [3] Tassora, *op. cit.*, p. 223.

[14]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 221.

$\frac{ak}{kc} = \frac{eo}{og}$ et $\frac{as}{sc} = \frac{el}{lg}$ par définition des points o et l et $\frac{mk}{po} = \frac{bd}{fh}$ et $\frac{ts}{nl} = \frac{bd}{fh}$ par application de la proposition 17 (ou 18 si k et s sont pris sur le second diamètre).



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 10r.



$$\frac{mk^2}{ts^2} = \frac{ak \times kc}{as \times sc}$$

Figure 4

Les deux dernières proportions donnent alors : $\frac{mk}{po} = \frac{ts}{nl}$ puis $\frac{mk}{ts} = \frac{po}{nl}$ puis $\frac{mk^2}{ts^2} = \frac{po^2}{nl^2}$. Or, d'après la proposition 16 du sixième Élément d'Euclide, $po^2 = eo \times og$ et $nl^2 = el \times lg$ donc $\frac{mk^2}{ts^2} = \frac{eo \times og}{el \times lg}$. Enfin, d'après les proportions définissant les points o et l à partir des points k et s, le rapport des rectangles $eo \times og$ et $el \times lg$ est égal à celui des rectangles $ak \times kc$ et $as \times sc$[15]. Donc $\frac{mk^2}{ts^2} = \frac{ak \times kc}{as \times sc}$ ce qui achève la démonstration.

Cette proposition 21 est suivie d'un corollaire obtenu en particularisant l'un des points de division, comme s, au centre d de l'ellipse :

> Donc il est manifeste que le carré d'un demi diamètre de la section est au carré de la perpendiculaire à l'autre diamètre comme le carré sur l'autre demi diamètre est au rectangle construit sous les segments de l'autre demi diamètre.[16]

ce qui, en notations modernes, se traduit par : $\frac{mk^2}{bd^2} = \frac{ak \times kc}{ad^2}$ et peut aussi être énoncé, ce que Maurolico ne fait pas : $\frac{mk^2}{ak \times kc} = \frac{bd^2}{ad^2} = \left(\frac{bd}{ad}\right)^2$, ou en style plus "littéraire" : le rapport du carré (mkQP dans la Figure 5) d'une droite élevée de manière ordonnée (mk) sur un diamètre (ac) au rectangle des segments découpés sur ce diamètre ($ak \times kc$ ou akLN sur la Figure 5) est constamment égal au rapport des carrés des diamètres[17].

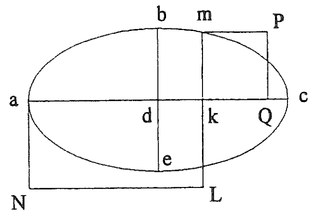
[15]Cette dernière proportion était sans doute pour Maurolico et ses contemporains quasi évidente, rompus qu'ils étaient au maniement de la théorie des proportions telle qu'elle est exposée au cinquième Élément d'Euclide. Pour un lecteur d'aujourd'hui, plus accoutumé au calcul algébrique qu'à la théorie des proportions, elle peut demander une justification comme, par exemple :

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{ak}{kc} = \frac{eo}{og} \Rightarrow \frac{ak}{kc} + 1 = \frac{eo}{og} + 1 \Rightarrow \frac{ak+kc}{kc} = \frac{eo+og}{og} & \Rightarrow & \frac{ac}{kc} = \frac{eg}{og} (*) \\ \text{et pareillement } \frac{as}{sc} = \frac{el}{lg} \Rightarrow \frac{ac}{sc} = \frac{eg}{lg} & \Rightarrow & \frac{sc}{ac} = \frac{lg}{eg} (**) \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \frac{sc}{kc} = \frac{lg}{og} (\$) \text{ par produit de (*) et (**).}$$

De même, en remplaçant c par a et g par e, $\frac{as}{ak} = \frac{el}{eo}$ (\$\$).
Puis, par produit de (\$) et (\$\$), $\frac{as.sc}{ak.kc} = \frac{el.lg}{eo.og}$ donc enfin $\frac{ak.kc}{as.sc} = \frac{eo.og}{el.lg}$.

[16]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 222.

[17]Les réciproques de la proposition 21 et de son corollaire, que Maurolico n'étudie pas, sont valides et complètent des caractérisations de l'ellipse cylindrique qui sont utilisées au livre II. En outre, les mêmes résultats (directs et réciproques) demeurent lorsque les diamètres utilisés pour les établir ne sont plus perpendiculaires mais seulement conjugués (cf. note 12).



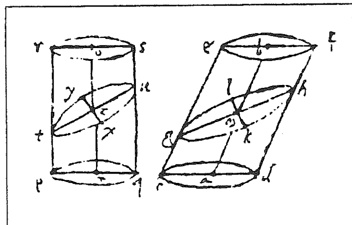
$$\frac{\text{Aire(mkQP)}}{\text{Aire(akLN)}} = \frac{mk^2}{ak \times kc} = \left(\frac{bd}{ad}\right)^2 = \left(\frac{be}{ac}\right)^2$$

Figure 5

Le dernier résultat utile à la lecture des extraits du livre II proposés plus loin est une construction décrite à la proposition 28 :

> Étant proposés deux cylindres dont l'un est coupé suivant une ellipse, couper l'autre par un plan secondaire de sorte que la section soit une ellipse semblable.[18]

Deux cylindres étant donnés, comme $(pqsr)$ et $(cdfe)$, de plans primaires respectifs $pqsr$ et $cdfe$, le premier est coupé par un plan secondaire en l'ellipse de premier diamètre tu (Figure 6). Il faut couper le cylindre $(cdfe)$ par un plan secondaire de façon que la section soit une ellipse semblable à celle du premier cylindre.



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 12r.

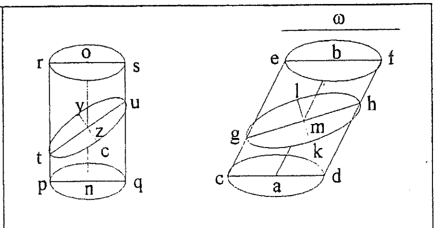


Figure 6

Le point principal de cette construction consiste à déterminer une droite ω, quatrième proportionnelle du petit diamètre de l'ellipse $tyuz$, de son grand diamètre et de cd, diamètre de la base du second cylindre; la ligne ω vérifie donc $\frac{\omega}{cd} = \frac{\text{grand diamètre de } tyuz}{\text{petit diamètre de } tyuz}$ et est ainsi plus grande que cd. Dans le parallélogramme $cdfe$, il est alors facile d'insérer entre les parallèles ce et df une ligne gh égale à ω[19]. Le plan secondaire, de coupe du cylindre $(cdfe)$, est le plan perpendiculaire au plan primaire $cdfe$ et contenant la droite gh. L'ellipse ainsi obtenue, $glhk$, a pour premier et plus grand diamètre gh et pour second et plus petit diamètre kl égal à cd : ces diamètres sont donc proportionnels par constrution à ceux de l'ellipse $tyuz$, par conséquent l'ellipse $glhk$ est semblable à l'ellipse $tyuz$, d'après la proposition 23.

B. Ellipse conique et ellipse cylindrique sont-elles de même genre ?

Les sept propositions qui constituent le livre II du traité de Maurolico sont consacrées à

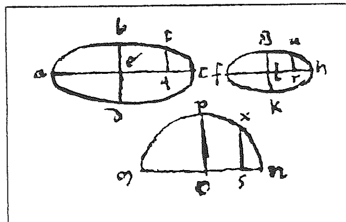
[18]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 227.

[19]Cette construction élémentaire est exposée à la proposition 27 : *"Insérer entre deux parallèles proposées une ligne droite égale à une ligne donnée."* Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 226.

donner, sous différentes formes, une réponse affirmative à cette question. Mise à part la proposition 6 qui traite d'une question relevant de l'"algèbre" des grandeurs[20] à titre de lemme pour la proposition 7, les six autres propositions sont organisées par paires : 1 et 2, 3 et 4 puis 5 et 7.

La première proposition montre la similitude d'une ellipse conique et d'une ellipse cylindrique dont les paires de diamètres sont proportionnelles :

> Une ellipse conique et une ellipse cylindrique dont les grands diamètres sont proportionnels aux petits sont semblables entre elles.
>
> *Soit une ellipse conique* abcd *de diamètres* ac *et* bd *et de centre* e, *ainsi qu'une ellipse cylindrique* fghk *de diamètres* fh *et* gk *et de centre* l. *Et que le diamètre* bd *soit au diamètre* gk *comme le diamètre* ac *est au diamètre* fh. [Figure 7]
>
> *Je dis que les ellipses* abc *et* fgh *sont semblables.*
>
> *En effet qu'on décrive sur une droite* mn, *librement choisie et partagée en deux parties au point* o, *un demi-cercle* mpn *et qu'on mène le demi diamètre* op *perpendiculaire à* mn.
>
> *Ensuite qu'on partage les diamètres* q, r *et* s *dans le même rapport aux points* q, r *et* s *et qu'on élève des droites* qt, ru *et* sx *perpendiculairement aux diamètres jusqu'aux circonférences. D'après les propositions 61 et 64 du premier livre des Coniques,* tq *sera à* xs *comme* be *à* po, *par permutation* po *sera à* xs *comme* be *à* tq. *Mais d'après les propositions 17 ou 18 du livre précédent,* gl *est à* ur *comme* po *est à* xs, *donc* gl *sera à* ur *comme* be *est à* tq. *Et je pourrai montrer la même chose chaque fois que les diamètres* ac *et* fh *sont partagés dans le même rapport. En vertu de quoi, d'après la définition des sections semblables, les sections* abc *et* fgh *sont semblables, ce qui est proposé.*



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 15v.

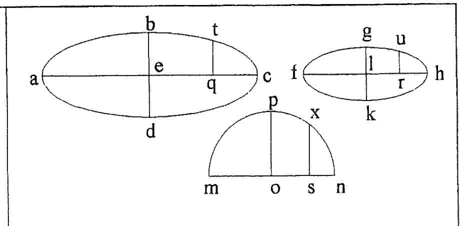


Figure 7.

> *Ou encore, d'après la note suivant la proposition 59 du premier livre des Éléments des Coniques, ou celle suivant la proposition 64, le carré de* be *est au carré de* tq *comme le carré de* ae *est au rectangle* aq qc *et d'après la proposition 21 du précédent livre, le carré de* gl *est au carré de* ur *comme le carré de* fl *est au rectangle* fr rh. *Mais le carré de* ae *est au rectangle* aq qc *comme le carré de* fl *est au rectangle* fr rh *puisque, bien sûr, de tels rapports sont composés des rapports des côtés d'après la proposition 24 du sixième Élément d'Euclide et les rapports des côtés sont les mêmes à cause du partage proportionnel des diamètres* ac *et* fh. *Alors, d'après la proposition 11 du cinquième Élément* [d'Euclide], *le carré de* gl *est au carré de* ur *comme le carré de* be *est au carré de* tq, *et c'est pourquoi* gl *est à* ur *comme* be *est à* tq. *En conséquence le même résultat advient chaque fois que les diamètres* ac *et* fh *sont partagés dans le même rapport. Les diamètres* ac *et*

[20]Cette expression : "algèbre" des grandeurs, désigne ici, de façon quelque peu anachronique et abusive mais commode, la matière dont traite par exemple le deuxième *Élément* d'Euclide.

fh sont proportionnels aux diamètres bd *et* gk *et à nouveau d'après la définition des sections semblables, les sections* abc *et* fgh, *l'une conique l'autre cylindrique, sont semblables, ce qu'il fallait démontrer.*[21]

Maurolico donne deux démonstrations de cette proposition, fondées toutes deux sur l'identification de caractérisations de l'ellipse conique et de l'ellipse cylindrique : pour ce qui concerne la section du cylindre, la première démonstration utilise la caractérisation des propositions 17 ou 18 du livre I, tandis que la seconde se réfère à celle de la proposition 21.

En utilisant les notations de la Figure 7, les hypothèses peuvent être traduites en termes modernes ainsi : $\frac{bd}{gk} = \frac{ac}{fh}$, ou de manière équivalente, $\frac{be}{gl} = \frac{ac}{fh}$.

Le première démonstration introduit un demi cercle de diamètre mn, de centre o et de rayon op perpendiculaire à mn. Les trois diamètres ac, fk et mn sont partagés dans un même rapport respectivement en q, r et s, points à partir desquels sont menées des droites ordonnées vers les circonférences, respectivement qt, ru et sx. Maurolico invoque alors un résultat sur l'ellipse conique, objet des propositions 61 et 64 du premier livre d'un ouvrage sur les coniques[22], qui donne la proportion suivante :

$\frac{tq}{xs} = \frac{be}{po}$, puis par permutation, $\frac{po}{xs} = \frac{be}{tq}$, le premier rapport étant pris dans le cercle et le second dans l'ellipse conique. Puis, en vertu des propositions 17 ou 18 du livre I de son traité (cf. *supra*), Maurolico obtient entre l'ellipse cylindrique et le cercle la proportion :

$\frac{gl}{ur} = \frac{po}{xs}$ qui permet de déduire la proportion suivante entre les deux ellipses : $\frac{gl}{ur} = \frac{be}{tq}$.

Cette proportion restant vraie quel que soit le choix des points q et r divisant les diamètres ac et fh dans le même rapport, il s'ensuit pour Maurolico la similitude des deux ellipses. En effet de $\frac{gl}{ur} = \frac{be}{tq}$ se déduit $\frac{tq}{ur} = \frac{be}{gl}$, or $\frac{be}{gl} = \frac{ac}{fh}$ donc $\frac{tq}{ur} = \frac{ac}{fh}$, chaque fois que $\frac{aq}{qc} = \frac{fr}{rh}$, ce qui correspond à la définition des sections semblables donnée au début du traité.

La seconde démonstration met en œuvre une autre caractérisation de l'ellipse conique, provenant de notes des propositions 59 ou 64 du premier livre du même ouvrage sur les coniques, donnant la proportion attachée à la seule ellipse conique :

$\frac{be^2}{tq^2} = \frac{ae^2}{aq\times qc}$ tandis que la propriété de l'ellipse cylindrique établie à la proposition 21 du livre I donne : $\frac{gl^2}{ur^2} = \frac{fl^2}{fr\times rh}$. Or, en raison du partage proportionnel des diamètres ac en q et fh en r, il vient les proportions $\frac{ae}{aq} = \frac{fl}{fr}$ et $\frac{ae}{qc} = \frac{fl}{rh}$ qui, par composition (multiplication) donnent $\frac{ae^2}{aq\times qc} = \frac{fl^2}{fr\times rh}$; ce qui permet de déduire $\frac{gl^2}{ur^2} = \frac{be^2}{tq^2}$ puis $\frac{gl}{ur} = \frac{be}{tq}$. La fin de la preuve est identique à celle de la première méthode.

La proposition 2, appariée à la première, énonce que, si les diamètres de deux ellipses, l'une conique, l'autre cylindrique, sont égaux chacun à chacun, les deux ellipses sont semblables et égales. La similitude est déjà acquise grâce à la proposition précédente et l'égalité des diamètres donne $be = gl$, qui, jointe à $\frac{gl}{ur} = \frac{be}{tq}$, conduit à $tq = ur$, et ce chaque fois que les points q et r partagent les diamètres égaux ac et fh dans le même rapport. Les ellipses sont donc égales.

À ce stade de son travail, Maurolico a trouvé un critère de similitude et d'égalité d'une ellipse conique et d'une ellipse cylindrique. Mais cela ne suffit pas à prouver l'existence de sections, l'une conique, l'autre cylindrique, qui soient semblables ou égales. Cette preuve est l'objet des propositions 3 et 4.

La proposition 3 énonce :

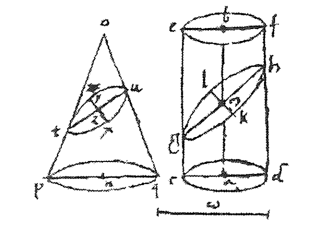
[21] Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 234, 235.

[22] La question de l'identification de cet ouvrage est évoquée plus loin.

Étant proposée une ellipse conique, couper un cylindre donné de sorte que la section soit une ellipse semblable à la proposée.

Soit un cône poq *de base* pq, *de sommet* o, *coupé par un plan formant l'ellipse* $t\chi uy$ *de diamètres* tu *et* χy *et de centre* z. *De même soit un cylindre* cf *d'axe* ab, *et de bases* cd *et* ef. [Figure 8] *Il faut couper ce cylindre* cf *par un plan formant une ellipse semblable à l'ellipse conique* $t\chi u$.

Que le cylindre cf *soit coupé, comme dans la proposition 28 du livre précédent, par un plan formant une ellipse* gkhl *de diamètres* gh *et* kl *et de centre* m, *de sorte que les diamètres de l'ellipse* gkh *soient proportionnels aux diamètres de l'ellipse* $t\chi u$, *par la toute même méthode que nous avons utilisé dans la proposition 28 du précédent. Dès lors puisque les diamètres de l'ellipse conique* $t\chi u$ *sont proportionnels aux diamètres de l'ellipse cylindrique* gkh, *d'après la première proposition de ce livre, les ellipses seront semblables : donc nous avons coupé le cylindre donné* cf *par un plan formant une ellipse* gkh *semblable à la proposée* $t\chi u$, *ce que l'on s'était proposé de faire.*[23]



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 16v.

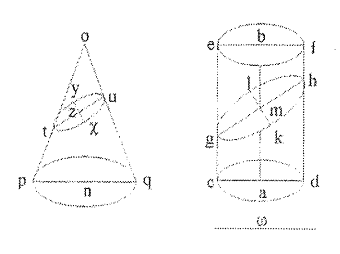


Figure 8.

La construction est effectuée par la même méthode que celle de la proposition 28 du livre I. Elle consiste d'abord à construire une droite ω vérifiant $\frac{\omega}{cd} = \frac{tu}{y\chi}$, puis à insérer entre les parallèles ce et df une droite gh égale à ω; le plan secondaire perpendiculaire au plan $cdfe$ et passant par gh coupe le cylindre selon une section semblable à l'ellipse donnée dans le cône.

La proposition 4 est analogue à la précédente et obtenue en échangeant les rôles du cône et du cylindre avec un complément concernant la construction d'une ellipse conique non seulement semblable mais aussi égale à une ellipse cylindrique donnée. La construction d'une section d'un cône donné semblable à une ellipse cylindrique donnée repose sur une construction exposée à la proposition 82 du premier livre de l'ouvrage sur les coniques, déjà mentionné précédemment, alors que le cas de l'égalité se réfère à une note de la proposition 36 du même ouvrage; l'absence d'identification de cet ouvrage interdit tout commentaire de ces constructions.

Maurolico ajoute à chacune des deux propositions qui viennent d'être examinées un corollaire qui tient plus du commentaire que du corollaire véritable; à la suite de la proposition 3, il indique :

C'est pourquoi il est manifeste que dans des cylindres on trouve une ellipse semblable et aussi semblable et égale à une ellipse conique proposée quelconque.[24]

[23] Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 236, 237.

[24] Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 237.

et il suffit d'y remplacer "cylindres" par "cônes" et "conique" par "cylindrique" pour obtenir le commentaire suivant la proposition 4. Il complète ces remarques par une manière d'aveu admiratif :

> Et [. . .] il est certainement digne d'admiration que, dans des solides dissemblables, on trouve deux sections semblables et même semblables et égales.[25]

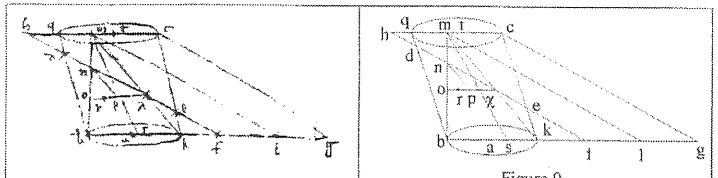
manifestant ainsi qu'un résultat qui deviendra un peu plus d'un siècle plus tard une quasi évidence[26] mérite selon Maurolico des démonstrations élaborées et une mention particulière à l'attention de son lecteur.

Le livre II et le traité *Sereni cylindricorum libelli duo* s'achèvent sur deux constructions qui constituent un raffinement des deux constructions précédentes; à nouveau leurs énoncés s'échangent mutuellement par substitution réciproque des termes "cylindre" ↔ "cône" et "conique" ↔ "cylindrique". Les propositions 5 et 7 peuvent être réunies en un même énoncé :

> Étant proposé un cône [cylindre] coupé suivant une ellipse quelconque, construire un cylindre [cône] sur la même base et de même hauteur qui, coupé par le même plan que le cône [cylindre], donne une ellipse semblable à l'ellipse conique [cylindrique].[27]

où les mots entre [ ] correspondent à la proposition 7. Les deux propositions sont illustrées par des figures identiques (Figure 9).

L'intérêt principal de ces propositions, dans le cadre de cette étude, tient au fait que seule la proposition 7, parmi les propositions du livre II traitant de la similitude des ellipses conique et cylindrique, avait été donnée à Maurolico grâce à la traduction très partielle du traité de Serenus publiée par Giorgio Valla sous le titre *De cylindrica sectione*; la proposition 7 de Maurolico est une reprise presque mot à mot de la proposition 16 de Valla. Tout le reste du livre II et la partie du livre I à partir de la proposition 17 sont à mettre au crédit de Maurolico.



Manuscrit BNF: Lat. 7465, f° 17v. — Figure 9.

C. Les coniques et Maurolico en 1534

Les renvois effectués par Maurolico, au cours de démonstrations, à des propositions, référencées par des numéros, issues du premier livre d'un ouvrage intitulé *Elementa conicorum* pose la question de sa connaissance des sections coniques dans la période 1530-1535. Le numéro le

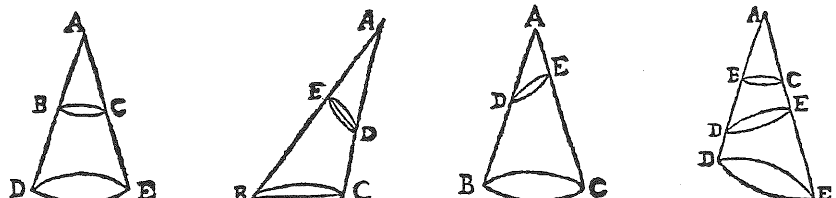
[25]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 237.

[26]Pour le géomètre Girard Desargues (1591-1661), cône et cylindre sont deux *sousgenres* d'un même *genre* de solide qu'il appelle *rouleau*, et dont le sommet est à distance soit finie (cône), soit infinie (cylindre); il n'y a plus donc lieu d'opérer aucune distinction entre ellipses conique et cylindrique. Pour le texte original, voir : R. Taton, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, Paris : Vrin, 1981, 2ème éd. p. 133, 134.

[27]Traduction de D. Bessot à partir de [3] Tassora, *op. cit.*, p. 238 et 241.

plus élevé des références fournies par Maurolico concerne la proposition 81 du premier livre des *Elementa conicorum*; or aucun ouvrage connu antérieur sur les coniques ne contient autant de propositions dans son premier livre. En particulier, il ne peut s'agir d'une publication dérivée des quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonios, dont certes un manuscrit est présent en Italie depuis 1427 et ce pour la première fois, semble-t-il, mais dont la première diffusion sera la traduction latine publiée en 1537 par Giovan Battista Memmo[28]; d'ailleurs le premier livre des *Coniques* d'Apollonios ne comporte que soixante propositions. D'autre part, la seule trace connue de travaux de Maurolico antérieurs à 1530 sur les coniques consiste en quatre seules propositions figurant dans son ouvrage d'optique *Photismi de lumine et umbra . . .* publié en 1521; ces propositions, comprenant les théorèmes 10 à 13, sont d'un contenu trop pauvre sur les sections coniques pour constituer un corpus utile dans l'étude des sections du cylindre :

> Théorème 10. Un cercle éclairé à partir d'un point projette dans un plan parallèle au sien une ombre circulaire et plus grande que lui. [. . .]
>
> Théorème 11. Il est possible qu'une ombre circulaire soit la projection d'un cercle oblique sur le plan [de base]. [. . .]
>
> Théorème 12. Il est possible qu'une ombre circulaire soit la projection d'une section conique. [. . .]
>
> Théorème 13. Un cercle peut projeter dans un plan une ombre qui soit une section conique quelconque.[29]



Théorème 10 — Théorème 11 — Théorème 12 — Théorème 13

Maurolico disposait-il d'un ouvrage reprenant de plus ou moins près le traité aujourd'hui perdu d'Euclide sur les coniques, qui pourrait être celui que cite Archimède sous le titre *Éléments des coniques*[30] ? Ou Maurolico aurait-il rédigé un tel ouvrage à partir d'éléments épars recueillis dans divers ouvrages qu'il aurait rassemblés, réorganisés et complétés ? Telle est l'hypothèse avancée par R. Tassora qui appuie sa thèse sur un extrait de la biographie de Maurolico rédigée par un de ses neveux :

> Non minor fatiga durò egli nell' emenda de quattro libri Conici di Apollonio, aggiongendovi il quinto, e sesto, et formatone in oltre un breve trattato de sopranominati distinto in tre libri con dimostrationi rette, e brevi, nelle quali racchiudesi quasi tutta la scienza Conica.[31]

[28]G. B. Memmo, bibliographie [5]. C'est à partir de cet ouvrage que Maurolico entreprendra son traité sur les sections coniques *Emendatio et restitutio Conicorum Apollonii Pergæi*, achevé en 1547, et apportant corrections et compléments au travail de Memmo.

[29]F. Maurolico, bibliographie [2], p. 7, 8.

[30]Archimède, *op. cit.*, p. 164.

[31]R. Tassora, *op. cit.*, p. 191. La citation faite par R. Tassora renvoie à : *Vita del'Abbate del Parto D. Maurolyco*

Il faudrait que cet ouvrage ait été composé entre 1531 et 1534 et qu'il fut assez éloigné de ce que découvrira Maurolico des *Coniques* d'Apollonios au travers de la traduction effectuée par Memmo pour justifier la rédaction, achevée en 1547, de l'*Emendatio et restitutio Conicorum Apollonii Pergæi*. La citation ci-dessus laisse plutôt penser que le "bref traité [...] en trois livres" a été conçu comme un complément à l'*Emendatio*... de 1547. Il demeure que, jusqu'à présent, aucune découverte documentaire ne permet de se prononcer sur l'existence d'un traité maurolicien sur les sections coniques antérieur à 1534.

* * *

Même si Maurolico n'apporte pas de résultats fondamentalement nouveaux sur la question des sections planes du cylindre, il fait cependant montre d'originalité dans sa démarche de la preuve de l'identité de genre entre ellipses conique et cylindrique; toutefois cette démarche manque d'exhaustivité dans la mesure où, si les cylindres utilisés sont bien scalènes, les coupes faites de ces cylindres ne sont pas quelconques et produisent des ellipses dont les diamètres découlant naturellement de leur construction sont les axes de symétries orthogonales et non des diamètres conjugués quelconques. Cette position, en retrait par rapport à celle de Serenus et même de Valla, ne milite pas en faveur d'une connaissance approfondie, chez Maurolico, de la théorie apollonienne des coniques en 1534.

En revanche, Maurolico semble être le premier à envisager des coupes de cylindres à bases elliptiques. Il initie ainsi la question plus globale qui sera posée au XVII$^{\text{ème}}$ siècle : quelle est la nature d'un cône construit sur une conique ? Une coupe plane d'un tel cône est-elle une conique ou une courbe d'un autre genre ? Si la réponse en faveur de la conique est rapidement pressentie, les preuves tentées par Mydorge (1639), Descartes (1641) ou La Hire (1692) resteront incomplètes et le résultat sera acquis au début du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Mais ceci est une autre histoire.

Brève bibliographie

[1] F. MAUROLICO, *Sereni cylindricorum libelli duo*, 1534. Ms BN *Fonds latin 7465*.

[2] F. MAUROLICO, *Abbatis Francisci Maurolyci Messaniensis Photismi de lumine, & umbra ad perspectivam, & radiorum incidentiam facientes. Diaphanorum partes, seu Libri tres : in quorum primo de perspicuis corporibus : in secundo de Iride : in tertio de organi visualis structura, & conspiciliorum formis agitur. Problemata ad perspectivam, & Iridem pertinentia. Omnia nunc primum in lucem edita*. Naples, 1611 (1$^{\text{ère}}$ édition : 1521).

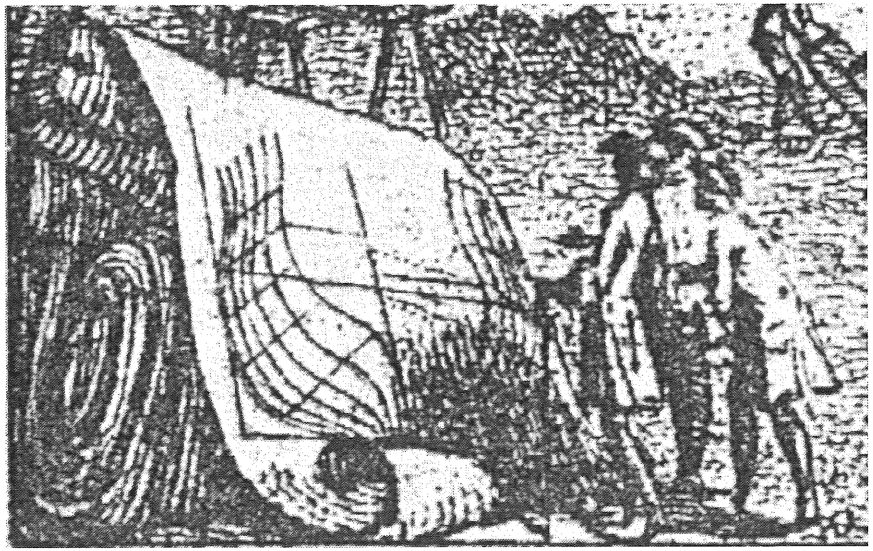
[3] R. TASSORA, "I *Sereni cylindricorum libelli duo* di Francesco Maurolico e un trattato sconoscuito sulle sezioni coniche" in *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 15$^{\text{e}}$ année, n°2 (déc. 1995), p. 135-264.

[4] R. MOSCHEO, *Francesco Maurolico tra Rinascimento e Scienza galileiana. Materiali e ricerche*, Messine, 1988.

scritta dal Baron della Foresta, ad istanza dell'Abbate di Roccamatore D. Sylvestro Maruli fratelli, di lui nipoti, Messine : Pietro Brea, 1613, p. 4, et donne en traduction française : "Il n'eut pas moins de fatigue dans la correction des quatre livres des Coniques d'Apollonios, leur ajoutant un cinquième et sixième livres et rédigeant en outre un bref traité distinct des susnommés en trois livres avec des démonstrations directes et brèves en lesquelles est contenue presque toute la science des coniques."

[5] G.B. MEMMO, *Apollonii Pergei philosophi, mathematicique excellentissimi Opera per doctissimum philosophum Ioannem Baptistam Memum Patritium Venetum, mathematicarumque artium in Urbe Veneta publicum de Græco in Latinum et noviter impressa*. Venise, 1537.

[6] G. VALLA, *Georgii Vallæ Placentini Viri clarissimi De expetendis et fugiendis rebus, opus in ovo hæc continentur : ....* Venise, 1501.



Extrait de l'illustration de la première page du *Traité du Navire* de Bouguer.

Dossier 4, réuni par Jean Dhombres

L'arche de Noé pouvait-elle couler, ou les ressources d'une parabole

Extrait du *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements*, par Pierre Bouguer, publié en 1746
(modernisé pour l'orthographe, mais les formules mathématiques sont selon l'original, avec correction des erreurs de frappe)

Chapitre III.

Méthode de déterminer le Métacentre, ou le terme de la plus grande hauteur à laquelle on peut mettre le centre de gravité du Vaisseau.

I.

Lorsque les coupes verticales de la carène, faites perpendiculairement à la longueur du navire, ne sont pas des cercles, il faut ordinairement se livrer à une assez longue discussion, pour pouvoir découvrir *le métacentre*, ce point au-dessous duquel il est nécessaire de mettre le centre de gravité du navire. Comme la question se réduit à déterminer la situation des directions ΓZ et γz (Figure 54) sur lesquelles agit successivement la poussée de l'eau, il faut chercher d'abord combien les centres de gravité Γ et γ d'où partent ces lignes, sont éloignés l'un de l'autre. Γ comme nous l'avons déjà assez dit, est le centre de gravité de la carène AEB, considérée comme homogène, & γ de la partie qui est submergée, lorsque le navire est incliné. L'intervalle entre les deux centres ne doit être qu'un infiniment petit, puisqu'il ne s'agit d'abord que de la première, ou plus petite inclinaison du navire. La carène AEB et le solide aEb, ont une partie commune AFbE, dont le centre de gravité est en 3. Ainsi le petit intervalle $\Gamma\gamma$ qui se trouve entre les centres de gravité Γ, γ, ne vient que des deux autres parties BFb et AFa, dont l'une sort de l'eau, pendant que l'autre y entre; et qui ont leur centre de gravité en 1 et en 2. Mais la carène AEB n'étant formée que de la partie commune AEbF, et de la petite partie BFb qui s'élève de l'eau; puisque toutes les parties d'un corps sont en équilibre autour de son centre de gravité, & que l'équilibre ne consiste que dans cette proportion qui rend les moments égaux. Par la même raison le centre de gravité γ du solide aEb qui sert de carène pendant l'inclinaison du navire, doit être sur la ligne 3 2, qui joint les centres de gravité 3 et 2 de AEbF, et de AFa qui se plonge dans l'eau, lorsque le navire s'incline. Mais comme les petits solides BFb & AFa sont de même solidité, et qu'ils le seraient également quand même ils ne seraient pas des corps semblables, puisque le navire occupe le même espace dans la mer avant et après son inclinaison, la partie commune AEbF doit avoir même rapport au solide BFb qu'au petit solide AFa; et il doit y avoir aussi même raison de 2γ à 3γ, que de 1Γ à 3Γ. C'est-à-dire que la petite ligne $\Gamma\gamma$, qui est la distance des centres de gravité γ et Γ, divise les deux lignes 32 et 31 proportionnellement; et cette petite ligne est donc parallèle à la surface de l'eau, ou à la distance 12 des centres de gravité 1 et 2. Il est clair que ce sera encore la même chose si le navire continue à s'incliner, pourvu que la partie infiniment petite qui se plonge d'un côté, soit toujours égale à celle qui s'élève de l'autre.

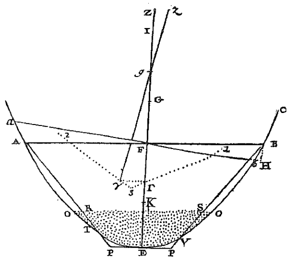


Figure 54 du Traité du Navire

II.

De ce que la partie commune AEbF est au petit solide BFb, comme 1Γ est à 3Γ, il suit aussi que la carène entière AEB est au petit solide BFb, comme 3 1 est à 3 Γ, et on aura donc encore cette proportion : la carène entiere AEB est au petit solide BFb, comme 1 2 est à $\Gamma\gamma$. Ainsi on pourra trouver la distance $\Gamma\gamma$ des centres de gravité Γ et γ, aussitôt qu'on connaîtra la solidité de la carène AEB, la solidité de la petite partie BFb, et la distance 1 2 des centres de gravité 1 et 2 des petites parties BFb et AFa. Puisque ce sont là les trois premiers termes d'une proportion, dont la distance $\Gamma\gamma$ est la quatrième.

III.

Comme la figure du vaisseau est donnée, on connaît sa coupe horizontale faite à fleur d'eau. Je nomme x les parties de l'axe de cette coupe, ou les parties de la longueur du navire, et y les demi-largeurs ou ordonnées : FB est la plus grande de ces demi-largeurs; je la nomme b; et je désigne par e la quantité verticale et infiniment petite HB, dont le point B s'élève de l'eau, lorsque le navire s'incline de l'autre côté. Je considère après cela que le petit solide BFb qui sort de l'eau, et dont BFb n'est qu'une coupe, est formé d'une infinité de petits triangles verticaux, qui étant arrangés tout le long de la longueur du navire à la distance infiniment petite dx les uns des autres, sont parallèles aux triangles BFb, et lui sont semblables. Ces petits triangles ont les demi-largeurs y pour bases, et on trouvera leur petite hauteur par cette proportion, FB = b| BH = e||y|$\frac{e}{b}y$; de sorte que $\frac{e}{2b}y^2$ produit de y par $\frac{e}{2b}y$ sera l'étendue de ces petits triangles. Je multiplie cette étendue par l'épaisseur infiniment petite dx, il vient $\frac{e}{2b}y^2$ pour la solidité des petits triangles, ou plutôt des petits prismes triangulaires, dont le petit solide BFb est formé; et en intégrant on trouve $S\frac{e}{2b}y^2dx$, ou $\frac{e}{2b}Sy^2dx$ pour la grandeur de ce petit solide qui sort de l'eau par l'inclinaison du navire; c'est là une des choses qu'on cherchait.

Après cela je multiplie l'élément $\frac{e}{2b}y^2dx$ par $\frac{2}{3}y$; parce que le centre de gravité de chaque petit triangle répond aux $\frac{2}{3}$ de la base, ou de la demi-largeur y; et j'ai $\frac{e}{3b}y^3dx$ pour le moment de chaque petit prisme élémentaire par rapport au point F, ou par rapport à l'axe de la coupe du navire faite à fleur d'eau. Et l'intégrale $\frac{e}{3b}Sy^3dx$ sera donc le moment du petit solide entier BFb. Ainsi il ne reste plus qu'à diviser ce moment total par la somme de tous les petits prismes triangulaires, ou par le petit solide entier BFb; le quotient $\frac{2Sy^3dx}{3Sy^2dx}$ marquera, selon le principe général de Statique, la distance F1 du point F au centre de gravité 1 de ce solide BFb. On trouverait de la même manière la distance F2, si la carène était un corps irrégulier; mais comme les deux flancs de nos navires sont toujours égaux, on n'a qu'à doubler F1, et on aura $\frac{4Sy^3dx}{3Sy^2dx}$ pour la distance 12 des centres de gravité 1 et 2 des deux solides BFb, et AFa.

IV.

Maintenant qu'on connaît la solidité $\frac{e}{2b}Sy^2dx$ de la petite partie BFb, et la distance $\frac{4Sy^3dx}{3Sy^2dx}$ des centres de gravité 1 et 2, il ne manque plus que de connaître la solidité de la carène pour pouvoir faire l'analogie indiquée à la fin de l'Article II. La carène AEB est à la petite partie BFb, comme 1 2 est à $\Gamma\gamma$. On trouvera toujours aisément par les moyens expliqués ci-devant, ou par les autres méthodes que fournit la Géométrie, cette solidité; et supposé que p la désigne, on aura donc $p|\frac{2}{2b}Sy^2dx||\frac{4Sy^3dx}{3Sy^2dx}|\frac{2eSy^3dx}{3bp}$; ce qui montre que le centre de gravité γ de la partie aEb qui sert de carène pendant l'inclinaison du navire, est éloigné du centre de gravité Γ de la carène AEb de la distance $\frac{2eSy^3dx}{3bp}$. Enfin, si l'on fait attention que le petit triangle $\Gamma g\gamma$ qui est formé par la distance $\Gamma\gamma$ des centres de gravité Γ et γ, et par les lignes ΓZ et γz, lesquelles servent de direction à la poussée de l'eau dans les deux situations du navire, est semblable au petit triangle BFH, à cause que les trois côtés de l'un sont perpendiculaires aux trois côtés de l'autre, on aura cette dernière porportion; HB = e| FB = b||$\Gamma\gamma = \frac{2eSy^3dx}{3bp}$|$\Gamma\gamma$. On en déduira cette formule, $\Gamma g = \frac{2Sy^3dx}{3p}$, qui apprend la plus grande hauteur Γg que peut avoir le centre de gravité du navire au-dessus du centre de gravité Γ de sa carène.

Nous ne comptons pas comme une difficulté, dans l'usage qu'on peut faire de cette formule, la nécessité où l'on est de trouver la valeur de l'intégrale Sy^3dx. Si l'on suppose que la tranche horizontale du navire faite à fleur d'eau, ait 100 pieds de long, et que ses demi-largeurs mesurées à 12 $\frac{1}{2}$ pieds de distance les unes des autres, soient, en commençant par l'extrémité de la proue, de 1 pied, de 9, de 12, de 13 $\frac{1}{2}$, de 13 $\frac{1}{2}$, de 12 $\frac{1}{2}$, de 11 $\frac{1}{2}$, de 9 $\frac{1}{2}$, et de 7 $\frac{1}{2}$, on trouvera aisément, par la méthode expliquée dans le second Chapitre de la Section précédente, l'intégrale Sy^3dx : car on aura 1,729, 1728, 2460 $\frac{3}{8}$, 2460 $\frac{3}{8}$, 1953 $\frac{1}{8}$, 1520 $\frac{7}{8}$, 857 $\frac{7}{8}$, et 421 $\frac{7}{8}$ pour les neuf cubes y^3; et si on ajoute ensemble tous ces nombres, mais en ne faisant entrer dans l'addition que la seule moitié du premier et du dernier, et qu'on multiplie la somme par 12 $\frac{1}{2}$ qui est la distance d'une largeur à l'autre, il viendra 149006. Après cela il ne restera plus qu'à diviser les $\frac{2}{3}$ de ce nombre par la solidité p de la carène, pour avoir la hauteur Γg. Si cette solidité (qu'on peut toujours trouver aisément, ou par les méthodes précises que fournit la Géométrie, ou par les moyens mécaniques que nous avons donnés dans la Section précédente) est égale à celle d'un ellipsoïde de même longueur, de même largeur et de même profondeur, et que la profondeur soit de 12 pieds, cette solidité sera de 16971 pieds cubiques, et on aura par conséquent 5 $\frac{85}{100}$ pieds pour la hauteur du métacentre g au-dessus du centre de gravité Γ de la carène. Supposé de plus que ce dernier centre soit plongé dans l'eau de 4 $\frac{1}{2}$ pieds ou des $\frac{3}{8}$ de la profondeur, comme cela se trouve dans l'ellipsoïde, le point g qui est le terme ou la limite de la plus grande hauteur du centre de gravité du navire, sera élevé d'environ 1 pied 4 pouces au-dessus de la surface de la mer.

V.

On pourra appliquer notre règle avec la même facilité à tous les vaisseaux : mais on viendra à bout de la rendre plus simple, jusque-là qu'on pourra l'employer souvent sans calcul, lorsque toutes les coupes verticales de la carène faites parallèlement à AEB, seront des figures semblables. Si, dans ce cas particulier, K est le centre de gravité de la coupe AEB, centre qu'il faut ici bien distinguer de celui Γ de la carène entière, puisque ce dernier résulte de la disposition ou de l'assemblage de tous les autres, notre formule se changera en $\Gamma g = \frac{2F\Gamma \times \overline{FB}^2}{3FK \times AEB}$, ou se réduira à cette simple analogie : le produit de la coupe AEB par la quantité FK, dont son centre de gravité K est plongé dans l'eau, est au $\frac{2}{3}$ du cube $\overline{FB}^3$ de la demi-largeur FB, comme la quantité FΓ, dont le centre de gravité de la carène est enfoncé dans l'eau, est à la hauteur Γg du métacentre g au-dessus de ce dernier centre.

Les lecteurs un peu versés dans la Statique, doivent voir déjà l'origine de ce théorème, ou de cette seconde règle, dans la conformité qu'il y a entre l'expression $\frac{2Sy^3dx}{3p}$ de Γg, et celle qu'on sait qu'a $F\Gamma$, qui ne doit être dans la circonstance présente, que $\frac{Sy^3dx}{p}$ affectée de quelques constantes. En effet, on peut trouver l'étendue de toutes les coupes de la carène qui sont parallèles à AEB par cette analogie : le carré $\overline{FB}^2$ de la demi-largeur FB est à l'étendue de la coupe AEB, comme le carré y^2 de toutes les autres demi-largeurs est à l'étendue $\frac{AEB}{\overline{FB}^2} \times y^2$ des coupes correspondantes. Et si, après avoir multiplié cette étendue par l'épaisseur infiniment petite dx, qui est la distance d'une coupe à l'autre, pour avoir l'élément $\frac{AEB}{\overline{FB}^2}y^2dx$, on fait cette autre analogie fondée encore sur la ressemblance des coupes : la demi-largeur FB est à FK, ainsi la demi largeur y des autres coupes est à la quantité $\frac{FK}{FB} \times y$ dont leur centre de gravité est au-dessous de la surface de l'eau, et qu'on multiplie l'élément $\frac{AEB}{\overline{FB}^2} \times y^2dx$ par cette quantité $\frac{FK}{FB} \times y$, on aura $\frac{FK\times AEB}{\overline{FB}^3} \times y^3dx$ pour le moment de chaque élément par rapport à la surface de l'eau, et l'intégrale $\frac{FK\times AEB}{\overline{FB}^3}Sy^3dx$ sera le moment de toute la carène. Il faut ensuite, selon le principe de la Statique, diviser ce moment par la solidité p, et le quotient $\frac{FK\times AEB\times Sy^3dx}{\overline{FB}^3\times p}$ marquera la quantité $F\Gamma$, dont le centre de gravité Γ de la carène est enfoncé dans l'eau. Mais on voit en comparant cette valeur avec celle de $\frac{2Sy^3dx}{3p}$ de Γg découverte ci-devant, qu'elles sont l'une à l'autre comme $\frac{FK\times AEB}{\overline{FB}^3}$ est à $\frac{2}{3}$, ou comme FK × AEB est à $\frac{2}{3}\times\overline{FB}^3$; et qu'ainsi on peut faire la proportion mentionnée ci-devant, FK × AEB $|\frac{2}{3} \times \overline{FB}^3 \| F/\Gamma | \Gamma g$. De cette proportion, on en déduit l'équation, ou la formule $\Gamma g = \frac{2/3F\Gamma\times\overline{EB}^3}{FK\times AEB}$ dont on peut retrancher, si on le veut, EΓ; et il viendra F$g = \frac{2/3F\Gamma\times\overline{FB}^3 - F\Gamma\times FK\times AEB}{FK\times AEB}$ qui exprime la plus grande hauteur que peut avoir le centre de gravité du navire au-dessus de la surface de l'eau.

L'arche de Noé pouvait-elle couler, ou les ressources d'une parabole

C'est Yahvé qui donna ses ordres à Noé pour la construction d'un navire destiné à le sauver du Déluge ainsi que toute sa famille, et d'y rassembler des représentants de toutes les espèces animales[1].

> Fais-toi une caisse en bois de cyprès. Tu feras la caisse de cellules.
> Asphalte-là à l'intérieur et à l'extérieur avec de l'asphalte.
> Et telle, tu la feras, longueur de la caisse, trois cents coudées;
> Sa largeur, cinquante coudées; sa taille, trente coudées.
> Tu feras une lucarne à la caisse et l'achèveras, d'une coudée, en haut.
> Tu mettras l'ouverture de la caisse sur le côté.
> Tu feras des soupentes, des secondes, des troisièmes. (*Gen.* 6: 14-16).

D'habitude, on adopte pour la coudée la valeur d'un pied et demi, de sorte que la seule longueur du navire de Noé serait de 450 pieds, et l'archéologie marine a établi que les trirèmes attiques atteignaient les 40 mètres. La forme d'un parallélépipède rectangle aux proportions si remarquables, et si considérables, largement supérieures en valeur absolue à ce que nous connaissons

[1]Traduction de André Chouraqui.

des navires construits au premier millénaire avant l'ère chrétienne, a presque toujours inquiété les historiens, qui ont depuis longtemps le mot de mythe à la bouche[2]. Encore que les dimensions données dans la Genèse fussent faibles par rapport à celles fournies par d'autres traditions, comme la tradition babylonienne. Au contraire du doute, cette forme géométrique bien peu usuelle pour un navire a pourtant inspiré l'esprit mathématicien d'un savant du XVIII[ème] siècle. Et il chercha à déterminer *a priori* si le navire était stable. C'est-à-dire si, un peu incliné par une impulsion quelconque, l'arche pouvait redresser la situation. Pierre Bouguer concluait son étude par ces mots :

> Ainsi l'inclinaison de ce Bâtiment ne pouvoit jamais devenir trop grande; il n'y avoit rien à craindre de ce côté pour les précieux restes du genre humain[3].

La sagesse talmudique avait conclu depuis longtemps qu'au moins les proportions fournies par la Genèse étaient les bonnes, c'est-à-dire assuraient ce qu'il fallait au "bon "navire, le "good ship" selon l'expression très souvent utilisée au Moyen Age anglais. Car l'important, pendant des siècles, fut de faire selon un bon modèle. Compilé à la fin du cinquième siècle de notre ère en Palestine, un commentaire de la Mishna portant sur le livre de la Genèse indiquait les bonnes proportions à respecter.

> *La Torah vous a enseigné une mesure pratique : si un homme construit un navire qui doit être capable de tenir dans un port, qu'il lui donne en largeur le sixième et en hauteur le dixième de sa longueur[4].*

Donner les conditions pour qu'un navire tienne dans un port, mais aussi bien en mer, telle devint l'ambition théorique de Pierre Bouguer, qui indiqua une formulation mathématique, utilisant une parabole afin de préciser la stabilité de l'arche, et celle d'un bâtiment en général. Ce faisant, et au vu des résultats mathématiques, il proposait sans vergogne d'abandonner la tradition de l'architecture navale, afin d'activer pratiquement l'innovation. Si nous reprenons l'explication fournie dans le texte présenté au début de ce dossier, c'est qu'elle fait joliment jouer une génération de la parabole, et le thème de cet atelier est celui des coniques. C'est aussi qu'elle indique une façon de présenter le calcul intégral sans passer par le calcul différentiel, et donc adopte un parti pris pédagogique auquel nous ne sommes pas du tout habitués. Il libère du professeur, et c'est que Bouguer donne à voir une épistémologie en mathématiques. Nous reprenons enfin la construction parce qu'elle avait la prétention de pouvoir être directement comprise par des marins habitués à certains types de calcul sur les centres de gravité, et donc donne de l'intégrale une vision mécanique. Elle est susceptible d'une intéressante mise en image par ordinateur que Roland Stowasser devait fournir, mais pour des raisons de santé il n'a pu se rendre à Louvain pour le colloque.

Il est avantageux pour un enseignant de mathématiques de lire Bouguer aujourd'hui et de le travailler; au point que je vais me limiter à ce qui relève de la didactique des mathématiques dans la situation scientifique traitée par Bouguer. Je ne fais pas ici de l'histoire des mathématiques, et je ne donne pas toutes les variantes du texte de Bouguer en 1746 ou les commentaires qui en furent alors faits. Je ne respecte même pas toutes ses notations dans le texte fourni, mais le fait dans les citations du commentaire, avec des dessins originaux ; je ne poursuis pas plus

[2]Don Cameron Allen, *The Legend of Noah : Renaissance rationalism in Art, Science and Letters*, Urbana, University of Illinois Press, 1963.

[3]P. Bouguer, *Traité du navire, de sa construction, et de ses mouvemens*, Jombert, Paris, 1746, p. 266. Désormais la référence sera abrégée en T.N., p. 266.

[4]Edition critique de J. Theodor, Ch. Albeck, Berlin, 1912, vol. 1, p. 282.

le développement de calcul différentiel auquel la théorie de Bouguer a donné lieu, avec un splendide exposé théorique en termes de surfaces survenu en 1822 et dû à Charles Dupin[5]. Au contraire même, j'enferme la théorie de Bouguer dans le calcul intégral et j'oppose ce dernier au calcul différentiel.

Mais je n'ai aucune honte à agir ainsi : l'histoire est toujours une histoire intéressée, et mon intérêt est ici affiché pour la didactique. J'ai quelquefois beaucoup de gêne à lire des travaux d'histoire des mathématiques à prétentions didactiques ou pédagogiques dans la mesure où ils affichent une fidélité sans faille à l'original. Comme s'il était possible de retrouver toutes les conditions d'une mentalité ancienne ! S'agit-il d'ailleurs de savoir faire parler les morts ? L'exemple choisi me donne tout de suite la preuve de la difficulté d'une interprétation. Faut-il par exemple lire la remarque de conclusion de Bouguer comme étant celle d'un sceptique sur les vertus de la Providence ? Pouvait-on, au milieu de XVIIIème siècle, et en s'appuyant sur les mathématiques, être agnostique sans militantisme ? D'autres interpréteront la remarque du Breton Pierre Bouguer à la façon de Bernardin de Saint-Pierre, qui voyait un bienfait de la bonté divine dans l'arrangement de rayons sur les melons afin qu'on les découpe plus aisément en famille[6] ! Et s'il ne s'agissait chez Bouguer que d'un truc de professeur pour mieux captiver son auditoire ? Le *Traité du Navire* de Bouguer fourmille de remarques acides, vives, et sans façon.

Représentation du réel, respect du texte

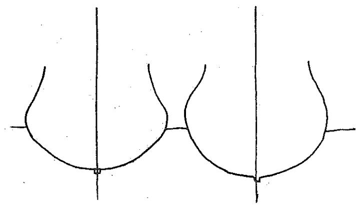
Mais restons encore un peu avec Noé, et son arche (tebhah) en forme de maison. Car nous allons pouvoir confronter un texte et son illustration, et cela nous préparera au problème analogue chez Bouguer, celui de l'illustration du calcul intégral par la mécanique du navire. Le mot hébreu pour navire est autre (oniyah) et que Chouraqui a judicieusement traduit par "caisse"; l'enfoncement de l'arche dans l'eau n'est pas spécifié dans la Genèse, mais la Mishna déjà citée assure qu'il était de onze coudées (16,5 pieds) (*op. cit.*, p. 312). Pierre Bouguer suppose que cet enfoncement était de dix coudées, et calcule un centre de gravité assez bas parce qu'on "eut sans doute l'attention de mettre en bas les choses les plus pesantes" (TN, p. 266). Etait-il au courant des discussions rabbiniques pour savoir comment étaient réparties les masses dans les trois étages de cellules (du grec *kella*, en hébreu *qelin* ou *qinnim* pour désigner les pièces en lesquelles ces cellules sont elles-mêmes réparties) ? Bouguer sait naturellement qu'en science l'oubli est souvent le meilleur des aiguillons, car il pousse à l'innovation. Bouguer sait aussi que son calcul de stabilité ne pourra être oublié, car il conduit à modifier l'aspect des navires de son époque, dont un critère d'élégance était d'avoir des flancs rentrants au niveau de la ligne de flottaison. Or Bouguer, comme résultat de son calcul, souhaitait avoir une verticalité de la carène. Il reconnaissait faire ainsi perdre

> "dans les commencements... beaucoup de grâce aux yeux des marins; mais à cela on ne sçauroit que faire; la Geométrie est une science impérieuse, & c'est à nous à trouver beau tout ce qu'elle nous prescrit". (TN, p. 274)

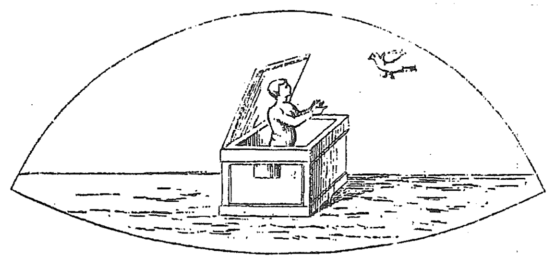
[5]C. Dupin, *Applications de Géométrie et de Méchanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc., pour faire suite aux Développements de Géométrie*, Paris, Bachelier, 1822. De fait, le mémoire original de Dupin sur la surface métacentrique avait été approuvé par la classe des sciences mathématiques de l'Institut à la fin août 1814 sur rapport de Sané, Poinsot et Carnot.

[6]Il n'est jamais facile d'interpréter un acte scientifique en termes culturels ou idéologiques; non qu'il ne faille pas le faire, mais en s'y essayant il ne faut pas oublier que la science se veut objective, donc en particulier prétend mettre de côté le discours culturel. Il y a donc nécessairement en science une mise en dehors. Vouloir remettre en dedans nécessite une forte interprétation historique. Voir J. Dhombres, *Une science à la française*, à paraître.

Sommes-nous encore prêts à entendre une telle parole aujourd'hui ? Et interprétons-nous bien ce que dit Bouguer, professeur d'hydrographie lui-même et donc ayant sa place dans la corporation des constructeurs de la marine, devant défendre leurs conceptions face à des officiers de marine, face aussi à des officiers administrateurs chargés de gérer les fonds alloués par le Ministre. En tout cas la forme des navires a bien évolué au milieu du XVIIIème siècle, comme le montrent les dessins ci-dessous.



Le travail de Bouguer fait partie de ces efforts pour standardiser l'appréciation des navires, et s'inscrit dans le grand mouvement de gestion et de prévision par l'Etat au cours du siècle des Lumières[7]. Les figures que donne Bouguer sont confrontées à sa théorie et au réel de la navigation, comme celles des peintres de l'Antiquité, et du Moyen Age. Ils n'eurent aucune difficulté à représenter l'arche de Noé en tant que maison, la maison humaine. Dans les premières représentations chrétiennes, l'arche est particulièrement simple, et sa flottaison hautement improbable. La caisse a un couvercle; il y a bien la lucarne désignée dans la Genèse, mais ce pourrait être une poignée pour la caisse.



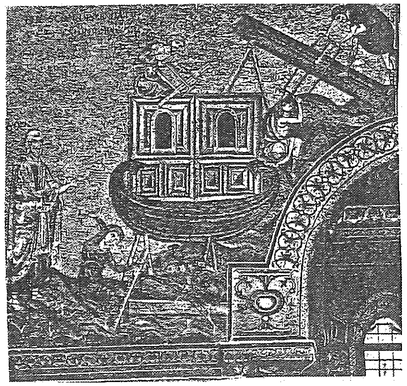
Une représentation de Noé dans une catacombe chrétienne de Rome
où l'arche a la forme d'une caisse

En dehors des représentations assez fidèles au texte, une solution ancienne fut celle de la caisse posée sur un radeau : le dessinateur peut multiplier les lucarnes, et même pose quelquefois une cheminée pour que la caisse fasse maison. Le radeau semble flotter naturellement, mais les vagues sont inquiétantes. Dans un autre cas, le bateau est remarquablement dessiné, avec tout l'appareil de la construction, les herminettes et les baux, mais l'arche elle-même est réduite à l'abstraction d'un texte venant s'inscrire dans le schéma géométrique d'une maison.

[7]E. Brian, *La Mesure de l'Etat*, Paris, A. Michel, 1996.

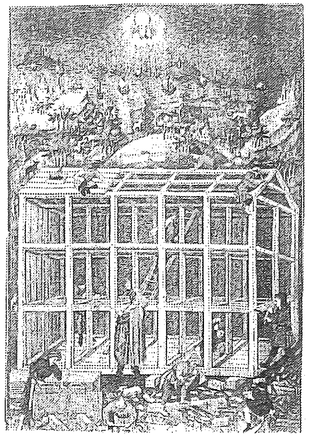
Deux représentations de l'arche. Dans celle de gauche, qui provient d'un livre imprimé en 1493, *Buch der Chroniken*, Noé est celui qui donne des ordres aux ouvriers

Un peu plus tôt, au XII^{ème} siècle, par exemple sur une mosaïque byzantine de Monreale en Sicile, on avait tenté une conciliation entre le texte et la pratique navale, l'arche étant conçue comme une caisse mais disposée sur une nef bizarrement symétrique et aux formes néanmoins exagérément recourbées. Il y avait un luxe de détails réalistes sur la construction même de l'arche.



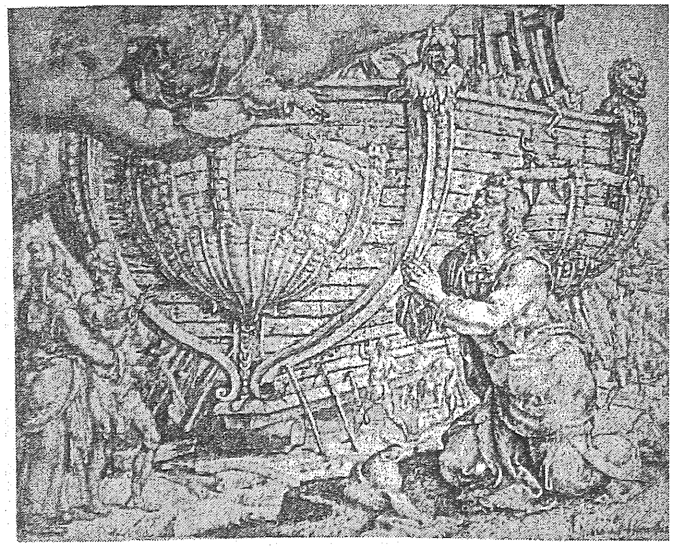
XII^{ème} siècle : mosaïque de Monreale

Ces détails sur les instruments utilisés pour la construction d'un navire se retrouvent souvent; on le voit, en particulier au XV^{ème} siècle avec la belle illustration d'u manuscrit anglais. Dieu dirige la construction de la maison qui ne semble avoir aucun rapport avec la navigation



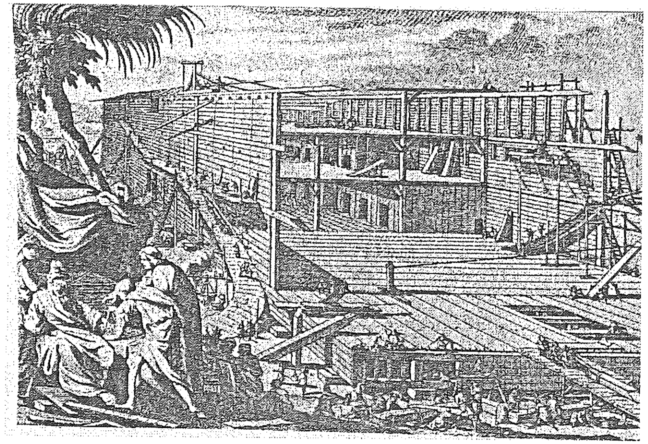
Manuscrit anglais du XV^{ème} siècle représentant la construction de l'arche de Noé (British library, MS add. 18 850, f. 15v.)

À la Renaissance, et selon un mouvement critique qui a fondé l'exégèse, et sans doute participé de la formation du jugement scientifique, les peintres rationalisent l'arche de Noé. Ils la donnent à voir comme bateau possible, et c'est un bateau usuel d'alors, un bateau de qualité. La représentation est double : Dieu donne et Noé remercie; les ouvriers construisent la barque magnifiquement décorée et toute baroque sur son étrave étroite.

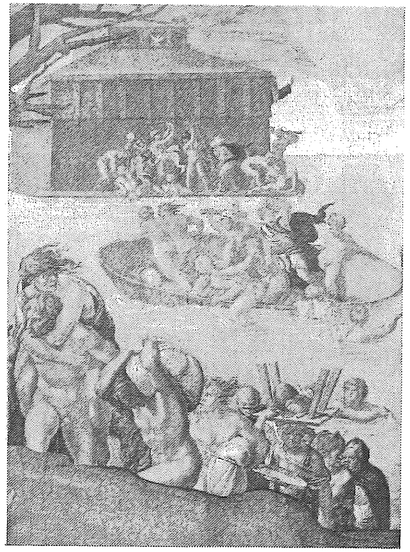


Noé recevant de Dieu les directives pour la construction de l'arche
Encre brune et craie blanche sur papier jaune (201x253cm) de Maarten van Heemskork (1558)
Copenhagen, Statens Museum for Kunst

On appréciera le goût architectural, une baroquisation de la caisse, qui présida à la représentation ci-dessous.



Michelangelo, au plafond de la chapelle Sixtine, choisit la forme du parallélépipède rectangle qu'il coiffe cependant d'une pyramide, la célèbre colombe s'échappant par l'unique lucarne représentée. La caisse flotte comme un radeau, sans marque d'enfoncement. Elle est fort différente de la barque où une mégère empêche un nageur de grimper à bord.



L'arche de Noé au plafond de la chapelle Sixtine

C'est une tout autre gravure qui peut expliquer la démarche de calcul de Bouguer; elle doit en effet montrer un nouvel outil : la mathématique. Nouvel outil car Bouguer abandonne la mathématique des proportions – la règle de trois – qui avait longtemps été le seul instrument en architecture navale.

Mais il faut commencer par le commencement : il y a bien une figure au départ chez Bouguer, toute simple. C'est une coupe verticale de l'arche parallélépipédique, selon un plan orthogonal à l'axe transversal horizontal du navire. Ce sont sur des coupes que vont se faire les raisonnements; or, puisque de toute évidence la stabilité du bateau fait jouer le corps entier du bateau, la réduction à des coupes introduit une pratique géométrique nouvelle, celle qui est liée au calcul intégral

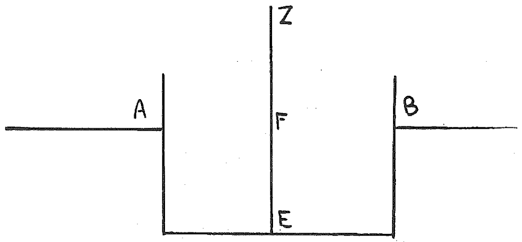


Figure 1
Coupe de l'arche de Noé, avec indication de la ligne de l'horizontale de la mer

A cette figure de Bouguer est ajoutée une autre qui correspond à un bougé du navire sous un effet quelconque (vent, vague). Mais le professeur d'hydrographie trouve plus pratique de faire bouger la ligne du niveau de l'eau, la mer, en ne changeant rien au navire : de sorte que la nouvelle ligne est ci-dessous la ligne ab, et la verticale est passée de EZ à γZ.

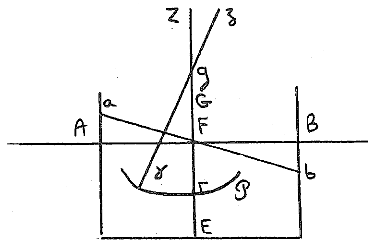


Figure 2
Représentation du bougé de l'arche de Noé

La figure du bougé indique que les droites AB et ab se coupent au point F, milieu de AB : ce n'est pas un accident ou une simplification de géomètre. Le déplacement considéré du navire est tel que les aires triangulaires AaF et BbF doivent être les mêmes, "puisque le navire occupe le même espace dans la Mer avant et après son inclinaison" (TN., p. 259). Le poids du navire reste le même qu'il bouge ou qu'il reste au repos, contrebalancé par la même poussée d'Archimède appliquée dans toutes les positions, de sorte que le volume de la carène immergée reste toujours le même. La figure choisie par Bouguer illustre ce fait physique que la géométrie réduit à l'intersection des droites AB et ab au point F.

Mais une telle intersection ne subsiste pas pour un navire dont les formes n'ont pas la symétrie du rectangle de la caisse. Il faudra comprendre autrement : Bouguer n'en parle pas tout de suite quoique la non symétrie du bateau ne soit pas un luxe de mathématicien, les gondoles de Venise étant un exemple déjà connu. Chaque chose en son temps. Bouguer prépare l'effet de réalisme de sa théorie. L'un des avantages en effet du calcul intégral sera de ne pas devoir tenir compte des effets éventuels de symétrie pensés par simplification par le théoricien, et de pouvoir s'effectuer sur le vrai du navire.

Le centre de gravité de la coupe AEB de la caisse submergée par l'eau est en Γ (milieu du segment FE); le nouveau centre de gravité de la caisse de ligne horizontale aFb est en γ, la droite γz, ou nouvelle verticale, est orthogonale à la nouvelle horizontale ab. Les verticales EZ et γz se coupent en un point g : le *métacentre* du navire. C'est à ce point que va être ici réduite l'étude de la stabilité de la caisse. Selon que le centre de gravité G du bateau est au-dessous ou au-dessus du point g il y a ou non stabilité. L'expression "méta" dans "métacentre" dit explicitement que pour qu'il y ait stabilité il faut que le métacentre soit au-dessus du centre de gravité G : le métacentre désigne un maximum à ne pas dépasser. Voilà ce qu'il faut établir, et à ce seul énoncé on comprend que la démonstration ne peut résulter d'un jeu d'égalités ou d'équations; un maximum relève d'une autre analyse que celle résultant de l'algèbre ordinaire. Il faut donc aussi voir sur la figure le centre de gravité du bateau. Mais c'est un centre de gravité de la coupe, un virtuel. Ceci sera précisé par Bouguer.

Les dessins suivants, utilisant les vecteurs pour représenter les deux forces contraires en jeu, poids et poussée d'Archimède, justifient aussitôt à nos yeux le métacentre dans le cas général. La question est de savoir où est le métacentre dans le cas de la caisse.

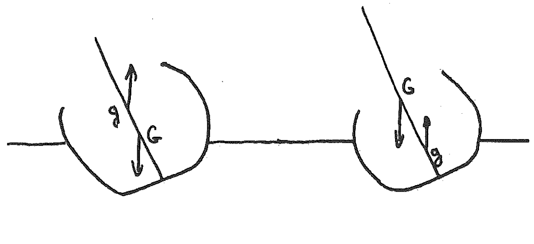


Figure 3

À droite, cas où g est au-dessus de G. Il y a un couple qui permet le redressement du mouvement d'inclinaison, donc c'est une situation stable.
À gauche, cas où les positions verticales de g et G sont inversées, le couple contribue à l'aggravation de l'inclinaison, donc la situation est instable.

Les vecteurs ne font pas partie du vocabulaire ni de l'horizon mental d'un Bouguer, ni d'ailleurs de celui de ses contemporains. Mais ce n'est pas la question que nous étudions présentement; nous voulons rendre compte des explications du calcul de Bouguer quant au point g, le métacentre, et de sa progression pour faire comprendre le calcul.

Car il fournit une fructueuse opposition entre deux méthodes. L'une qui est de calcul direct du point g parce que la forme de l'arche de Noé est bien particulière et donc le point γ,

préliminaire, peut se trouver facilement, indépendamment même du bougé de l'arche (c'est-à-dire indépendamment de la nature de l'angle d'inclinaison du navire, petit ou grand). Le calcul de géométrie analytique établit que, tant que le niveau de l'eau ne dépasse par la hauteur de l'arche, le point γ se trouve sur une parabole dont le sommet est en Γ. Bouguer ne fait pas ce calcul, car il le considère comme évident. L'autre calcul est celui d'un effet infinitésimal : Bouguer suppose que l'angle d'inclinaison est un infiniment petit, et il tente de trouver la position de γ infiniment voisine de celle de Γ, donc la direction de la droite $\Gamma\gamma$: bref, Bouguer cherche la tangente à la courbe que décrit le centre de caisse immergée γ. Insidieusement, à la manière de la persuasion, la démarche de Bouguer modifie alors la définition du métacentre, ou plutôt elle la complète. *A priori*, le point g dépend de l'inclinaison du navire, et il y a autant de métacentres qu'il y a d'inclinaisons. La Figure 3 est celle d'une seule inclinaison. Il faut voir qu'il y a en fait une courbe métacentrique. Mais est d'abord intéressante la position limite du point g lorsque l'inclinaison tend vers 0. L'autre calcul de Bouguer est destiné à montrer à la fois la tangente à cette courbe en g et l'existence même de cette courbe, sa forme. Et c'est la dépendance avec une autre courbe qui est expliquée. Cette autre courbe est celle que décrit le centre γ de la caisse, une parabole. Elle a une tangente en Γ. On peut confronter les deux calculs, celui de la parabole et celui de la courbe en général : dans cette confrontation, il y a un apprentissage.

Pour Bouguer, cet apprentissage n'est pas celui du calcul différentiel, mais celui du calcul infinitésimal : nous avons perdu ce sens aujourd'hui, mais il était usuel au milieu du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, et il est resté en fait en physique mathématique *grosso modo* jusqu'à nos jours. Ne parlons pas de rigueur, ce mot terrorisant : c'est un style qui est en cause, et par conséquent une pédagogie. Bouguer ne se limite pas à la caisse de Noé : il donne tout de suite la situation générale, et la représente sur un dessin que nous allons souvent retrouver. C'est le dessin où toutes les explications se nouent.

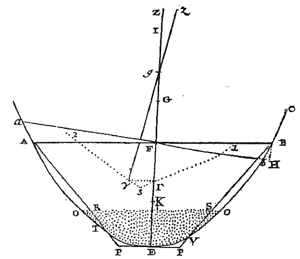


Figure 4 : C'est la figure 54 du *Traité du Navire*

Le sens du métacentre

Le métacentre apparaît de façon centrale dans le *Traité du navire*, lorsque déjà plus de deux cent cinquante pages ont été écrites. La longue table analytique des matières qui vient en premier dans l'ouvrage indique l'ordre que le professeur a choisi d'offrir à son lecteur. Trois livres, d'abord une description des termes de marine et des procédés de construction, ensuite une théorie du vaisseau en équilibre sur l'eau qu'organise le métacentre, et enfin une théorie du vaisseau en marche, d'où le métacentre ne disparaît pas. Ce plan paraît imparable dans sa banalité même.

Le métacentre est construit au livre second comme le pendant du centre de gravité décrit à la première section dont, à la seconde section, il limite la position supérieure, du moins si l'on veut que le navire soit stable "lorsqu'il ne cingle pas". Tel est le sens de "méta" dans métacentre : "De la plus grande hauteur à laquelle on peut mettre le centre de gravité du Vaisseau" est le titre adopté par Bouguer pour cette seconde section. Le lien avec le centre de gravité a valeur épistémologique : nous allons le voir car il n'est pas naturel qu'une limite supérieure relève d'un calcul analogue à celui des points qu'elle borde. Le métacentre est un centre de gravité, non par la physique qui le gouverne, mais par le calcul qui l'obtient.

La pensée du métacentre provient d'un phénomène réduit au bon sens, celui de l'équilibre d'un bouchon sur l'eau, qui ne peut être le même verticalement ou horizontalement. Telle est l'expérience de base dont la réduction fournit deux points seulement, le centre de gravité du navire d'une part et le centre de gravité de la carène immergée d'autre part. Ce dernier point est celui à partir duquel se porte verticalement la poussée d'Archimède[8].

> Le centre de gravité de la carène étant déterminé, on connoîtra le point dans lequel se réunit la poussée de l'eau, & d'où part la verticale sur laquelle cette puissance agit.[. . .] Mais ce n'est pas encore assez pour que la situation du Navire soit permanente : car les parties de l'eau, de même que celles de toutes les autres liqueurs, sont dans un mouvement continuel ; & il arrive sans cesse que quelqu'unes de ces parties chocquent la carène plus d'un côté que de l'autre ; ce qui suffiroit pour produire une inclinaison qui ne seroit d'abord, si on le veut, qu'insensible ; mais qui ne manqueroit jamais d'augmenter comme d'elle-même, si le centre du Navire étoit trop haut. Il n'y a personne qui n'ait éprouvé quelquefois quelque chose de semblable, en tâchant de faire floter de bout un morceau de bois, ou quelqu'autre corps leger, qui avoit beaucoup de longueur. Il s'agissoit d'abord de le placer verticalement, & de mettre son centre de gravité exactement au-dessus de celui de l'espace qu'il occupoit dans l'eau par son extrémité : mais quoiqu'on réussît peut-être à donner cette situation précise, la moindre cause extérieure suffisoit pour l'alterer ; et aussi-tôt que le corps avoit commencé une fois à s'incliner, sa propre pesanteur d'un côté, et la poussée verticale de l'eau de l'autre, tendoient conjointement à le faire incliner davantage, & à le faire tomber[9].

La conclusion de l'analogie est la suivante : "Il n'est que trop certain que la même chose doit arriver à un Navire, dont le centre de gravité est trop élevé". Sept pages plus loin, et sept pages d'un modeste format in-4°, alors même que le lecteur n'était pas supposé connaître le Calcul, Bouguer livre la formule qui, sur une verticale, fournit la distance séparant le métacentre g du centre de gravité Γ de la carène immergée, ou hauteur métacentrique[10].

[8]A titre d'une étude de la pensée vectorielle avant la lettre, il pourrait être intéressant de noter dans l'œuvre de Bouguer les différentes techniques d'application d'une force composée en un seul point (le travail sur la mâture est différent à ce propos de celui sur la poussée d'Archimède, et il y eut même une polémique à l'Académie à ce propos).

[9]Pierre Bouguer, *Traité du navire, de sa construction, et de ses mouvemens*, Paris, Jombert, 1746, livre II, section II, chapitre II, pp. 254-255. Cette référence sera abrégée en T.N. Je garde l'orthographe de Bouguer car elle est nettement plus anarchique que celle des mémoires académiques usuels. Je n'ai pas d'interprétation particulière de ce fait, alors que Bouguer est un esprit très cultivé, érudit même, mais volontiers exaspéré par les mondanités, et particulièrement les mondanités parisiennes. Peut-être aussi faut-il compter avec son emploi de la langue des professionnels de la mer ! Il est toutefois surprenant de constater que selon les bibliothèques, les ouvrages datés de 1746 ont une autre orthographe différente. Un autre exemplaire présente par exemple la correction pour le verbe "choquer", mais oublie cette fois l'accent au mot "carène". J'avoue être étonné du fait que ce sont les exemplaires à la meilleure orthographe qui sont ceux où les formules mathématiques sont les moins bien présentées, avec des erreurs de notations. L'annexe reproduit l'exemplaire dont les formules mathématiques comprennent le moins de fautes dans les formules. N'oublions pas que la correction des épreuves à cette époque, ne revenait pas toujours à l'auteur.

[10]Figures et formules ont été aménagées par rapport à l'original, afin de respecter les usages actuels. Ce n'est qu'au début du XIX[ème] siècle, et sous l'impulsion de Fourier, que l'on se mit à noter les bornes supérieure et inférieure d'une intégrale définie. Le signe de l'intégrale, inventé par Leibniz comme un S étiré à partir de *summa*,

(1) $\Gamma g = \frac{2}{3p}\int_{x_0}^{x_n} y^3 dx$
où p désigne le volume de la carène immergée, x_0 et x_n deux valeurs limites d'un pont horizontal du bateau, repéré en x selon l'axe transversal, et découpé en tranches régulièrement espacées (Figure 5). Ce sont des extraits de ces pages qui sont présentés en premier dans cet atelier, avec une orthographe modernisée.

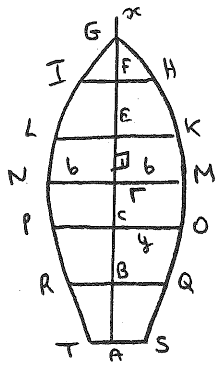


Figure 5

Découpage d'un navire sur un plan horizontal et selon la ligne de flottaison pour le calcul du métacentre. La variable x est sur l'axe ici vertical (mais néanmoins horizontal sur le bateau), et y à l'horizontale. L'origine, non décrite, est à l'intersection de AG et NM, à la plus grande largeur du bateau, largeur notée 2b.

Mon propos est maintenant d'expliquer toute la didactique qui est à l'œuvre au cours des sept pages qui font accéder à la formule (1). Car ce qu'il y a de spectaculaire dans la formule (1), celle qui fournit la stabilité du navire ou non, est que le centre de gravité du navire n'intervient pas. Le métacentre ne dépend que de la forme extérieure du bateau; il provient donc de la seule géométrie. Ou plus précisément, il ne dépend que de la forme de la carène au niveau de la ligne de flottaison. On retrouve avec cette ligne un peu de réalité physique. La géométrie ne serait-elle pas trop mince ?

Quant à l'intérêt du calcul du métacentre, un dessin suffira pour expliquer une situation fréquemment catastrophique pour un navire, survenant généralement lors de son lancement, une opération jugée délicate dans la première moitié du siècle des Lumières.

s'imposa rapidement. Pourtant, dans le *Traité*, Bouguer adopte un S majuscule et note $\frac{2Sy^3dx}{3p}$. Il y a quelque chose de fascinant dans la simplicité de la notation de Leibniz, pour une notion qui mit plus d'un siècle pour entrer dans les programmes scolaires.

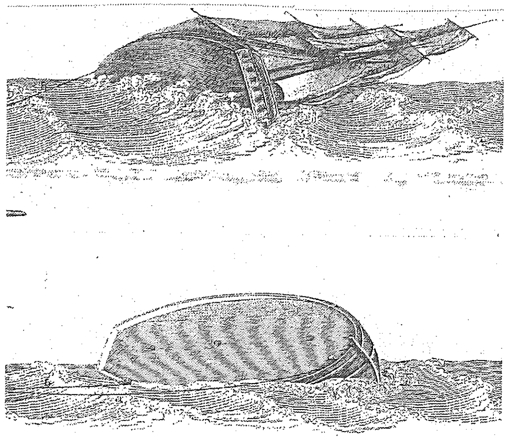


Figure 6

Interprétation nécessaire du calcul intégral : un exercice de familiarisation

Avant toute conséquence nautique de la formule (1), Bouguer prévient que l'intégrale qui y figure ne doit nullement effrayer. Car on peut en saisir la signification par la seule valeur numérique : "nous ne comptons pas comme une difficulté dans l'usage qu'on peut faire de cette formule, la nécessité où l'on est de trouver la valeur $\mathrm{S}y^3\mathrm{dx}$"[11]. Est alors donné le calcul explicite selon les tranches en lesquelles le navire a été divisé.

> Si l'on supose que la tranche horisontale du Navire faite à fleur d'eau, ait 100 pieds de long, & que les demi-largeurs mesurées à 12 $\frac{1}{2}$ pieds de distance les unes des autres, soient, en commençant par l'extrémité de la prouë, de 1 pied, de 9, de 12, de 13 $\frac{1}{2}$, de 13 $\frac{1}{2}$, de 12 $\frac{1}{2}$, de 11 $\frac{1}{2}$, de 9 $\frac{1}{2}$, & de 7 $\frac{1}{2}$, on trouvera aisément par la Méthode expliquée dans le second Chapitre de la Section précédente, l'intégrale $\mathrm{S}y^3\mathrm{dx}$: car on aura 1,729, 1728, 2460 $\frac{3}{8}$, 2460 $\frac{3}{8}$, 1953 $\frac{1}{8}$, 1520 $\frac{7}{8}$, 857 $\frac{3}{8}$, & 421 $\frac{7}{8}$ pour les neuf cubes y^3; et si on ajoute ensemble tous ces nombres, mais ne faisant entrer dans l'addition que la seule moitié du premier et du dernier, & qu'on multiplie la somme par 12 $\frac{1}{2}$ qui est la distance d'une largeur à l'autre, il viendra 149 006. Après cela il ne restera plus qu'à diviser les $\frac{2}{3}$ de ce nombre par la solidité p de la carène, pour avoir la hauteur Γg.

Nous lisons donc

$$\int_{x_0}^{x_n} y^3 dx = \left[\frac{1}{2}y_0^3 + y_1^3 + \ldots + y_{n-1}^3 + \frac{1}{2}y_n^3\right] h_n \qquad (2)$$

avec $y_i = y(x_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$, et $h_n = (x_i - x_0) = (x_2 - x_1) = \ldots = (x_n - x_{n-1}) = \frac{1}{n}(x_n - x_0)$, et pour la valeur de l'entier n égale à 8. Une figure sert aujourd'hui à faire comprendre la méthode des trapèzes qui permet d'approcher l'intégrale.

[11]T.N., p. 262.

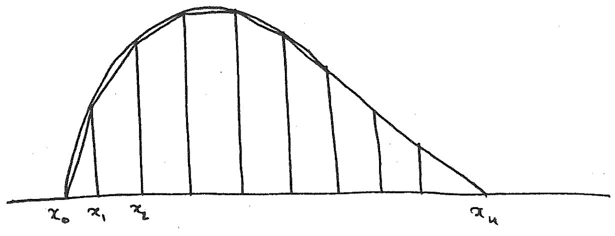


Figure 7
Calcul numérique d'une intégrale (méthode des trapèzes)

Cette figure n'est pas dans le *Traité du Navire*. Non que Bouguer répugne aux figures, mais pourrait-on dire, son utilisation des figures est épistémologique. Ainsi la Figure 5, qui est dans l'original, sert d'image pour comprendre le calcul, mais non de référence en ce sens que les calculs effectifs n'y sont pas repérés (il y a un autre nombre de tranches que le nombre 8 adopté dans l'exemple choisi par Bouguer). La figure est donc une aide pédagogique, non un raisonnement. Dans le discours explicatif, si nous lisons effectivement la méthode des trapèzes pour le calcul d'une intégrale, cette formule n'a pas besoin du support figuré et le mot trapèze, que nous utilisons comme repère aujourd'hui, n'est même pas utilisé. C'est que l'intégrale, pour Bouguer, n'a pas besoin d'être conçue comme une aire. L'aide de la Figure 7 serait contre productif. Pour le lecteur auquel Bouguer s'adresse, la formule (2) sert de repère quant à l'existence même de l'intégrale.

Bouguer poursuit en examinant un navire dont la nef est de forme ellipsoïdale et la "solidité" de 16 971 pieds cubiques, de sorte qu'il y a

> 5 $\frac{85}{100}$ pieds pour la hauteur de métacentre g au-dessus du centre de gravité Γ de la carène. Supposé de plus que ce dernier centre soit plongé dans l'eau de 4 $\frac{1}{2}$ pieds ou des $\frac{3}{8}$ de la profondeur, comme cela se trouve dans l'ellipsoïde, le point g qui est le terme ou la limite de la plus grande hauteur du centre de gravité du Navire, sera élevé d'environ 1 pied 4 pouces au-dessus de la surface de la Mer[12].

Le lecteur sait ou devine que les données numériques n'ont rien d'empirique : elles sont calculées par la mathématique au terme d'une théorie. Comme les bateaux en forme d'ellipsoïde ne sont pas habituels, mais il y en a, l'avantage de l'explication est surtout de montrer que le calcul gère des situations complexes dès que l'on connaît la ligne de flottaison, qui détermine le centre de carène. Aussi bien, c'est un ensemble de calculs qui doit aboutir au métacentre. Ces calculs se trouvent être dans le genre même des calculs effectués pour le centre de gravité. Il va falloir le vérifier.

Des exercices pour l'atelier

Le calcul du métacentre que nous allons suivre est donné par Bouguer comme général, pour une carène quelconque. Je propose de reprendre ces explications dans le cas de l'arche de Noé, c'est-à-dire le cas où toutes les coupes transversales du bateau sont égales et de forme

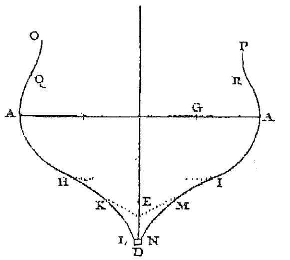
[12]T.N., livre II, section II, chap.IV, pp. 262-263.

rectangulaire. Il y aurait à trouver la parabole sur laquelle varie le centre de carène γ et donc la développée de cette parabole comme courbe métacentrique de la caisse. Le but de cet exercice serait de voir si Bouguer pouvait, avec avantage, se restreindre au cas de la caisse pour faire comprendre son calcul du métacentre et sa présentation du calcul intégral.

Comme la courbe métacentrique est la développée de la parabole, une courbe facile à construire, on pourra aussi, par l'informatique, vérifier l'effet d'un changement de ligne de flottaison. Et visualiser la correspondance entre la courbe du centre de carène et la courbe métacentrique.

Le cas d'un bateau de forme ellipsoïale pourrait être traité, avec les données numériques mêmes de Bouguer. Il y avait effectivement des carènes elliptiques au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle.

Un tout autre exercice serait de reconstituer les méthodes géométriques utilisées pour dessiner une carène comme celle ci-dessous.



Un exercice de Bouguer

Bouguer avec le métacentre donne à lire le calcul intégral. On pourra dire qu'il ne donne à lire de ce calcul que ce dont il a besoin pour le métacentre; le fait remarquable est qu'il n'ait par besoin d'une référence mathématique extérieure, et qu'il ne fasse pas appel à un avoir prérequis du lecteur.

Avant toutefois de lire à notre tour ce qui précède la formule (1), qui est "illustrée" par la formule (2), il faut envisager ce que Bouguer a l'air de présenter comme une simple application de la formule intégrale donnant le métacentre.

> On pourra apliquer notre régle avec la même facilité à tous les Vaisseaux : mais on viendra à bout de la rendre plus simple, jusques-la qu'on pourra l'employer souvent sans calcul, lorsque toutes les coupes verticales de la carène faites parallèlement à AEB, seront des figures semblables[13].

C'est en particulier le cas de l'arche de Noé. Et Bouguer énonce alors un résultat sur le métacentre, cette fois sans formule intégrale, et dans le langage écrit particulier de la théorie des proportions que nous avons du mal aujourd'hui à suivre.

> Le produit de la coupe AEB par la quantité FK, dont son centre de gravité K est plongé dans l'eau, est au $\frac{2}{3}$ du cube FB^3 de la demi-largeur FB, comme la quantité FΓ dont le centre de gravité de la carène est enfoncé dans l'eau, est à la hauteur Γg du métacentre g au-dessus de ce dernier centre.

[13]T.N., p. 263.

Nous lisons une formule qui apparaît exacte du point de vue de l'homogénéité, dès lors que l'on conçoit que AEB désigne une aire (les longueurs géométriques sont ici naturellement comptées positivement.

$$\frac{FK.AEB}{\frac{2}{3}FB^3} = \frac{F\Gamma}{\Gamma g}. \tag{3}$$

Nous repérons les lettres sur la Figure 9 jointe, simplifiée par rapport à celle fournie par Bouguer. Par souci d'économie du nombre des figures fournies par planches rassemblées dans le livre, il rajoute sur une même figure des éléments qui serviront à d'autres explications. Mais il joue aussi de ces superpositions. Ainsi, dans la Figure 9, il faut distinguer entre ce qui relève du bateau, à trois dimensions donc, et son centre de gravité, la "solidité" que la carène délimite (volume), et ce qui relève de la coupe. Mais de toutes les coupes analogues doit se déduire la solidité, et c'est ce qu'il faut que cette figure fasse comprendre.

K	centre de gravité de la coupe de la carène (immergée)
g	métacentre
Γ	centre de gravité de la carène du bateau (en fait projection de ce centre sur la coupe)
F	point central sur la ligne horizontale de flottaison AB
AEB	coupe de la carène, et toutes les autres coupes lui sont supposées semblables pour le calcul

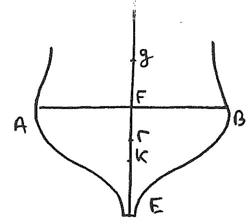


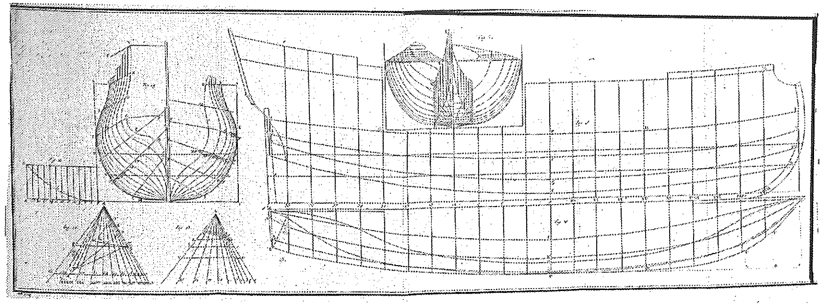
Figure 9
Coupe de la carène du navire entrepris

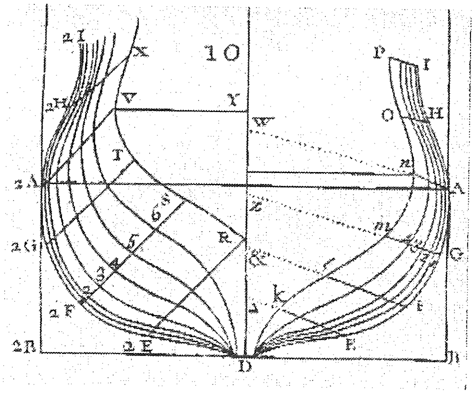
La formule (3) n'est pas une application de la formule (1); car (3) n'est pas déduite de (1) seulement. Certes (1) va être utilisée, mais à titre de comparaison. Et c'est cette comparaison qui fait compréhension. Bouguer pourrait donner une nouvelle preuve de (1), preuve adaptée au cas d'un bateau dont les coupes transversales sont toutes semblables. En comparant avec (1), il déduit (3), formule d'où toute intégrale a disparu, et d'où le centre de gravité G du bateau a lui aussi disparu. Ceci étant lié à cela. La ligne de flottaison étant le repère physique, le repère réel de cette géométrie de la coupe.

Mais la démonstration de (3) n'est pas placée comme une illustration ou simplification de (1); elle a pour but de montrer que le calcul intégral qui a été conduit pour établir (1) est plus simple que le calcul mené sur les vaisseaux, avec maniement des proportions, usuel mais inexact en général. L'intervention du point F, sur la l'horizontale de flottaison, correspond à l'habitude des professionnels de la marine. Il y avait des procédures antérieures de calcul, et elles font partie du savoir pratique supposé du lecteur de Bouguer; mais il s'agit pour lui de les faire oublier. En montrant que le calcul intégral obtient plus et plus vite dans les cas mêmes où l'on savait calculer précédemment. Les procédures anciennes tournaient essentiellement autour de la règle de trois, c'est-à-dire les proportions et les analogies qui régissent la représentation du bateau.

La nouvelle représentation est celle de la division en tranches, de la sommation des parties, bref de la mise du bateau sous la coupe réglée de l'analyse, de la division et de la sommation, et du calcul intégral. L'organisation du nouveau jeu intégral permet une autre généralité, une bien meilleure adéquation à la réalité architecturale du bateau, à sa construction même. Et il nous faut alors voir la façon dont ces bateaux étaient représentés par les constructeurs de la marine;

il nous faut pour comprendre l'organisation pédagogique et scientifique du texte de Bouguer, retrouver le savoir sur lequel il s'appuie.





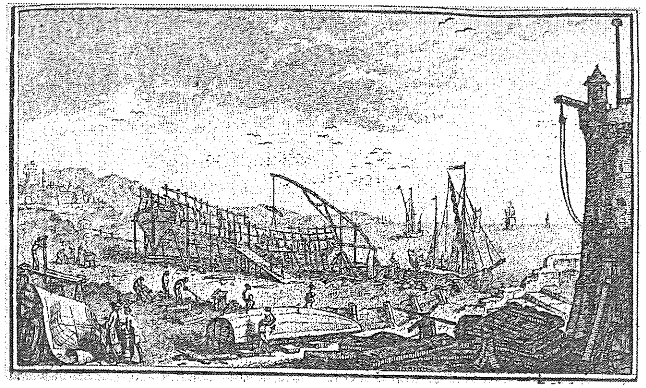


Figure 10

Quelques représentations de coupes de bateaux, connues sous le nom de plans de formes et disponibles bien avant la parution du *Traité du navire* de Bouguer. Cet auteur leur donne une interprétation de calcul intégral; le plan de formes devient le document fondamental de toute l'architecture navale, seulement remplacé aujourd'hui par les représentations d'ordinateur en 3D. Le premier dessin est ici tiré de *l'Examen maritime, théorique et pratique, ou traité de méchanique appliquée à la construction et à la manœuvre des vaisseaux et autres Bâtimens*, traduit de l'espagnol par le Nantais Pierre Lévêque, publié à Nantes en deux tomes en 1783, chez A.J. Malassis. Des plans de formes sont directement utilisés dans le *Traité du Navire*, et le deuxième dessin est l'un d'entre eux. L'importance même du plan de forme est signalé par une gravure qui est donnée par Bouguer. Les ingénieurs sont groupés autour de ce plan, ainsi attesté sur le chantier même.

En propagandiste et pédagogue remarquable, Bouguer conclut que le nouveau calcul s'avère presque "sans calcul" par rapport à l'ancien; il est non seulement naturel, mais économe de moyens par rapport au calcul par les proportions. L'exercice auquel se livre Bouguer est donc tactique. Il n'est pas encore nécessaire de disposer d'une définition mathématique du métacentre pour pouvoir suivre la démonstration de (3). En outre, le lecteur doit se rendre compte que le calcul de $F\Gamma$ (avec le centre de gravité Γ) est formellement le même que celui de Γg (avec le métacentre g), et ne peut qu'être le même.

> Les Lecteurs un peu versés dans la Statique, doivent voir déjà l'origine de ce théorème, ou de cette seconde régle, dans la conformité qu'il y a entre l'expression $\frac{2Sy^3dx}{3p}$ de Γg, & celle qu'on sçait qu'a $F\Gamma$, qui ne doit être, dans la circonstance présente, que $\frac{Sy^3dx}{p}$ affectée de quelques constantes.

La force de la mathématique est d'expliquer la raison de constantes particulières dans des formules.

Bouguer opère par une sorte de familiarité du lecteur particulier auquel il s'adresse avec le Calcul intégral; il se réfère à une connaissance de ce Calcul que procure celle de la Statique. Aucune référence n'est donnée, et il ne peut s'agir que de la nouvelle statique, celle qui a été réorganisée par le calcul intégral, au moins dans des traités savants, notamment par l'interprétation du centre de gravité. Cette statique est conçue par Bouguer comme lieu originaire du Calcul; la pratique de cette statique correspond au jaugeage des navires, à leurs centres de gravité et mêmes aux "moments" que ces centres font intervenir. De tels calculs sont ceux qui auraient fait "naître" le calcul intégral, semble dire Bouguer. Mais il n'y pas besoin chez lui de convoquer une histoire; c'est dans les termes d'un savoir déjà connu, ou supposé connu du lecteur qu'il donne à lire ses explications. Une histoire fournirait un passé qu'il s'agit d'oublier. Grâce à (3), le calcul qu'il a fourni du métacentre en (1) se donne à voir à la fois comme conception et procédure générale.

On pourrait ici se donner le temps de situer effectivement la Statique dans le cadre de l'histoire des mathématiques, et peut-être fournir une histoire des mathématiques et du Calcul prenant cette Statique des centres de gravité comme paradigme. Ce serait sortir du propos de cet atelier qui est de rendre compte d'une façon d'enseigner; ce serait aussi aller à l'encontre de la pédagogie de Bouguer qui choisit une présentation du calcul intégral. Justifier ou critiquer les références que Bouguer fait à l'histoire du Calcul relève d'une autre démarche proprement historienne. C'est bien sûr cette démarche là qu'il faut utiliser si l'on entend comparer l'innovation de Bouguer et celle d'Euler qui présente le métacentre dans sa *Scientia Navalis* de 1749.

Je raccourcis le texte de Bouguer pour le calcul de FΓ, en écrivant sous forme de fractions les proportions qui y figurent, et je souligne à chaque étape les propriétés de calcul intégral dûment utilisées, et ainsi objectivées par l'auteur. Mon commentaire n'est pas destiné à améliorer l'exposé de Bouguer, ni à préciser sa place dans l'histoire des mathématiques, ou à en effectuer une restitution lisible aujourd'hui en explicitant ses différents moyens. Il a pour but d'en faire ressortir la structure didactique. Le lecteur pourra comparer avec le texte original de Pierre Bouguer, donné en annexe, et mis en français moderne puisque c'est le contenu scientifique qui est l'objectif.

1°. Calcul de l'aire $\bar{A}$ (ou "étendue") d'une coupe quelconque de la carène parallèle au plan AEB, donc coupe pour un x donné (voir Figure 9 pour le repérage) et sous l'hypothèse de la similitude de toutes ces coupes. Le calcul donne évidemment :

$$\frac{\bar{A}}{y^2} = \frac{AEB}{FB^2}.$$

2°. Calcul de fk, relatif à une coupe quelconque de la carène, les minuscules ayant pour cette coupe les significations homologues qu'ont les majuscules pour la coupe AEB [de la Figure 4].

$$\frac{fk}{y} = \frac{FK}{FB}.$$

La linéarité ainsi exhibée de l'intégrale démontre que le rapport des distances du centre de gravité à un point d'une figure homologue à une autre est le rapport de similitude. La géométrie élémentaire ne peut envisager une telle généralité. Le lecteur a appris cette propriété de l'intégrale qu'il peut vérifier sur la formule pourtant approchée des trapèzes.

3°. Calcul du "moment de chaque élément infinitésimal" par rapport à la surface de l'eau".

L'objectif est le calcul du centre de gravité K de toute la carène, qui doit certes provenir de la connaissance du centre de gravité de chacune des coupes semblables, mais ne peut résulter d'une simple sommation, ou intégrale vectorielle comme nous le ferions aujourd'hui. Bouguer reste au niveau d'une coordonnée, ici en x selon l'axe AG (Figure 9) et prépare la sommation

en faisant intervenir le "moment", un scalaire donc, produit d'une distance par une aire en l'occurrence : produit de la distance fk par la "solidité" de l'élément infinitésimal dC. Ce dernier est le produit de l'aire $\bar{A}$ par dx.

$$fk.\bar{A}.dx = \frac{FK}{FB}y.y^2\frac{AEB}{FB^2}dx = \frac{FK.AEB}{FB^3}y^3dx.$$

4°. Intégration du "moment" I sur toute la longueur du bateau, ce que nous calculons comme une intégrale entre deux extrémités

$$\frac{FK.AEB}{FB^3}\int_{x_0}^{x_n} y^3dx.$$

5°. La valeur de FG s'obtient en divisant cette intégrale I par la solidité p de la carène immergée (son volume, celui qui compte pour l'application du principe d'Archimède) :

$$F\Gamma = \frac{I}{p} = \frac{FK.AEB}{pFB^3}\int_{x_0}^{x_n} y^3dx. \tag{4}$$

Rappelons maintenant la formule (1), $\Gamma g = \frac{2}{3p}\int_{x_0}^{x_n} y^3dx$, car la comparaison entre les formules (1) et (4) donne effectivement (3). Est éliminée l'intégrale, aussi bien d'ailleurs que la solidité p. Et de (3), où (1) a joué, il est alors facile de déduire l'expression de Γg, la nouvelle relation (1) dans le cas envisagé, en fonction de FΓ et même Fg "qui exprime la plus grande hauteur que peut avoir le centre de gravité du navire au-dessus de la surface de l'eau"[14]. Le point F est entre Γ et g. Soit Fg = Γg-FΓ, ou $FG = \Gamma F\left(\frac{\frac{2}{3}FB^3}{FK.AEB} - 1\right)$, soit la relation

$$Fg = \frac{\frac{2}{3}F\Gamma.FB^3 - F\Gamma.FK.AEB}{FK.AEB}. \tag{5}$$

Ainsi, c'est le sens du calcul intégral, et non l'application d'une simple formule, qui donne à comprendre en retour comment la position du métacentre peut se calculer à partir de celle du centre de gravité de la carène[15], indépendamment du centre de gravité du navire, donc de sa charge effective.

La mathématisation de la stabilité du bateau n'en est pas terminée pour autant. Bouguer doit maintenant expliquer, et calculer l'enfoncement d'un vaisseau dans l'eau, autrement dit calculer la position du point Γ. Celle-ci n'est évidemment pas le seul fruit de la forme de la carène, et importe la répartition des masses dans le navire, qui fait la ligne d'horizon AB. De cette répartition, le centre de gravité du navire donne une première idée : mais cette fois il faut savoir tenir compte du fait que le bateau n'est pas homogène, car constitué de matériaux distincts, bois, métal, etc. La technique de calcul va pouvoir être la même que celle du métacentre, avec le jeu des divisions et des sommations. Le même usage du calcul intégral gère cette "division" en vue du centre de gravité. On saisit l'astuce didactique de Bouguer : le métacentre est plus facile à calculer que le centre de gravité. Grâce au calcul intégral réduit à l'idée de sommation, il y a unité de méthode et il y a donc une possible science navale, ou science des bateaux. Et il ne se présente aucune conception du calcul intégral comme inverse d'un calcul différentiel.

[14] La formule (5) est fournie par Bouguer avec une erreur, 3/2 au lieu de 2/3. Dans certains exemplaires de l'ouvrage, on lit d'ailleurs EB^3 au lieu de FB^3.

[15] Il y a une jolie illustration de cette assertion : Bouguer donne le calcul du métacentre de l'arche de Noé, bateau parallélépipédique (longueur 300 coudées, largeur 50 coudées, hauteur 30 coudées), à partir de la supposition que le "Bâtiment enfonçait dans les eaux du déluge de 10 coudées" (T.N., pp. 265-266).

Je n'ai pas à suivre Bouguer dans cette recherche d'un discours unique lié au calcul du centre de gravité, car je ne fais pas l'histoire de la science navale. Me suffit la conclusion que le métacentre a servi pour une compréhension nouvelle, ou améliorée, du centre de gravité et cette compréhension a valeur de calcul intégral.

> Si on veut maintenant tirer la plus grande utilité possible pour la pratique de la Théorie expliquée dans les Chapitres précédens, il faut chercher par la discussion de toutes les parties du Vaisseau qu'on se propose de construire, la situation qu'aura son centre de gravité[16].

Cette discussion est une division suivie d'une sommation.

Je reviens au métacentre, et à l'établissement préalable de la formule (1) qui a reçu une si forte interprétation. C'est en progressant à rebours de l'exposé de Bouguer que je peux saisir l'histoire que je cherche à dire. Souvent trop logiciens, les historiens des sciences n'apprécient pas cette façon de faire, qui n'est pas le compte-rendu exact du déroulement de la pensée. Je suis pourtant contraint à ce rebroussement parce que j'ai annoncé que je voulais appréhender un enseignement par son objectif, moins le sujet scientifique nommé que l'objet, la méthode en cause.

Ai-je encore besoin de convaincre que Bouguer agit comme un enseignant ? Evidemment, il y a plusieurs types d'enseignants, et maintenant c'est à une caractérisation du type auquel Bouguer appartient que je m'attache, en suivant ses explications pour la formule intégrale (1). Je traque alors ce qui n'appartient pas au calcul intégral proprement dit, et ce qui relève d'un calcul infinitésimal. Car il paraît évident que la sommation –celle que le calcul du centre de gravité fait comprendre– doit porter sur un élément différentiel. Or, Bouguer fait l'économie d'un tel calcul différentiel. Comment procède-t-il ? La question relève à la fois de la didactique et de l'épistémologie.

L'inspiration géométrique du calcul infinitésimal

La Figure 11, moins simplifiée que précédemment par rapport à celle originale de Bouguer, indique le bougé du bateau, la ligne aFbH étant la nouvelle horizontale, la première horizontale de la mer étant AFB. La seule intervention de la nature dans le dessin est ce changement de l'horizontale, et donc l'on a plutôt un bougé de la mer avec un bateau fixe. Ce qui est assez paradoxal. Mais pourquoi faudrait-il plus ? La droite γz est la nouvelle verticale, remplaçant l'ancienne verticale EZ, et l'intersection de ces deux verticales crée le métacentre g. J'en reste pour le moment à cette définition de ce point, qui est purement géométrique. On ne peut manquer de remarquer que cette définition n'est pas suffisante : car il y a autant de métacentres que de situations de flottaison.

A ceci près toutefois que le mouvement de AB en ab, ce que j'appelle le bougé du navire, est un infiniment petit. Selon l'usage, cette petitesse n'est pas indiquée sur la figure, où il n'entre visuellement que des grandeurs finies. Est donc en outre à expliquer par Bouguer la façon dont on peut ainsi calculer, c'est-à-dire ce que l'on peut négliger. Le calcul infinitésimal a cette fonction, et ce n'est donc pas le calcul différentiel auquel s'attache présentement Bouguer. Je n'ai pas assez fait saisir la différence, mais elle apparaîtra mieux bientôt.

[16]T.N., livre II, section II, chapitre VI, p. 275.

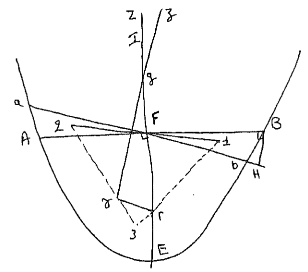


Figure 11 : Le bougé

On voit I, qui est le centre de gravité du navire tout entier mais n'intervient pas dans la démonstration de la formule (3), le métacentre g situé en dessous de I (il y a donc instabilité) et le centre Γ de la carène. La perpendiculaire en B à la droite AFB coupe la nouvelle horizontale aFb en H. Sur la figure pourtant générale, Bouguer a laissé les droites ab et AB se couper en F. Les points notés 1, 2, et 3 sont des centres de gravité.

Pour nous l'infiniment petit est une gêne : la définition du métacentre qui s'impose dans cette lecture est celle d'un point limite, quand l'infiniment petit tend vers 0. Bouguer n'agit pas ainsi : passer à la limite, c'est faire un calcul, c'est disposer d'un savoir qui conduit le calcul, et c'est surtout risquer de mélanger les résultats limites avec les éléments des figures de l'infiniment petit. Le maintien de ce dernier est donc une preuve de rigueur chez Bouguer, et d'ailleurs chez la plupart des mathématiciens de ce début du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle.

Le calcul infinitésimal joue effectivement de la Figure 11. Sur celle-ci, doit sauter aux yeux le quasi parallélisme de $\gamma\Gamma$ et de AB (il y a en fait parallélisme avec la droite *12*). Et tel est bien l'objet de la démonstration. S'opposent aussi à l'œil deux tracés. Le premier, en traits pleins, est la forme de la carène AEB; les seconds, en pointillés, désignent des lieux mathématiques, un virtuel donc, avec les points symptomatiquement notés *1*, *2* et *3*, et les deux autres points γ et Γ. Ce dernier point désigne le centre de gravité de la carène immergée (donc supposée homogène) dans la première position (centre de poussée), et γ le centre de gravité de la nouvelle carène (c'est-à-dire de la nouvelle partie immergée de la carène, et nouveau centre de la poussée d'Archimède dirigée selon γz). Inactif pour le moment, il y a aussi I, le centre de gravité du navire.

La Figure 11 ne donne qu'une coupe du vaisseau : il y a médiation du réel par un schéma irréaliste, et non prise en compte directe. Il y a donc analyse, mais on doit percevoir qu'il ne peut que s'agir d'une étape, et qu'il faudra bien passer au bateau en entier. Il faudra donc faire appel à un calcul propre et c'est le calcul intégral. Le rappel à la réalité est signalé par le point I, qui ne devrait pas être sur cette figure : en effet la coupe transversale n'est pas nécessairement dans le plan vertical du centre de gravité du navire tout entier. Autre façon de signaler le réel, donc la science nouvelle qui en rend compte, la coupe de la figure originale est remplie en son bas de pointillés, suggérant une charge, comme un lest.

C'est néanmoins la réalité virtuelle, si l'ose dire, qui permet au dessin de la coupe d'être comme animé, en ce sens que deux horizontales sont superposées AB et ab, pour un seul navire, ou plutôt une seule et même courbe. Elle n'en représente pas moins le bougé de la carène submergée, passant de AEB à aEb : de cette unicité de la carène doit se déduire une conservation, mais elle n'est explicite sur la figure qu'à partir de la position du point F, et nous la verrons exprimée par une égalité d'aire au cours du calcul.

Le dessin que j'ai dit animé est la trace rendue manifeste de la pensée infinitésimale en physique : c'était aussi la façon la plus normale pour un mathématicien de pratiquer le calcul infinitésimal dans les années 1740.

Si la construction de g est l'objectif, la première chose à trouver est bien le point γ. Bouguer le détermine comme résultat d'une composition de centres de gravité, et va donc faire fonctionner la technique du calcul intégral au sein même du calcul infinitésimal. Du moins c'est ce que nous pouvons dire, ayant déjà lu plus loin, ayant déjà appris son assimilation de l'origine du calcul intégral au calcul des centres de gravité. En liant ainsi l'infinitésimal et l'intégral, nous pourrions dire que Bouguer abolit l'étape qu'est le calcul différentiel vers le calcul intégral : une distinction qui avait été le fruit historique d'une entreprise didactique sur le Calcul, et n'était ni dans la pensée de Newton, ni dans celle de Leibniz. On ne peut le saisir qu'en suivant scrupuleusement la démarche expliquée par Bouguer[17].

L'intérieur de la carène du navire est décomposé en trois parties, les deux parties quasi triangulaires aAF, BFb, l'une nouvellement submergée et l'autre sortie des eaux et la partie AFbEA. Ces parties ont respectivement comme centres de gravité les points notés *1*, *2* et *3*. Le jeu consiste à calculer γ comme barycentre de *1* et *2*, et Γ comme barycentre de *1* et *3*. Le calcul n'a pas besoin d'être conduit par des équations et ne sont manipulées que des proportions. Car celles-ci disent aussi des directions, et il ne faut pas oublier qu'est d'abord recherché un parallélisme. Est à cet effet utilisé un succédané de calcul vectoriel, celui que nous pourrions mener aujourd'hui sur les centres de gravité. En effet, de ces proportions provient le parallélisme de la droite joignant *1* à *2* et de la droite joignant γ à Γ.

La démonstration est typiquement de géométrie élémentaire, à ceci près qu'elle concerne aussi des infiniment petits. La pratique géométrique est accentuée par le fait qu'il y a un invariant issu de la physique. Les deux aires AFa et BFb doivent être égales "puisque le Navire occupe le même espace dans la Mer avant et après son inclinaison"[18] : il n'y a pas augmentation du volume de la carène immergée, car le bateau ne pèse pas plus à l'équilibre qu'en mouvement. Telle est l'hypothèse de conservation qui gère le calcul, et qui explique qu'un seul dessin de carène soit fourni; le point F, milieu de AB est aussi l'intersection de ab et de AB (du moins en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur, ou considérant comme égaux les arcs aA et bB, ce qui est le cas de la caisse de Noé). Le bougé du navire, qu'ayant déjà fait de la mécanique nous lisons comme un déplacement virtuel, dû dans l'explication de Bouguer à des causes accidentelles –vent, vague, etc.–, n'est pas général.

Si 1Γ désigne la distance du point *1* à Γ, et AEbF l'aire de la surface ainsi délimitée, on dispose de

$$\frac{1\Gamma}{3\Gamma} = \frac{AEbF}{BFb}$$

selon le calcul caractéristique des centres de gravité. Et de même on a

$$\frac{2\gamma}{3\gamma} = \frac{AEbF}{AFa}.$$

[17]Et Bouguer n'a pas besoin de se justifier : le mathématicien fait ses choix. Alors que le commentaire, le commentaire même qualifié de scientifique, appartient au professeur. Et c'est bien pour cela qu'il y a une science, la didactique. Alors que le mathématicien pur, le mathématicien idéalisé, n'a qu'à s'occuper des concepts. De fait, le mathématicien professeur a son expérience personnelle, intime, de la didactique : le défaut est de penser que cette expérience présente un caractère scientifique. Il est rare qu'un professeur pense que sa vision est universelle, tant il maintient l'enseignement comme un art.

[18]T.N., p. 259.

De l'égalité des aires AFa et BFb, on déduit

$$\frac{1\Gamma}{3\Gamma} = \frac{2\gamma}{3\gamma}.$$

Cette proportion dit le parallélisme de la droite $\gamma\Gamma$ à la droite joignant *1* et *2*.

Le bougé étant un infiniment petit, cette droite est encore à peu près parallèle à l'horizontale de la mer en position initiale, soit la droite AB (la surface de l'eau). Voilà seulement la seconde instance de simplification du calcul infinitésimal[19], et plutôt d'ailleurs un passage à la limite : la position limite de la droite *12* est l'horizontale. Cette limite ainsi trouvée n'est pas réutilisée au cours du calcul qui se poursuit avec des quantités infinitésimales : il y a là une précaution évidente, qui fait sens pédagogique. En l'occurrence, a été trouvée la tangente en Γ à la courbe que décrit le centre de carène lorsqu'il y a mouvement du navire. De cette tangente et de cette courbe, Bouguer ne parle pas tout de suite; il ne mélange pas les niveaux, et la tangente appartient en fait au calcul différentiel. Elle viendra plus tard, mais ne sera pas traitée avec la même rigueur. Bouguer tolère des rigueurs différentes dans son exposé, et ceci est un signe particulièrement net de didactique.

Le calcul de la hauteur métacentrique : l'intégrale

En attendant, il faut poursuivre le calcul de façon quantitative si l'on veut en terminer avec la détermination du point γ. Parce que les points γ et Γ sont infiniment voisins, Bouguer ne peut qu'user des proportions du triangle caractéristique (le plus ancien instrument du calcul avec les infiniment petits), et exprimer l'égalité d'un rapport entre infiniment petits à un rapport entre quantités finies[20]. Bouguer agit, et n'explique pas : le lecteur est ou bien familiarisé déjà avec cette procédure, ou bien il la découvre. Et l'essentiel est qu'il en apprenne assez pour la connaître.

De $\frac{1\Gamma}{3\Gamma} = \frac{2\gamma}{3\gamma} = \frac{AEbF}{BFb}$, vient $\frac{1\Gamma+3\Gamma}{3\Gamma} = \frac{AEbF+BFb}{BFb}$, soit $\frac{13}{3\Gamma} = \frac{AEB}{BFb}$. Le parallélisme de *12* et de $\gamma\Gamma$ (remarquons bien que n'est pas utilisé le résultat limite du parallélisme à AB), fournit la proportion $\frac{13}{3\Gamma} = \frac{12}{\Gamma\gamma}$. D'où $\frac{12}{\Gamma\gamma} = \frac{AEB}{BFb}$. Est trouvée la proportion séparant les infiniment petits des quantités finies :

$$\frac{\Gamma\gamma}{BFb} = \frac{12}{AEB}. \tag{6}$$

> Ainsi on pourra trouver la distance $\Gamma\gamma$ des centres de gravité Γ&γ, aussitôt qu'on connoîtra la solidité de la carène AEB, la solidité de la petite partie BFb, & la distance *12* des centres de gravité des petites parties BFb & Afa; puisque ce sont là les trois premiers termes d'une proportion, dont la distance $\Gamma\gamma$ est la quatrieme[21].

Il reste bien trois termes à calculer pour déterminer $\Gamma\gamma$: un infiniment petit BFb, et deux quantités finies, 12 et AEB. Les calculs vont s'enchaîner, mais ne sont pas exactement ceux sur les quantités indiquées.

Car il n'est pas possible d'en rester à une coupe transversale du bateau; c'est la totalité de ce dernier qui compte. Le calcul intégral est là pour réaliser l'intégration des effets infiniment

[19]La conservation des aires fait intervenir le fait que l'on ait un mouvement infiniment petit, du moins pour une carène générale.

[20]Bouguer maintient ici le langage des proportions, sans utiliser des écritures symboliques, faisant apparaître l'expression infinitésimale comme quatrième proportionnelle.

[21]TN, p. 259.

petits. Il appartient à Bouguer de le montrer, en donnant à voir le Calcul. Et il y a un changement significatif de figure : de la coupe transversale (Figure 11), on passe à une coupe horizontale selon le plan de flottaison (analogue à la Figure 5). Un langage analytique gère ce passage d'une figure à l'autre, et il vient s'ajouter au langage géométrique des proportions jusqu'ici adopté. Afin de le remplacer. Il est vraisemblable qu'en 1746, c'était ce passage des proportions à l'écriture algébrique qui représentait la plus grande difficulté, et c'était donc là que la sollicitude didactique de Bouguer se montrait la plus prévenante. On ne pourra qu'entendre les paroles mêmes de Descartes dans la *Géométrie*.

> Je nomme x les parties de l'axe de cette coupe, ou les parties de la longueur du navire, & y les demi-largeurs ou ordonnées...[22].

Il n'était pas d'usage de préciser une origine et une orientation, car cela aurait contraint à utiliser des quantités négatives. Ce n'est pas manque de rigueur, juste une habitude de calcul, mais en contradiction avec l'apparente généralité de la variable x. On sent qu'une origine est pensée à l'abscisse x pour laquelle la largeur du bateau est maximale (notée b dans la Figure 5).

La décomposition du bateau révélée par la coupe de la Figure 11 avait pour but de montrer ce que nous appellerions l'intégrant, dans un plan orthogonal à celui de la coupe de la Figure 5. Celle-ci indique comment on va intégrer; elle ordonne. La désignation BFb n'est donc pas changée; c'est aussi bien une aire particulière selon une coupe particulière, une fonction de x comme aire générique (donc une intégrale possible) que le résultat même de cette intégration. Pour préciser, je me sens contraint à distinguer par les notations : BFb pour l'aire de la coupe particulière, BFb(x) pour l'aire de la coupe générale en x et (BFb) pour le volume constitué par l'empilement de toutes ces coupes. Mais c'est que ma pédagogie n'est pas celle de Bouguer qui ne va pas utiliser le vocabulaire des fonctions, en cela différent de Leonhard Euler qui présentait le calcul infinitésimal en 1748.

> Je considere après cela que le petit solide BFb qui sort de l'eau, & dont BFb n'est qu'une coupe, est formé d'une infinité de petits triangles verticaux, qui étant arrangés tout le long de la longueur du Navire à la distance infiniment petite dx les uns des autres, sont parallèles aux triangles BFb, & lui sont semblables.

C'est seulement ici qu'intervient la différentielle dx; elle est scansion du découpage des tranches, et elle n'a de jeu que pour permettre une sommation. La similitude est le jeu de ce calcul, mené de telle façon qu'est évitée, à nos yeux, une intégrale triple. Ainsi on peut dire que, fidèle à la géométrie analytique de Descartes, Bouguer évite une figure à trois dimensions. Il faut mieux dire le geste de Bouguer : il montre comment le calcul intégral qui permet de passer en trois dimensions, peut se mener en réduisant à une seule variable. Il n'applique pas une recette, ne donne bien sûr aucune référence : il raisonne directement, et c'est cela qui est la pratique du "transcendant". Qui est en plus donné à voir comme un élémentaire.

Aussi bien, l'utilisation d'une même notation pour désigner des choses différentes, la différentielle et l'intégrale, n'est pas une faute de logique : elle participe du sens du calcul que le lecteur doit acquérir. Hier comme aujourd'hui, on peut trouver qu'il y a danger pédagogique dans cette faute de logique; mais me paraît illogique de ne pas la concevoir comme procédé didactique voulu. La coupe transversale est devenue une tranche; la tranche est ordonnée par la variable x, et sa sommation se réduit à des grandeurs représentables sur une seule coupe où paraît alors le centre de gravité du navire tout entier, et le métacentre, qui n'est plus celui d'une coupe.

[22]TN., p. 260.

Pour le calcul de (BFb), un solide donc mais qui n'en est pas moins un infiniment petit, le raisonnement se comprend en termes de fonctions de la variable x, fonctions déterminées à partir de la coupe faite en AEb, où pour cet x, la longueur y vaut b. Les fonctions se déduisent simplement par similitude, ce qui évite de les nommer : nous avons dû déjà voir un tel fonctionnement à l'occasion du calcul de Γg.

Ainsi, la hauteur du triangle général BFb(x) vaut $\frac{e}{b}y$, où e désigne la hauteur infiniment petite du triangle BFb, ayant par définition un angle droit en B (Figure 11). Le volume élémentaire du prisme triangulaire est $\frac{e}{2b}y.ydx$. Soit

$$(BFb) = \frac{e}{2b}\int y^2dx.$$

Bouguer ne précise pas les bornes d'intégration, pas plus que ses contemporains.

Le calcul de la distance (*I2*) résulte d'une intégration de (*I2*)(x), distance elle-même calculée à partir de *I2*. Mais l'intégration ne peut pas automatiquement être celle de (*I2*)(x) : la règle de sommation est obligatoirement celle des centres de gravité. Il y a donc intégration d'un moment, et c'est le point majeur du calcul de Bouguer. Par division du bateau en deux, le calcul est d'abord celui de *I* F(x), qui donne $\frac{2}{3}y$ car on n'a compté que les infiniment petits d'ordre 1, y étant une fonction de x. L'intégrant devient $\frac{2}{3}y\frac{e}{2b}y^2$, un moment qui est le produit d'une distance par une aire. Et vient au total

$$\frac{2e}{6b}\int y^3dx.$$

Mais on n'obtiendra (*I2*) qu'en divisant encore par (BFb). Et il faut enfin multiplier par 2, car nous n'avons tenu compte que de la partie droite du bateau. On peut en effet le supposer symétrique par rapport à l'axe transversal, "flancs toujours égaux" explique Bouguer[23]. D'où :

$$(12) = \frac{4}{3}\frac{\int y^3dx}{\int y^2dx}.$$

Bouguer ne fait pas remarquer que, dans ce calcul, l'infiniment petit e a heureusement disparu : c'est au lecteur de comprendre. Et on a même là un critère que le lecteur doit se donner afin de s'assurer de sa compréhension réelle du calcul mené[24].

Bouguer ne calcule pas le dernier terme de la proportion (6) qui justifie toute cette procédure, à savoir le volume de la carène (AEB). Il se contente de lui donner un nom, p, "solidité" de la carène. Le lecteur doit encore comprendre que le calcul intégral permet aussi bien de calculer cette solidité en fonction des données géométriques de la carène : Bouguer y reviendra et montrera ainsi l'unité de la science navale. Cette solidité n'est pas le poids ou charge du navire, qui peut aussi se calculer par intégration.

On aura noté que la sommation, qui nous paraît constituer vraiment l'intégrale, ne pose aucun problème particulier à Bouguer : il ajoute d'après le principe des tranches "numérotées" par x et "espacées" par dx. C'est l'intégrale définie qui est en jeu, et Bouguer ne fait aucune

[23]Ces jeux de symétrie sont le plus souvent réglés pour éviter les questions de signe et d'orientation, dans cette géométrie qui n'est pas entièrement analytique. Plus loin, Bouguer corrigera dans le cas de non symétrie.

[24]J'ai bien conscience d'être aux limites mêmes de l'analyse que je mène sur la pratique didactique de Bouguer, interprétant positivement une absence d'indication. Mais je ne crois pas à la naïveté de Pierre Bouguer; je ne le prends pas pour un mathématicien idéalisé qui n'aurait d'yeux que pour les concepts. D'autres enseignants aveuglés par la logique croient que la pédagogie mathématique doit passer par une explicitation minutieuse de tous les calculs, au risque de confondre l'essentiel avec l'accessoire.

allusion à une interprétation par l'aire; il n'y a aucune place pour l'idée différentielle et pour l'interprétation de l'intégrale comme l'opération inverse de la différentiation.

Le calcul numérique, dont nous avons déjà vu l'expression, n'est donc pas une application de l'intégration. C'est une de ses formes. Plus tard, Bouguer précisera que le calcul intégral permet de traiter aussi bien le cas où un navire n'a pas de plan transversal de symétrie, écrivant alors au lieu d'une seule fonction y doublée, deux fonctions y et v de chaque côté, et "dx marque toujours les parties infiniment petites de la longueur du navire"[25].

> La démonstration qu'on a donnée est générale, & servant aussi bien dans le cas où la carène est un corps irrégulier des deux côtés, que lorsqu'elle a une figure régulière.

Il faut savoir que cette généralité n'est pas seulement le gage que la méthode utilisée est performante; la généralité fait comprendre le fonctionnement de la méthode. Sans aucun doute, la nouveauté pour les lecteurs de Bouguer est l'utilisation de la notion de fonction, devenue pour nous si évidente : n'est-elle pas aussi une des nouveautés majeures du Calcul, chez Leibniz et chez Newton ? Ceux-ci, et bien souvent leurs successeurs immédiats, diminuent la nouveauté fonctionnelle en faisant intervenir des courbes. C'est en tout cas ce qui permet l'interprétation de l'intégrale comme une aire. Bouguer ne la donne pas, et fait plutôt intervenir le concept fonctionnel. Sans le désigner par une notation indiquant explicitement la variable, celle-ci apparaissant uniquement avec le dx. N'est-ce pas, chez Bouguer, le seul objet de cette notation ?

Il est temps de rassembler tout ce qu'il a obtenu.

> Maintenant qu'on connoît la solidité $\frac{e}{2b}\int y^2dx$ de la petite partie BFb, & la distance $\frac{4}{3}\frac{\int y^3dx}{\int y^2dx}$ des centres de gravité *1* et *2*, il ne manque plus que de connoître la solidité de la carène pour pouvoir faire l'analogie indiquée[26].

Établie comme relation (6) sur une coupe, celle-ci se lit sur le bateau entier. Ce que je montre en utilisant l'écriture convenue avec des parenthèses

$$(6bis) \qquad \frac{(\Gamma\gamma)}{(BFb)} = \frac{(12)}{(AEB)}.$$

Mais il n'y a pas besoin d'une intégration pour valider (6bis); la démonstration de (6), lue dans l'espace toutefois, suffit. Bouguer ne l'explicite pas, et ne fait pas de figure spatiale. Par contre, il a fallu un calcul d'intégration pour exprimer chacun des termes de (6 bis). Cette relation fournit une autre relation notée (7), contenant à nouveau l'infiniment petit e, placé devant une intégrale. On a quand même pu simplifier en se débarrassant de l'intégrale du carré de y.

$$(7) \qquad (\Gamma\gamma) = \frac{2e}{3bp}\int y^3dx.$$

L'objectif est d'atteindre Γg. Et cette fois je n'ai plus à mettre des parenthèses. Car Γ est bien devenu le centre de gravité de la carène et g le métacentre. Il y a donc un dernier passage par une coupe, et c'est encore la Figure 11 qui sert. Sa versatilité est tout à fait remarquable dans la démonstration. Le dernier objectif est aisément accessible, par une similitude lisible sur la Figure 11, mais figure entendue comme une coupe prise dans le plan vertical passant pas le

[25] T.N., p. 273. Il est historiquement et épistémologiquement intéressant de noter l'écriture de Bouguer avec u et y à la place de la seule fonction y : $\Gamma g = \frac{Sdx \times y^3 + u^3}{3p}$

[26] T.N., p. 261. J'ai mis le signe intégral à la place du S de Bouguer.

centre de gravité du navire I et celui de la carène Γ, et orthogonal à l'axe transversal du bateau. Il y a en effet une similitude des triangles rectangles $\Gamma g\gamma$ et BFH, puisque leurs côtés respectifs sont orthogonaux. Jouent donc le parallélisme de $\Gamma\gamma$ et de FB, la verticalité de γz par rapport à ab et celle de ΓZ par rapport à l'horizontale FB. Ainsi $\frac{(\Gamma\gamma)}{\Gamma g} = \frac{BH}{BF} = \frac{e}{b}$. Exploitant (7), la proportion obtenue fait disparaître l'infiniment petit e, et vient effectivement la relation (1), notée (8), celle de la hauteur métacentrique, qui est ainsi démontrée :

$$(8) \qquad \Gamma g = \frac{2}{3p}\int_{x_0}^{x_n} y^3dx.$$

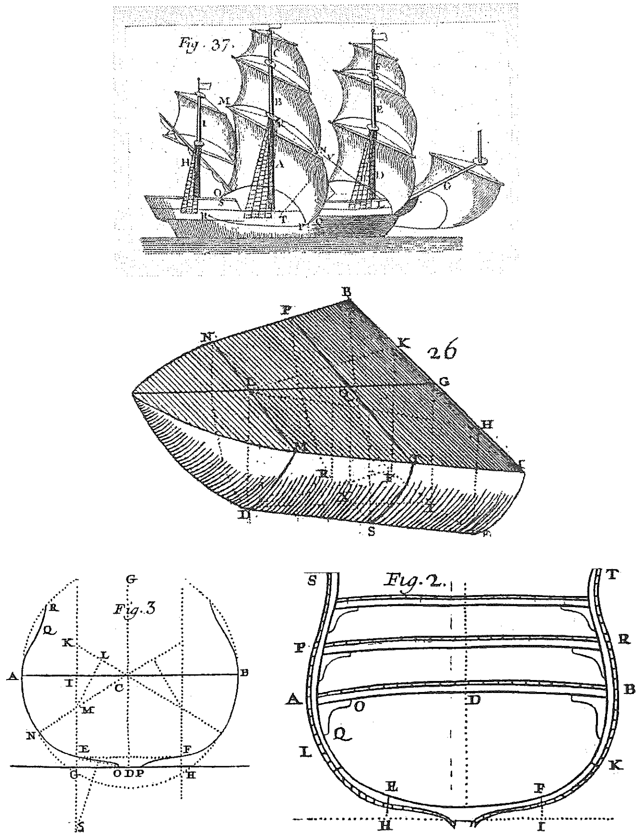


Figure 12

Quelques figures qui apparaissent dans le *Traité du Navire*, dans les planches. Celle qui sont dans l'espace sont très rares, mais nous avons donné ici des exemples. Ces figures sont traitées avec des ombres. La Figure 4, que nous avons utilisée en la réduisant comme Figure 11, joue quelquefois comme figure spatiale ainsi que nous l'avons vu pour la hauteur métacentrique.

Utilisation qualitative de la géométrie différentielle

Si Bouguer visait une illustration de l'intégrale, il pourrait s'arrêter là, et passer à l'exploitation de la formule (1). Mais il oublierait alors de démontrer le rôle de la forme de la carène; or dans l'intégrale de la relation (1), cette forme n'intervient que par la section horizontale du bateau, c'est-à-dire par sa ligne de flottaison. Est-ce physiquement raisonnable ? Le calcul intégral n'aurait-il pas inconsidérément réduit le réel du bateau ?

Bouguer dit tout le contraire. L'analyse n'est pas allée à son terme. Ce qu'on pourrait dire d'une autre manière, technique cette fois, ou plutôt synthétique : il n'a pas été rendu compte de la disparition de l'infiniment petit e dans l'établissement de la formule (8). Le chapitre V comble cette lacune : *Recherches plus étendues sur les métacentres.* C'est bien sûr le pluriel qui attire l'attention, renforcée par l'ironie de Bouguer sur l'assurance que l'on doit ou non avoir :

> Mais quoique les Recherches précédentes soient utiles, nous ne devons pas dissimuler qu'elles ne suffisent pas encore pour nous rassurer entierement sur nôtre état; parce que la solution que nous avons donnée, est limitée au cas trop particulier, dans lequel le Navire n'est exposé tout au plus qu'au choc irrégulier de quelques molécules d'eau ou d'air[27].

Il faut examiner le cas où le bougé du navire n'est pas un infiniment petit, mais une quantité finie. Pour mieux faire comprendre que ce que nous avions qualifié de mouvement virtuel est bel et bien un mouvement réel, Bouguer revient à l'origine toute pratique de son problème :

> On n'a que trop souvent des exemples de ce dangereux accident. Certains Navires conservent bien leur situation horizontale tant qu'ils sont dans le Port : mais aussitôt que quelque puissance un peu forte, comme l'impulsion du vent sur les voiles, les fait pencher d'une quantité un peu grande, ils ne se relevent que très difficilement; et ce qui est le comble du malheur, puisqu'il faut périr, ils continuent quelquefois à s'incliner, quoique la cause qui a fait commencer leur inclinaison, cesse d'agir[28].

Bouguer est d'autant plus alerte qu'il est sûr de son affaire : la disparition de e dans l'établissement de (8) montre que l'analyse peut se poursuivre, ou plutôt s'itérer à toute situation, et les mouvements infinitésimaux peuvent faire succession, à la manière même dont on somme en calcul intégral. Mais Bouguer n'estime pas nécessaire de le dire. Il lui suffit de montrer que la Figure 11, une nouvelle fois utilisée, n'est pas restreinte à une position d'équilibre en mer calme, ou d'une verticale terrestre; elle représente n'importe quelle position de flottaison. C'est dire que le raisonnement ne tient pas à ce que la ligne verticale EF divise le bateau en deux régions symétriques. Par contre, joue toujours l'utilisation d'un infiniment petit.

Ainsi la conclusion de calcul infinitésimal du parallélisme de $\Gamma\gamma$ à l'horizontale se transforme en un parallélisme de $\Gamma\gamma$ à la surface de l'eau. Chaque situation de flottaison entraîne donc l'existence d'un métacentre. Il y a non pas un métacentre, mais une *courbe métacentrique*, et cette courbe répond à la courbe des centres de carènes successivement envisagés. C'est par ce raisonnement "intégral" qu'est réintroduite la forme géométrique de la carène que la formule intégrale (8) semblait oublier; autrement dit, l'idée généralisée de métacentre parvient à prendre en compte la variation de la ligne de flottaison et les parois de la carène. Une figure est éloquente, et la correspondance qu'elle établit entre deux courbes montre bien que l'on a quitté l'analyse infinitésimale pour aborder la géométrie différentielle. Bouguer peut-il aussi servir de guide pour l'apprentissage de celle-ci ?

[27] T.N., p. 269.
[28] T.N., p. 269.

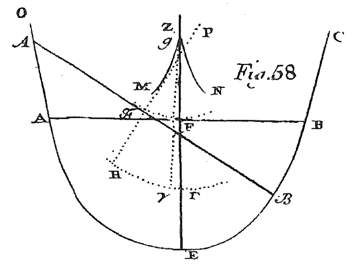


Figure 13

La courbe métacentrique MgN est construite à partir de la courbe (en pointillés) des centres de carène, et d'ailleurs de la courbe également en pointillés du point horizontal F (qui correspond à la variation de la ligne de flottaison). Cette Figure 13 est la figure originale de Bouguer (numérotée par lui figure 58). On voit bien qu'entre AB et $\mathcal{AB}$, il n'y a pas mouvement infiniment petit; d'ailleurs l'intersection F des deux droites n'est pas le milieu F de la droite AB. Le rappel qu'il y a un infiniment petit est fourni par la droite γg. Ce que l'œil doit voir par cette figure, c'est le parallélisme entre $\mathcal{AB}$ et la tangente en H à la courbe du centre de carène. On remarquera que Bouguer, s'il a transformé la Figure numérotée 4 –figure 54 dans le *Traité du Navire*– n'est pas passé à une figure dans l'espace.

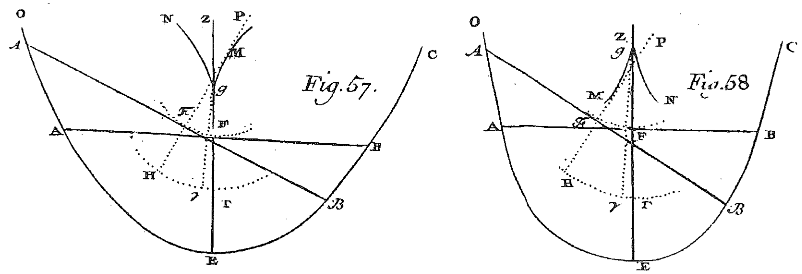
Le centre de carène est successivement en Γ, γ (bougé infiniment petit) ou H (bougé fini); la direction de verticalité est successivement ΓZ, γz, HP; les métacentres sont sur une courbe MgN et "la poussée de l'eau agit toujours selon les perpendiculaires à la courbe qui est le lieu géométrique des centres de gravité dans lesquels elle se réunit"[29]. Cette phrase suffit à faire saisir géométriquement la génération de la courbe métacentrique; elle s'obtient en prenant sur des normales à la courbe des centres de carènes des points qui sont l'intersection de deux normales successives.

J'ai volontairement changé de vocabulaire pour désigner le point caractéristique sur l'enveloppe des normales, et faire apparaître la courbe métacentrique comme la développée de la courbe des centres de carène. J'ai utilisé la description qui figure chez Huygens en 1692, et qui sera le vocabulaire constant de Monge dans le dernier tiers du siècle. Bouguer ne l'utilise pas : il ne fait aucune référence, il emploie juste la qualification de développée. Ou bien le lecteur sait ce dont il s'agit et comment on peut obtenir cette courbe par le calcul différentiel (détermination du centre de courbure, qui constitue un calcul différentiel du second ordre), ou bien il se laisse guider par l'image, par la sensation de voir se constituer la courbe métacentrique dont il a appris à connaître la tangente, en chaque point, normale à la ligne correspondante de flottaison, et le nom de développée n'est que le résumé de cette impression. C'est en fait au lecteur de faire son choix, si l'on peut dire, car en fait ce choix est déterminé par ses propres connaissances.

Certes, dans le dernier cas d'un savoir moindre, le lecteur ne peut en déduire un nouveau calcul du métacentre à partir des dérivées secondes. Mais il n'en a pas plus utilité que Bouguer. Puisqu'un premier calcul, celui aboutissant à la formule intégrale (1) a déjà été obtenu. Le professeur d'hydrographie n'a vraiment pas l'intention de montrer le fonctionnement du calcul

[29] T.N., p. 270.

différentiel. Car, contrairement à celui du calcul intégral, il n'en a pas usage, et le calcul infinitésimal lui fut suffisant. Désormais, de la correspondance entre les courbes, courbe du centre de carène et courbe métacentrique, il n'utilise que de conséquences visuelles, ou géométriques. Bouguer donne seulement deux figures qui explicitent deux situations inverses quant au métacentre, dont la courbe présente un rebroussement : ce sont aussi deux situations opposées pour la science des bateaux (Figures 14). Dans le cas d'un échappement vers le haut pour la courbe métacentrique, il n'y a pas de modification dans l'imposition sur le centre de gravité quant à la stabilité; mais il risque d'y avoir instabilité dans l'autre cas, lors d'une inclinaison un peu trop grande du bateau[30], le centre de gravité passant au-dessus du métacentre. C'est exactement cette division en deux situations antagonistes que Bouguer recherchait; elle établit une situation intégrale, et non une situation réduite au mouvement petit du navire.



Figures 14

Les deux situations possibles pour la courbe métacentrique. La situation reste stable, à gauche, puisque le métacentre ne peut que monter; elle peut devenir instable à droite selon l'emplacement du centre de gravité.

Si donc l'on comprend l'arrêt des explications de Bouguer et son refus de faire pour le calcul différentiel le travail pédagogique effectué tant pour le calcul intégral que pour le calcul infinitésimal, on ne peut manquer de noter qu'il y a un approfondissement, pour ne pas dire un changement de la définition du métacentre. De point géométrique, défini par un bougé infiniment petit, le métacentre est devenu le point générique d'une courbe. Du coup, la géométrie des figures reprend son ascendant, et la perception du marin, son sens de la verticale, est en quelque sorte matérialisé par la normale HM à la courbe du centre de carène, qui est aussi la tangente à la courbe métacentrique. Et c'est au final une figure qui justifie la stabilité du bateau en forme de caisse, et la phrase de Pierre Bouguer sur la confiance bien placée en la Providence. C'est bien, par cette nouvelle figure de l'arche de Noé mathématisée que nous concluons ce voyage marin, débuté par une caisse de Noé.

[30]Bouguer précise qu'il considère des inclinaisons allant jusqu'à 12 degrés pour les navires de premier rang, et plus encore pour des navires plus petits.

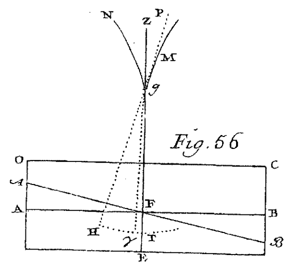


Figure 15
Nouvelle interprétation du métacentre à partir d'une tangence

Références

RAPHAEL PATAI, *The Children of Noah. Jewish Seafaring in Ancient Times*, Princeton University Press, Princeton, 1998.

FRANÇOIS DE DAINVILLE, *La géographie des Humanistes*, Genève, Slatkine reprints, à partir du texte original de 1940, 1969.

DANIEL ROCHE, *Les républicains des lettres : gens de culture et de lumière au XVIII*^{ème} *siècle*, Paris, Fayard, 1988.

DANIEL ROCHE, *Le siècle des Lumières en province : académies et académiciens provinciaux 1680-1789*, Paris, Mouton, 1978.

PAUL HAZARD, *La crise de la conscience européenne (1680-1715)*, Paris, Boivin, 1934 ; réédition, Paris, Gallimard, 1968.

CLIFFORD TRUESDELL, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies (1638-1788)*, Introduction to *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, vol. X, XI, Turici, Orell Fussli, 1960.

PIERRE BOUGUER, *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvemens*, Paris, Jombert, 1746.

CHARLES DUPIN, *Applications de Géométrie et de Méchanique, à la Marine, aux Ponts et Chaussées, etc., pour faire suite aux Développements de Géométrie*, Paris, Bachelier, 1822.

JEAN DHOMBRES, PATRICIA RADELET-DE GRAVE, “Contingence et nécessité en mécanique : étude de deux textes inédits de d'Alembert”, *Physis*, vol. XXVIII (1991), nuova serie, fasc. 1, pp. 35-114.

JEAN et NICOLE DHOMBRES, *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997.

HORST NOWACKI, Splines im Schiffbau, à paraître.

JEAN DHOMBRES, Mettre la géométrie à crédit, *Sciences et techniques en perspective*.

La phase arabe de l'histoire de l'algèbre
(VIII^{ème}-XV^{ème} siècles)

DJEBBAR Ahmed,
Université Paris-Sud (France)

Abstract

Depuis la seconde moitié du XIX^{ème} siècle, de nombreuses études, souvent très documentées et très minutieuses, ont été réalisées sur l'Algèbre arabe[1], sur ses débuts, sur son contenu et sa terminologie, sur les différents aspects de son développement (en relation avec d'autres disciplines mathématiques ou avec son environnement), et enfin sur sa transmission partielle à l'Europe médiévale. Grâce aux résultats de ces recherches (dont certaines sont très récentes), nous allons tenter de faire le point sur ce qui est connu aujourd'hui du contenu de cette tradition algébrique, de ses grandes orientations et des obstacles auxquels elle s'est heurtée au cours de son développement.

Certains points précis de l'histoire de l'algèbre arabe, comme ceux qui sont relatifs à ses origines et à ses débuts, continuent de susciter des interrogations et des débats et font encore l'objet de recherche. Il ne nous a donc pas semblé utile de les aborder ici. Nous nous sommes plutôt intéressé à des aspects plus tangibles qu'il est possible de lire, directement, dans les écrits algébriques qui ont été produits, entre le IX^{ème} et le XV^{ème} siècle, par les différents scientifiques de l'Empire musulman.

[1]Dans la suite du texte, cette tradition algébrique sera dite "*Algèbre arabe*" dans le sens où elle a englobé tous les écrits algébriques écrits en langue arabe, entre le IX^{ème} et le XVI^{ème} siècle, qu'ils aient été produits par des mathématiciens arabes ou par des non-arabes.

Le premier livre d'algèbre

Il est admis par tous les spécialistes d'Histoire des Mathématiques que l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline (avec, à la fois, un nom, des objets, des outils, des algorithmes, des preuves et des domaines d'application), a été la publication du petit traité d'AL-KHWÂRIZMÎ (m. 850), intitulé le *Livre abrégé du calcul par le jabr et la muqâbala*[2]. On sait, grâce à la préface de son auteur, que ce livre a été rédigé avant 833 et dédié au calife al-Ma'mûn (813-833) qui s'était rendu célèbre par son mécénat en faveur des sciences et de la philosophie.

Il est peut-être utile, avant d'aller plus loin, et pour mieux suivre l'évolution ultérieure de l'algèbre, de présenter brièvement le contenu de ce livre tel qu'il nous a été transmis à travers les copies arabes manuscrites qui nous sont parvenues.

Le livre d'AL-KHWÂRIZMÎ est divisé en deux grandes parties, précédées d'une introduction consacrée à la traditionnelle doxologie, à la dédicace et à un exposé très clair de la nature et des buts de l'ouvrage. Voici d'ailleurs en quels termes l'auteur y présente son contenu :

> J'ai rédigé sur le calcul par le jabr et la muqâbala un livre abrégé englobant ce qu'il y a de plus fin et de plus noble en calcul et dont les hommes ont besoin pour leurs héritages et leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs commerces et pour toutes les transactions qu'ils ont entre eux, parmi lesquelles l'arpentage des terres, le creusement des canaux, l'architecture, ainsi que d'autres formes et techniques. [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 16][3].

La première partie de ce livre, qui est en fait la partie la plus importante, au regard de l'histoire de l'algèbre, se subdivise elle-même en plusieurs chapitres : dans le premier, AL-KHWÂRIZMÎ, après avoir rappelé brièvement la définition du système décimal, définit les objets de l'algèbre : les nombres, la racine (jidhr) et le bien (mâl) qui est le carré de la racine. Puis, il donne les six équations canoniques en les faisant suivre d'exemples. Pour respecter la terminologie de l'auteur, nous écrirons les six équations sous cette forme :

$$\begin{array}{lll} (1)ax = b; & (2)ax = c; & (3)b = c \\ (4)ax + b = c & (5)ax + c = b; & (6)b + c = ax \end{array}$$

avec a, b, c des entiers ou des rationnels strictement positifs (exceptionnellement des irrationnels quadratiques) et x le bien.
Au sujet de la terminologie utilisée, AL-KHWÂRIZMÎ dit ceci :

> J'ai trouvé que les nombres dont on a besoin, dans le calcul par le *jabr* et la *muqâbala*, sont de trois sortes qui sont les *racines*, les *biens* et le *nombre* seul qui n'est rapporté ni à la *racine* ni au *bien*. La *racine* est tout ce qui est multiplié par lui-même, comme un, les nombres 'entiers' qui lui sont supérieurs et les fractions qui lui sont inférieures. Le *bien* est tout ce qui résulte de la *racine* multipliée par elle-même. Le *nombre* seul est tout ce qui, parmi les nombres, est exprimable et qui n'est rapporté ni à une *racine* ni à un *bien*. [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 17-18]

[2]Pour AL-KHWÂRIZMÎ, le passage de $x^2 + 3 = 5 - 10x$ à $x^2 + 3 + 10x = 5$ se fait par la *restauration (jabr)* de l'équation dans le but de n'avoir que des monômes *ajoutés*. Quant au passage de $x^2 + 3 + 10x = 5$ à $x^2 + 10x = 2$, il se fait par la *comparaison (muqâbala)* des termes de même espèce se trouvant dans chacun des deux membres, pour pouvoir *simplifier* et aboutir à l'une des six équations canoniques, exposées ci-dessous.

[3]Les informations entre crochets droits renvoient à la bibliographie générale, en fin d'article. En l'absence de mention, les traductions françaises des extraits arabes ont été réalisées par nous.

Comme on le constate, le bien est le produit de la racine par elle-même, mais la notion de degré n'apparaît pas dans ce livre. Elle mettra d'ailleurs beaucoup de temps à se dégager. Quant aux six équations, elles sont en réalité exprimées sous une forme rhétorique. Par exemple, la quatrième est formulée ainsi :

> Quant aux biens et aux racines qui sont égaux au nombre, c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égalent trente neuf dirhams. [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 18]

Dans le second chapitre, il fournit, pour chacun des six types précédents, son algorithme de résolution. Chaque étape de cet algorithme est exprimée une première fois, d'une manière générale, puis explicitée à l'aide des coefficients numériques de l'équation qui illustre le type étudié. Ces équations à coefficients numériques déterminés deviendront elles-mêmes canoniques et, pendant des siècles, serviront de modèles dans l'enseignement de l'algèbre.

Dans le troisième chapitre, AL-KHWÂRIZMÎ explique le procédé *"d'algébrisation"* d'un pro- blème donné afin de le ramener à l'une des équations canoniques précédentes. Dans le quatrième, il expose l'extension des opérations arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée) aux objets de l'algèbre (nombres, racines, biens) et à leurs combinaisons par l'addition et la soustraction. Mais, il a quelques fois des difficultés à justifier ses résultats. Voici, à titre d'exemple, ce qu'il dit à propos de l'expression : $(100 + x^2 - 20x) + (50 + 10x - 2x^2)$:

> Il n'y a pas de figure 'géométrique' qui lui convienne car elle est constituée de trois genres différents -des biens, des racines et un nombre- qui ne sont pas égalés à quelque chose qui aurait permis qu'elle soit figurée. Nous avons abouti, pour elle, à une figure; mais, elle n'est pas satisfaisante. Quant à sa validité rhétorique, elle est évidente. [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 34]

Dans ce même chapitre, Il formule ce qui correspondra plus tard à la règle des signes, mais sans en donner une justification. Il s'agit en fait pour lui d'opérations sur les monômes *"ajoutés"* ou *"retranchés"* et non d'opérations sur les signes proprement dits.

Le cinquième et dernier chapitre de cette première partie est constituée d'une quarantaine de problèmes d'application, groupés en trois thèmes (problèmes des dizaines, des biens et des hommes), et résolus à l'aide des outils des chapitres précédents. Voici un exemple de chacun de ces trois thèmes [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 42, 47, 51] :

(1) Problème des dizaines : "*<Si> tu divises dix en deux parties et <que> tu multiplies l'une des deux parties par elle-même, <le résultat> est égal à quatre vingt une fois l'autre partie*".

(2) Problème des biens : "*<Etant donné> un bien, <si> tu lui ôtes son tiers et trois dirhams et que tu multiplies le reste par lui-même, tu retrouves le bien*".

(3) Problème des hommes : "*<Si> tu partages un dirham entre des hommes, chacun reçoit une chose; puis, <si> tu leur ajoutes un homme et que tu partages entre eux un dirham, chacun reçoit alors <une part> inférieure à la première part d'un sixième de dirham*".

La seconde partie du livre, quantitativement la plus importante, est consacrée exclusivement à la résolution de problèmes de transactions commerciales, d'arpentage et de répartition des héritages (selon la législation islamique), à l'aide des outils de l'algèbre exposés dans la première partie.

Compte tenu de ce que nous savons aujourd'hui des procédés algébriques utilisés dans les traditions scientifiques babylonienne, grecque et indienne, nous pouvons constater, à la seule description du contenu des différents chapitres du livre d'AL-KHWÂRIZMÎ que, pour la première fois, nous trouvons rassemblés, dans un même ouvrage, un ensemble d'éléments (définitions, opérations, algorithmes, démonstrations) qui étaient soit éparpillés et sans lien entre eux, soit non formulés explicitement et indépendamment des problèmes d'application. De plus, tous ces éléments sont assemblés selon une logique qui vise à distinguer clairement ce procédé de résolution des autres procédés de la *"Science du calcul"*, comme la méthode de fausse position [CHABERT 1999, 83-112].

La tradition d'AL-KHWÂRIZMÎ

Le caractère encore très lacunaire de nos connaissances relatives aux activités algébriques du IX^ème^ siècle, ne nous permet pas de dater les contributions nouvelles qui s'inscrivent dans ce que l'on pourrait appeler la tradition d'AL-KHWÂRIZMÎ (pour la distinguer des traditions algébriques arabes postérieures). Nous nous contenterons donc d'évoquer les travaux connus, mais plus tardifs, dans lesquels ces contributions se manifestent à nous pour la première fois.

Il faut tout d'abord noter la publication, au cours de la seconde moitié du IX$^{\text{ème}}$ siècle et du début du X$^{\text{ème}}$, d'une série d'ouvrages consacrés exclusivement à l'algèbre. Il s'agit des écrits d'ad-Dînawarî (m. 895), d'as-Sarakhsî (m. 899), d'Ibn al-Fath (X$^{\text{ème}}$ siècle) et d'as-Saydanânî (X$^{\text{ème}}$ siècle). Certains de ces écrits sont d'ailleurs des commentaires du livre d'AL-KHWÂRIZMÎ [SEZGIN 1974, 262-263]. Malheureusement aucun de ces traités n'a encore été retrouvé. Mais, le contenu des publications ultérieures nous autorise à penser que ces écrits devaient intégrer les premiers progrès internes à l'Algèbre et quelques applications intéressant d'autres domaines.

A côté de ces commentaires, on remarque la production de deux types d'écrits dont la caractéristique commune a été de réaliser l'interpénétration entre l'Algèbre et la Géométrie grecque, reflétant par la même occasion les progrès enregistrés dans l'assimilation du corpus euclidien. C'est ainsi que Thâbit Ibn Qurra (m. 901) rédige un opuscule dans lequel il utilise les propositions 5 et 6 du Livre II des *Éléments*, pour justifier l'existence des solutions des trois équations quadratiques d'AL-KHWÂRIZMÎ [IBN QURRA, Istanbul Aya Sofya 2457, ff. 39a-41a]. Avec al-Ahwâzî (X$^{\text{ème}}$ siècle), c'est plutôt la démarche inverse puisque c'est l'algèbre qui est utilisée dans son commentaire du Livre X de ces mêmes *Éléments* pour expliciter la racine carrée de certaines grandeurs irrationnelles [AL-AHWÂZÎ, Ms. Tunis 16167, ff. 61b-65a].

A l'extérieur du domaine de l'algèbre, les innovations suscitées par elles voient également le jour à partir du IX$^{\text{ème}}$ siècle. En premier lieu, il y a eu la lecture "algébrisée" de certaines propositions des Livres II et VI des *Éléments* d'Euclide et "l'arithmétisation" des propositions du Livre X qui définissent certaines grandeurs incommensurables, comme les binômes, les apotômes ainsi que leurs racines carrées[4]. Ces grandeurs deviendront chez le mathématicien al-Mâhânî (m. 888) et chez ses successeurs, une sous-classe de nombres (celle des irrationnels quadratiques et biquadratiques). Ces nouveaux nombres, qui généralisaient les irrationnels quadratiques empruntés aux indiens et probablement aussi à la tradition babylonienne, étaient eux mêmes enrichis par une classe de nombres d'un genre différent (selon le point de vue euclidien), puisqu'ils ne s'obtiennent pas par les techniques géométriques des *Éléments*. Il s'agit des racines nièmes avec n un entier quelconque ainsi que leurs combinaisons par addition et soustraction. [AL-MÂHÂNÎ, Ms. Paris 2457, ff. 180b-181b]

En second lieu, on assiste à une nouvelle forme d'intervention de l'algèbre, en géométrie et en trigonométrie, par la mise en équation de certains problèmes. Une des premières tentatives de ce type a été la mise en équation, par al-Mâhânî, du lemme de la proposition 4 du Livre II du traité de *la Sphère et du cylindre* d'Archimède. Il obtint une équation cubique qu'il ne parvint

[4]Un binôme s'écrirait aujourd'hui : $m + n^{1/2}$ ou $m^{1/2} + n^{1/2}$. Un apotôme s'obtient en remplaçant l'addition par la soustraction.

pas à résoudre et qu'il finit par considérer comme impossible. [DJEBBAR & RASHED 1981, 11] Cela ouvrira la voie à un ensemble de recherches qui aboutiront à l'étude géométrique de toutes les équations cubiques.

Plus tard, des mathématiciens astronomes, comme al-Bîrûnî (m. 1048) ou son contemporain Abû l-Jûd, préoccupés par la détermination de la trisection d'un angle et de la longueur des côtés de certains polygones réguliers non constructibles (comme l'heptagone et l'ennéagone), aboutiront eux aussi à des équations cubiques. [YOUSCHKEVITCH 1976, 93-94]

La tradition d'Abû Kâmil et d'Al-Karajî

Cette tradition englobe un ensemble de mathématiciens dont les contributions vont concerner deux domaines déjà présents dans le livre d'al-Khwârizmî : celui des objets de l'algèbre et celui des opérations qui leurs sont appliquées. On voit ainsi apparaître, dans les équations du premier et du second degré, des coefficients et des racines qui sont pas uniquement des entiers ou des fractions, mais également des irrationnels quadratiques et biquadratiques, comme cela est le cas dans un grand nombre de problèmes résolus par Abû Kâmil (m. 930) dans son important traité d'algèbre. [ABÛ KÂMIL, Ms. Istanbul, Kara Mustafa Pasha 379]

Cela a été rendu possible par les travaux de la période antérieure, relatifs au livre X des *Éléments*, et qui seront enrichis et systématisés au X$^{\text{ème}}$ et au XI$^{\text{ème}}$ siècle. C'est ainsi que le mathématicien Ibn al-Baghdâdî (XI$^{\text{ème}}$ siècle) consacre toute une épître à l'exposé de nombreuses règles permettant de simplifier les opérations arithmétiques (en particulier la division) appliquées aux irrationnels qui sont sommes ou différences de racines carrées et de racines quatrièmes. [IBN AL-BAGHDÂDÎ 1947]

Cette orientation sera poursuivie au XI$^{\text{ème}}$ siècle par al-Karajî (m. 1029) [ANBOUBA 1964] et au XII$^{\text{ème}}$ siècle par as-Samaw'al (m. 1175). [AS-SAMAW'AL 1972] Ces auteurs justifieront l'extension de certaines opérations arithmétiques aux irrationnels, octroyant ainsi, de fait, un statut de nombre aux grandeurs issues du Livre X des *Éléments* d'Euclide, ainsi qu'à des grandeurs plus complexes mais toujours constructibles.

Les progrès enregistrés dans ce domaine, et qui ne doivent pas, selon nous, être dissociés des progrès de l'algèbre elle-même, ont ainsi permis une extension importante de la notion de nombre et ont probablement favorisé la réflexion et les recherches qui seront menées jusqu'aux XII$^{\text{ème}}$ siècle autour du concept de nombre réel positif, en particulier par Umar al-Khayyâm. [DJEBBAR 1997]

La théorie des polynômes

Le second sujet étudié ou simplement effleuré par certains mathématiciens de cette période, et qui s'avérera d'une grande fécondité, est celui de l'extension de la notion de monôme et de polynôme et son application à l'étude des équations. Si l'on en croit Sinân Ibn al-Fath (X$^{\text{ème}}$ siècle), il serait le premier à avoir rédigé un exposé systématique sur cette question et avoir ainsi étendu le domaine des équations résolubles par radicaux. Son étude, qui nous est heureusement parvenue, contient en effet pour la première fois, à notre connaissance, la notion générale de monôme de degré quelconque ainsi que le procédé de génération de ces monômes, les noms affectés à chaque degré et la généralisation des six équations canoniques à des équations de degré inférieur ou égale à $2n + p$, obtenues à partir des équations d'AL-KHWÂRIZMÎ en y remplaçant les monômes x^2, x et 1, respectivement par x^p, x^{n+p} et x^{2n+p}. [IBN AL-FATH, Ms. Le Caire Dar Riyada 260/4, ff. 95a-104a]

Nous n'avons aucun élément d'information sur l'impact immédiat qu'a pu avoir cette extension des monômes et des équations et il faudra attendre la fin du X$^{\text{ème}}$ siècle ou le début du XI$^{\text{ème}}$ pour en mesurer l'aboutissement en quelque sorte à travers les travaux d'al-Karajî (m. 1029). C'est en effet dans ses livres que l'on trouve un exposé des premiers éléments d'une théorie des polynômes, avec la règle de multiplication et de division des monômes et des inverses de monômes, basée sur l'utilisation explicite de la notion de puissance (en arabe : *uss*) et des opérations d'addition et de soustraction de ces puissances associées, respectivement aux produits et aux rapports de monômes. On y trouve également une justification partielle de l'extension des quatre opérations arithmétiques aux polynômes de degré quelconque. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'al-Karajî expose le procédé de construction du triangle arithmétique et la manière de l'utiliser pour déterminer le développement du binôme. [ANBOUBA 1964]

Cette étude d'al-Karajî sera poursuivie par as-Samaw'al (m. 1175) qui justifiera la division d'un polynôme par un autre polynôme, composés tous deux de monômes ajoutés ou retranchés, et qui ajoutera aux quatre opérations arithmétiques classiques un algorithme d'extraction de la racine carrée d'un polynôme carré parfait.

Toutes ces études vont être facilitées par l'introduction du symbolisme des tableaux qui permettra aux algébristes de cette époque de représenter chaque polynôme par ce que nous appelons aujourd'hui la suite de ses coefficients disposés dans les colonnes correspondants à leurs monômes respectifs, comme le montre l'exemple suivant : multiplier les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ suivants :

$$\begin{aligned} P(x) &= 6x^8 + 28x^7 + 6x^6 - 80x^5 + 38x^4 + 92x^3 - 200x^2 + 20x \ ; \\ Q(x) &= 2x^5 + 8x^4 - 20x^2 \end{aligned}$$

L'auteur dispose ainsi les coefficients :

Choses	carrés	Cubes	Carré-carré	carré-cube	Cubo-cubes	carré-carré-cube	carré-cubo-cubes
20	moins 200	92	38	moins 80	6	28	6
	moins 20	0	8	2			

Puis, il effectue la division en mettant les quotients partiels correspondants à leurs monômes respectifs, dans les cases laissées vides. [AS-SAMAW'AL 1972, 48-50]

Les systèmes d'équations

Malgré la présence, dans la troisième partie du livre d'al-Khwârizmî, de quelques problèmes d'héritage pouvant aboutir à des systèmes d'équations [AL-KHWÂRIZMÎ 1968, 74, 104], il ne semble pas que le livre soit à l'origine de ce chapitre de l'Algèbre. La forme de certains problèmes, comme ceux relatifs aux oiseaux, suggérerait plutôt une origine chinoise ou indienne[5]. Mais, les sources arabes concernant la période des traductions (VIII$^{\text{ème}}$-IX$^{\text{ème}}$ siècles) sont sur ce point silencieuses et les premiers ouvrages mathématiques qui ont abordé l'étude des systèmes d'équations n'ont pas encore été retrouvés. Ceux qui nous sont parvenus, et qui sont du X$^{\text{ème}}$ ou du XI$^{\text{ème}}$ siècle, ont une facture assez élaborée qui confirme l'existence d'une activité antérieure.

[5] Voici un exemple de ce type de problèmes : on voudrait acheter, avec 100 dirhams, 100 volatiles de trois espèces différentes : étourneaux, poulets et canards. Sachant que le prix des étourneaux est de 1 dirham les 20, celui des poulets de 1 dirham l'unité et celui des canards de 5 dirhams l'unité, on demande combien on peut acheter de volatiles de chaque espèce.

Il y a tout d'abord le livre d'algèbre d'Abû Kâmil qui traite, dans sa troisième partie, quelques problèmes de ce type sans souci de classification ou de systématisation, mais plutôt comme des exemples d'application des procédés de l'algèbre. [ABÛ KÂMIL, Ms. Istanbul, Kara Mustafa Pasha 379, ff. 95a-101a] Le second livre d'Abû Kâmil, intitulé *Les 'choses' rares en calcul*, est tout entier consacré aux systèmes d'équations : six problèmes seulement y sont traités, mais dans une perspective qui dépasse le simple exposé des algorithmes de résolution puisqu'il s'agit, pour l'auteur, de montrer l'existence des systèmes impossibles, de ceux ayant une et une seule solution et, enfin, de ceux qui peuvent avoir plusieurs solutions. Il illustre ce dernier cas par quatre systèmes aboutissant respectivement à 6, 98, 304 et 2676 solutions. [ABÛ KÂMIL, Ms. Paris B.N. 4946, ff. 3b-15a]

Il faut enfin signaler un petit traité encore inédit du mathématicien et physicien Ibn al-Haytham (m. 1039), consacré exclusivement aux systèmes d'équations à n inconnues, n quelconque, qui sont du type :

$$n_i x_i = m_j x_j \ , \qquad 1 < i, j < n.$$

Dans cette étude, la démarche d'Ibn al-Haytham tranche avec celle de ses prédécesseurs, à la fois au niveau de l'exposé des différentes problèmes et au niveau de leur résolution qui est présentée selon une démarche générale accompagnée de justifications mathématiques; l'auteur précise d'ailleurs qu'il est le premier à avoir donné ces justifications. [WIEDEMANN 1926-27]

Nous ne savons pas si ce chapitre a fait l'objet de recherches originales, en pays d'Islam, après le XI$^{\text{ème}}$ siècle. Cela n'est pas confirmé par les livres d'algèbre connus postérieurs à l'étude d'Ibn al-Haytham, puisqu'ils ne font que reprendre tel ou tel type de problèmes déjà traités aux X$^{\text{ème}}$-XI$^{\text{ème}}$ siècles. Mais, cette observation n'est pas décisive compte tenu du caractère très lacunaire de nos connaissances actuelles relatives aux sources orientales et surtout andalouses.

L'analyse indéterminée

Contrairement au chapitre précédent sur les systèmes d'équations, celui de l'analyse indéterminée semble devoir beaucoup à la tradition grecque. C'est du moins ce que laisse supposer le contenu des problèmes qui nous sont parvenus et dont les auteurs sont encore Abû Kâmil et al-Karajî.

Le premier expose et résout, dans son livre d'algèbre, 38 équations ou systèmes d'équations du premier ou de second degré et dont le second membre est toujours un carré. [SÉSIANO 1977a, 91-93] La forme de ces problèmes fait penser naturellement au contenu des *Arithmétiques* de Diophante. Mais, cette filiation est contrariée par deux éléments importants : le premier est mathématique et concerne l'utilisation par Abû Kâmil de méthodes inexistantes dans les dix livres connus des *Arithmétiques*, comme celles qui permettent de résoudre les systèmes de la forme :

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = \square_1 \\ & ax^2 + bx + c + c(ax^2 + bx + c)^{1/2} = \square_2, \text{a, b, c, donnés.} \end{aligned}$$

ou de la forme :

$$\begin{aligned} a_1 x^2 + b_1 x + c &= \square_1 \\ a_2 x^2 + b_2 x + c &= \square_2, a_1, a_2, b_1, b_2, \text{donnés.} \end{aligned}$$

dont le traitement suppose d'ailleurs une grande maîtrise des outils algébriques. [SÉSIANO 1977a, 99-102]

On pourrait évidemment penser que ces méthodes ont été empruntées aux trois livres encore perdus de l'ouvrage de Diophante, mais le second élément rend cette dernière hypothèse très improbable : on sait en effet que seuls les livres IV à VII des *Arithmétiques* ont bénéficié d'une traduction en arabe par Qustâ Ibn Lûqâ (m. 910). [SÉSIANO 1975] Abû Kâmil était un contemporain de notre traducteur mais n'a pas eu, semble-t-il, connaissance de sa traduction. Il a probablement repris, comme à son habitude, des problèmes anciens en leur ajoutant de nouveaux problèmes et peut-être de nouveaux procédés de résolution. Cette hypothèse est renforcée par les allusions de l'auteur à une tradition vivante dans ce domaine, et par conséquent antérieure à la traduction des *Arithmétiques*, ainsi qu'à l'existence de deux termes pour désigner les problèmes de ce chapitre (problèmes "*indéterminés*" pour certains mathématiciens et "*à plusieurs solutions*" pour d'autres).

Cela dit, et quelle que soit la source d'Abû Kâmil et de ses prédécesseurs ou contemporains, on constate que ces problèmes seront appréhendés comme des problèmes d'algèbre et constitueront le troisième chapitre de cette discipline, aux côtés des équations quadratiques et des polynômes.

Mais, il est indiscutable que c'est la traduction des livres de Diophante, retrouvés à la fin du IX$^{\text{ème}}$ siècle, qui vont accélérer le développement de ce chapitre. Des mathématiciens prestigieux, comme Abû l-Wafâ' (m. 998) vont d'abord étudier puis commenter les problèmes de Diophante, créant ainsi les conditions de deux orientations, l'une arithmétique et l'autre algébrique. Cette dernière est illustrée par les chapitres de deux ouvrages d'al-Karajî : le *Fakhrî* dont la plus grande partie est consacrée à des problèmes indéterminés, et surtout le *Merveilleux en calcul* qui comprend une classification des problèmes traités, un exposé des méthodes de résolution et des commentaires sur le champ d'application de chacune de ces méthodes. [ANBOUBA 1964; SÉSIANO 1977b]

La résolution géométrique des équations cubiques

Parallèlement aux recherches entreprises par les mathématiciens de la tradition d'Abû Kâmil et d'al-Karajî, on observe la naissance et la consolidation d'une orientation nouvelle en Algèbre, celle de la résolution des équations de degré supérieur ou égal à trois. On peut dater cette naissance par l'échec d'al-Mâhânî dans sa tentative de résoudre, par radicaux, l'équation suivante :

$$x^3 + c = x^2; c > 0$$

qui découle de la "traduction" algébrique de la proposition 4 du Livre II du traité d'Archimède *De la sphère et du cylindre* que nous avons déjà évoqué à propos des débuts de l'Algèbre.

Cet échec d'al-Mâhânî va stimuler les recherches qui aboutiront à la résolution d'un certain nombre d'équations du 3e ou du 4e degré (à coefficients positifs). C'est ainsi que, d'une manière indépendante, al-Khâzin (X$^{\text{ème}}$ siècle) et Ibn al-Haytham établiront l'existence de la solution positive de l'équation précédente à l'aide de l'intersection de deux coniques.

A peu près à la même époque, le mathématicien al-Kûhî (X$^{\text{ème}}$ siècle) a posé et résolu un nouveau problème géométrique qui aboutissait à une équation du troisième degré. Il s'agit de trouver une portion de sphère de volume égal à celui d'une portion de sphère donnée et de surface égale à celle d'une autre portion de sphère donnée. [YOUSCHKEVITCH 1976, 90-94]

Parallèlement, il semble que certains mathématiciens aient poursuivi leurs recherches en vue de résoudre, par radicaux, les équations cubiques. Al-Khayyâm (m. 1131) est de ceux-là. Il le dit lui-même, reconnaît l'échec des ses tentatives et laisse entendre que c'est bien cette raison qui l'a amené à systématiser les démarches de ses prédécesseurs et à élaborer une

théorie géométrique des équations cubiques : dans son traité d'algèbre, il donne une classification des 25 équations (à coefficients tous positifs) de degré inférieur ou égal à trois, en distinguant celles dont l'existence des solutions (positives) ne repose que sur des propositions des *Éléments* d'Euclide (c'est-à-dire celles dont les solutions sont constructibles) et celles dont les solutions (positives), lorsqu'elles existent, s'obtiennent par intersection de deux coniques (en fait paraboles, hyperboles ou cercles). [AL-KHAYYÂM 1981]

Quelques décennies plus tard, le mathématicien Sharaf ad-Dîn at-Tûsî (m. 1213) reprend l'étude des équations cubiques, mais selon une perspective qui complète et dépasse à la fois celle d'al-Khayyâm. On constate en effet des modifications importantes dans la classification des équations et dans la justification de l'existence des solutions positives.

Tout en conservant la distinction entre équations quadratiques et équations cubiques, at-Tûsî ordonne ces dernières en tenant compte du nombre de leurs solutions et non des degrés de leurs monômes. Pour établir l'existence des solutions, il commence par rechercher la condition que doivent vérifier, dans ce cas, les coefficients de l'équation. Pour ce faire, il utilise la notion de maximum d'un polynôme et, pour déterminer ce maximum, il introduit une équation auxiliaire qui correspond exactement à celle que l'on obtiendrait aujourd'hui en dérivant un polynôme du 3e degré associé à une équation cubique et en annulant cette dérivée.

Parallèlement à ces travaux de type géométrique, deux autres orientations ont continué à intéresser les algébristes de cette époque. La première concerne la recherche de formules donnant les solutions exactes des équations cubiques. Mais, si l'on exclut la résolution d'équations cubiques particulières que l'on a pu ramener, par changement d'inconnue, à l'extraction d'une racine cubique, il semble qu'aucune tentative n'ait abouti. En tout cas, après le XIII$^{\text{ème}}$ siècle, on continuait encore à chercher des procédés de résolution algébriques pour des équations cubiques.

La seconde orientation est celle de l'élaboration ou de la généralisation de procédés permettant d'obtenir des solutions approchées de ces mêmes équations. C'est vraisemblablement l'échec des tentatives de résolution algébrique qui a contraint certains mathématiciens à recourir à des procédés d'approximation. Ils ont d'abord tenté d'adapter les anciens algorithmes puis ils ont en élaborés de nouveaux. C'est ce qu'ont fait, par exemple, al-Bîrûnî (m. 1050) et son contemporain Abû l-Jûd pour déterminer les solutions approchées des équations suivantes : $x^3 + 1 = x$ et $x^3 = x + 1$.

Mais, il faudra attendre le traité de Sharaf ad-Dîn at-Tûsî pour trouver l'exposé d'un procédé général permettant d'approcher une solution positive d'une équation cubique générale. Ce procédé est d'ailleurs valable pour une équation de degré quelconque. [RASHED 1984, 147-193]

L'algèbre après le XII$^{\text{ème}}$ siècle

Malgré de grands progrès enregistrés ces deux dernières décennies, les recherches sur les Mathématiques arabes ne sont pas assez avancées pour permettre de cerner avec précision les aspects essentiels de l'activité algébrique postérieure au XII$^{\text{ème}}$ siècle. Parmi les questions qui n'ont pas encore de réponse satisfaisante, il y a celle qui concerne le contenu réel de la pratique algébrique en Asie Centrale et en Andalus. Il y a également la question de la circulation des ouvrages d'algèbre et des outils algébriques entre les différents foyers scientifiques de l'empire musulman. Il y a enfin la question qui se pose pour d'autres disciplines scientifiques et qui a trait au ralentissement de leur production et au rétrécissement de leurs domaines de recherche. Dans ce qui suit, nous allons nous contenter de résumer les éléments essentiels de l'activité algébrique postérieure au XII^{ème} siècle, sans tenter de répondre aux questions que nous venons d'évoquer.

L'algèbre en Orient musulman

Pour ce qui est du centre et de l'est de l'Empire musulman, quelques éléments épars nous renseignent sur certaines recherches qui ne semblent pas avoir abouti et sur des incursions timides dans des domaines nouveaux. C'est ainsi que le mathématicien Ibn al-Khawwâm (XIII^{ème} siècle) nous fournit les énoncés de 36 problèmes que ses prédécesseurs et lui-même ont tenté vainement de résoudre. La plupart d'entre eux correspond à des équations du 3e et du 4e degré ou à des systèmes d'équations non linéaires. [ABDELJAOUAD & HADFI 1986]

Au XIV^{ème} siècle, de nouvelles tentatives sont faites. A Samarcande, al-Kâshî (m. 1429) entreprend l'étude des équations de degré supérieur ou égal à 4, sans que l'on sache s'il a abouti à des résultats tangibles [AL-KÂSHÎ 1967, 198-199] puisque l'ouvrage qu'il projetait de publier n'a pas encore été retrouvé. En Egypte, Ibn al-Hâ'im (m. 1412) s'attaque à nouveau à la résolution algébrique de l'équation cubique, à travers un cas particulier. Mais sa méthode est manifestement erronée. [DJEBBAR 1980, 37] Toujours en Egypte, et à défaut de pouvoir exhiber un algorithme pour les équations, le mathématicien Ibn al-Majdî (m. 1447) expose la solution d'un problème de combinatoire concernant les équations polynomiales à n monômes additifs. Dans son livre, le *Recueil de la moelle*, il donne et justifie une relation de récurrence permettant de déterminer le nombre d'équations à n monômes, lorsque l'on connaît le nombre des équations à (n-1) monômes. [DJEBBAR 1980, 107-111]

Il faut également signaler une autre orientation qui n'a pas eu, à notre connaissance, un développement significatif. Elle concerne l'étude des relations entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré. Deux auteurs ont abordé cette question, d'une manière indépendante, sans l'approfondir. Le premier est Ibn al-Jallâd (m. 1390), un mathématicien du Yémen. Dans son petit mémoire, il s'attribue l'idée de construire une équation ayant des solutions choisies par avance. Il montre également comment faire pour qu'un nombre donné soit solution de l'une ou l'autre des trois équations canoniques du second degré. Il donne aussi une série d'exemples où, partant de deux nombres, il détermine les coefficients de chacune des équations par produit, somme et différence de ces deux nombres. [AL-JALLÂD, Ms. Sanaa, Recueil, ff. 249b-256a]

Le second mathématicien est encore Ibn al-Majdî. Il se contente, à propos de cette question de remarquer, sans en tirer de conséquence, que la somme des racines de son équation correspond exactement à l'un des coefficients de cette équation. [IBN AL-MAJDÎ, Ms. Londres, Brit. Mus. Add. 7469ff. 165a] La brièveté de sa remarque permet de penser qu'il n'a pas connu l'ouvrage d'al-Jallâd.

Ces remarques concernant les relations entres les coefficients et les racines d'une équation se semblent pas avoir attiré l'attention des mathématiciens postérieurs et ce pour deux raisons au moins. L'une d'elles est peut-être liée au fait que ce sujet a été abordé à un moment où la recherche en mathématique s'était considérablement ralentie dans certains foyers scientifiques d'Orient et s'était même interrompue définitivement dans d'autres. L'autre raison est à chercher dans les perturbations profondes qui ont touché certaines régions de l'Orient musulman et qui ont influé négativement sur la circulation des idées, des livres et des hommes entre les foyers scientifiques de ces différentes régions.

L'algèbre en Occident musulman

Pendant longtemps, le poème mathématique d'Ibn al-Yâsamîn (m. 1204), un scientifique du Maghreb, était le seul témoignage concret en faveur d'une production algébrique, en Occident musulman, distincte de l'arithmétique et du calcul des transactions. Ce poème résume les algorithmes de résolution des six équations canoniques et les accompagne de quelques opérations sur les irrationnels quadratiques et sur les monômes. Son niveau est bien en deçà du niveau atteint par l'algèbre arabe de son époque. Il est donc loin d'être représentatif des écrits algébriques des XII^{ème}-XIII^{ème} siècles et doit être considéré plutôt comme un aide-mémoire, à la fois pour les enseignants et pour les étudiants en algèbre. C'est en tout cas le rôle qu'il a joué durant les trois siècles suivants. Cela lui a d'ailleurs valu d'être souvent cité par les mathématiciens tardifs, de l'Orient et de l'Occident musulmans, qui ont écrit sur le sujet.

Le second ouvrage qui nous est parvenu est celui d'Ibn Badr. Nous ne connaissons absolument rien de cet auteur, si ce n'est qu'il a écrit son livre, intitulé *l'Abrégé de l'algèbre et de la muqâbala*, avant 1343, date à laquelle a été réalisée l'unique copie qui nous en est parvenue. Comme l'indique bien son titre, le livre est un résumé des procédés de l'algèbre tels qu'on les trouve dans les ouvrages d'al-Khwârizmî et d'Abû Kâmil, avec quelques ajouts reflétant les progrès ultérieurs de cette discipline. On y trouve en effet, la définition des objets de l'algèbre (les nombres, les inconnues et leurs puissances), l'exposé des six équations canoniques selon l'ordre du livre d'AL-KHWÂRIZMÎ, la résolution de ces équations sur des exemples qui sont parfois exactement ceux donnés par Abû Kâmil (avec, comme chez ce dernier, les différents cas où le coefficient de x^2 est égal, plus grand ou plus petit que 1), l'application des objets et des algorithmes algébriques à la résolution des mêmes types de problèmes: ceux des dizaines, des biens, des céréales, des butins, des courriers et des rencontres. La plupart de ces problèmes sont repris, avec parfois les mêmes coefficients, soit du livre d'algèbre d'AL-KHWÂRIZMÎ, soit de celui d'Abû Kâmil. Cela dit, l'analyse comparative des méthodes et des problèmes traités par Ibn Badr révèle quelques particularités qu'il est difficile d'attribuer à telle ou telle tradition algébrique d'Orient et qui pourraient provenir de la tradition algébrique andalouse.

Le troisième écrit algébrique qui nous est parvenu est le *Livre de fondements et des prémisses de l'algèbre* d'Ibn al-Bannâ (m. 1321). Son contenu se présente en deux parties : la première, qui a donné son titre à l'ouvrage, traite des fondements et des préliminaires relatifs aux nombres (entiers, rationnels et irrationnels positifs) et aux outils de l'Algèbre (polynômes et équations). Dans cette partie, l'auteur ne se réfère à aucun ouvrage d'algèbre de la tradition de l'Occident musulman; ce qui nous interdit de lui dénier, comme l'ont fait certains de ses successeurs, toute originalité dans le contenu, dans l'agencement ou dans la formulation des différents chapitres.

Cela dit, nous constatons que les trois chapitres de cette partie, tout en étant beaucoup plus développées, suivent exactement l'ordre d'exposition du livre d'Ibn Badr : d'abord l'arithmétique des irrationnels puis celle des polynômes et, enfin, la résolution des équations canoniques et de celles qui s'y ramènent. On y remarque, comme éléments nouveaux par rapport au livre d'Abû Kâmil une extension de la division à l'aide des quantités irrationnelles de la forme $n + m^{1/2} + p^{1/2}$, la réduction des trois équations canoniques du second degré à une même forme : $[x + b/2]^2 = (b/2)^2 + c$, la résolution d'équations polynômiales de degré supérieur à 2 qui se ramène, par changement d'inconnues, soit à l'équation $X^3 = a$, soit à l'une des équations canoniques du second degré.

La seconde partie traite de la résolution des différents types de problèmes à l'aide des méthodes algébriques (problèmes des dizaines, des hommes et des biens), en exposant et en résolvant d'abord ceux qui sont à solutions entières ou rationnelles puis, dans un dernier chapitre, ceux à solutions irrationnelles. L'analyse des énoncés et des solutions montre qu'à de rares exceptions, il s'agit d'une reprise des problèmes d'Abû Kâmil (avec parfois exactement les mêmes coefficients), regroupés selon une autre logique, plus thématique que mathématique d'ailleurs.

Quant aux ajouts, ils sont peu nombreux et consistent soit en des problèmes d'algèbre auxquels nous n'avons pas trouvé d'équivalents dans le livre d'Abû Kâmil (mais qui ne sortent pas de la problématique traitée dans son livre), soit en des problèmes de théorie des nombres concernant essentiellement la décomposition d'un entier en somme de deux carrés d'entiers ou de rationnels. [DJEBBAR 1990]

En plus de ce livre, Ibn al-Bannâ a traité de l'algèbre dans deux autres ouvrages, *l'Abrégé* [IBN AL-BANNÂ 1969] et le *Soulèvement du voile* [ABALLAGH 1988]. Le premier, qui sera le livre mathématique le plus commenté entre le XIVème et le XVIème siècle, à la fois au Maghreb et en Égypte, ne contient que les règles et les algorithmes de base de l'algèbre, sans démonstrations et sans applications. A cause de cela probablement, et grâce à sa diffusion et aux commentaires qui en ont été faits, il a permis à l'algèbre d'être présente, pendant longtemps, dans les programmes d'enseignement des grandes villes du Maghreb.

Le second ouvrage contient quelques éléments nouveaux. En premier lieu, l'auteur expose des preuves purement algébriques, sans relation avec les démonstrations géométriques de la tradition d'AL-KHWÂRIZMÎ et d'Abû Kâmil, pour justifier l'existence et le calcul des solutions (positives) des équations du second degré. [DJEBBAR 1980, 25-32] En second lieu, il avance une hypothèse nouvelle, malheureusement non appliquée, concernant l'unification de la notion de puissance en algèbre (pour les puissances de l'inconnue), en arithmétique (pour les puissances de 10) et en trigonométrie (pour les degrés, minutes, secondes, etc.). En troisième lieu, Ibn al-Bannâ donne une démonstration de la validité de la fameuse règle des signes, en utilisant une démarche purement algébrique.

Quant aux écrits relatifs à l'Algèbre qui ont été publiés après le traité d'Ibn al-Bannâ, ils sont de trois sortes : des commentaires sur les ouvrages antérieurs, des opuscules autonomes et des chapitres dans des ouvrages de calcul. Comme on va le voir, le contenu de ces écrits n'est pas toujours une simple répétition des méthodes déjà traitées dans les livres connus de la période antérieure.

A notre connaissance, les seuls commentaires qui nous sont parvenus concernent le poème algébrique d'Ibn al-Yâsamîn. Il s'agit d'un opuscule d'Ibn Qunfudh (m. 1407) et d'un autre d'al-Qalasâdî (m. 1486) dont l'analyse ne révèle rien de nouveau si ce n'est la confirmation de l'utilisation intensive du symbolisme algébrique dans l'enseignement mathématique du Maghreb des XIVème-XVème siècles. [DJEBBAR 1980, 41-54] Ce symbolisme permettait d'exprimer les équations du premier et du second degré avec leurs algorithmes de résolution ainsi que les polynômes et les opérations arithmétiques qui leur étaient appliquées. On a longtemps pensé que ce symbolisme était une invention de l'époque d'al-Qalasâdî [WOEPCKE 1854]. Mais la découverte de plusieurs écrits d'Ibn Qunfudh a permis de reculer, de plus d'un siècle, la date de son apparition dans les manuels mathématiques maghrébins. A présent, nous pouvons même dire, grâce à un passage de l'ouvrage d'Ibn al-Yâsamîn, *le Livre de la fécondation des esprits*, que des symboles algébriques étaient déjà utilisés au XIIIe siècle et peut-être même avant. [ZEMOULI 1993]

Le seul ouvrage consacré exclusivement à des problèmes d'algèbre et qui ne soit pas un commentaire d'ouvrages antérieurs, est celui qu'aurait consacré Ibn Haydûr (m. 1413) aux systèmes d'équations du premier degré exprimés sous forme d'achat de volatiles. [IBN HAYDÛR, Ms. Vatican 1403, f. 115b] Mais cet écrit n'a pas encore été retrouvé.

A partir du XIVème siècle, et à l'exception du traité d'al-Qatrawânî (que nous évoquerons plus loin), tous les autres livres de calcul de la tradition maghrébine qui nous sont parvenus sont des commentaires de l'*Abrégé* d'Ibn al-Bannâ. Ils contiennent donc tous un chapitre relatif à

l'algèbre. Le premier d'entre eux, *l'Abaissement de la voilette* d'Ibn Qunfudh, a manifestement utilisé, en plus des ouvrages d'Ibn al-Bannâ, d'autres sources non encore identifiées. Cela est évident pour le chapitre de l'Algèbre où l'on trouve, comme éléments nouveaux, un procédé de construction des équations canoniques composée, une évocation rapide d'une formulation différente du concept de puissance d'un monôme et l'écriture d'une équation avec, pour la première fois à notre connaissance, un zéro au second membre. [GUERGOUR 1990]

Le second livre est celui d'Ibn Zakariyyâ (XIVème siècle). On y trouve, en plus des six équations canoniques, neuf autres qui se ramènent en fait aux précédentes, soit par élévation au carré des deux membres de l'équation, soit après changement d'inconnue ($X = x^2$). [IBN ZAKARIYYÂ, Ms. Tunis B.N. 561, ff. 148a-151b] Dans la partie de son chapitre d'algèbre réservée aux applications, Ibn Zakariyyâ' reprend les thèmes traités par Ibn al-Bannâ en y ajoutant les problèmes de butin, de rencontre, d'aumône, de courrier, de salaires et de mesure. Les quatre premiers thèmes se retrouvent dans l'*Abrégé* d'Ibn Badr. Les autres pourraient avoir été empruntés au livre, non encore retrouvé, d'al-Qurashî, un mathématicien d'al-Andalus qui a enseigné à Bougie, au XIIème siècle.

Le troisième et dernier livre a été écrit à Tunis par al-Qatrawânî, un mathématicien du XIVème siècle d'origine égyptienne. On y découvre un chapitre d'algèbre à la fois très classique dans la résolution des équations canoniques et tout à fait original, dans le traitement des polynômes (au vu de la tradition maghrébine connue). On trouve en effet, et pour la première fois dans un écrit maghrébin, le calcul de la racine carrée et de la racine cubique d'un polynôme. [AL-QATRAWÂNÎ, Ms. Rabat B.G., 416 Q, pp. 123-128] Pour la racine carrée, il utilise le procédé arithmétique de multiplication par semi-translation. Concrètement, al-Qatrawânî considère le polynôme :

$$81x^6 + 72x^5 + 106x^4 + 184x^3 + 89x^2 + 80x + 64$$

qu'il écrit ainsi :

$$81 \quad 72 \quad 106 \quad 184 \quad 89 \quad 80 \quad 64.$$

Puis, il cherche un polynôme de degré 3 :

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

dont le carré sera implicitement décomposé ainsi :

$$a_3x^3 + (2a_3x^3 + a_2x^2)a_2x^2 + (2a_3x^3 + 2a_2x^2 + a_1x)a_1x + (2a_3x^3 + 2a_2x^2 + 2a_1x + a_0)a_0.$$

Dans le deuxième cas, il considère le polynôme :

$$8x^9 + 48x^8 + 132x^7 + 208x^6 + 198x^5 + 108x^4 + 27x^3$$

qu'il écrit ainsi :

$$8 \quad 48 \quad 132 \quad 208 \quad 198 \quad 108 \quad 27.$$

Puis, il cherche sa racine cubique sous la forme : $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$, en utilisant implicitement la formule du binôme à l'ordre 3, pour exprimer son cube ainsi :

$$(a_3x^3 + a_2x^2)^3 + 3(a_1x + a_2x^2)^2 + 3(a_1x)^2(a_3x^3 + a_2x^2) + (a_1x)^3.$$

Ce chapitre du livre, et la manière dont son contenu est traité, suggèrent plusieurs remarques. Il faut rappeler tout d'abord que l'extraction de la racine carrée d'un polynôme à coefficients entiers ou rationnels positifs apparaît, pour la première fois, dans un ouvrage d'al-Karajî [ANBOUBA 1964, 39-41] et qu'elle sera étendue, par as-Samaw'al, dans son *Livre flamboyant en algèbre*, aux éléments de l'ensemble $P[x; 1/x]$, à coefficients positifs.

D'autre part, sa manière de présenter les calculs diffère quelque peu de la démarche orientale. En effet, dans les deux ouvrages que nous venons d'évoquer, c'est le symbolisme des tableaux qui constitue le support de l'algorithme, alors qu'al-Qatrawânî utilise les symboles maghrébins pour écrire les données, les résultats et la présentation de la multiplication par semi-translation.

Il faut enfin remarquer que le livre d'al-Qatrawânî est le premier traité de Mathématique arabe connu dans lequel est exposé un procédé d'extraction de la racine cubique d'un polynôme[6]. Les sources orientales qui contiennent ce type de traitement des polynômes n'évoquent pas l'extraction de la racine cubique d'un polynôme quelconque. Il est donc possible qu'al-Qatrawânî ait généralisé la méthode de la racine carrée. Mais il est également possible qu'il ait emprunté la méthode à un auteur postérieur à as-Samaw'al.

Bibliographie

ABALLAGH, M. 1988 : *Le Raf^c al-hijâb d'Ibn al-Bannâ*, Thèse de Doctorat, Université de Paris I Pantheon-Sorbonne.

ABDELJAOUAD, M. & HADFI, H. 1986 : *Vers une étude des aspects historiques et mathématiques des problèmes ouverts d'Ibn al-Khawwâm (XIII^{ème} s.)*, Actes du 1er Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Alger, 1-3/12/1986), version française, Alger, La Maison du livre, 1988, pp. 157-178.

ABÛ KÂMIL : *al-Kitâb al-kâmil fî l-jabr* [Le Livre complet en algèbre], Ms. Istanbul, Kara Mustafa Pasha 379.

ABÛ KÂMIL : *Kitâb at-tarâ'if fî l-hisâb* [Le Livre des choses rares en calcul], Ms. Paris B.N. 4946, ff. 3b-15a.

AHWÂZÎ (AL-) : *Ikhtisâr sharh al-maqâla al-^{c}âshira min kitâb Uqlîdis* [Abrégé du commentaire sur le dixième Livre du traité d'Euclide], Ms. Tunis 16167, ff. 61b-65a.

ANBOUBA, A. 1964 : *L'Algèbre al-Badi ^{c} d'al-Karajî*, Beyrouth, Publications de l'Université libanaise.

CHABERT J.-L. & all : 1994 : *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Paris, Belin, 1994; traduction anglaise par C. Weeks, Berlin, Springer-Verlag, 1999.

DJEBBAR, A. & RASHED, R. 1981 : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm*, Alep, Institut for the History of Arabic Sciences.

DJEBBAR, A. 1980 : *Enseignement et Recherche mathématiques dans le Maghreb des XIII^{ème}-XIV^{ème} siècles*, Paris, Publications Mathématiques d'Orsay, n° 81-02.

DJEBBAR, A. 1986a=1988 : *Quelques aspects de l'Algèbre dans la tradition mathématique arabe d'Orient*, Actes de l'Université d'été du Groupe Inter-IREM Epistémologie (Toulouse, 6-12 Juillet 1986), Toulouse, IREM, 1988. pp. 259-286.

DJEBBAR, A. 1986b=1988 : *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman*, Actes du 1e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Alger, 1-3/12/1986), version française, Alger, La Maison du livre, 1988, pp. 99-123.

[6]Pour plus de détails concernant les activités algébriques arabe en Orient et en Occident musulman, voir [DJEBBAR 1986a et 1986b].

DJEBBAR, A. : *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'épître d'al-Khayyâm (1048-1131) "Sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide"*, introduction et traduction française, Paris, Université Paris-Sud, Prépublications Mathématiques d'Orsay, 1997, n° 97-38.

GUERGOUR, Y. 1990 : *Les écrits mathématiques d'Ibn Qunfudh (1339-1407)*, Magister d'Histoire des Mathématiques, Alger, E.N.S., 1990.

IBN AL-BAGHDÂDÎ : *Risâla fî l-maqâdîr al-mushtaraka wa l-mutabâyina* [Epître sur les grandeurs commensurables et incommensurables], Hayderabad, 1947.

IBN AL-BANNÂ 1969 : *Ibn al-Bannâ' al-Murrâkushî, Talkhîs a^{c}mâl al-hisâb*, M. Souissi (édit), Tunis, Publications de l'Université de Tunis.

IBN AL-FATH : *Risâla fî l-ka^{c}b wa mâl al-mâl wa'l-a^{c}dâd al-mutanâsiba* [Epître sur le cube, le carré-carré et les nombres proportionnels], Ms. Le Caire Dar Riyada 260/4, ff. 95a-104a.

IBN AL-MAJDÎ : [Le recueil de la moelle et le commentaire de l'abrégé des opérations du calcul], Ms. Londres, Brit. Mus. Add. 7469.

IBN HAYDÛR : *Tuhfat al-tullâb fî ^{c}ilm al-hisâb* [La parure des étudiants sur la science du calcul], Ms. Vatican 1403.

IBN QURRA : *La justification des problèmes de l'Algèbre par les preuves géométriques*, Ms. Istanbul Aya Sofya 2457, ff. 39a-41a.

IBN ZAKARIYYÂ : *Sharh at-Talkhîs* [Commentaire de l'Abrégé <d'Ibn al-Bannâ>], Ms. Tunis B. N. 561.

JALLÂD (AL-) : *al-Muqaddima ad-durriyya al-jabriyya* [L'introduction de perle sur l'invention de l'art de l'algèbre], Ms. Sanaa, Maison des manuscrits, Recueil, ff. 249b-256a.

KHWÂRIZMÎ (AL-) 1968 : *al-Kitâb al-mukhtasar fî hisâb al-jabr wa l-muqâbala* [Le Livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison], A. M. Mushrarafa et M.M. Ahmad (édit.), Le Caire, 1968.

MÂHÂNÎ (AL-) : *Tafsîr al-maqâla al-^{c}ashira min kitâb Uqlîdis* [Explication du dixième Livre du traité d'Euclide], Ms. Paris B. N. 2457, ff. 180b-181b.

QATRAWÂNÎ (AL-) : *Rashfat ar-rudâb* [La succion du nectar], Ms. Rabat B.G., 416 Q.

RASHED, R. 1984 : *Entre Arithmétique et Algèbre*, Paris, Les Belles Lettres, 1984.

SAMAW'AL (AS-) 1972 : *al-Bâhir fî l-jabr d'as-Samaw'al* [Le <Livre> flamboyant en algèbre d'as-Samaw'al], S. Ahmad & R. Rashed (édit), Damas, Université de Damas.

SANCHEZ-PEREZ, J. A. 1916 : *Compendio de Algebra de Abenbeder*, édition, traduction espagnole et analyse mathématique, Madrid.

SÉSIANO, J. 1977a : Les méthodes d'analyse indéterminée chez Abû Kâmil, *Centaurus*, Vol. 21, n° 2, pp. 89-105.

SÉSIANO, J. 1977b : Le traitement des équations indéterminées dans le Badîc fî l-hisâb d'Abû Bakr al-Karajî, *Archive of History of Exact Sciences.* Vol. 17, n° 4. pp. 297-379.

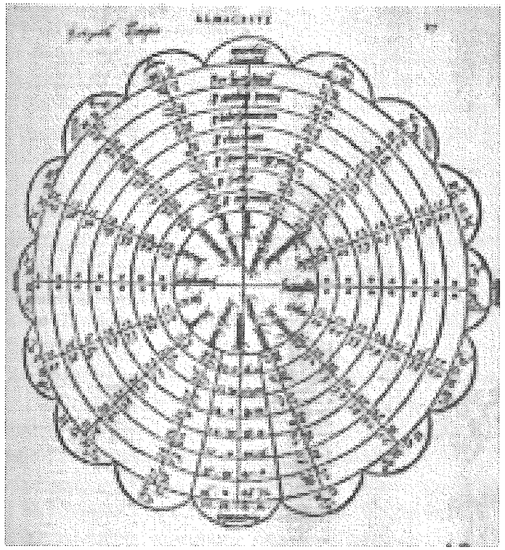
SÉSIANO, J. 1981 : *The Arabic Text of Books IV to VII of Dophantus' Arithmetica in the translation of Qusta ibn Luqa*, New York, Speringer Verlag, 1981.

SEZGIN, F. 1974 : *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V, Mathematik bis ca. 430 H. Leide, Brill.

WIEDEMANN, E. 1926-27 : Uber eine besondere Art des Gesellschaftsrechnens nach Ibn al-Haitam. *Sitzungsberichte der Physikalisch-medezinischen Societät zu Eslangen*, 1926-27, 58-59, pp. 191-196.

WOEPCKE, F. 1854 : *Note sur des notations algébriques employées par les Arabes*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Vol. 39, pp. 162-165.

YOUSCHKEVITCH, A.P. 1976 : *Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles)*, Paris, Vrin.



L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants: application à la trigonométrie

El IDRISSI Abdellah
Ecole Normale Supérieure – Marrakech (Maroc)

Abstract

Le texte qui suit s'appuie sur une recherche que nous avons réalisé dans le cadre de la formation des enseignants[1]. Nous allons présenter les idées ainsi que les principes ayant présidés à la planification d'une intervention que nous avons réalisé auprès d'enseignants. Cette intervention a porté sur l'histoire de la trigonométrie. Nous nous contenterons d'une présentation très succincte.

[1]EL IDRISSI, 1999.

1 L'histoire des mathématiques chez les enseignants et dans leur formation

Même si l'histoire des mathématiques est présente dans plusieurs centres ou institutions de formation des enseignants de plusieurs pays, très peu d'enseignants y recourent dans leurs enseignements. Hormis les chercheurs et quelques groupes d'enseignants au niveau du secondaire, nous ne connaissons que très peu d'initiatives en ce qui concerne le recours à l'histoire. Une des principales raisons provient sans conteste de la formation des enseignants. Les cours consacrés à l'histoire des mathématiques assurent essentiellement l'acquisition d'un savoir historique, à propos de certains concepts spécifiques ou à propos des grandes étapes de l'évolution historique des mathématiques. Au mieux, une analyse de l'activité mathématique comme activité sociale est produite et complétée par des éléments historiographiques.

En outre, ce relatif rejet de l'histoire des mathématiques est dû aux problèmes que pose l'histoire des mathématiques comme activité. L'inaccessibilité des textes, les difficultés d'interprétation qu'ils posent et la formation interdisciplinaire qu'ils exigent, sont parmi les principaux problèmes. Une dernière raison, et non la moindre, est à notre avis le manque de conviction qu'ont les enseignants à propos des apports didactiques de l'histoire des mathématiques.

La formation en histoire des mathématiques des enseignants doit tendre à contourner ces écueils. Il faudrait d'abord veiller à doter les enseignants d'attitudes favorables face à l'histoire des mathématiques. Pour cela, il est indispensable de les convaincre que l'histoire des mathématiques peut constituer un outil enrichissant pour leurs enseignements[2].

Dans le même ordre d'idée, il s'impose d'initier les enseignants dès leur formation, à la recherche historique, et surtout à l'utilisation de l'histoire dans leur enseignement.

L'étude de textes historiques originaux est l'une des activités indispensables par laquelle doit passer toute initiation à la recherche en histoire des mathématiques[3]. Certes, il ne s'agit pas de faire écrire l'histoire des mathématiques par les étudiants en formation à partir de sources originales. Néanmoins, il faut les initier à leur analyse et leur en montrer les difficultés aussi bien que les avantages.

L'étude des textes originaux est une activité ardue, cependant, elle est la seule à offrir l'occasion d'une meilleure immersion dans la pensée des mathématiciens ou les mathématiques du passé. Si une telle analyse est complexe et parfois pénible, elle permet d'éviter des mauvaises interprétations.

D'ailleurs, comme le signale NEUGEBAUER (1990), pour comprendre la pensée d'une époque donnée, il suffit de s'attarder à l'étude d'un échantillon réduit des œuvres originales. Par la suite, sauf pour un historien professionnel, des sources secondes et de deuxième main peuvent être suffisantes.

Enfin, il est nécessaire que l'étude de l'histoire des mathématiques soit intégrée directement à la didactique, notamment à l'analyse de concepts. Une telle stratégie incite les enseignants à considérer l'histoire des mathématiques comme partie intégrante de la didactique des mathématiques.

Les suggestions que nous venons d'émettre ne peuvent être intégrées que dans le cadre d'un programme général de formation des enseignants. Elles pourraient déboucher sur une intégration harmonieuse des cours d'histoire des mathématiques et de la formation didactique des enseignants, que ce soit la formation pratique ou la formation théorique. Cette intégration peut se concrétiser par une collaboration étroite entre les enseignants de didactique et les enseignants

[2] ARCAVI et col, 1987.

[3] BARBIN, 1987.

d'histoire des mathématiques. Le cas échéant, elle soutiendrait une meilleure conception de la formation des enseignants en histoire des mathématiques.

Dans le cas de la présente recherche nous avons procédé à la planification d'une intervention dans le cadre de la formation des enseignants[4]. L'intervention a duré plus de vingt heures et dix étudiants en ont bénéficié.

2 La sélection du contenu

Comme nous l'avons déjà souligné, l'intervention portait sur la trigonométrie. Or, l'histoire de la trigonométrie s'étale sur plus de quatre milliers d'années. Il est nécessaire de faire un choix de périodes ou d'œuvres sur lesquelles peut porter l'intervention. Nous avons sélectionné quatre œuvres, correspondant à quatre périodes, qui nous ont semblé pertinentes. Les quatre œuvres spécifiques que nous avons sélectionnées sont le *le Papyrus de Rhind* de la période égyptienne, l'*Almageste* de Ptolémée de la Grèce antique, le *Suryasiddhanta* de la période des Hindous et le *Traité du quadrilatère* de la période des Arabes.

2.1 La période égyptienne: *Le Papyrus Rhind* (vers 1500 av. J.-C.)

De la période des Égyptiens, nous avons choisi des extraits du *Le Papyrus Rhind.* Ce papyrus, qui date d'avant le quinzième siècle avant Jésus-Christ est l'un des rares documents mathématiques qui nous soient parvenus de la civilisation égyptienne. La lecture et l'identification de ce papyrus n'ont été réalisées que récemment, au tournant du XXème siècle[5].

Le *Papyrus Rhind* comprend, entre autres, des problèmes de mathématiques avec leurs solutions respectives. Autant les problèmes que leurs solutions nous semblent dignes d'analyse et de compréhension. Les problèmes qui nous ont particulièrement intéressés portent sur un concept spécifique: le sekt. L'intérêt de ce concept pour notre intervention se résume d'une part par le fait qu'il s'apparente, sans jamais s'y identifier, au concept trigonométrique de cotangente, et d'autre part, par le fait qu'il semble plausible qu'il ait été utilisé par les Égyptiens pour la mesure des pentes des pyramides.

2.2 La Grèce antique: *L'Almageste* de Ptolémée (vers 150 P. J.-C.)

Pour la Grèce antique, c'est sur la trigonométrie de Ptolémée que s'est arrêté notre choix. L'*Almageste* de Ptolémée est la plus ancienne qui soit conservée et qui nous renseigne sur l'état de la trigonométrie chez les Grecs, les autres travaux trigonométriques étant perdus[6]. En outre, dans son L'*Almageste*, consacrée à l'astronomie, Ptolémée réserve deux chapitres à la trigonométrie. Il s'y propose notamment, de construire une table des cordes.

2.3 La période des Hindous: *Le Suryasiddhanta* (500 P. J.-C.)

La trigonométrie chez les Hindous présente, quant à elle, des spécificités d'une autre nature. Dans Le *Suryasiddhanta*, œuvre hindoue dont on ignore l'auteur, la trigonométrie apparaît sous un aspect singulier et relativement mystique. C'est une trigonométrie qui se démarque de celle des Grecs dans sa conception et dans le choix de certains paramètres, dont le rayon du cercle

[4] EL IDRISSI, 1999.

[5] NEUGEBAUER, 1990; GILLINGS, 1972; SMITH, 1958.

[6] PTOLÉMÉE, 1813; NEUGEBAUER, 1990.

qui sert de base à la construction d'une table trigonométrique de sinus. Le choix de ce rayon repose sur une conception spécifique du cercle et de sa mesure[7].

2.4 La période des Arabes: Le *Traité du quadrilatère* (1000 P. J-C.)

L'œuvre sélectionnée pour la période arabe, Le *Traité du quadrilatère*, d'Al-Tusi[8], marque un tournant dans l'évolution historique de la trigonométrie. Elle est la première à être exclusivement consacrée à la trigonométrie et on ne peut manquer d'y constater des emprunts aux travaux Grecs et Hindous sur la trigonométrie[9].

3 En guise de conclusion

Dans les différentes activités que nous avons proposées dans l'intervention, nous avons, autant que possible tâché de ne pas inviter les participants à interpréter, dès le premier abord, les textes et les données historiques à l'aide des connaissances mathématiques qu'ils possèdent. L'interprétation des données historiques à travers les outils mathématiques contemporains joue le rôle d'un obstacle et empêche les étudiants de rechercher les significations authentiques des données historiques.

En dépit du fait que des activités d'ordre historique sont combinées avec des activités d'ordre épistémologique, nous avons tenu d'une part à spécifier ce qui provient de l'histoire de ce qui n'en provient pas, d'autre part, à distinguer les données historiques brutes des interprétations. L'avantage de ces distinctions est d'initier les étudiants à la recherche historique. Le fait de distinguer les données historiques des données conceptuelles peut en outre constituer une sensibilisation très subtile aux apports didactiques de l'histoire des mathématiques.

Tout au long de l'intervention, nous avons cherché à amener les étudiants à s'immerger intimement dans la pensée de l'auteur ou dans l'esprit de l'œuvre historique étudiée. Nous considérons que c'est à cette condition seulement que l'histoire peut jouer un rôle formateur en didactique des mathématiques. L'histoire des mathématiques peut ainsi initier les étudiants à analyser des raisonnements mathématiques des autres mathématiciens et à chercher davantage à les comprendre qu'à les juger.

Enfin, nous avons tenu à ce que le cours soit dispensé sous une forme active et stimulante (annexe).

Bibliographie

AL-TUSI, N., (1891), *Traité du quadrilatère*, Constantinople : Typographie et lithographie Osmanié, Traduit par P. A. Carathéodory.

ARCAVI, A. BRUCKHEIMER, M. BEN-ZVI, R., (1987) History of mathematics for teachers : the case of irrational numbers, dans *For the learning of mathematics*, n° 7. 2, pages 18-33.

BARBIN, E., (1987), Dix ans d'histoire des mathématiques dans les IREM, dans *Bulletin de l'APMEP*, n° 358, Avril.

BURGESS, E.R., (1858), *Suryasiddhanta, A text-book of Hindu astronomy*. Traduction et notes de Burgess, E.R., Journal of the American Oriental Society, vol 6. (Éd.) San Diego : Wizard.

EL IDRISSI, A., (1999), *L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants : étude

[7] BURGESS, 1858.

[8] AL-TUSI, 1891.

[9] SMITH, 1958.

exploratoire portant sur l'histoire de la trigonométrie, Thèse de Doctorat (Ph. D), présentée à l'Université du Québec à Montréal, Canada.

GILLINGS, R.J., (1972), *Mathematics in The Time of Pharoahs*, Cambridge Massachussets : M.I.T. press.

NEUGEBAUER, O., (1990), *Les Sciences Exactes dans l'Antiquité*, Paris : Actes Sud, (Traduit de l'anglais par Souffrin, P.).

PTOLÉMÉE, C., (1813), *Composition Mathématique: L'Almageste*, Paris : Henri Grand Libraire, Traduit du Grec par Halma, M.

SMITH, D.E., (1958), *History of mathematics*, New York : Dover, vol II, Réimpression.

Niels Abel (1802-1829)

Abel et la lemniscate

FRIEDELMEYER Jean-Pierre
IREM de Strasbourg (France)

Abstract

Le problème de la division de la lemniscate est un lieu insolite mais "concret" et stratégique pour pénétrer par la petite porte dans quelques unes des théories marquantes du XIX^{ème} siècle, at par là d'en saisir l'origine :

- celle de la résolution des équations algébriques comme moteur de l'émergence du concept de groupe;
- celle des fonctions elliptiques au centre de l'élaboration des fonctions de variable complexe;
- celle des intégrales abéliennes.

C'est un bel exemple pour voir fonctionner la liaison de plus en plus étroite entre les domaines de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie, et même de l'arithmétique.

Nous nous baserons principalement sur le texte d'Abel : Recherches sur les fonctions elliptiques (1826), et nous apprendrons à diviser la lemniscate à la règle et au compas en 2, 3, 5 et 17 parties égales. De courtes "respirations" nous donnerons l'occasion de lire quelques unes des lettres écrites par Abel durant son voyage à Berlin et à Paris. Elles sont remarquables de jeunesse et d'émotion; elles décrivent avec verve et malice quelques personnalités mathématiques célèbres du siècle.

Introduction

Les problèmes que rencontre un historien des sciences varient beaucoup selon l'époque sur laquelle il travaille. Si celle-ci est très éloignée de l'époque actuelle, les difficultés tiennent principalement à la langue et à l'étrangeté d'une culture scientifique et philosophique qui se pense et s'exprime de manière très différente de la nôtre. Ce type de problème s'estompe au fur et à mesure que l'on se rapproche de la période actuelle : le langage, l'utilisation du symbolisme sont proches des nôtres, mais par contre les difficultés liées à la complexité et à l'abstraction des concepts deviennent dominantes. Ainsi les mathématiques du 19$^{\text{ème}}$ siècle nous sont beaucoup plus proches dans leur style et leur écriture que celles des siècles précédents, mais la compréhension des idées et des méthodes qu'elles ont développées, demande un effort de réflexion important à quiconque n'est pas un professionnel de la recherche et de l'enseignement supérieur. Faut-il donc que le non professionnel en prenne son parti et renonce définitivement à accéder à la compréhension des plus belles théories mathématiques des 19$^{\text{ème}}$ et 20$^{\text{ème}}$ siècles, c'est-à-dire en fait de ce qui est considéré par de nombreux chercheurs d'aujourd'hui comme les seules mathématiques dignes de ce nom ? Nous pensons que non, et que l'histoire peut être une voie d'accès à ces théories, dont l'origine est souvent un problème plus "concret". De ce point de vue, le problème de la division de la lemniscate est un lieu stratégique pour pénétrer par la petite porte dans quelques unes des théories marquantes du 19$^{\text{ème}}$ siècle, et par là d'en saisir l'origine :

- celle de la résolution des équations algébriques comme moteur de l'émergence du concept de groupe,
- celle des fonctions elliptiques au centre de l'élaboration des fonctions de variable complexe,
- celle des intégrales abéliennes.

C'est un bel exemple pour voir fonctionner la liaison de plus en plus étroite au 19$^{\text{ème}}$ siècle entre les domaines de l'analyse, de l'algèbre, de la géométrie, et même de l'arithmétique.

C'est enfin un problème exemplaire de la création mathématique actuelle. Jusqu'au 18$^{\text{ème}}$ siècle, l'invention mathématique se faisait par abstraction progressive d'une réalité ancrée d'abord dans l'activité quotidienne.

Pour prendre un exemple précis, l'astronomie et de multiples activités pratiques ont conduit à la trigonométrie. Celle-ci, en se développant, est fécondée par l'analyse des fonctions et aboutit à l'étude des fonctions circulaires et finalement à celle de leurs fonctions réciproques, lesquelles s'avèrent d'excellents outils d'intégration des fonctions algébriques de la forme $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, où R est une fonction rationnelle. Au 19$^{\text{ème}}$ siècle, la démarche est inverse. Divers problèmes posent la question de l'intégration d'expressions du type $R(x, \sqrt{P(x)})$, où $P(x)$ est un polynôme de degré trois ou quatre. Or le matériel des fonctions disponibles pour traiter cette question est insuffisant. Que faire ? Le mathématicien va construire l'objet nécessaire à cette résolution à partir de la question posée et développer une théorie pour de nouvelles fonctions, sur le modèle des fonctions circulaires, mais en empruntant le chemin inverse. L'intégrale est première; elle donne lieu, par inversion, à une nouvelle classe de fonctions dites elliptiques, avec leur "trigonométrie" et de multiples applications en mathématiques, en physique, en mécanique; avec, bien-sûr, la rencontre de nouveaux problèmes inédits mais stimulant l'imagination des mathématiciens .

Chercher à diviser une lemniscate en parties égales, qui plus est, à la règle et au compas, peut apparaître comme une activité dérisoire, un peu folle aux yeux du grand public, au même titre

d'ailleurs que de diviser un cercle; encore que là, cela lui paraît déjà plus utile, peut-être aussi parce qu'il comprend mieux la question . Mais, c'est souvent à partir de petits problèmes de ce type que les mathématiques ont fait les avancées les plus significatives et les plus spectaculaires : les *Recherches arithmétiques* de Gauss qui se terminent par le problème de la division du cercle, sont l'un des chefs d'œuvres définitifs de la littérature mathématique. Dans l'introduction à un texte qui s'occupe justement de la lemniscate[1], Euler explique qu'il y a deux manières de considérer l'utilité de ce qu'il appelle les spéculations mathématiques :

> D'une part celles qui offrent un intérêt marquant dans la vie ordinaire ou dans d'autres branches de la connaissance, et dont la valeur se mesure d'habitude à l'aune même de la grandeur de cet intérêt.
>
> L'autre classe englobe les spéculations qui, sans présenter d'intérêt direct, sont cependant précieuses, car elles se proposent d'explorer les limites de l'Analyse et d'exercer les forces de notre esprit. Comme en effet un nombre important des recherches dont on peut attendre une grande utilité doivent cependant être abandonnées à cause des insuffisances de l'Analyse, il ne faut pas alors dévaloriser les spéculations qui promettent un progrès qui peut être considérable. De telles considérations semblent particulièrement utiles, qui pourtant étaient faites accidentellement et a posteriori, alors qu'elles avaient peu ou pas d'objectifs a priori. Mais lorsqu'on a reconnu leur exactitude, des méthodes plus simples se laissent trouver qui y conduisent, et il ne fait aucun doute que même dans la recherche de telles méthodes nouvelles, le champ de l'Analyse n'est pas peu agrandi. Des remarques de ce genre, qui ne reposent pas sur une méthode déterminée et dont le ressort interne semble caché, me sont apparues dans une publication toute récente[2].

De fait, beaucoup de travaux du 19$^{\text{ème}}$ siècle se sont engagés à propos ou autour du problème de la division de la lemniscate sans objectif précis, mais qui ont dégagé un ressort interne extrêmement fécond :

- Parce que cette division met en jeu des équations de degré élevé, (la division par n conduit à une équation de degré n^2-1) elle suscite les questions théoriques sur leur résolubilité, et de ce fait sur la résolution générale des équations polynômes. Vous avez là l'une des sources de l'algèbre moderne avec la théorie des groupes, des corps, des extensions de corps.
- Parce que cette division concerne une courbe qui n'est pas très simple (comme l'est le cercle), et dont la longueur s'exprime par une fonction que l'on ne sait pas exprimer au moyen des fonctions usuelles, elle oblige à construire un nouvel objet, la fonction elliptique, dont la richesse et les applications se révèlent inépuisables.
- Un des éléments de cette richesse est que la division de la lemniscate est plus simple si l'on passe par les nombres complexes. Par exemple diviser par 5 donne une équation de degré 24. Or $5 = (2+i)(2-i)$, et diviser par $2+i$ ou $2-i$ conduit à une équation du 4$^{\text{ième}}$ degré seulement. (En fait du premier degré en x^4). D'où deux conséquences : la nécessité de développer une théorie des fonctions de variable complexe; l'attention portée à des questions d'arithmétique. (Penser à l'arithmétique des courbes elliptiques).

Beaucoup d'auteurs ont contribués à ces recherches qui ont dominé le 19$^{\text{ème}}$ siècle et ont développé leurs ramifications jusqu'à aujourd'hui. Elles ont été initialisées pour la plupart

[1] EULER, *Nouveaux commentaires de Saint Petersbourg* VI, 1761.

[2] Les travaux de Fagnano sur la lemniscate. (voir plus loin).

par un jeune mathématicien norvégien : Niels Henrik ABEL (1802-1829) dans son article : *Recherches sur les fonctions elliptiques*[3].

Le terme *Recherches*, rare à l'époque où l'on rencontre plutôt les mots *Mémoires*, ou *Éléments*, fait pendant au titre de GAUSS *Disquisitiones*, lequel semble avoir exercé une véritable fascination sur le jeune ABEL, comme en témoigne le rapprochement suivant :

Dans ses *Recherches arithmétiques*, (traduction française des *Disquisitiones*) section VII, intitulée *Des équations qui déterminent les sections circulaires*[4], GAUSS fait en effet la remarque que :

> les principes de la théorie que nous entreprenons d'exposer, s'étendent bien plus loin que nous ne le faisons voir ici; ils peuvent en effet s'appliquer non seulement aux fonctions circulaires, mais aussi avec autant de succès à beaucoup d'autres fonctions transcendantes, par exemple à celles qui dépendent de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$[5].

Cette remarque n'échappe pas à ABEL qui dans ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* annonce :

> entre autres théorèmes je suis parvenu à celui-ci : On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en m parties égales par la règle et le compas seuls, si m est de la forme 2^n ou 2^n+1, ce dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si m est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes. Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au cercle[6].

Dans l'article qui suit, nous nous proposons de dégager les idées principales d'ABEL pour réaliser cette "lemniscatomie", de façon suffisamment élémentaire pour ne pas avoir à mettre en place l'immense arsenal de la théorie des fonctions elliptiques. Nous nous appuierons sur le texte d'ABEL cité ci-dessus, principalement les paragraphes I à V et le paragraphe VIII, mais limités et adaptés à ce qui concerne la lemniscate. Pour mieux comprendre les méthodes développées à ce sujet faisons le parallèle évoqué par ABEL avec le cercle.

1 La cyclotomie

La comparaison avec le cercle nous permet de dégager les ingrédients nécessaires pour diviser une lemniscate. Sur quoi en effet est basée la division du cercle ?
1) Sur l'existence d'une trigonométrie établissant une correspondance entre la longueur d'un arc de cercle et la longueur de la corde sous-jacente. Cette correspondance s'exprime au moyen des fonctions circulaires sinus, cosinus, ...
2) Sur la mise en place d'une formule d'addition pour ces fonctions qui permet d'exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. En particulier il se trouve que $\cos(nx)$ est un polynôme en $X = \cos x$ pour tout entier n.

Pour des raisons évidentes de symétrie, on a pris l'habitue de repérer les arcs de cercles en relation avec l'angle au centre et de définir la fonction sinus comme exprimant la demi corde Mm dans un cercle de rayon $\Omega A = 1$. (Figure 1)

[3] publiés en 1827 et 1828 dans les volumes II et III du *Journal de Crelle*.
[4] Voir *L'Ouvert* n° 46 et 47, mars et juin 1987.
[5] C.F. GAUSS, *Recherches arithmétiques*, traduites par A. C. M. Poullet Delisle, Paris 1807.
[6] N. H. ABEL, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, p. 314. Voir aussi la correspondance d'Abel citée dans les numéros 90-91-92 et 94 de *L'Ouvert*, dans l'article : *L'histoire des mathématiques par correspondance*.

La longueur de l'arc $A\widehat{M}$ s'exprime alors en radian par le même nombre que la mesure de l'angle $A\widehat{\Omega}M$. Cependant, pour la comparaison avec la lemniscate, il est plus judicieux d'établir une relation directe entre l'arc $A\widehat{M}$ et la corde AM. Pour ce faire, il suffit de prendre un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ ou de diamètre $OA = 1$. Alors, si l'angle AOM mesure θ radian, l'arc AM mesure aussi θ radian, avec l'avantage, dans ce cas, que $AM = \sin\theta$, et que $OM = \cos\theta$. (Figure 2)

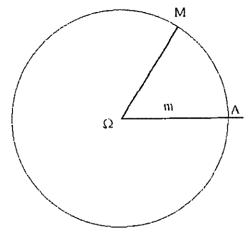


Figure 1

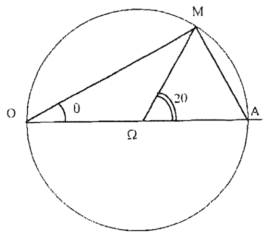


Figure 2

La division du cercle en N parties égales peut alors s'exprimer de deux manières :
- soit par le calcul de l'arc θ,
- soit par le calcul de la corde OM ou AM, ce dernier étant celui qui permet la construction éventuelle à la règle et au compas. Précisons cela pour le cas $N = 5$, par exemple, avec la construction du pentagone régulier $OMNPQ$. (Figure 3)

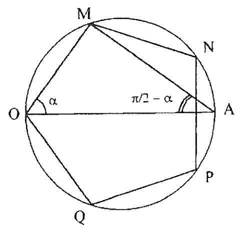


Figure 3

Posons $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) = \alpha$. Alors :

$$A\widehat{M} = \alpha ; OM = \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

$$\widehat{ON} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \widehat{OP} = 3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \widehat{OQ} = 4\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \widehat{OO} = 5\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \pi$$

Et de façon corrélative :

$$ON = \sin 2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin 2\alpha ; OP = \sin 3\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); OQ = \sin 4\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

et

$$OO = \sin 5\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos 5\alpha = 0.$$

Donc $5\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\alpha = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{10}$ (Première manière).
Ou bien : $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha = 0$ dont la résolution donne :

$$OM = OQ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

et

$$ON = OP = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

L'expression de ces deux longueurs ne fait intervenir que des racines carrées; elles sont donc constructibles à la règle et au compas.

Voyons maintenant comment mettre en place des outils analogues pour la lemniscate. L'analogie se fait très directement à une exception fondamentale près : il n'y a pas de relation de proportionnalité entre un arc de lemniscate et un angle, comme dans le cercle. Ce qui suppose un travail concentré sur une relation entre l'arc de courbe et la corde, sans passer par l'angle. Or une telle relation existe aussi pour le cercle utilisé plus haut : la longueur s de l'arc $\widehat{OM}$ correspondant à la corde $OM = r$, est donnée par

$$s(r) = \int_0^r \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

si x et y sont paramétrés en fonction de r. D'où le parallèle, en prenant comme repère orthonormal un repère avec $\overrightarrow{OA}$ comme vecteur unitaire sur l'axe des x :

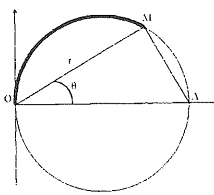


figure 4

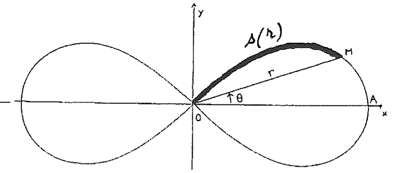


figure 5

équation polaire : $r = \cos\theta$	polaire : $r^2 = \cos 2\theta$
équation cartésienne : $x^2 + y^2 = x$	cartésienne : $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$
équations paramétriques : $\begin{cases} x &= r^2 \\ y^2 &= r^2 - r^4 \end{cases}$	paramétriques : $\begin{cases} 2x^2 &= r^2 + r^4 \\ 2y^2 &= r^2 - r^4 \end{cases}$
$\widehat{OM} = s(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ = Arcsinr	$\widehat{OM} = s(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$
$\widehat{AM} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ = Arccosr	$\widehat{AM} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$
$\widehat{OA} = s(1) = \frac{\pi}{2}$ = 1,57	$\widehat{OA} = s(1) = \frac{\varpi}{2}$ = 1,31
(une valeur de r fournit 2 valeurs de (x, y)	(une valeur de r fournit 2 valeurs de (x, y)

2 L' "invention" de la lemniscate (1694)

Si la courbe lemniscate avait déjà été rencontrée comme cas particulier d'ovale de Cassini (ensembles de points dont le produit des distances à deux points fixes est constant), elle ne fut

nommée ainsi qu'en 1694 par Jacques Bernoulli à partir du grec λημνισκος qui signifie *bandelette* ou *ruban*, et à l'occasion d'un problème posé quelques années auparavant par Leibniz et désigné par le problème de l'*isochrone paracentrique*. Il s'agit de trouver la trajectoire d'un point M dans un plan vertical, point soumis à la seule pesanteur et s'éloignant d'un point fixe C de telle façon que le rayon CM varie linéairement avec le temps. La résolution du problème conduit à la considération de l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{\sqrt{ar}} = \frac{adz}{\sqrt{az(a^2 - z^2)}} = \frac{2adu}{\sqrt{a^4 - u^4}}$$

(en posant $az = u^2$). Or aucune des deux dernières différentielles n'est intégrable par quadrature, c'est-à-dire au moyen d'une aire limitée par une courbe dont l'équation s'exprimerait à l'aide des fonctions élémentaires connues. Mais il y a d'autres moyens de penser cette intégration. Le frère de Jacques, Jean Bernoulli réalise l'intégration au moyen de la rectification d'une courbe, en posant l'élément différentiel égal à $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ et trouve, à un coefficient $\sqrt{2}$ près : $\begin{cases} x &= \sqrt{az + z^2} \\ y &= \sqrt{az - z^2} \end{cases}$, appliquant par là un principe déjà énoncé par Leibniz. Celui-ci disait qu'il est préférable de réduire les quadratures aux rectifications à cause que la dimension de la ligne est plus simple que celle de la surface, et que de plus une ligne se mesure plus facilement qu'une aire : il suffit de poser une corde le long de la ligne à mesurer. En éliminant z entre x et y on trouve l'équation cartésienne de la lemniscate :

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

Autrement dit, au lieu de penser l'intégrale comme une aire, Jean Bernoulli la pense comme une longueur de courbe. La lemniscate était née comme centre d'intérêt et nommée[7]. Si nous prenons $2a^2 = 1$, nous retrouvons les équations données ci-dessus.

3 La duplication de l'arc de lemniscate par le comte Fagnano (1718)

L'analogie entre le cercle et la lemniscate mise en évidence ci-dessus a très certainement inspiré un mathématicien italien, le comte Fagnano (1715-1797) qui decouvrit une formule de duplication c'est-à-dire une formule reliant r_1 et r_2 tels que $s(r_1) = 2s(r_2)$. Dans le cas du cercle, une telle formule est connue.
Puisque

$$s(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arcsinr},$$

posons $r_2 = \sin x$ ou x = Arcsinr_2 et $r_1 = \sin(2x)$ équivalent à

$$2x = \text{Arcsin}r_1 = 2\text{Arcsin}r_2,$$

ou encore $s(r_1) = 2s(r_2)$. Or $\sin(2x) = 2\sin x.\cos x$, équivalente à

$$r_1 = 2r_2\sqrt{1 - r_2^2}q.$$

Y a t-il une relation de duplication pour la lemniscate ? Par analogie avec l'intégration de

$$s(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

[7] H. Bos, *Lectures in the history of mathematics*, p. 101-111 et p. 23-36.

qui peut se faire au moyen du changement de variable $r = \frac{2t}{1+t^2}$ Fagnano utilise le changement

$(1) r^2 = \frac{2t^2}{1+t^4}$

pour le calcul de

$(2) s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \sqrt{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

puis encore le changement

$(3) t^2 = \frac{2u^2}{1-u^4}$

qui donne alors l'égalité

$(4) \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \sqrt{2}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$.

La combinaison de (2) et (4) donne alors

$(5) s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = 2\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$

avec la relation déduite de (1) et (3) entre r et u :

$(6) r = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$.

Autrement dit, si $OM = r$ et $ON = u$ tels que (5), alors l'arc $\overset{\frown}{OM}$ est le double de l'arc $\overset{\frown}{ON}$. En particulier si l'on prend $r = 1$ le quart de lemniscate OA est divisé par deux au point U tel que $OU = u$ avec u solution de l'équation

$$1 + u^4 = 2u\sqrt{1-u^4}.$$

L'équation en u est équivalente, pour u positif, à

$$u^8 + 4u^6 + 2u^4 - 4u^2 + 1 = (u^4 + 2u^2 - 1)^2;$$

soit

$$u = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

(voir Figure 9 plus loin).

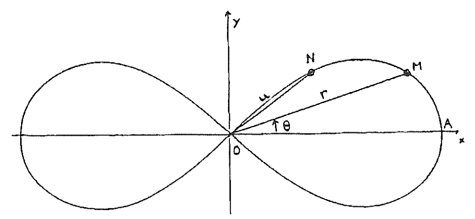


Figure 6

Ce qui est remarquable, mais ne sera évidemment découvert que bien après, c'est qu'en passant par les complexes, on comprend mieux la raison pour laquelle ces transformations donnent de si bons résultats.

Dans les égalités (1) et (2), remplaçons t par $t = \varepsilon v$ où $\varepsilon = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, racine huitième de l'unité ou racine quatrième de (-1). Alors :

$$r^2 = \frac{2iv^2}{1-v^4}$$

et

$(7) s(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = (1+i)\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}$.

Puis, si nous divisons à présent (4) par ε et remarquant que $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, on obtient pour (3) et (4) :

$$v^2 = \frac{-2iu^2}{1-u^4}$$

et

$(8) \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = (1-i)\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$.

Autrement dit, en passant par les complexes, toutes les intégrales restent lemniscatiques, c'est-à-dire avec le radical $\sqrt{1-x^4}$. La composition de (7) et (8) redonne alors bien les relations (5) et (6) puisque $(1-i)(1+i) = 2$. Mais cela suppose la mise en place d'une théorie des intégrales complexes[8].

4 Le théorème d'addition par Euler (1753)

Chargé d'examiner les travaux de Fagnano qui postulait pour être membre de l'Académie de Berlin, Euler les expose avec quelques compléments de son propre fait. Restons dans l' analogie avec les fonctions circulaires. Nous avons :

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = 2\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

lorsque

$(9) r = 2u\sqrt{1-u^2}$,

relation qui provient de $\sin(2x) = 2\sin x.\cos x$, lorsque l'on pose $u = \sin x$ et $r = \sin(2x)$. Celle-ci est elle-même un cas particulier de la relation $\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \sin y.\cos x$ et se traduit sur les fonctions réciproques par

$$\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^v \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

lorsque

$(10) r = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}$.

[8]cf. C.L. SIEGEL, *Topics in complex function theory*, p. 1-11.

Euler se pose la question d'un théorème analogue pour

(11) $\int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^v \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

La relation (10) s'obtient à partir de (9) par une sorte de dédoublement de u en u et v. La même démarche par dédoublement de u et v dans (6) lui fait trouver :

(12)$r = \frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}$

pour que (11) soit vérifiée.

5 Fonction sinus lemniscatique[9]

Soit α la fonction : $x \mapsto \alpha(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ donnant la longueur de l'arc $\widehat{OM}$ sur la lemniscate, pour une distance $OM = x$ donnée. En fait nous considérerons les variables dans leur généralité (donc affectée d'un signe). Posons la longueur du quart de lemniscate soit $\alpha(1) = \frac{\varpi}{2} \cong 1,31$. La fonction α est continue, impaire, strictement croissante de $[-1;+1]$ sur $\left[-\frac{\varpi}{2},+\frac{\varpi}{2}\right]$, ce qui permet de définir la fonction réciproque φ continue, impaire, strictement croissante, de $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right]$ sur $[-1;+1]$. En remarquant que le changement formel $u = -it$ dans $\int_0^{ix} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \frac{idu}{\sqrt{1-u^4}}$ donne la relation $\alpha(ix) = i\alpha(x)$, ABEL définit φ également sur[10] $\left[-\frac{i\varpi}{2};+\frac{i\varpi}{2}\right]$ en posant $\varphi(i\alpha) = i\varphi(\alpha)$ et introduit par ailleurs les fonctions f et F définies par $f(\alpha) = \sqrt{1-\varphi^2(\alpha)}$ et $F(\alpha) = \sqrt{1+\varphi^2(\alpha)}$. Le principal problème est alors de mettre en place les formules d'addition[11] : pour $u = \varphi(\alpha)$ et $v = \varphi(\beta)$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha+\beta) &= \frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta)+\varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{u\sqrt{1-v^4}+v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2};\\
f(\alpha+\beta) &= \frac{f(\alpha)f(\beta)-\varphi(\alpha)\varphi(\beta)F(\alpha)F(\beta)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}-uv\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}}{1+u^2v^2};\\
F(\alpha+\beta) &= \frac{F(\alpha)F(\beta)+\varphi(\alpha)\varphi(\beta)f(\alpha)f(\beta)}{1+\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}+uv\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}{1+u^2v^2}.
\end{aligned} \quad (1)$$

Ces relations permettent de définir la fonction φ sur le carré $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right] \times \left[-\frac{i\varpi}{2};+\frac{i\varpi}{2}\right]$ par

$$\varphi(\alpha+i\beta) = \frac{\varphi(\alpha)f(\beta)F(\beta)+i\varphi(\beta)f(\alpha)F(\alpha)}{1-\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\beta)} = \frac{u\sqrt{1-v^4}+iv\sqrt{1-u^4}}{1-u^2v^2} \quad (2)$$

avec $u = \varphi(\alpha); \varphi(i\beta) = i\varphi(\beta) = iv$, sauf pour $\alpha = \mp\frac{\varpi}{2}$ et $\beta = \pm\frac{\varpi}{2}$ c'est-à-dire $uv = \pm 1$. D'autre part on a également $f(i\beta) = F(\beta)$ et $F(i\beta) = f(\beta)$.

6 Périodes

Comme $f(\frac{\varpi}{2}) = F(\frac{i\varpi}{2}) = 0$, la fonction φ n'est pas définie pour $uv = \mp 1$, c'est-à-dire pour $\mp\frac{\varpi}{2}(1 \mp i)$. Par contre on obtient $\varphi(\alpha+\frac{\varpi}{2}) = \sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \varphi(-\alpha+\frac{\varpi}{2})$ par les relations (1). Ce qui donne : $\varphi(\varpi+\alpha) = \varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$ et $\varphi(2\varpi+\alpha) = \varphi(\alpha)$.

[9]Terme utilisé par GAUSS dans des papiers qu'il a laissés à sa mort : Gauss Nachlass, Werke III p. 404. Nous n'utiliserons pas ce terme dans la suite, ni d'ailleurs les notations de GAUSS. Nous suivrons au plus près les notations et les idées d'ABEL.

[10]c'est-à-dire les nombres imaginaires purs de la forme ix où x appartient à $\left[-\frac{\varpi}{2};+\frac{\varpi}{2}\right]$

[11]ABEL les démontre par différentiation.

La fonction φ ainsi prolongée au moyen des relations (1) est périodique de période 2ϖ. On met de même en évidence la période imaginaire $2i\varpi$ et plus généralement

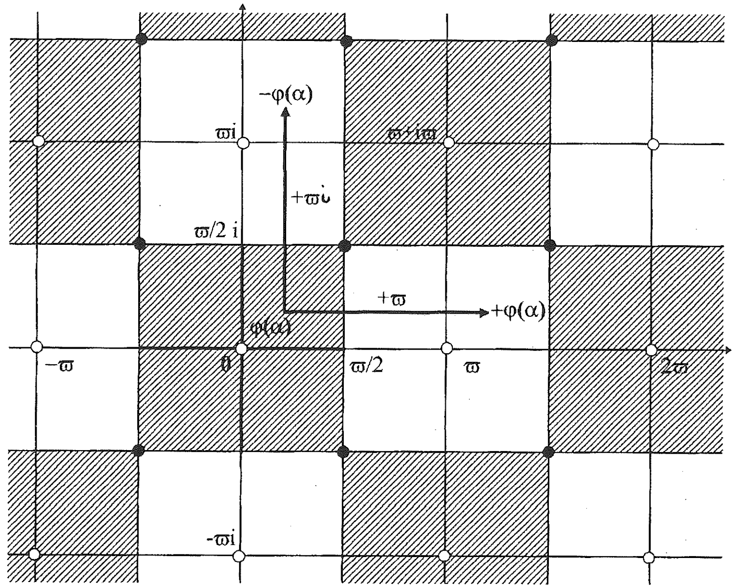


Figure 7

les périodes $2(m\varpi + in\varpi), (m,n) \in Z^2$. (Voir Figure 7). L'outil principal de la division de la lemniscate est maintenant en place.

N.B. Les points blancs sont ceux où la fonction φ est nulle; les points noirs ceux où elle n'est pas définie. Insistons par ailleurs sur le fait que ABEL ne fait aucune figure de ce type. Au moment où il écrit ce texte, la représentation géométrique des nombres complexes est loin d'être acquise, et ABEL, en tout cas ne l'évoque jamais[12].

7 Bissection d'un arc de lemniscate

Soient $\alpha = \beta = \frac{s}{2}; v = u = \varphi(\frac{s}{2})$; alors par les relations (1) et en posant $x = \varphi(\frac{s}{2})$; $y = f(\frac{s}{2}); z = F(\frac{s}{2})$ nous avons :

$$f(s) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}; F(s) = \frac{1+2x^2-x^4}{1+x^4}.$$

D'où l'on tire

$$x^2 = \frac{F(s)-1}{f(s)+1} = \frac{1-f(s)}{1+F(s)}$$

[12]Cf. *Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, par la Commission Inter-Irem d'histoire et d'épistémologie des mathématiques. Ellipses 1998.

et comme $y^2 = 1 - x^2$ et$z^2 = 1 + x^2$ on a aussi :

$$y^2 = \frac{F(s) + f(s)}{1 + F(s)}$$

et

$$z^2 = \frac{F(s) + f(s)}{1 + f(s)}.$$

En particulier pour $s = \frac{\varpi}{2}$, le quart de lemniscate est partagé en deux. Dans ce cas : $f(s) = 0$; $F(s) = \sqrt{2}$ donc $x = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Cette longueur est constructible à la règle et au compas, de la manière suivante (Figure 9) : la lemniscate étant inscrite dans le carré d'axes de symétrie (BOA) et (COD), tracer l'arc de cercle de centre B et de rayon $BC = \sqrt{2}$, qui coupe (OA) en E. La perpendiculaire en E à (OA) coupe le cercle de diamètre $[OA]$ en F. OF est la longueur $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ cherchée.
(Rappelons que $OA = 1$).
D'une manière plus générale, pour s fixé, l'arc moitié, d'origine O est obtenu en construisant

$$x = \sqrt{\frac{F(s) - 1}{f(s) + 1}} = \sqrt{\frac{1 - f(s)}{1 + F(s)}}$$

avec $F(s) = \sqrt{1 + \varphi^2(s)}$ et$f(s) = \sqrt{1 - \varphi^2(s)}$.

Remarque

Cette construction suppose la lemniscate tracée et coupée par le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Mais il est clair que le point d'intersection est constructible indépendamment du tracé même de la lemniscate puisque le paramétrage de celle-ci sous la forme

$$\begin{cases} 2x^2 &= r^2 + r^4 \\ 2y^2 &= r^2 - r^4 \end{cases}$$

donne des valeurs constructibles des coordonnées :

$$x = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{3\sqrt{2} - 4}{2}}.$$

A titre d'application des formules de bissection, considérons la division par 4. Dans ce cas

$$F(\frac{s}{2}) = \sqrt[4]{2}; f(\frac{s}{2}) = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Donc

$$x^2 = \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1} = \frac{1 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{1 + \sqrt[4]{2}}.$$

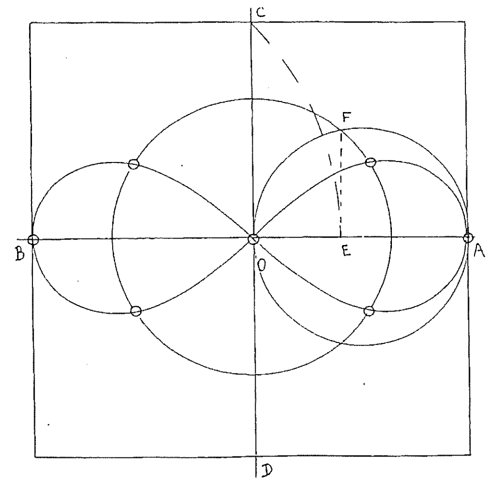


Figure 8

8 Trisection d'une demi lemniscate

En appliquant (1) à $\alpha = 2s$ et $\beta = s$ on obtient :

$$\varphi(3s) = \frac{u(3 - 6u^4 - u^8)}{1 + 6u^4 - 3u^8}$$

avec $u = \varphi(s)$. Prenant $3s = \varpi$, on obtient $u = \varphi(s) = \varphi(\frac{\varpi}{3})$ comme racine de l'équation (3) : $u^8 + 6u^4 - 3 = 0$, soit $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}$, constructible comme suit (Figure 10) : le cercle de centre S de rayon $SP = 2$ coupe $[BA]$ en G tel que $AG = 2 - \sqrt{3}$; $2\sqrt{3} - 3 = GH$ est la hauteur d'un triangle équilatéral de demi base AG. Il est alors facile de construire successivement les longueurs $OI = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ puis $u = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3} = OJ$. Remarquons que les huit solutions de l'équation (3) correspondent aux huit valeurs de $\varphi\left[\frac{\varpi}{3}(1 + 2m + 2in)\right]$ déterminées par les solutions de $3s = \varpi + 2\varpi(m + in)$ m et n entiers : $0 \leq m \leq 2$; $0 \leq n \leq 2$; le couple (1,0) correspondant à la solution $u = 0$ étant laissé de côté, donc :

$$(m, n) \in [(0,1); (0,2); (0,0); (1,1); (1,2); (2,0); (2,1); (2,2)].$$

Nous laissons au lecteur le soin de calculer $\varphi(\frac{\varpi}{6})$ pour la division de la demi lemniscate en six.

Indication :

$$\begin{aligned} x = \varphi(\frac{\varpi}{6}) = \varphi(\frac{1}{3}.\frac{\varpi}{2}) &\iff \varphi(3s) = 1, \text{ (avec } s = \frac{\varpi}{2}) \\ &\iff u(3 - 6u^4 - u^8) = 1 + 6u^4 - 3u^8 \\ &\iff (u+1)(t^2 - 2t - 2)^2 = 0 \text{ avec } t = u + \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

(Réponse : $\varphi(\frac{\varpi}{6}) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}+1-\sqrt{2\sqrt{3}}\right]$). On peut aussi réaliser la bissection de $s = \frac{\varpi}{3}$ par la méthode du § 8, qui donne

$$\varphi(\frac{\varpi}{6}) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\sqrt{2\sqrt{3}-3}}-3-1}{\sqrt{\sqrt{1-\sqrt{2\sqrt{3}-3}}-3+1}}},$$

dont on vérifiera l'égalité avec l'autre expression ci-dessus.

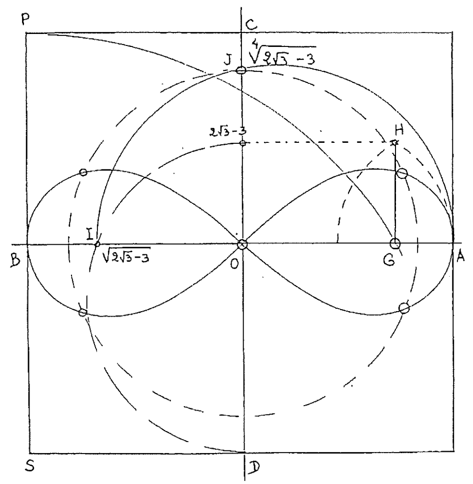


Figure 9

9 Division de la lemniscate en N parties égales

Les relations (1) nous montrent facilement que $\varphi(kd)$, $f(kd)$, $F(kd)$ sont, pour k entier, des fractions rationnelles en $x = \varphi(d)$, $y = f(d)$, $z = F(d)$, avec en plus les relations $y^2 = 1 - x^2$; $z^2 = 1 + x^2$. On a en effet les formules de récurrence suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi[(n+1)d] & = & -\varphi[(n-1)d] + \dfrac{2\varphi(nd)f(d)F(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \\[2ex] f[(n+1)d] & = & -f[(n-1)d] + \dfrac{2f(nd)f(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \\[2ex] F[(n+1)d] & = & -F[(n-1)d] + \dfrac{2F(nd)F(d)}{1+\varphi^2(nd)\varphi^2(d)} \end{array}\right.$$

Pour les premières valeurs de n on a de cette façon : $\varphi(2d) = \frac{2xyz}{1+x^4}$;

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi(3d) & = & \dfrac{x(3-6x^4-x^8)}{1+6x^4-3x^8}; \\[2ex] \varphi(4d) & = & 4xyz\dfrac{1-5x^4-3x^8+x^12}{1+20x^4-26x^8+20x^{12}+x^{16}}^{13}; \\[2ex] \varphi(5d) & = & \dfrac{x(5-2x^4+2x^8)(1-12x^4-26x^8+52x^{12}+x^{16})}{(1-2x^4+5x^8)(1+52x^4-26x^8+12x^12+x^{16})} \end{array}\right.$$

Appliquons la relation (2) au cas où $\alpha = md$ et $\beta = \mu d$, avec m et μ entiers naturels tels que $m + \mu$ soit impair. On calculera alors $\varphi[(m+\mu i)d]$ par les formules (1) qui donnerons une expression de la forme $x\Psi(x^2)$ où Ψ est une fonction rationnelle. En changeant d en id, $\varphi(d)$ deviendra $\varphi(id) = i\varphi(d) = ix$ et $\varphi[(m+\mu i)id] = i\varphi[(m+\mu i)d] = ix\Psi(-x^2)$ donc $\varphi[(m+\mu i)d] = x\Psi(-x^2)$. Par conséquent $\Psi(x^2) = \Psi(-x^2) = T(x^4)$ où T est une fonction rationnelle de x. Le lecteur pourra par exemple vérifier que :

$$\varphi[(2+i)d] = \frac{x^2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8}, \tag{4}$$

qui se simplifie en $xi\frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}$ par le facteur commun $1-(1+2i)x^4$.
Venons en alors à la division par N. Comme le cas de la division par deux a déjà été traité, on peut supposer dans la suite que N est impair. De plus, lorsque N est premier de la forme $N = 4n+1$, on sait que N se décompose en somme de deux carrés : $N = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)$. Comme N est impair, il en est de même de $\alpha+\beta$, de sorte que :

$$\varphi[(\alpha+i\beta)d] = x\frac{T}{S} \tag{5}$$

où T et S sont des polynômes en x^4. En prenant $d = \frac{\varpi}{\alpha+i\beta}$ le premier membre de (5) est nul, et par conséquent $x = \varphi\left(\frac{\varpi}{\alpha+i\beta}\right)$ sera une racine de l'équation : $T = 0$. ABEL démontre que cette équation est en fait de degré $4n = \alpha^2+\beta^2-1$, que ses racines sont les nombres $\pm\varphi\left(\frac{k\varpi}{\alpha+i\beta}\right)$, avec $1 \leq k \leq 2n$ et qu'elle est résoluble par les mêmes méthodes que GAUSS a mises en place pour la division du cercle. En particulier si $N = 4n+1$ est de la forme $1+2^n$, alors l'expression de $\varphi\left(\frac{\varpi}{4n+1}\right)$ ne contient que des racines carrées et donc est constructible à la règle et au compas. Voyons en l'illustration avec le cas $N = 5 = 2^2+1$.

Les égalités (4) nous fournissent les valeurs de $\varphi\left(\frac{k\varpi}{2+i}\right)$ pour $1 \leq k \leq 4$ comme racines de l'équation $1-2i-x^4 = 0$, c'est-à-dire comme racines quatrièmes de $1-2i$. L'une de celle-ci s'écrit :

$$x_0 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} - i\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}}\right] = \frac{1}{2}(u-iv).$$

Alors :

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{5}\right) = \varphi\left(\frac{\varpi}{2+i}+\frac{\varpi}{2-i}\right) = \varphi\left(\frac{4\varpi}{5}\right) = \varphi\left(\varpi-\frac{4\varpi}{5}\right).$$

Par les formules (1) avec $\alpha = \frac{\varpi}{2+i}$ et $\beta = \frac{\varpi}{2-i}$, on a :

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{5}\right) = \frac{u-v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} - \sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}}}{\sqrt{5}+1};$$

et de même :

$$\varphi\left(\frac{2\varpi}{5}\right) = \frac{u-v}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}} + \sqrt{2\sqrt[4]{5}+\sqrt{2\sqrt{5}+2}}}{\sqrt{5}+1}.$$

Remarque. L'équation $T = 0$ correspondant à $\varphi(\varpi) = 0$, donne le partage de la demi lemniscate en cinq parties égales. Mais lorsqu'on a ce partage là, on a immédiatement aussi le partage de la lemniscate entière, en prenant un point sur deux. Cependant le cas $N = 5$ est trop immédiat au niveau de la résolution de l'équation $T = 0$ pour manifester toute la puissance de l'outil algébrique mis en place par ABEL. Voyons celle-ci à l'œuvre dans le cas $N = 17$.

10 Partage de la lemniscate en dix-sept parties égales

Il s'agit de déterminer les valeurs de $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$; $1 \leq k \leq 16$. Or $\frac{2k\varpi}{17} = \frac{k\varpi}{1-4i} + \frac{k\varpi}{1+4i}$, de sorte qu'il suffit de calculer les $\varphi\left(\frac{k\varpi}{1+4i}\right)$ qui, combinés avec leurs conjugués, donneront les $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$. Définissons s par la relation :

$$\varphi(s) = \pm(4is) = \pm i\varphi(4s) \Longleftrightarrow s = \pm 4is + 2(\lambda\varpi + i\mu\varpi), \tag{6}$$

ou $s = \frac{2\varpi(\lambda+i\mu)}{1\pm 4i}$ (à $2\varpi(\lambda' + i\mu')$ près). Mais l'ensemble des valeurs $s_k = \frac{k\varpi}{1\pm 4i}$ coïncide avec l'ensemble des solutions de l'équation (6). En effet, cette dernière a pour solutions les nombres $s_{(\lambda,\mu)} = \frac{2\varpi}{1\pm 4i}(\lambda + i\mu)$, mais on peut toujours trouver k, λ et μ de telle façon que

$$\frac{2\varpi}{1+4i}(\lambda + i\mu) = \frac{k\varpi}{1+4i} + 2\varpi(\lambda' + i\mu').$$

Il suffit de vérifier les égalités $\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda &=& k + \lambda' - 8\mu' \\ 2\mu &=& 4\lambda' + 2\mu' \end{array}\right.$ (modulo 17). Par exemple

$$\frac{2\varpi}{1+4i}(3+5i) = \frac{12\varpi}{1+4i} + 2\varpi(1+i).$$

De même avec $\frac{\varpi}{1-4i}(\lambda + i\mu)$.

Il y a 32 valeurs du type $s_k = \frac{k\varpi}{1\pm 4i}$; $1 \leq k \leq 16$. Mais à cause de (6) on a :

$$\varphi^2(s_k) = -\varphi^2(s_{4k}) = \varphi^2(s_{17-k}) = -\varphi^2(s_{17-4k})$$

pour[14] k = 1; 2; 3; 6. Il n'y a par conséquent que huit valeurs distinctes de $\varphi^4(s)$. Cherchons en l'équation qui les admet comme racines.

Si $\varphi(s) = u$ alors

$$\varphi(2s) = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}; \varphi^2(2s) = \frac{4u^2(1-u^4)}{(1+u^4)^2}; \varphi^2(4s) = \frac{4\varphi^2(2s)(1-\varphi^4(2s))}{[1+\varphi^4(2s)]^2}.$$

[14]pour $k = 6$ on prendra bien évidemment l'indice modulo 17, donc $34 - 4k = 10$.

La relation $\varphi^2(4s) = -\varphi^2(s)$ donne alors :

$$u^2 + \frac{16u^2(1-u^4)[(1+u^4)^4 - 16u^4(1-u^4)^2](1+u^4)^2}{[(1+u^4)^4 + 16u^4(1-u^4)^2]^2} = 0;$$

soit, en posant $u^4 = x$:

$$x^8 + 24x^7 + 524x^6 - 1400x^5 + 886x^4 - 408x^3 + 748x^2 - 136x + 17 = 0. \tag{7}$$

Cette équation se décompose, comme on le vérifiera également un peu plus bas, en les deux suivantes à coefficients et racines conjuguées :

$$x^4 + (12-20i)x^3 + (-10+28i)x^2 + (-20-12i)x + 1 + 4i = 0; \tag{8}$$

$$x^4 + (12+20i)x^3 + (-10-28i)x^2 + (-20+12i)x + 1 - 4i = 0. \tag{9}$$

Soit donc $x_1 = \varphi^4(s)$ l'une des racines de l'équation (7). Alors $x_2 = \varphi^4(2s)$ est aussi une racine (car s est un nombre de la forme $\frac{2k\varpi}{17}$).
Or

$$\varphi^2(2s) = \frac{4\varphi^2(s)(1-\varphi^4(s))}{(1+\varphi^4(s))^2}$$

et

$$\varphi^2(4s) = \frac{4\varphi^2(2s)(1-\varphi^4(2s))}{(1+\varphi^4(2s))^2} = -\varphi^2(s).$$

D'où :

$$\frac{\varphi^2(2s)}{\varphi^2(s)} = \frac{4(1-x_1)}{(1+x_1)^2} = \frac{(1+x_2)^2}{4(1-x_2)}$$

et

$$\varphi^2(s)\varphi^2(2s) = \frac{4x_1(1-x_1)}{(1+x_1)^2} = -\frac{4x_2(1-x_2)}{(1+x_2)^2}.$$

En posant $x_1 + x_2 = y$ et $x_1.x_2 = z$, on obtient y et z par élimination de z entre les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 16(1-y+z) + (1+y+z)^2 &=& 0 \\ y - y^2 + 6z - yz - 2z^2 &=& 0 \end{array}\right.$$

qui nous donne

$$z = \frac{-y^2 + 27y - 34}{3y + 42}$$

et $y^4 + 24y^3 + 488y^2 - 1632y + 1360 = 0$, laquelle se décompose en

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^2 + (12-20i)y + (-28+24i) &=& 0 \\ y^2 + (12+20i)y + (-28-24i) &=& 0. \end{array}\right.$$

En posant $r = \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$ l'une des racine carrée de $1 + 4i$, on aura pour y les quatre valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} y_1 &=& -6 + 10i + 6ir; & y_2 &=& -6 + 10i - 6ir \\ y_3 &=& -6 - 10i - 6i\bar{r}; & y_4 &=& -6 - 10i + 6i\bar{r}, \end{array}\right.$$

où $\bar{r}$ est le conjugué de r.

Les valeurs correspondantes de z sont

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} z_1 & = & 9+2i+(4-2i)r; & z_2 & = & 9+2i-(4-2i)r \\ z_3 & = & 9-2i+(4+2i)\bar{r}; & z_4 & = & 9-2i+(4+2i)\bar{r}. \end{array}\right.$$

Les deux équations $x^2 - y_1x + z_1 = 0$ et $x^2 - y_2x + z_2 = 0$ donnent par leur produit :

$$x^4 - (y_1+y_2)x^3 + (y_1y_2 + z_1 + z_2)x^2 - (y_1z_2 + y_2z_1)x + z_1z_2 = 0,$$

soit justement l'équation

$$x^4 + (12-20i)x^3 + (-10+28i)x^2 + (-20-12i)x + 1 + 4i = 0. \tag{10}$$

Les racines de cette dernière sont donc données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{y_1}{2} & \pm & \sqrt{\frac{y_1^2}{4} - z_1} \\ \frac{y_2}{2} & \pm & \sqrt{\frac{y_2^2}{4} - z_2}; \end{array}\right.$$

mais $\frac{y_1^2}{4} - z_1 = -34-68i+(-34-16i)r = [-34-16i+(-18+4i)r]r = [-1+4i+(1+2i)r]^2.r$.
De sorte que, en désignant par ρ une racine quatrième de $1+4i$:

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2\sqrt[4]{17} + \sqrt{2\sqrt{17}+2}} + i\sqrt{2\sqrt[4]{17} - \sqrt{2\sqrt{17}+2}}\right],$$

les racines de l'équation (10) sont alors données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -3+5i+3ir+\rho[-1+4i+(1+2i)r] \\ x_2 & = & -3+5i+3ir-\rho[-1+4i+(1+2i)r] \\ x_3 & = & -3+5i-3ir+i\rho[-1+4i-(1+2i)r] \\ x_4 & = & -3+5i-3ir-i\rho[-1+4i-(1+2i)r] \end{array}\right.$$

et celles de l'équation (9) par leur conjuguées. Il reste maintenant à déterminer les expressions des $\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right)$ à partir de la formule

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2},$$

avec $u = \varphi\left(\frac{k\varpi}{1+4i}\right)$ et $v = \varphi\left(\frac{k\varpi}{1-4i}\right)$; donc si x est l'une quelconque des racines de (10) et $\bar{x}$ sa conjuguée, alors

$$\varphi\left(\frac{2k\varpi}{17}\right) = \frac{\sqrt[4]{x}\sqrt{1-\bar{x}} + \sqrt[4]{\bar{x}}\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{x\bar{x}}}.$$

Ces expressions n'ont évidemment qu'un intérêt tout théorique. Elles ont été calculées par L. KIEPERT dans le *Journal de Crelle*, tome LXXV, en 1873. ABEL lui-même n'a jamais publié de calcul effectif pour le partage de la lemniscate, se contentant d'énoncer sa possibilité, et donnant la méthode générale. Celle-ci est un peu différente de celle de KIEPERT et généralise la

méthode que GAUSS avait développée pour la division du cercle, en s'appuyant sur ses propres recherches concernant la résolution des équations algébriques et développées dans le mémoire *Sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*[15].

Exercice 1. Montrer que la division de la lemniscate en 13 parties égales se ramène à la résolution de deux équations du troisième degré :

$$x^3 - (11 \pm 10i)x^2 + (7 \pm 4i)x + 3 \mp 2i = 0.$$

Exercice 2. La division du cercle (équation polaire $r = \cos\theta$) amène à travailler sur l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et sa fonction réciproque. La division de la lemniscate (équation polaire $r^2 = \cos 2\theta$) conduit à travailler sur l'intégrale $\int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ et sa fonction réciproque. De même la division du trifolium d'équation polaire $r^3 = \cos 3\theta$ (Fig. 10) nous conduit à l'intégrale $I = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^6}}$. Développer une théorie sur le modèle de la lemniscatomie qui traite de la division de ce trifolium en N parties égales. On pourra remarquer que le changement $u = \frac{1}{t^2}$ ramène I à une intégrale du type $\int_\alpha^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^3-1}}$, c'est-à-dire une intégrale elliptique.

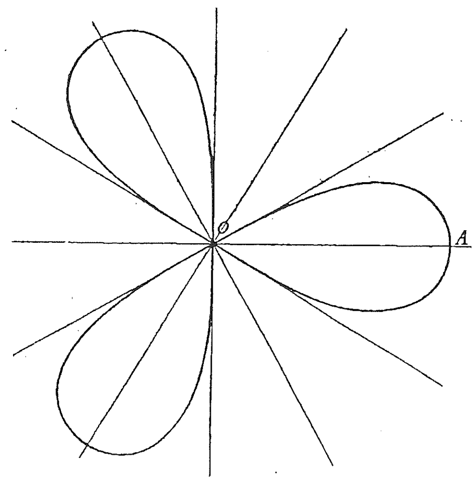


Figure 10

Bibliographie

ABEL N.H., *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, Œuvres complètes, (Sylow, Lie éd.s), Christiania, 1881, vol. I , p. 478-507.

ABEL N.H., *Recherches sur les fonctions elliptiques*, Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd. 2, p.101-181, Bd.3, p.160-190. 1827-1828. Œuvres complètes (Sylow, Lie

[15]Pour une étude de ce mémoire, cf. FRIEDELMEYER J-P, *Emergence du concept de groupe*, p. 85 à 97.

éds), Christiania, 1881, vol. I, p. 263-388.

BOS H., *Lectures in the history of mathematics*, in particular : *The lemniscate of Bernoulli*, pp. 101-111 et *The concept of construction and the representation of curves in seventeenth-century mathematics*, pp. 23-36, Hist. of Math. Series, vol. 7, American Mathematical Society, 1993.

COOKE R., *Abel's Theorem*, in *The history of modern mathematics*, vol. I, p. 389-424, Ed. D. Rowe, J. McCleary, Academic Press, 1989.

ENNEPER A., *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte*, Halle, 1876.

FRIEDELMEYER J-P., *Des équations qui déterminent les sections circulaires*, in *L'Ouvert*, n° 46 et 47, mars et juin 1987, Revue de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

FRIEDELMEYER J-P., *Emergence du concept de groupe*, Fragments d'histoire des mathématiques III, Brochure A.P.M.E.P. n° 83, 1991.

GAUSS C.F., *Recherches arithmétiques*, traduites par A.C.M. Poullet Delisle, Paris, 1807.

GAUSS C.F., *Elegantiores integralis* $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ *proprietates*, Gauss Nachlass, Werke, Göttingen, 1870-1927, Vol III.

HOUZEL Ch., *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in *Abrégé d'histoire des mathématiques*, t. II, Paris Hermann, 1978, p. 1-113.

KIEPERT L., *Siebzehntheilung des Lemniscatenumfangs durch alleinige Anwendung von Lineal und Cirkel*, Journal für die reine und angew. Mathematik, Bd.75, p. 255-263, 1873.

LORIA G., *Spezielle algebraische und transcentente ebene Kurven, Theorie und Geschichte*, Leipzig, Teubner 1902.

SIEGEL C.L., *Topics in complex function theory*. Wiley - Interscience, New-York 1969.

ANNEXE A L'ATELIER : ABEL ET LA LEMNISCATE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

IREM DE STRASBOURG

Le voyage d'Abel en Europe, vécu à travers sa correspondance.

Niels Henrik Abel est né le 5 août 1802 dans Finnö, petite île de la côte sud-ouest de la Norvège. Son père, pasteur, était un homme distingué, actif comme représentant élu aux deux premiers parlements de Norvège. Sa mère était louée pour son exceptionnelle beauté, bonne vivante, mais très tôt portée sur l'abus d'alcool. Niels Henrik était le second d'une famille de six enfants : cinq garçons et une fille. Leur enfance se situe dans la période la plus critique de l'histoire de la Norvège. Celle-ci avait à ce moment là son destin lié à celui du Danemark, ce qui l'entraîna dans les guerres napoléoniennes aux côtés de la France, subissant ainsi le blocage de ses côtes par la flotte britannique. Durant la guerre, un mouvement nationaliste se développa, dont l'un des premiers soucis était le ravitaillement du pays, mais qui fut aussi à l'origine de la création de l'Université de Christiania (aujourd'hui Oslo) grâce à une souscription nationale. L'épisode napoléonien tirant à sa fin au moment où la famille régnante en Suède s'éteignait, le gouvernement y choisit un des généraux de Napoléon pour assurer la succession : le maréchal Bernadotte qui, en bon émule de son empereur, envahit aussitôt le Danemark. Celui-ci dut céder la Norvège à son victorieux adversaire suédois, mais l'élection rapide d'une assemblée nationale, le *Storting*, permit de limiter la sujétion : le roi de Suède occupera le trône de Norvège, mais en lui accordant un gouvernement autonome. Le père d'Abel avait été élu représentant au *Storting* et y joua un rôle non négligeable pour garantir la liberté par un certain nombre d'articles inscrits dans la Constitution d'Eidsvoll, reconnue par Bernadotte.

C'est dans ce contexte difficile et agité que Abel passa son enfance à Gjerrestad la nouvelle paroisse de son père; celui-ci lui donna la première éducation, avant de l'envoyer, en 1815 à l'Ecole cathédrale de Christiania. Depuis l'ouverture de l'Université, en 1811, cette école était assez médiocre, ses meilleurs professeurs l'ayant quitté pour l'Université. Leurs remplaçants étaient moins qualifiés, souvent abrutis par l'alcool. Le professeur de mathématiques dut même donner sa démission après avoir cogné un de ses élèves tellement fort qu'il en mourut. A sa place fut nommé un jeune homme, ancien élève de l'Ecole, qui n'avait que sept ans de plus qu'Abel mais qui restera dans l'histoire comme celui qui a su éveiller le génie d'Abel: Berndt Michael Holmboe. Sans être lui-même un mathématicien de grand talent, il était cependant un excellent pédagogue, passionné de littérature et de musique, s'attachait à rendre son enseignement attrayant et laissant ses élèves travailler selon leur rythme.

Voici comment lui-même évoque son rôle dans la formation mathématique qu'il procura à son élève, durant ses premières années :

"Il ne s'attira aucune attention particulière, jusqu'à ce qu'en 1818, époque d'où date ma nomination de professeur de mathématiques à ladite école, on accorda aux disciples quelques heures exprès pour les exercer à résoudre des problèmes algébriques ou géométriques. Ce fut alors que le talent d'Abel se développa d'une manière éclatante. Il fallut bientôt lui réserver des problèmes tout-exprès. Depuis ce temps il se voua aux mathématiques avec ardeur, et y fit des progrès énormes, et avec une rapidité qui n'appartient qu'au génie. Ayant rapidement passé le cours élémentaire, je lui donnais, sur sa demande, des leçons en particulier sur le calcul infinitésimal. Après l'avoir initié dans les éléments de cette science, je parcourus avec lui l'introduction et les institutions du calcul différentiel et intégral d'Euler. Dès-lors il commença à marcher seul. Il étudia les ouvrages de Lacroix, Francoeur, Poisson, Gauss et surtout ceux de Lagrange, et fit déjà lui-même quelques essais."

Lorsqu'en automne 1821 Abel entre à l'Université de Christiania il connaît l'essentiel des mathématiques de son temps et les problèmes que celles-ci posent aux mathématiciens d'alors. Encouragé par Holmboe mais sans ressources depuis la mort de son père en 1820, il obtient une place gratuite au dortoir de l'Université, et quelques professeurs se sont même concertés pour lui fournir, à leurs frais, une subvention, afin de *"préserver ce rare* *talent pour les sciences, talent d'autant plus digne d'attention qu'il s'accompagne de persévérance et de bonne conduite."* L'Université n'avait rien à lui apprendre en mathématiques, mais favorisait le développement de ses propres recherches, quelque fois au détriment des autres cours. La tradition rapporte qu'un jour, pendant la leçon d'un certain professeur Sverdrup, il se leva brusquement, au grand étonnement de l'auditoire, et se précipita vers la porte en criant "*Jeg har det*" ("Je la tiens", sous entendu : la solution)

Les professeurs de l'université de Christiania où étudiait Abel avaient bien compris que les capacités extraordinaires de celui-ci avaient besoin d'une stimulation qu'eux-mêmes étaient incapables de lui donner. Aussi deux d'entre eux, Hansteen et Rasmusen écrivirent au Conseil de l'université afin qu'il finance un voyage à l'étranger :

"Nous considérons qu'il est de notre devoir de recommander ce jeune homme, dont la moralité est au dessus de tout soupçon, pour une aide qui lui permette de continuer à cultiver une science où bien peu, à son âge, ont fait des progrès aussi remarquables que ceux dont il a donné des preuves. Le Conseil sait qu'il ne possède rien, et que c'est dans des conditions très précaires, et uniquement grâce aux souscriptions mensuelles de quelques uns, qu'il a pu vivre depuis son entrée à l'Université. Maintenant il lui faut une aide plus importante, afin qu'il puisse acquérir à son pays l'honneur que ses dons et ses progrès permettent d'espérer d'un tel savant. Nous estimons qu'un séjour à l'étranger dans les villes où se trouvent les mathématiciens les plus éminents contribuera de la manière la plus heureuse à son éducation scientifique. A Paris, il trouvera probablement l'occasion de faire insérer son travail sur l'intégration dans les Mémoires de l'Institut, et nous croyons que ce sera le moyen le plus rapide de le faire connaître."

Après quelques tergiversations, Abel obtient une bourse de 600 thalers pour un an de voyage, en même temps que trois autres camarades et amis de l'université : Christian Peter Boeck pour visiter les écoles vétérinaires afin de prendre la direction d'une telle école créée par le Storting sous l'impulsion du père d'Abel; les deux autres, Nicolas Benjamin Moller et Niels Otto Tank tous deux géologues, qui devaient faire des mesures du champ magnétique terrestre partout ou ils se rendraient, et communiquer les résultats au professeur Hansteen. Abel avait dû envoyer un itinéraire détaillé de son voyage lequel devait se limiter à deux destinations : Göttingen pour y rencontrer Gauss; Paris qui représentait à ce moment là le pôle le plus important de la recherche mathématique avec Cauchy, Legendre, Lacroix, Fourier, Poisson, Laplace.

Mais Abel était trop dépendant de ses amis pour supporter l'idée de travailler seul à Paris. Boeck et Moller devaient passer tout l'hiver à Berlin, il décida de les y accompagner prenant ainsi dès le départ de sérieuses libertés avec l'itinéraire prévu. Ce fut sans aucun doute une des initiatives les plus heureuses que son caractère indépendant put prendre, car il y rencontra Crelle.

Avec ses amis, il passa la plus grande partie de l'hiver, y menant joyeuse vie au bal, au théâtre, en fêtes nocturnes au point de gêner leur locataire du dessus au n°4 Kupfergraber dans le voisinage de la Sprée. Un jour que le tapage devenait vraiment trop violent, celui-ci demanda à la logeuse quelle espèce de gens pouvaient bien faire un boucan pareil. "Des étudiants danois" lui répondit-elle. "Des danois, que non! des ours russes oui!" répliqua-t-il furieux! Il faut dire, à la décharge du locataire ainsi dérangé qu'il était philosophe et s'appelait... Hegel !

Abel à Hansteen - Berlin (5 décembre 1825)

Professeur Hansteen !

J'aurais bien pu, et j'aurais dû, peut-être, vous écrire plus tôt, monsieur le Professeur; mais je désirais d'abord prendre quelques dispositions afin d'être en mesure de vous dire quel profit je tire et je tirerai de mon séjour ici. Vous aurez peut-être été surpris de ce que je suis venu d'abord en Allemagne; je l'ai fait, en partie parce qu'il se trouve que j'y vis avec des connaissances, et aussi parce que j'y suis moins exposé à ne pas employer mon temps le mieux possible, puisque je peux quitter l'Allemagne n'importe quand pour aller à Paris, qui doit être pour moi le lieu le plus important. Ici à Berlin, je n'ai pas trouvé grande ressource dans les bibliothèques publiques, car en ce qui concerne les mathématiques, elles sont étonnamment médiocres; il n'y a presque rien des travaux récents, et ce qui s'y trouve est très incomplet. Notre bibliothèque, si j'ose dire, est mieux pourvue. j'ai été assez heureux pour

faire la connaissance de deux mathématiciens distingués : le conseiller privé Crelle, et le professeur Dirksen. V. Schmidten m'avait parlé du premier comme d'un homme excellent à tous égards, et lorsque je suis arrivé à Berlin, je me suis rendu chez lui sans perdre de temps. Ce fut long, avant que je puisse lui faire bien comprendre le but de ma visite, et le résultat semblait devoir être lamentable, lorsque je pris courage à sa question sur ce que j'avais déjà étudié en mathématiques. Quand je lui eu cité quelques travaux des mathématiciens les plus éminents, il devint tout à fait empressé, et parut vraiment enchanté. Il engagea une longue conversation sur diverses questions difficiles qui n'étaient pas encore résolues, et nous en vinmes à parler des équations de degré supérieur; lorsque je lui dis que j'avais démontré l'impossibilité de résoudre l'équation générale du 5ème degré, il ne voulut pas le croire, et dit qu'il y ferait des objections. Je lui remis donc un exemplaire; mais il dit qu'il ne pouvait comprendre la raison de plusieurs de mes conclusions. Plusieurs autres m'ont dit la même chose, j'ai entrepris une refonte de ce travail.

Il parla beaucoup aussi du faible niveau des mathématiques en Allemagne, et dit que les connaissances de la plupart des mathématiciens se réduisaient à un peu de géométrie, et à quelque chose qu'ils appelaient Analyse, mais qui n'était rien d'autre que la théorie des combinaisons. Pourtant il semblait, à son avis, qu'une période plus heureuse pour les mathématiques allait commencer maintenant en Allemagne. Lorsque je lui exprimai mon étonnement qu'il n'existait pas ici de Journal de mathématiques, comme en France, il dit qu'il avait eu depuis longtemps l'intention d'entreprendre un pareil journal, et qu'il n'allait pas tarder à le lancer. Tout est prêt maintenant, et j'en suis très enchanté; car j'ai ainsi où faire paraître tel ou tel de mes petits travaux. - j'en ai déjà rédigé 4, qui doivent prendre place dans le premier fascicule, et comme je les ai écrits en français, Crelle est assez aimable pour les traduire. Mon peu de français m'est ainsi bien utile. Crelle, au sujet de la forme de mes articles, m'a dit qu'à son avis ils sont très clairs et bien écrits, ce qui me fait grand plaisir, car j'ai toujours craint d'avoir de la peine à développer mes idées d'une manière convenable. Mais il m'a conseillé de m'étendre davantage, surtout ici, en Allemagne. Il m'a aussi offert des honoraires pour mes articles, ce sur quoi je n'avais naturellement pas compté, aussi ai-je refusé; pourtant j'ai cru remarquer qu'il aurait préféré me voir accepter. Ce même Crelle a aussi une bibliothèque mathématique tout à fait remarquable, dont je me sers comme si elle était à moi, et qui m'est très utile, car elle contient toutes les choses les plus nouvelles, qu'il a aussi vite que possible. Il a entre autres la revue publiée à Paris sous la direction du baron de Ferrussac, le "Bulletin universel des sciences et de l'industrie", *qui m'est d'une extrême utilité, car j'y trouve annoncés tous les livres et découvertes mathématiques. - Je suis invité chez Crelle une fois pour toutes le lundi soir. Il y a chez lui une sorte d'assemblée, et l'on s'y occupe principalement de musique, à quoi malheureusement je ne comprends pas grand chose. Je m'y amuse bien tout de même, car j'y rencontre toujours quelques jeunes mathématiciens avec qui je cause. Cela m'exerce aussi à l'allemand, ce dont j'ai grand besoin, et ce qui ne va guère bien. Chez Crelle il y avait aussi auparavant une réunion hebdomadaire de mathématiciens, mais il a été obligé de les interrompre, parcequ'il y avait un nommé Ohm avec qui personne ne pouvait s'entendre à cause de son effroyable arrogance. C'est vraiment une chose pénible qu'un seul homme se mette ainsi en travers, quand il s'agit de science. C'est extraordinaire à quel point les jeunes mathématiciens, ici à Berlin, et à ce que j'entends dire, partout en Allemagne, portent Gauss aux nues, pour ainsi dire. Il est pour eux la substance de toute perfection mathématique, mais, s'il est en effet certainement un grand génie, il est tout aussi sûr qu'il rédige mal. Crelle dit que tout Gauss écrit est une horreur*[1]*, car c'est tellement obscur qu'il n'est presque pas possible de le comprendre. - Gauss travaille maintenant à un grand ouvrage sur l'astronomie physique, dont les trois premières parties sont prêtes à imprimer (à ce que me dit un de ses élèves qui est ici, à Berlin). Il s'y trouvera beaucoup de choses nouvelles. - Lorsque j'étais à Hambourg, j'ai rendu visite au Professeur Schumacher, qui m'a reçu avec beaucoup d'empressement, mais il ne se portait pas bien à ce moment là. J'y ai fait aussi connaissance avec T. Clausen, qui a certainement des dispositions remarquables pour les mathématiques; mais, autant que j'en ai pu juger, il n'avait pas étudié beaucoup. Le Professeur Encke, qui est maintenant nommé ici à l'Académie de Berlin, était aussi alors, à Hambourg, mais je ne l'ai pas vu. Il est bizarre*

[1] Gräuel en allemand, dans le texte.

qu'il n'y ait ici, à Berlin, aucune chaire d'astronomie. Encke ne donnera pas de leçons.

Je vois que je vais passer tout l'hiver à Berlin, et je n'ai pas encore bien décidé l'époque à laquelle je partirai. A cause de Crelle et du Journal, je resterais volontiers ici aussi longtemps que possible, et d'après ce que j'entends dire, il n'y a aucun autre endroit en Allemagne qui me sera plus profitable. Göttingen a, il est vrai, une bonne bibliothèque, mais c'est tout; car Gauss y est le seul qui sache quelque chose, et il est absolument inabordable. Pourtant, je dois aller à Göttingen, bien entendu. En somme, je voudrais visiter le plus d'universités que je pourrai, car je dois pouvoir récolter un peu dans chacune. -

Je vous prie, monsieur le Professeur, de saluer le professeur Rasmusen et B. Holmboe, et de dire à celui-ci que je lui écrirai bientôt une longue lettre mathématique.

Je souhaite de tout mon coeur que vous vous portiez bien, et je vous prie de continuer à me traiter avec la bonté que vous m'avez constamment témoignée. Je m'efforcerai de m'en rendre aussi digne que possible.
Respectueusement.
N. Abel.

Abel à Hansteen - Dresde 20 mars 1826

Très honoré monsieur le Professeur. Je vous remercie vivement, monsieur le Professeur, de vos salutations amicales dans la lettre de Boeck. Vraiment j'avais peur de m'être exprimé dans ma dernière lettre d'une manière un peu singulière, et peut-être l'ai-je fait. En général il faut que je vous prie de passer avec moi sur bien des choses, surtout en ce qui regarde la forme. - Vous m'avez complètement rassuré pour ce qui est de mon avenir, et vous m'avez par là rendu un vrai service, car j'avais quelques craintes, trop, peut-être. - J'éprouve une joie infinie de rentrer au pays, et de pouvoir être en mesure de travailler tranquillement. J'espère que tout ira bien, je ne manquerai pas de sujets d'ici plusieurs années, et il m'en viendra encore pendant le voyage car justement il me passe en ce moment beacoup d'idées par la tête. La mathématique pure dans son sens le plus strict doit être à l'avenir mon étude exclusive. Je veux m'appliquer de toutes mes forces à apporter un peu plus de clarté dans la prodigieuse obscurité que l'on trouve incontestablement aujourd'hui dans l'analyse. Elle manque à tel point de plan et d'ensemble, qu'il est vraiment tout à fait merveilleux qu'elle puisse être étudiée par tant de gens, et le pis est qu'elle n'est pas du tout traitée avec rigueur. Il n'y a que très peu de propositions, dans l'analyse supérieure, qui soient démontrées avec une rigueur décisive. Partout on trouve la malheureuse manière de conclure du particulier au général, et il est très singulier qu'avec une pareille méthode, il ne se trouve malgré tout que peu de ce qu'on appelle paradoxes. Il est vraiment très intéressant d'en rechercher la raison. - A mon avis cela provient de ce que les fonctions dont l'analyse s'est occupée jusqu'ci peuvent, la plupart, être exprimées au moyen de puissances. Aussitôt que d'autres interviennent, ce qui, il est vrai, n'arrive pas souvent, alors ça ne va plus, et de conclusions fausses découlent une foule de propositions incorrectes qui s'enchaînent. - J'en ai examiné plusieurs, et j'ai été assez heureux pour les tirer au clair [la plupart]. Pourvu qu'on emploie une méthode générale, ça va encore; mais j'ai dû être extrêmenent circonspect, car les propositions une fois admises sans démonstration rigoureuse (c'est à dire, sans démonstration) se sont si fortement enracinées en moi, que je suis à chaque instant exposé à m'en servir sans y regarder de plus près. Ces menus travaux figureront dans le Journal publié par Crelle. - J'ai vraiment fait en cet homme une connaissance tout-à-fait excellente, et je ne puis assez louer mon heureuse étoile qui m'a conduit à Berlin. En vérité, je suis au fond un homme chanceux. Il y a peu de gens, il est vrai, qui s'intéressent à moi, mais ceux-là me sont infiniement précieux, parcequ'ils m'ont témoigné une si extrême bonté. Pourvu que je réponde en quelque mesure aux espérances qu'ils ont en moi; car ce doit être dur de voir la peine qu'on se donne en faveur de quelqu'un perdue. - Il faut que je vous raconte une offre que m'a faite Crelle avant mon départ de Berlin. Il voulait absolument me persuader de rester à Berlin pour toujours, et me décrivait les avantages que j'en pourrais avoir. Si je voulais, il m'offrait la direction du Journal, qui réussit bien, même pécuniairement. Il semblait vraiment que cela lui tint à coeur, mais naturellement je refusai. Cependant je dus exprimer mon refus sous une forme voilée, disant que je le ferais si je ne trouvais pas de quoi vivre dans mon pays (ce que je ferais en effet). Comme conclusion, il dit qu'il renouvellerait son offre n'importe quand je voudrais. Je ne peux nier que cela m'a beaucoup flatté, mais n'étais-ce pas aussi bien joli ? Je dus au moins lui promettre une chose très formellement, savoir, de revenir à Berlin avant la fin de mon voyage à l'étranger, et je ne peux retirer du reste le plus grand profit. Il m'a donné en effet promesse tout-à-fait sûre de me procurer un éditeur pour mes mémoires plus étendus, et même, croiriez vous ? avec des honoraires importants. Nous avons d'abord examiné entre nous si nous publierons ensemble de temps en temps une suite de travaux étendus, et cela devait commencer tout de suite; mais après un plus mûr examen, et après consultation avec un libraire à qui l'édition fut offerte, on considéra comme le mieux d'attendre jusqu'à ce que le Journal fût tout-à-fait lancé. Quand je reviendrai à Berlin, j'espère que notre plan pourra se réaliser. N'est-ce pas magnifique ? et n'ai-je pas raison de me féliciter d'être venu à Berlin ? Il est vrai que je n'ai rien appris des autres pendant mon séjour, mais je n'ai pas non plus considéré cela comme le but véritable de mon voyage. Les relations doivent être l'affaire principale en vue de l'avenir? N'est ce pas votre avis ? (...).

Vous écrivez dans votre lettre à Boeck, que vous vous demandez ce que je veux faire à Leipzig et aux bords du Rhin, mais j'aimerais savoir ce que vous direz si je vous raconte maintenant que je vais aller à Vienne et en Suisse ? J'avais d'abord pensé aller directement de Berlin à Paris, ce que j'espérais faire en compagnie de Crelle, mais il a eu des empêchements, et j'aurais donc voyagé seul. Or je suis ainsi fait que je ne supporte pas du tout, ou du moins très difficilement, d'être seul. Je deviens alors tout triste, et ne je suis pas alors dans la meilleure disposition pour faire quelque chose. Je me suis donc dit que le mieux était de partir avec Boeck etc. pour Vienne, et je peux aussi justifier cela, ce me semble, puisqu'à Vienne il y a Littrow, Burg et d'autres. Ce sont vraiment des mathématiciens distingués, et à cela s'ajoute que je ne voyagerai guère qu'une fois dans ma vie. Peut-on me reprocher de désirer aussi voir quelque chose de la vie et des manières du sud. Je peux aussi travailler assez bien pendant ce voyage. Une fois à Vienne, pour aller à Paris, la ligne droite traverse presque la Suisse. Pourquoi n'en verrais-je pas aussi quelque chose ? Pardieu ! Je ne suis pourtant pas tout-à-fait denué du sens des beautés de la nature. Le voyage entier me fera arriver à Paris deux mois plus tard, et cela n'a pas d'importance. Je rattraperai bien cela. Ne croyez vous pas qu'un tel voyage me fera du bien ? De Vienne à Paris je voyagerai probablement en compagnie de Keihlau. Alors nous nous mettrons furieusement au travail. - Je pense que ça ira bien...

Comme on le voit, Abel continue à n'en faire qu'à sa tête, alors que la bourse de voyage qui lui était offerte par l'Université de Christiania devait le mener en priorité chez Gauss et à Paris. Gauss était à ce moment là au sommet de sa gloire. Installé à Göttingen, il y vivait, admiré mais assez isolé et sans doute peu compris des mathématiciens allemands de l'époque qu'il dépassait de très loin par son génie. Gauss n'éprouvait aucun désir de s'entourer d'élèves, préférait entretenir une correspondance scientifique avec quelques amis choisis et publiait de temps en temps, après des années de mise au point un de ses chefs-d'oeuvres incomparables de clarté et de profondeur.

Le jeune Abel était sûrement décidé à respecter la demande de l'Université de Christiania pour lui rendre visite, mais en même temps, il appréhendait beaucoup une telle rencontre. Gauss ne s'était pas manifesté après la publication d'Abel sur l'équation du 5e degré. De plus, le jeune étudiant avait eu le malheur de faire parvenir à l'ami et correspondant de Gauss, Schumacher, à Altona près de Hambourg, un petit article "*Sur l'influence de la lune sur le mouvement du pendule*" qui contenait une grossière erreur que Schumacher releva aussi tôt, et lui fit refuser la publication dans sa revue les "*Astronomische Nachrichten*". Schumacher en avait informé son collègue Gauss ajoutant néamoins que "*quiconque aurait jugé Abel sur la base de cet article, aurait commis une grossière erreur*". On comprend que le jeune homme ne pouvait se sentir à l'aise en face du "princeps mathematicorum" et que tous les prétextes furent bons pour retarder le plus possible sa visite, peut être dans l'espoir secret que Gauss manifeste tôt ou tard son intérêt pour l'un ou l'autre article qu'Abel publiait maintenant régulièrement, dans chaque livraison du Journal de Crelle. Il n'en fut rien, non pas sans doute, que Gauss fut indifférent aux travaux d'Abel, on le verra, mais de tempérament réservé et prudent, il ne se manifestait guère en public. Toujours est-il que, jeune et inexpérimenté, Abel se laissa effrayer par des récits sur son orgueil et son caractère inabordable *"particularités que la sottise et le préjugé attribuaient alors, comme aujourd'hui et comme toujours, à l'homme vraiment supérieur"*. Longtemps et régulièrement, il écrivit aux professeurs de Christiania son intention prochaine d'accomplir sa visite.

"Göttingen a, il est vrai, une bonne bibliothèque, mais c'est tout; car Gauss y est le seul qui sache quelque chose, et il est absolument inabordable. Pourtant je dois aller à Göttingen, bien entendu."[1]

"Il est probable que je reste ici à Berlin jusqu'à la fin de février ou jusqu'en mars, et que je passe ensuite par Leipzig et Halle pour aller à Göttingen (non pas pour Gauss car il est, paraît-il, insupportablement orgueilleux, mais pour la bibliothèque qui est, dit-on magnifique)."[2]

un peu plus tard, de nouveau à Hansteen :

"A Göttingen je ne resterai que peu de temps, puisqu'il n'y a rien à y gagner. Gauss est inabordable, et la bibliothèque ne peut être meilleure qu'à Paris."

Finalement Abel ira à Paris sans passer par Göttingen, remettant cette visite au voyage de retour.

"Je vais en effet bientôt quitter Paris où je n'ai plus rien à pêcher, et j'irai tout d'abord à Göttingen faire le siège de Gauss s'il n'est pas trop cuirassé d'orgueil."[3]

Mais il était trop tard, il lui restait juste assez d'argent de sa bourse pour atteindre Berlin, retrouver Crelle, son seul véritable soutien.

"L'imagination, dira Mittag-Leffler, se plaît à se représenter les résultats possibles d'un échange personnel de vues entre un Abel et un Gauss. Cependant, comme il devait mourir si jeune, une visite à Göttingen aurait probablement diminué sa place dans l'histoire des mathématiques. Il aurait trouvé Gauss depuis des années en possession de quelques-unes de ses propres découvertes (...) et la postérité n'aurait pu, après cela, savoir ce qui appartenait primitivement à Abel, et ce qu'il aurait appris de Gauss".

Lorsque Gauss eut connaissance de l'article d'Abel : *''Recherches sur les fonctions elliptiques"*, il répondit à Crelle qui lui proposait de publier ses propres recherches sur le sujet :

"Abel m'a devancé pour un bon tiers de mon travail. Il a suivi exactement la même voie où je suis entré en 1798. Aussi ne suis-je pas surpris qu'il soit parvenu, pour la plus grande part, au même résultat. Comme de plus il montre dans sa composition une acuité, une profondeur et une élégance extrêmes, je me vois délié de l'obligation de rédiger mes propres recherches."

Arrivé le 10 juillet 1826 à Paris, c'est une existence toute nouvelle qui commence pour Abel, bien différente des heureuses rencontres faites à Berlin et de l'insouciante gaieté de son voyage. D'abord parce que, pour la première fois, il se retrouve seul, sans ses amis Boeck, Möller ou Keilhau, et dans un pays dont il maîtrise encore mal la langue. Ensuite, parce que c'est l'été et que l'activité est ralentie et les institutions en vacances. Alors Abel écrit, à ses amis, à sa famille, à ses professeurs, faisant part de sa nostalgie du pays, mais aussi de ses impressions et de son travail. Laissons lui la parole, car ses lettres sont tellement évocatrices de sa situation, de sa personnalité, de sa sensibilité, que rien d'autre ne saurait mieux les décrire. De plus, elles nous donnent un portrait caustique et plein de verve des savants parisiens du début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle.

---

[1] Première Lettre à Hansteen; Berlin; fin 1825.
[2] Lettre à Hohmboe; Berlin; 16 janvier 1826.
[3] Lettre à Hohmboe; Paris; 24 octobre 1826.

Abel à Hansteen

[Paris, 12 août 1826]

Me voici enfin arrivé au foyer de tous mes voeux mathématiques, à Paris. J'y suis déjà depuis le 10 juillet. Vous trouvez que c'est un peu tard et que je n'aurais pas dû faire le long détour par Venise. Cher M. Le Professeur, cela me fait beaucoup de peine d'avoir fait quelque chose qui n'a pas votre approbation; maintenant que c'est fait, il faut que je me réfugie dans votre bonté, j'espère que Vous avez assez de confiance en moi pour croire qu'en somme j'emploirai bien mon voyage. Certes, je le ferai. Pour mon excuse je n'ai rien d'autre à dire, sinon que mon désir était grand de regarder un peu autour de moi; voyage-t-on uniquement pour étudier ce qui est étroitement scientifique ? Après cette excursion je travaille avec d'autant plus d'ardeur. A Botzen j'ai quitté Möller, Boeck et Keilhau, et je suis parti pour Paris le plus vite possible. (...) Pour me mettre mieux au français, je me suis logé dans une famille où j'ai tout pour 120 francs par mois. Le mari et la femme son très aimables, et je suis bien, sauf que la chambre est très mauvaise et que je ne mange pas plus de deux fois par jour. J'ai eu beaucoup de peine à trouver cette installation; et je ne m'en serais peut-être pas tiré si par bonheur je ne m'étais rappelé le peintre Gorbitz dont vous avez parlé. Il s'est montré à mon égard aussi prévenant et obligeant qu'on peut le désirer. Je vais le voir souvent. Il vous présente ses compliments empressés. Il ira en Norvège l'été prochain. - J'ai été chez le Directeur de l'observatoire, M. Bouvard, et je lui ai remis une lettre de recommandation de Littrow. Il a été "très amical",[1] *m'a montré l'observatoire, qui naturellement est excellent, et s'est offert pour me présenter aux mathématiciens les plus remarquables quand je voudrais me rendre à l'institut. Je n'ai cependant pas encore profité de cette offre, parceque j'aimerais d'abord pouvoir parler un peu français. En outre je veux avant tout avoir achevé un mémoire auquel je travaille, et que je veux présenter à l'Institut. Quand il sera fini, ce qui arrivera bientôt j'irai. J'ai très bien réussi dans ce mémoire, qui contient beaucoup de choses nouvelles, et qui mérite, je crois, d'être remarqué. C'est la première ébauche d'une théorie d'une infinité de fonctions transcendantes.*[2] *- J'ai l'espoir que l'Académie le fera imprimer dans les Mémoires des Savants étrangers. Sinon, je le ferai imprimer moi-même, ou je l'enverrai à Gergonne à Montpellier pour être inséré dans les Annales de mathématiques. - je lui enverrai bientôt autre chose. J'ai toute une série de mémoires prêts, dont les uns paraîtront dans lesdites Annales etc., d'autres dans le "journal der Mathematik" de Crelle, d'autres dans les "Annalen der Wiener-Sternwarte" de Littrow, et enfin quelques uns seront présentés à l'Institut. Vous pouvez voir que je fais de mon mieux. - Du Journal de Crelle les trois premiers fascicules ont paru, et il semble qu'il marche bien, ce qui me fait grand plaisir, puisque j'ai une certaine part dans son succès. Dans ces trois fascicules il se trouve 6 articles de moi, si je ne me trompe pas; car je n'ai encore reçu que le premier numéro. Je recevrai bientôt de Crelle les deux autres. J'ai envoyé le premier de Trieste à Bohr par un bateau à poisson de Bergen, mais il ne sera pas de retour avant longtemps. - J'ai été chez Legendre avec mon hôte, qui est un brigand autodidacte en mathématiques. Il était sur le point de sortir en voiture, en sorte que je ne lui dit que quelques mots. Il paraît que c'est un vieillard tout-à-fait distingué. Comme mathématicien il est assez connu. - Une fois par semaine il y a des soirées chez lui. Je pense y être invité. J'ai été chez le baron de Ferussac, l'éditeur du Bulletin etc. il n'était pas chez lui. Je peux y aller en soirée une fois par semaine, et j'y ai l'occasion de voir toutes les revues possibles et les livres nouvellement parus, ce qui est une bonne chose en cette saison où toutes les bibliothèques possibles sont fermées. Je n'ai vu Poisson que sur une promenade publique; il m'a paru très épris de lui-même. Il paraît pourtant qu'il ne l'est pas. - "Voilà toutes mes connaissances"; mais ce ne sera pas long avant que j'en fasse davantage, maintenant que j'ai mis un peu en mouvement ma langue française. Les français me paraissent très difficiles à comprendre. (...) Möller rentrera bientôt au pays, il est fatigué de voyager, et je ne peux pas dire autrement : je commence à sentir fortement la nostalgie. D'autant plus que Paris ne sera certainement pas le séjour le plus agréable : il y est si difficile de faire sérieusement connaissance avec les gens. Ce n'est pas comme en Allemagne. -*

J'ai acheté pas mal de livres mathématiques, et j'ai pensé à en acheter davantage, surtout des mémoires séparés

---

[1] En allemand dans le texte; gar freundlich.
[2] En français dans le texte.

que l'on ne peut pas avoir si l'on n'est pas sur place; mais comme cela coûtera assez cher, j'ai pensé à proposer à Holmboe de les acheter ensemble. Entre autres il est nécessaire que j'aie la partie mathématique du Bulletin de Ferussac. -

Cela me sera extrêmement agréable, M. le Professeur, s'il y a quelque chose que je puisse faire pour vous ici à Paris. Je ferai certes de mon mieux. - Mon adresse est

M^r de Cotte Rue Ste Marguerite N° 41. Faub. St. Germain

Abel à Holmboe

[Paris, 24 octobre]

Tu t'y entends à garder le silence, il faut le reconnaître. Il m'a tant tardé de recevoir quelques mots de toi, tu ne peux pas t'en faire une idée. La seule raison pour que tu n'aies pas écrit doit être que tu n'as pas reçu ma dernière lettre datée de Botzen (Bolzano). Il y a déjà 4 mois et plus qu'elle a été envoyée. Voyons, mon ami, ne me cause plus de déception, et envoie moi quelques mots qui me consolent et me réconfortent dans ma solitude. Car, bien que je sois dans la ville la plus bruyante du continent, je me trouve comme si j'étais dans un désert. - Je ne connais presque personne. Cela tient à ce que tout le monde pendant l'été habite à la campagne, et est par suite invisible. - Jusqu'à présent je n'ai fait connaissance qu'avec Legendre, Cauchy et Hachette, plus quelques mathématiciens secondaires, mais fort habiles, Monsieur Saigey, directeur du "Bulletin des sciences etc." et Herr Le-Jeune Dirichlet, un prussien, qui l'autre jour est venu me trouver, me considérant comme un compatriote. C'est un mathématicien très sagace. Il a démontré en même temps que Legendre l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^5 + y^5 = z^5$ et d'autres jolies choses. - Legendre est un homme extrêmement aimable, mais par malheur "vieux comme les pierres".[1] Cauchy est fou[2] et il n'y a rien à faire avec lui, bien qu'il soit en ce moment le mathématicien qui sait comment il faut traiter les mathématiques. Ses travaux sont excellents, mais il écrit d'une manière très confuse. Au commencement je ne comprenais presque rien à ce qu'il écrit, maintenant ça va mieux. Il fait imprimer à présent une série de mémoires sous le titre "Exercises des mathématiques".[3] Je les achète et les lis assidûment. 9 fascicules ont paru depuis le commencement de l'année. Cauchy est extrêmement catholique, chose bien étrange pour un mathématicien. Il est d'ailleurs le seul qui travaille aujourd'hui dans les mathématiques pures. Poisson, Fourier, Ampère etc.etc. ne s'occupent absolument que de magnétisme et d'autres affaires de physique. Laplace n'écrit plus guère. La dernière chose qu'il ait faite était un supplément à la "Théorie des probabilités". Il dit que c'est son fils, mais en réalité c'est bien lui. Je l'ai vu souvent à l'Institut. Il a l'air alerte et petit, mais il a le défaut que le diable boiteux reproche à Zambullo, c'est à dire "la mauvaise habitude de couper la langue aux gens".[4] Poisson est un petit homme avec un joli petit ventre. Il porte son corps avec dignité. De même Fourier. Lacroix est effroyablement chauve et remarquablement vieux. Lundi je serai présenté à la plupart de ces messieurs par Hachette. D'ailleurs je n'aime pas autant le français que l'allemand : le français est extrêmement réservé à l'égard des étrangers. Il est très difficile d'arriver à des relations intimes avec lui. Et je n'ose espérer y parvenir. Chacun travaille à part sans s'occuper des autres. Tous veulent instruire et personne ne veut apprendre. L'égoïsme le plus absolu règne partout. La seule chose que le français recherche chez les étrangers est le côté pratique; personne ne sait penser en dehors de lui. Il est le seul qui sache produire quelques chose de théorique. Telles sont ses idées, et dès lors tu peux comprendre qu'il est difficile d'attirer l'attention, surtout pour un débutant. - J'ai achevé un grand mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'Institut. Cela aura lieu lundi. Je l'ai montré à Cauchy : mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter qu'il est bon. Je suis curieux d'entendre le jugement de l'Institut.

[1] *Steinalt*, en allemand, dans le texte.
[2] En français dans le texte.
[3] En français dans le texte.
[4] En français dans le texte.

Tu en seras informé quand le moment sera venu. - J'ai écrit plusieurs autres mémoires particulièrement pour le Journal de Crelle dont 3 numéros ont paru. De même pour les Annales de Gergonne qui tombent de jour en jour. Il devient trop vieux. Il en est de lui comme de v. Zach, il est vrai que celui-ci n'a jamais rien valu. Un résumé de mon mémoire sur l'impossibilité de résoudre les équations algébriques est inséré dans le bulletin de Ferussac. Je l'ai écrit moi-même. J'ai fait et je continuerai à faire d'autres articles pour ce bulletin. - C'est un travail diablement ennuyeux quand on n'a pas écrit soi-même le mémoire, mais je le fait à cause de Crelle, le plus brave homme que l'on puisse imaginer. - Je corresponds régulièrement avec lui, et j'ai de lui une masse de lettres, autant que j'en ai reçu de ma fiancée. Aujourd'hui j'ai écrit à un mathématicien, Kulp, de Darmstadt, qui m'a demandé des éclaircissements sur plusieurs passages de mes mémoires. Une relation par correspondance. - Je travaille à présent à la théorie des équations, mon sujet favori, et je suis enfin parvenu à ce point que je vois le moyen de résoudre le problème général suivant. "Déterminer la forme de toutes les équations algébriques qui peuvent être résolues algébriquement"[5] *J'en ai trouvé des quantités innombrables des 5ème, 6ème, 7ème degrés etc. qu'on n'a pas encore flairées jusqu'à présent. En même temps j'ai la solution la plus directe des équations des 4 premiers degrés, d'une manière qui met clairement en évidence pourquoi précisément celles-ci peuvent-être résolues, et pas d'autres. En ce qui concerne l'équation du 5ème degré, j'ai trouvé que si une telle équation est résoluble algébriquement, la racine doit avoir la forme suivante*

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''}$$

où R, R', R'', R''' sont les 4 racines d'une équation du 4ème degré, et qui peuvent être exprimées par des racines carrées seulement. - J'y ai éprouvé des difficultés pour les expressions et les signes.- En outre je m'occupe des quantités imaginaires pour lesquelles il y a beaucoup à faire, du calcul intégral et surtout de la théorie des séries infinies dont la base est si peu établie. - Je ne pourrai rien en tirer de développé avant d'avoir achevé mon voyage à l'étranger et d'être revenu au calme chez nous, si cela arrive. Je regrette d'avoir demandé une bourse de 2 ans, un an et demi aurait grandement suffi. J'ai fortement la nostalgie, et beaucoup moins d'avantage, à partir de maintenant, à rester ici et ailleurs, que l'on ne pourrait peut être croire. J'ai pris connaissance de tout ce qui existe d'important et d'insignifiant dans les mathématiques pures, et mon désir est maintenant de pouvoir consacrer mon temps à mettre en oeuvre ce que j'ai amassé. Il y tant de choses que j'ai en projet, mais tant que je serai à l'étranger, cela n'ira pas comme il faudrait. Si j'étais dans la peau de Keilhau pour le professorat ! Je ne suis pas tranquille, mais je n'ai pas peur non plus; car si ça casse d'un côté, ça tiendra bon d'un autre. Quels appointements as-tu ? Vas tu te marier, est-tu fiancé et avec qui, il faut me répondre à toutes ces questions; car mes pensées se reportent souvent vers toi et tout ce qui te concerne. Je n'ai pas une telle abondance d'amis que je courre le risque d'oublier ceux que j'ai.

Je mène d'ailleurs une existence très sage. Je travaille, je mange, je bois, je dors, et je vais parfois à la Comédie; c'est de tout ce qu'on appelle plaisir le seul que je m'accorde, mais c'en est un grand. Je ne connais pas de plus grand plaisir que de voir une pièce de Molière où joue Mlle Mars. Alors, je suis tout à fait ravi; elle a 40 ans, mais elle joue tout de même des rôles très jeunes. Talma le grand tragédien célèbre est mort il y a quelques jours. Le théâtre français a été fermé 2 soirs à cette occasion, et les autres théâtres aussi. - Une foule immense a suivi son cercueil. Celui-ci a été porté directement au cimetière sans passer d'abord par l'église, selon l'usage ordinaire; en qualité d'acteur il est exclu "de la communion des fidelles".[1] Ridicule mais indifférent. Il a fait élever ses enfants, qui sont tous naturels, dans la religion protestante. - Il eut de son vivant trois grands défauts. Il se laissait entraîner par le jeu, les femmes, et la manie de bâtir, les trois choses poussées très loin. - Les acteurs lui font élever un monument pour 12 000 fr. Je vais ausi de temps en temps au Palais royal que les parisiens appellent "un lieu de perdition".[2] On y voit en assez grand nombre "des femmes de bonne volonté".[3] Elles ne sont nullement

[5] En français dans le texte.
[1] En français dans le texte, écrit tel quel.
[2] En français dans le texte, écrit tel quel.
[3] En français dans le texte, écrit tel quel.

indiscrètes. Tout ce qu'on entend est "Voulez vous monter avec moi mon petit ami; petit méchant".[4] *Naturellement, en ma qualité de fiancé etc. je ne les écoute pas et je quitte le Palais royal "sans la moindre tentation".*[5] *Il y en a beaucoup de fort jolies.-*

L'autre jour j'ai été à un dîner diplomatique chez son Ex. le comte Löwenhjelm, où je me suis un petit peu grisé, ainsi que Keilhau, mais très légèrement. Il est marié avec une jeune française. Il a raconté que tous les ans le 24 décembre il fait rouler sous la table tous les compatriotes. - Notre "Monsieur"[6] *Skramstad est ici maintenant. Il habite avec 3 Suédois un faubourg de la ville. Il circule, vêtu en paysan du Hedemarken, bas de laine bleue et veste rayée. Je ne l'ai pas vu, mais on me l'a décrit. Il parle suédois. - J'habite ici dans une famille où j'ai "la chambre et la table et la blanchisseuse"*[7] *pour 120 fr par moi. Le mari est un peu mathématicien mais très bête, et la femme très brouillonne, de 35 ans et plus. On parle toujours à table par équivoques, sur "les secrets du ménage etc."*[8] *L'autre jour ça a été si loin qu'une dame a dit que l'oie qui était sur la table serait transformée le lendemain en un "étron".*[9] *- Parler de pots de chambre etc. est parmi les choses les plus convenables. Je bois toujours le café dans "mon petit pot de nuit".*[10] *- D'ailleurs je mange très bien, mais 2 fois par jour seulement. Le matin "un déjeuner à la fourchette"*[11] *et l'après-midi à 5 heures 1/2 un long dîner. Entre 1 bouteille de vin et 1 bouteille 1/2 tous les jours.-*

Je suis maintenant absolument seul, Keilhau étant parti depuis peu (16 octobre) pour rentrer au pays par mer. Je l'ai chargé d'une quantité de livres dans une grande malle rouge adressée à toi, je te prie de me la garder avec le contenu. J'ai acheté ce que j'ai pensé que l'on n'avait pas chez nous. J'en ai d'autres que j'enverrai au printemps. Parmi les livres il y a le 5ème "Tome" de la "Mecanique céleste". Il est destiné au professeur Hansteen, parce que je sais qu'il a les 4 premiers volumes. Tu auras peut-être la bonté de le lui remettre avec tous mes compliments. - voilà donc la "Mécanique" achevée. Celui qui a écrit un pareil livre peut avec plaisir jeter un regard en arrière sur sa vie scientifique. - Legendre a fait imprimer un remaniement de ses "Exercises" (sic) mais cela n'a pas encore paru en librairie. - Les mathématiques subissent un vilain recul en France. - Les jésuites veulent gouverner et les journaux sont pleins de polémiques à propos d'eux. C'est une vermine du diable. Il y a quelques jours un jeune jésuite a dénoncé un grand nombre d'entres eux et va encore en dénoncer 300 autres. D'après ce qu'il raconte ils doivent être les gens les plus affreux de la terre. On a voulu l'assassiner tout récemment, mais il a échappé. - J'ai prêté à Keilhau 180 marcs banco.[1] *- Je l'ai prié de te les remettre. Tu auras la bonté de les recevoir. Peut-être serai-je obligé de t'importuner en te priant de me les envoyer en une traite sur Hambourg; Encore ceci, rien qu'une humble question : pourrais-tu me prêter 220 marcs,*[2] *en sorte que ça ferait 400 en tout. Tu me rendrais un très grand service. Car j'aurais diablement envie de passer par Berlin avant de rentrer au pays, et d'acheter ici plusieurs choses que je ne pourrais avoir chez nous, ou qui coûteraient trois fois plus cher. Ne te fâche pas de ma question, et réponds y tout de suite. N'oublie pas : le plus vite possible. Une longue lettre avec beaucoup de nouvelles. Salue tous les bons amis et n'oublie pas ton ami.*

N. Abel

---

[4] En français dans le texte, écrit tel quel.
[5] En français dans le texte, écrit tel quel.
[6] En français dans le texte, écrit tel quel.
[7] En français dans le texte, écrit tel quel.
[8] En français dans le texte, écrit tel quel.
[9] En français dans le texte, écrit tel quel.
[10] En français dans le texte, écrit tel quel.
[11] En français dans le texte, écrit tel quel.
[1] Environ 225 f.
[2] Environ 275 f.

Abel à Holmboe

[Paris décembre 1826]

Cher ami! Mille remerciements pour tes deux lettres, les biens venues, et aussi parceque tu as été si exact. Si j'avais su que tu avais écrit, je n'aurais pas osé demander un grand sacrifice. - Ne te fâche pas de ma demande d'argent. J'ai deux véritables amis, et je suis bien obligé de les importuner malgré moi. - Peut-être je pourrai t'épargner, mais il est probable que je ferai appel à ta bonté. Pas tout de suite, mais quand j'arriverai à Berlin. Je vais en effet d'ici peu quitter Paris où je n'ai rien à pêcher, et j'irai tout d'abord à Göttingen pour faire le blocus de Gauss s'il n'est pas trop fortifié d'orgueil. Et je préfère être maintenant en Allemagne pour y apprendre un peu plus d'allemand, ce qui sera pour moi de la plus grande importance plus tard. - Je me tire d'affaire avec le français autant qu'il faut pour écrire un Mémoire et je voudrais bien pouvoir en faire autant en allemand. Tu écris que tu as lu les deux premiers fascicules du Journal de Crelle. Les mémoires que j'y ai publiés, "excepté"[1] *celui sur les équations, n'ont pas grande importance, mais tu verras, cela viendra. J'espère que tu seras content d'un mémoire sur une intégrale, qui se trouve dans le troisième fascicule, un long mémoire; mais surtout je suis content d'un qui s'imprime en ce moment pour le 4ème fascicule, sur la simple série* $1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\ldots$. *J'ose dire que c'est la première démonstration parfaitement rigoureuse de la formule du binôme dans tous les cas possibles, en même temps que d'une quantité d'autres formules en partie connues, mais insuffisamment établies. Dans le prochain numéro (janvier) des Annales de Gergonne paraîtra un petit mémoire de moi sur l'élimination. C'était un essai pour voir s'il voudrait imprimer. J'en enverrai ces jours-ci un meilleur sur le développement de fonctions ("continues ou discontinues) selon des cos. ou sin. d'arcs multiples.*[2] *J'y démontre une formule connue que l'on a juqu'ici démontrée d'une manière inexacte. Item j'envoie à Gergonne un grand mémoire sur les "fonctions elliptiques"*[3] *où sont exposées beaucoup de choses curieuses qui, je m'en flatte, vont piquer la curiosité de plus d'un. -*

J'ai trouvé que l'on peut partager la lemniscate avec la règle et le compas en 2^n+1 *parties lorsque ce nombre est premier. La division dépend d'une équation dont le degré est* $(2^n+1)^2-1$. *Mais j'en ai trouvé la solution complète par des radicaux carrés. J'ai découvert du même coup le mystère qui enveloppait la théorie de Gauss sur la division du cercle. Je vois clair comme le jour comment il y est parvenu. - Ce que je dis là de la lemniscate est un des résultats que j'ai tirés de mes études sur la théorie des équations. Tu ne peux pas t'imaginer combien de jolies propositions j'y ai trouvées, par ex. : Si une équation* $P=0$, *dont le degré est* $\mu\nu$ *où* μ *et* ν *sont des nombres premiers entre eux, est résoluble d'une manière quelconque par des radicaux, P est ou bien "décomposable en* μ *facteurs du degré* ν*"*[4] *dont les coefficients dépendent d'une équation du* μ *degré, ou en "*ν *facteurs de degré* μ*"*[5] *dont les coefficients dépendent d'une équation du degré* ν.

Le voyage à Paris s'est révélé plutôt décevant pour Abel, qui quitte la capitale française sans regret à la fin de 1826. "*J'aurais diablement envie de passer par Berlin avant de rentrer au pays*" écrit-il à son ami Holmboe, car là il se sentait bien mieux apprécié et soutenu, en particulier par Crelle. Il aurait aussi dû passer chez Gauss à Göttingen, mais décidément ce ne sera pas encore pour cette fois-ci, faute d'argent. Abel a pratiquement épuisé les ressources de sa bourse, après avoir différé au maximum son départ de Paris, dans l'espoir toujours déçu d'une réponse de Cauchy ou de Legendre, au sujet de son grand mémoire "*sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*"[6]

---

[1] En français dans le texte.
[2] En français dans le texte.
[3] En français dans le texte.
[4] En français dans le texte.
[5] En français dans le texte.
[6] voir l'Ouvert n° 92, p. 25.

Abel à Ch. Boeck

[Berlin, 15 janvier 1827]

Cher ami Boeck,

Tu seras sans doute étonné que je sois déjà à Berlin. Mais je ne pouvais pas tenir plus longtemps, faute d'argent. J'ai donc dû me hâter de partir au plus tôt tandis que j'avais encore de quoi faire le voyage jusqu'ici. Lorsque je suis arrivé ici il y a 5 jours, ma fortune entière s'élevait à 14 thalers. De Backer j'en ai reçu 50. Je suis obligé de te demander au plus vite ce que tu me dois.

J'ai vraiment peur de l'avenir. J'aurais presque envie de rester pour toujours ici en Allemagne, ce que je peux faire sans difficulté. Crelle m'a terriblement poussé dans mes retranchements pour me faire rester ici. Il est un peu fâché contre moi parceque je refuse. Il ne comprend pas ce que je veux faire en Norvège, qui lui paraît être une autre Sibérie.

Mon voyage de Paris ici a été terriblement vide. Je suis parti de Paris par la diligence pour Bruxelles par Valenciennes. J'ai été tout le temps seul avec une danseuse, non du grand opéra mais d'un des théâtres secondaires. - Dangereux voisinage, la nuit. Elle a dormi dans mes bras, bien entendu, mais c'est tout. D'ailleurs j'ai tenu avec elle une conversation très édifiante sur l'instabilité des choses en ce monde. A Bruxelles, qui est une très jolie ville, je ne suis resté qu'une nuit et un jour et j'ai couru tout le temps par la ville. J'en suis parti de même avec la diligence pour Aix la Chapelle par Liège. J'étais en compagnie d'un garçon fort poli de Francfort sur le Main. Jusqu'à Liège tout le monde parle français. A Aix .... il me semblait être comme un peu plus chez nous. Puis .... séjour à Cologne sur le Rhin; ville extrêmement vieille et laide avec beaucoup de filles. J'y suis resté un jour et deux nuits, et suis parti avec la Poste pour Cassel par Elberfeld et Arnsberg. Il paraît que cette région est extraordinairement belle, mais la nuit et l'hiver m'on empêché de la remarquer. Entre Elberfeld et Arnsberg nous eûmes le malheur de passer sur le corps d'un garçon de 7 à 8 ans. Il est resté mort sur place. La voiture lui avait roulé sur le ventre. - On continua la route sans s'arrêter. - A Cassel, qui est une très jolie ville, j'ai passé la nuit et j'ai été à la Comédie. Le théâtre est très joli et on y jouait bien. - A Cologne j'ai aussi été au théâtre, mais [il était] mauvais. De Cassel je suis parti avec la voiture de poste spéciale (Extrapost) pour Magdebourg en compagnie d'un négociant qui allait à Berlin et à Königsberg. Nous traversâmes le Harz. Ça doit être très beau l'été. De Quedlinburg à Magdebourg, la route est la plus détestable que j'aie suivie. Nous étions deux dans la voiture t bien que nous eussions fait atteler 4 chevaux, nous n'avancions qu'à grand peine. A Magdebourg je passai encore la nuit, et j'en partis pour Berlin avec un cocher de louage. La route est excellente, mais la compagnie fut affreuse, un cordonnier, un gantier et un soldat libéré. Constamment ils buvaient de l'eau de vie. Je m'ennuyais, et personne n'a été plus heureux que moi, lorsqu'après deux jours de voyage, je suis entré dans Berlin par la Porte de Potsdam. - Je n'ai pas entendu parler avant mon départ du mémoire que j'ai déposé à l'Académie de Paris.

Abel à Holmboe

[Berlin, 20 janvier 1827]

Je te remercie vivement de tes deux lettres; tu auras appris sans doute par Skjelderup que je les ai reçues. Certes, j'aurai dû t'écrire depuis longtemps, mais j'attendais d'abord la solution au sujet de mon mémoire que j'ai déposé à l'Institut. Mais ces hommes lents n'en finissaient pas. Legendre et Cauchy étaient juges. Cauchy "rapporteur".[1] *Legendre a dit "ça prendra".*[2] *La-dessus mon voyage de Berlin m'est arrivé comme la Noël sur la bonne femme. - Cette fois-ci encore tu n'auras pas grand chose de moi; j'ai si terriblement à faire pour le Bulletin de Ferussac et le Journal de Crelle. A bientôt davantage.*

[1]En français dans le texte.
[2]En français dans le texte.

Et maintenant ce que je voulais surtout - de l'argent. Tu as été assez bon pour me promettre de m'aider. Comme je me trouve dans un embarras du diable, je voudrais naturellement avoir tout ce que tu pourras et le plus possible. - Quand à la remise, le mieux est que tu en parles au professeur Maschmann. Il a un commissionnaire à Hambourg. Ici son fils a promis d'en écrire deux mots à son père. C'est bien le plus commode que tout soit adressé en Hamburger-Banco. - Ne te fâche pas si je t'importune tellement, mais que veux tu que je fasse, moi "pauvre diable" ?

Abel à Holmboe

[Berlin, 4 mars 1827]

Le résultat de ton dévouement, excellent Holmboe, et de mon bout de lettre, je l'ai appris déjà depuis plusieurs jours, en recevant par l'intermédiaire de Cordes, de Hambourg, 293 B 10. Mille fois merci de ta générosité. Cela m'a rendu un grand service, car j'étais plus pauvre qu'un rat d'église. Maintenant je vais vivre ici là-dessus aussi longtemps que je pourrai, puis je filerai vers le nord. Je resterai un moment à Copenhague, où ma fiancée viendra me rejoindre, puis au pays, où j'arriverai si dénué que je serai bien obligé de tendre la main à la porte de l'église. Je ne me laisse pourtant pas abattre; je suis si bien habitué à la misère et au dénuement. Ca ira toujours. Je t'ai envoyé par Peckel il y a un mois le 3e numéro du Journal de Crelle et un peu plus de la moitié du quatrième, qui est achevé maintenant. Que te semble de mon mémoire ? Je me suis efforcé d'être si rigoureux qu'on ne puisse faire aucune objection fondée.

J'ai déjà préparé un mémoire considérable où l'on voit beaucoup de choses curieuses ("Fonctions elliptiques").[3] *Mais ce que j'ai de plus beau, c'est dans la "Théorie des fonctions transcendantes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier".*[4] *Mais cela, il faut que je le garde jusqu'à mon retour pour te le faire connaître. Au total j'ai fait une masse effrayante de découvertes. Si seulement je les avais mises en ordre et rédigées, car la plupart ne sont encore que dans ma tête. Il n'y a pas à penser à quoi que ce soit avant que je me sois installé convenablement chez nous. Alors il me faudra travailler dur comme un cheval de fiacre; mais avec plaisir, bien entendu. - Je mène une vie assez ennuyeuse, car elle est sans variété. Etudier, manger, dormir, et pas grand chose de plus. Je joue aux cartes deux ou trois fois par semaine chez le pharmacien Monrad, de Bergen, qui est ici avec sa mère et sa femme. Je plume les gens. Crelle est toujours extrêmement obligeant. J'ai été malade et suis resté au lit pendant quelques jours, je suis remis et je parle allemand mieux que l'an dernier. Il a fait un froid de chien cet hiver, mais il semble que ce soit fini. On a eu à Munich - 24° R. - Il me tarde de rentrer au pays, car je ne peux guère avoir d'avantage à rester ici. Quand on est chez soi ou se fait de l'étranger de diables d'idées, autres qu'il ne faudrait. Il ne sont pas si forts. - Les gens en général sont mous, mais assez droits et honnêtes. Nulle part il n'est plus facile d'arriver qu'en Allemagne et en France, chez nous c'est 10 fois plus difficile.*

Ton Abel

Nous ne savons pas combien de temps les ressources d'Abel lui auront permis de rester à Berlin. Le 20 mai en tout cas, il est de retour à Christiania. Crelle aurait aimé le garder auprès de lui, mais Abel se faisait un honneur de rentrer au pays et de respecter en priorité ses devoirs envers l'Etat Norvégien qui lui avait permis ce voyage si riche en expériences pour lui.

Il informe rapidement le Conseil de l'Université de son retour, précisant qu'il avait fait de son mieux pour atteindre les objectifs fixés pour ce voyage, et profitant de l'occasion pour solliciter l'examen de sa situation.

Le Conseil était prêt à l'aider mais regrettait que "la situation financière de l'Univerité la mette dans l'impossibilité absolue d'offrir à M. Abel l'aide dont il a besoin, étant pour le moment sans situation".

[3]En français dans le texte.
[4]En français dans le texte.

Ne pouvant obtenir un poste, Abel ne se décourage pas et fait une nouvelle demande d'aide provisoire en ces termes :

Déjà depuis longtemps j'avais l'idée, en me consacrant complètement à l'étude des mathématiques, de me rendre digne un jour d'être nommé professeur à l'Université. J'ose me flatter, maintenant que j'ai terminé mon voyage à l'étranger, d'avoir acquis des connaissances qui peuvent être considérées comme suffisantes pour une situation à l'Université, lorsque les circonstances le permettront. Mais dans l'attente du jour où une telle situation pourra m'échoir, je suis absolument sans ressources pour me procurer même le simple nécessaire, et il en a été ainsi depuis mon retour. Pour pouvoir vivre, je vais me voir obligé d'abandonner complètement mes études, ce qui me serait excessivement douloureux, au moment où j'espérais justement pouvoir rédiger plusieurs travaux mathématiques commencés. Cela me ferait d'autant plus de tort que je serais alors obligé d'interrompre une carrière d'auteur déjà commencée à l'étranger, comme collaborateur du Journal der reinen und angewandten Mathematik, de Crelle, paraissant à Berlin, dont je me permets de joindre les livraisons parues jusqu'à présent. J'ose donc demander au Conseil une subvention, aux conditions que le Conseil trouvera convenables."

Après beaucoup de discussion et de renvois d'une administration à l'autre, le Conseil accorde une bourse de 200 Thalers prélevés sur son propre budget, sans obligation de remboursement.

De son côté, Crelle continue à se préoccuper du sort d'Abel et cherche à lui procurer un poste à Berlin. Les deux hommes correspondent régulièrement sur des questions mathématiques, et chaque livraison du "Journal" voit la publication des nombreux articles du mathématicien norvégien : pas moins de quinze articles, sur les quatre premiers volumes.

Le 8 avril 1829, Crelle peut enfin annoncer à Abel l'obtention d'un poste à l'Université de Berlin :
"Enfin, mon cher, très cher ami, je peux vous donner de bonnes nouvelles. Le Ministère de l'Instruction a décidé de vous appeler à Berlin et de vous y nommer. Je viens de l'entendre à l'instant même de la bouche de l'homme qui s'occupe de cette affaire au Ministère. Il n'y a donc à ce sujet aucun doute (...) Vous pouvez être dorénavant sans souci pour ce qui est de votre avenir. Vous êtes des nôtres, et en sécurité. Je m'en suis réjouis comme si cela avait répondu à mes propres souhaits. Cela n'a pas été sans beaucoup d'efforts mais, Dieu merci, cela a réussi (...). Avant tout, faites en sorte de retrouver une bonne santé, et que le Ciel fasse que cette lettre vous trouve rétabli. (...) Soyez heureux et rassurez-vous tout à fait. Vous venez dans un bon pays, où le climat est meilleur, plus près de la science et d'amis sincères qui vous apprécient et vous aiment."

Il était hélas trop tard. Abel était mort, deux jours auparavant le 6 avril 1829, des suites d'une phtisie, de celles que l'on appelle galopante. Il avait 26 ans. Crelle écrira dans son "Journal":

"Tous les travaux d'Abel portent l'empreinte d'une sagacité et d'une puissance d'esprit extraordinaires et vraiment étonnantes, même sans considérer sa jeunesse. Il pénétrait son sujet à fond avec une vigueur qui semblait irrésistible, il le saisissait avec une si extraordinaire énergie et de si haut, et il s'est élevé à tel point au-dessus du niveau de son époque, que les difficultés semblaient s'évanouir devant son génie victorieux."

"Il était également distingué par la pureté et la noblesse de son caractère, et par une rare modestie, qui le rendait aussi aimable que son génie était extraordinaire. La jalousie des mérites d'autrui lui était chose tout-à-fait étrangère. Il était bien éloigné de cette avidité d'argent ou de titres, ou même de renommée, qui porte souvent à se servir de la science comme d'un moyen de parvenir. Il estimait trop haut les vérités qu'il cherchait pour les vendre à si bas prix. Il trouvait la récompense de ses efforts dans leur résultat même, il était presque aussi heureux d'une découverte nouvelle, qu'elle eût été faite par lui ou par un autre. Les moyens de se faire valoir étaient pour lui chose inconnue; il ne faisait rien pour lui-même, mais tout pour sa chère science. Tout ce qui a été fait pour lui provient exclusivement de ses amis, sans la moindre intervention de sa part... Il a sacrifié sa vie pour la science, sans songer à sa propre conservation... Gloire à la mémoire de cet homme également remarquable par ses talents extraordinaires et la pureté de son caractère. Il a été un de ces êtres rares dont il apparaît à peine un par siècle."

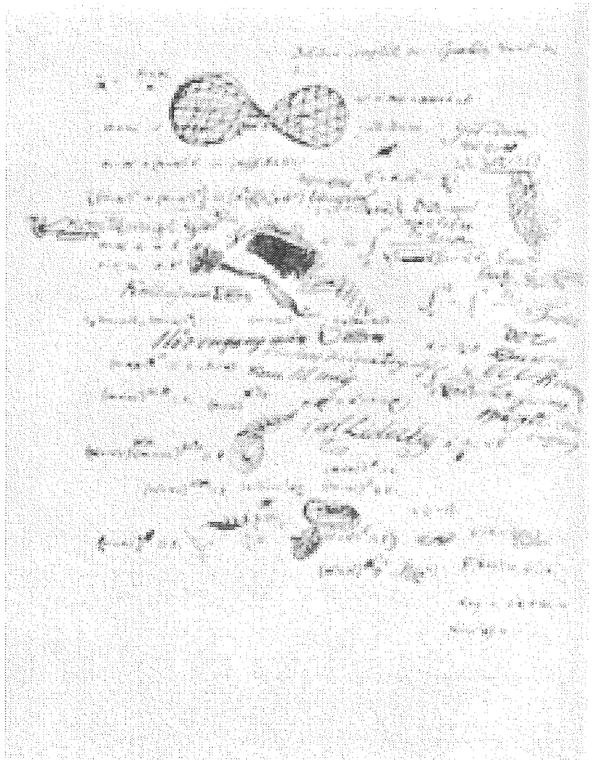
Indications bibiographiques

• Les extraits des lettres d'Abel ont été pris dans : Niels Henrik ABEL, *"Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance"*, Jacob Dybwad, Kristiania, 1902, qui contient l'ensemble de la correspondance d'Abel, traduite pour l'essentiel en français, et précédée d'une "Introduction historique à sa correspondance" par Elling HOLST.

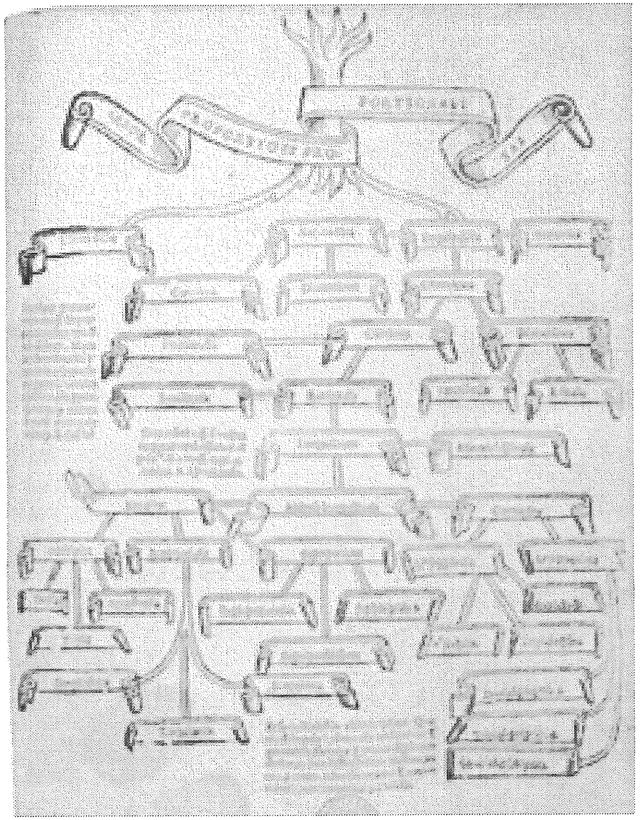
• Ore Oystein : *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*, University of Minesota, 1957 : traduit en français par Gilles Châtelet, dans la collection "Un savant, une époque" sous le titre *"Abel, un mathématicien romantique"*, Belin 1989.

BJERKNES C.A. : *Niels Henrik Abel, Tableau de sa vie et de son action scientifique, Paris 1885.*

Pour ceux qui lisent le norvégien, une nouvelle biographie très complète et détaillée vient d'être publiée récemment, par Arild STUBHAUG, sous le titre *Et torauskudt lyn, Niels Henrik Abel og hans tid*, ASCHEHOUG 1996 (598 pages).



Page manuscrite d'Abel tirée du livre de Oystein Ore
Niels Henrik Abel : Mathematician Extraordinary, New York 1957



De la fraction-tarte au nombre

COQUETTE M., COUNIOT P., de TERWANGNE M., WARNIER A.
CHEVALIER A., DE LAET L., DOCQ C., MALO A.
JADIN B.
GILBERT T., ROUCHE N.
Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) (Belgique)

Abstract

Chaque histoire personnelle de l'apprentissage des fractions commence tôt, avec les premières expériences concrètes de partage. Elle se poursuit longtemps, jusqu'à l'acquisition du concept de nombre, en passant par la découverte de diverses facettes des fractions et des opérations.

Le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) a proposé de revivre en quatre ateliers quelques-unes de ces étapes pour réfléchir à leurs enjeux épistémologiques. Ceux-ci se relient les uns aux autres de manière complexe. Cette quadruple intervention a précisément pour intérêt de permettre sur une notion – en l'occurrence les fractions – un regard d'ensemble depuis les balbutiements jusqu'à une pleine maturité. Il est significatif de survoler d'un seul coup un chemin aussi long.

Les quatre exposés ci-après présentent chacun une suite de situations-problèmes, des éléments de solutions et quelques commentaires épistémologiques. Chaque séquence proposée est conçue pour une recherche dans des classes dont le niveau est précisé ci-dessous.

Nous présentons, en conclusion, une analyse de l'évolution, au fil des quatre exposés, du concept de fraction et du rôle du contexte.

1. Savants partages (primaire)

Dans ce premier atelier, la manipulation de différents puzzles géométriques fait mûrir le concept de fraction et débouche sur les premières opérations sur les fractions.

2. Rapports et proportions (début du secondaire)

Dans cet atelier, les systèmes d'engrenages et de figures semblables offrent l'occasion d'utiliser les fractions en tant que rapports, d'accéder aux écritures littérales et à diverses opérations sur les fractions.

3. Modèles pour calculer avec les fractions (fin du secondaire)

Probabilités et phénomènes de croissance exponentielle sont des contextes riches pour l'usage des fractions. Une occasion est ainsi donnée aux élèves de (re)comprendre les opérations sur les fractions (mieux vaut tard que jamais) et de progresser dans l'idée qu'ils se font du nombre.

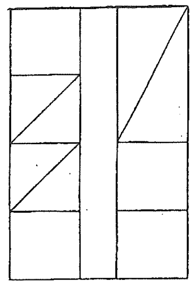
4. Des décimaux aux nombres (fin du secondaire - début du supérieur)

Des idées que les étudiants se font des nombres (réels) sont multiples : écritures, points sur une droite, parfois objets ou résultats de calcul. Des questions sur l'écriture décimale donnent l'occasion de voir comment ces divers aspects se rejoignent ou divergent et de cerner un peu mieux ce que sont les nombres réels.

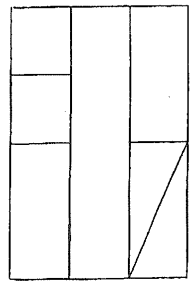
1. Savants partages[1] : Puzzles de fractions

1 Introduction

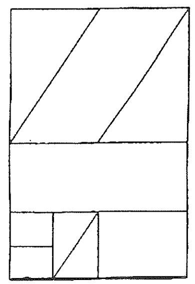
Nous avons initié les enfants aux fractions avec les 6 puzzles suivants, de difficulté variable.



(1) famille $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ *et* $\frac{1}{12}$

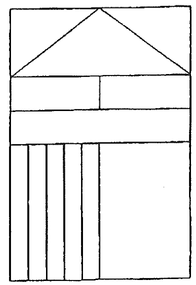


(2) famille $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ *et* $\frac{1}{20}$



(3) famille $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ *et* $\frac{1}{32}$

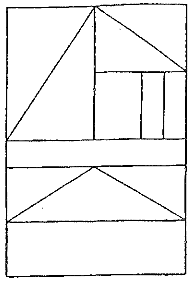
forme non conventionnelle pour $\frac{1}{4}$

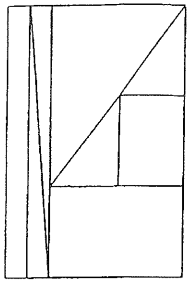


(4) famille $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ *et* $\frac{1}{20}$

$\frac{1}{20}$ est l'intrus

[1] Ce texte a été rédigé par MARTINE COQUETTE, PATRICIA COUNIOT, MARTINE DE TERWANGNE et ANNE WARNIER.





(5) deux familles $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ *et* $\frac{1}{20}$

$\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ *et* $\frac{1}{32}$

(6) famille $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ *et* $\frac{1}{16}$

les quarts représentés ne peuvent reconstituer l'unité par simple assemblage.

Ces 6 puzzles sont travaillés au sein d'une même classe. L'expérience a déjà été vécue aux divers niveaux de l'école primaire. Dans la suite du texte, nous parlerons du travail réalisé avec des enfants de 7 ans.

Chaque enfant reçoit les pièces prédécoupées d'un seul puzzle. A lui de le refaire sans modèle. Ensuite, il nommera chaque pièce par un nom de fraction, la feuille A4 étant l'unité.

Les fractions d'une même famille sont intéressantes à étudier car elles ont des rapports simples entre elles, tandis qu'on ne sait quel rapport trouver entre des fractions "prises à la sauvage" comme 1/3, 1/8, 1/5 ... Plutôt que de se limiter à quelques fractions simples (1/2, 1/3, 1/4) avec les débutants, nous optons pour l'étude de familles de fractions.

L'activité se déroule en trois temps :
- reconstituer le puzzle
- rechercher le nom à donner à chaque pièce
- vérifier les noms de fractions choisis

Les deux premiers temps se vivent consécutivement et prennent ensemble une demi-matinée. Le troisième temps prend environ 50 minutes pour un puzzle.

2 Reconstituer le puzzle

L'Institutrice donne la consigne suivante : "La feuille A4, c'est le gâteau entier, l'unité. A vous de reformer le gâteau grâce à toutes les pièces que vous avez reçues. Quand votre puzzle sera réalisé, il faudra coller chaque pièce et repasser sur les contours pour qu'on puisse les voir de loin. Après 5 minutes, ceux qui ont des trouvailles à partager avec les autres auront la parole, mais pour l'instant, cherchez tout seuls."

Les enfants n'ont pas le modèle de leur puzzle et doivent donc "anticiper" son plan, l'imaginer dans la tête. Le fait de manipuler les pièces du puzzle plutôt que de les recevoir déjà agencées aide l'enfant dans ses mouvements mentaux (translation, rotation...), mouvements qu'il utilisera par la suite. C'est pourquoi nous choisissons de donner un puzzle à reconstituer plutôt qu'un partage dessiné.

L'institutrice invite les enfants à partager leurs réflexions et à améliorer leurs assemblages par comparaisons. Elle organise les échanges sans jamais donner de solutions.
Pour ne pas handicaper la suite de l'activité, elle vérifie chaque puzzle avant le collage. Elle veille à ce que la disposition des pièces soit éclairante pour la recherche des noms de fractions. Il y a en outre beaucoup de découvertes géométriques.

3 Nommer les pièces

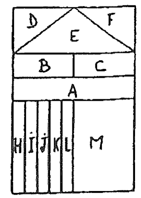
La consigne est la suivante : "Nommez chaque pièce de l'entier par un nom de fraction c'est-à-dire un nom de morceau. Faites votre recherche individuellement dans un premier temps."

Les enfants ne maîtrisent pas le mot "fraction". Celui-ci a été traduit par "morceau", ce qui leur rappelle les morceaux, les parts des gâteaux d'anniversaire.

Lors de la mise en commun, une véritable construction collective du savoir prend forme : un enfant arrive à mettre en mots une explication logique qui convainc le reste de la classe. Certains s'en trouvent confirmés dans leurs tâtonnements et d'autres ont enfin une piste qui les satisfait.

Suivons pas à pas les stratégies utilisées par les enfants.

Premier puzzle : famille 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 et 1/20 (intrus)



Nommons chaque pièce.

Comment commencer ? Prendre le A. On voit qu'il va 8 fois dans l'unité. A vaut donc $\frac{1}{8}$. On peut prendre ensuite le $\frac{1}{16}$ rectangulaire, B ou C, $\frac{1}{2}$ du huitième A.

Ensuite, remarquons que D, E et F forment un rectangle et, de plus, que D et F sont ensemble égales à E. Ces 3 pièces forment donc 2 parts E. On compte combien de fois ces 2 parts vont ensemble dans l'unité ou dans la demi-unité. On voit, en déplaçant mentalement les 3 pièces, que ces 2 parts E vont 4 fois dans l'unité et donc que la part E y va 8 fois. Donc, la part E vaut $\frac{1}{8}$ et les parts D et F valent chacune un demi-huitième, soit $\frac{1}{16}$.

Cette activité permet aux enfants de comprendre pourquoi une fraction porte un tel nom et pas un autre. Ce n'est pas un nom arbitraire.

Une part triangulaire a la même valeur qu'une part rectangulaire ! Deux formes différentes peuvent avoir la même aire ou représenter la même fraction de la même unité. C'est un choc pour certains enfants.

On joue avec double et moitié.

Le support provoque le calcul : ces formes ensemble sont égales à celle-là. On additionne $\frac{1}{16}$ *et* $\frac{1}{16}$ *et on obtient* $\frac{1}{8}$ *et non* $\frac{1}{32}$ *! Pour certains, c'est d'abord faux... et puis, c'est un "calcul avec des morceaux" (différent d'un calcul avec des nombres entiers).*

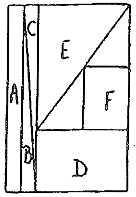
Certains enfants expriment spontanément 1/8 sous la forme un demi-quart qu'ils écrivent ainsi : $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ *ou* $\frac{\frac{1}{4}}{2}$*. Dans ce cas, "quart" est une nouvelle unité. Ils ne disent pas "1/2 de 1/4". Les enfants n'éprouvent aucune difficulté à voir l'égalité entre* $\frac{\frac{1}{2}}{4}$ *et* $\frac{1}{8}$*. Remarquons que le demi est la seule fraction qu'on peut utiliser sans "de".*

Remarquons ensuite qu'on peut regrouper H, I, J, K, L et qu'ensemble ils prennent la même place qu'un quart comme M.

Il est donc important d'avoir bien placé les pièces !

3.2 Deuxième puzzle : puzzle spécial pour ceux qui "voient loin" en 2ème année primaire (1/4, 1/8, 1/16)

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; première soustraction avec une fraction !



Retour au sens du nom de la fraction : non seulement $\frac{1}{4}$ va 4 fois dans l'unité, mais aussi, dans l'unité, il y a quatre quarts ! "J'ai des quarts. Combien vais-je en manger si je veux manger tout le gâteau ?"

C'est autre chose que de voir combien de fois un morceau peut aller dans le gâteau et en conclure que s'il y va 4 fois, c'est $\frac{1}{4}$. De la même manière, si $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, est-il donc vrai que $1 = \frac{2}{2}$? Ce n'est pas sûr pour tous les enfants de cet âge (7 ans). Ils ne perçoivent pas bien les fractions dont le numérateur est différent de 1. Suivant l'âge des enfants auxquels on s'adresse, on constatera ou non cette difficulté.

$\frac{3}{4} : 3 =$

Les enfants perçoivent cette division ainsi : 3 morceaux : 3 = 1 morceau et non comme la division d'une fraction par un nombre.

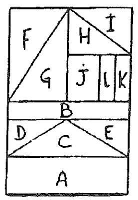
Ils prennent également conscience de l'invariance du quart. Un quart peut prendre des formes différentes.

Comme les pièces sont inamovibles, il faut faire les transformations mentalement ou les imaginer à l'aide des mains.

Le rôle de l'institutrice est de faire se rencontrer ceux qui peuvent donner des indices et ceux qui doivent en recevoir.

Dans ce puzzle, le $\frac{1}{8}$ est trouvé par $\frac{1}{4}$ quart parce qu'il est impossible de voir, sans le découper, qu'il va 8 fois dans le gâteau comme dans le puzzle précédent. Donc, ici, l'unique chemin pour nommer la pièce F est $\frac{1}{4}$: 2. Ce n'est donc plus la forme de la pièce qui est importante. Cette complexité ne se retrouvera jamais dans un partage de tarte habituel. Notons toutefois que c'est la deuxième fois dans ce puzzle que les enfants constatent que le quart coupé en 2 est $\frac{1}{8}$; la première fois, le report du huitième huit fois dans l'unité était possible.

3.3 Puzzle avec 2 familles (1/5, 1/10, 1/20 et 1/8, 1/16, 1/32)



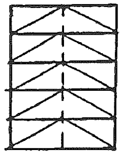
Les enfants ont des difficultés à retourner à l'unité de référence. Contrairement à une initiation traditionnelle aux fractions, nous attirons, au travers de l'activité, leur attention sur l'importance de cette unité de référence.

La stratégie des enfants fait penser au calcul de l'aire du rectangle : on compte combien de fois l'unité d'aire "va" le long de la largeur. Cette première bande étant comptée, on la multiplie par le nombre de bandes du grand rectangle.

Dans leur démarche, les enfants miment le report des différentes pièces dans l'unité pour vérifier les noms des fractions trouvés. Certains "reportent" jusqu'au demi-puzzle puis multiplient par 2, d'autres ont besoin d'aller jusqu'à l'unité.

4 Vérification des noms de fraction choisis

Le lendemain, les 3 ou 4 puzzles ayant les mêmes pièces sont exposés au tableau.



C'est l'occasion pour tous de remarquer qu'une même fraction peut avoir plusieurs noms. Les enfants remarquent à nouveau que des mêmes pièces peuvent s'agencer différemment.

Quand il y a une erreur, l'adulte ne tranche pas mais demande une explication, une justification convainquante pour le groupe.

Chaque auteur vient justifier sa proposition et la correction s'opère.

Lorsqu'on semble tous d'accord sur les noms des pièces, on procède à la vérification : la somme des fractions du puzzle vaut-elle bien l'unité ?

Vérifions-le pour le puzzle (4)

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{20} &= 1\\
\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{20} &= 1\\
\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} &= 1\\
\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} &= 1\\
\tfrac{2}{2} &= 1\\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

On peut faire le lien avec les longues additions d'entiers où on doit se débrouiller pour regrouper efficacement.

On écrit le calcul qu'on voit sur le puzzle.

On voit les fractions équivalentes plus qu'on ne les calcule : ainsi B et C recouvrent parfaitement A (soit 2/16 = 1/8). On donne un sens géométrique à l'équivalence des fractions.

Plus on fait de vérifications de puzzles, plus chacun fait ses propres regroupements, avec ou sans support concret. Certains se sentent prêts à lâcher le support, d'autres pas. Il n'y a pas d'obligation à le faire. Certains aussi restent dans de mauvaises habitudes : pour eux, 1/4+1/4=1/8. Là, l'institutrice les oblige à retourner au support (envie ou pas !).

Il s'agit d'une phase importante de structuration. Les découvertes individuelles sont partagées collectivement et acquièrent le statut de connaissances savantes. Cette vérification se fait collectivement pour les 2, 3 premiers puzzles et chacun procède individuellement par la suite.

Cette troisième phase de l'activité permet à chacun de s'approprier les différentes stratégies mises en œuvre par l'un ou l'autre lors du travail antérieur. Elle permet également de fixer les *acquis nouveaux en les formulant aux autres.*

5 Commentaires

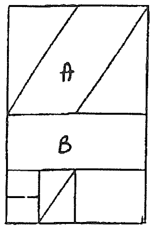
A ce stade-ci, il nous semble intéressant de s'attarder sur quelques réflexions de fond.

Les familles de fractions sont des ensembles de formes qui présentent une structure et qui provoquent une réflexion mathématique en suivant une loi, un rythme. Cette régularité permet aux élèves d'approcher avec plaisir des notions relativement complexes.

Dans ces familles de fractions, nous avons toujours privilégié les fractions dont le numérateur est 1, fractions qui nous paraissent les plus naturelles. Historiquement, elles ont déjà été privilégiées par les Egyptiens.

Plutôt que de proposer aux enfants de partager l'unité en n morceaux (démarche classique), l'activité puzzle leur demande le travail inverse : recomposer l'unité en reportant n fois le $n^{\text{ième}}$*, c'est-à-dire le morceau qui, multiplié par n, donne l'unité. Ce qui implique qu'on travaille essentiellement la division contenance plutôt que la division partage, et ce dans un contexte de mesures.*

De plus, cette option provoque la multiplicité des symboles pour un seul objet: des formes différentes représentent la même fraction, des écritures différentes parlent de la même forme, de la même fraction.



$$\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}.$$

$A = B$

Lors de la vérification, l'addition de toutes les fractions trouvées se fait naturellement, sans règle abstraite, grâce au support géométrique qu'est le puzzle (cfr. 4).

La plupart du temps, cette démarche ne demande qu'une estimation à vue et l'emploi d'étalons naturels (la gomme, les doigts, ...). Elle demande pourtant une grande précision : on peut penser avoir réalisé un puzzle correctement alors que l'agencement s'avère faux. Ainsi, dans le puzzle (1), les deux rectangles A et B peuvent être mal positionnés (voir pointillés sur le puzzle de la Figure 5.1).

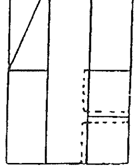


Fig. 5.1

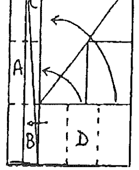


Fig 5.2

Les enfants qui ont passé le cap "pratique" du découpage en trois, peuvent se permettre de voir la transformation efficace d'un quart en une autre forme (ainsi la pièce D recouvre en 3 morceaux les pièces A, B, C de la Figure 5.2 ci-dessus). De jeunes enfants n'y arrivent pas encore et donc éprouvent plus de difficulté à se convaincre que D est 1/4. Ils doivent pour cela aller plus loin dans leur raisonnement.

Tous les enfants n'arrivent pas aux mises en commun avec les mêmes éléments, les mêmes trouvailles, les mêmes supports, ... Il ne s'agit donc pas de vérifier que tout le monde ait <u>*la*</u> *bonne réponse.*

A ce moment, il y a une véritable interaction : un enfant arrive à mettre en mots une explication logique qui convainc le reste de la classe (cfr. 3). Une collaboration s'établit entre ceux qui abstraient facilement et ceux qui éprouvent le besoin de manipuler jusqu'au bout. Ainsi, les deuxièmes font la preuve pour les premiers. Dans la recherche de la valeur des pièces H, I, J, K, L du puzzle 4 (cfr. 3.1), certains enfants reportent 20 fois une de ces pièces en dénombrant, justifiant ainsi la réponse trouvée rapidement par les autres.

Individuellement et collectivement, les enfants reproduisent plusieurs fois les mêmes démarches dans des contextes différents, entre autres, celle du report d'une pièce à l'intérieur de l'unité. La répétition des démarches, sans pour autant parler de drill, permet à chacun de fixer les notions découvertes. Parlons de "variations sur un thème connu".

Les puzzles sont de difficultés variables. C'est l'institutrice qui décide qui va faire tel ou tel puzzle. Parfois, elle se trompe : certains élèves "bloquent" dans la réalisation du puzzle, ne perçoivent pas la pièce dans l'ensemble ou peinent dans les noms de fraction à donner. L'institutrice n'enlève pas leur puzzle mais les fait rencontrer un compère qui a reçu les mêmes pièces. Il ne faut donc jamais donner un seul exemplaire d'un puzzle dans la classe.

Cette activité remet chaque enfant face à ses questionnements mentaux, personne n'est gagnant au départ... et ceux qui le seront à l'arrivée ne sont pas toujours ceux qu'on croit. L'enfant est donc confronté à lui-même, ceci provoque parfois une insécurité "dramatique" pour certains enfants très scolaires voire premiers de classe. Après l'activité, chacun est encouragé, voire poussé à exprimer ce qu'il a vécu, comment il l'a vécu. C'est l'occasion de mettre en valeur des enfants moins "scolaires" dans des activités plus classiques.

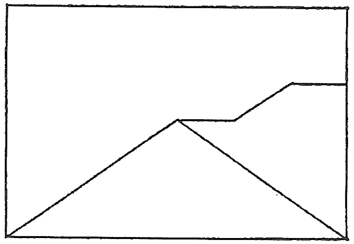
D'autre part, certains enfants sont obligés d'abandonner leur propre disposition de pièces au profit d'une autre plus efficace et doivent donc prendre du recul, se dégager de l'affectif mis dans leur travail... Démarche ô combien difficile chez de jeunes enfants !

6 Prolongements

Après ce premier travail avec des puzzles de fractions, les enfants savent, intuitivement et avec des pièces de puzzles comme support concret, simplifier des fractions (notion de fractions équivalentes) et additionner des fractions de même dénominateur ou de dénominateurs multiples l'un de l'autre. Comment amener la nécessité de mettre des fractions quelconques au même dénominateur ?

Il nous paraît évident que cette recherche ne s'adresse plus à des enfants de 7 ans. Elle pourrait trouver sa place en $4^{\text{ème}}$ ou $5^{\text{ème}}$ année primaire.

Nous avons eu l'occasion de tester une activité visant ce but avec de futurs instituteurs (étudiants de $2^{\text{ème}}$ normale) et avec des enfants de $4^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ primaire. A chaque fois, nous avons distribué un rectangle partagé en trois morceaux.



6.1 Compte-rendu de l'expérience avec les normaliens

A l'école normale, ce puzzle a été intégré dans une réflexion méthodologique plus large.

"Réalisez le calcul $\dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{15}$."

Tous les étudiants appliquent la règle de réduction au même dénominateur.

Le professeur: "Imaginez que vous avez devant vous quelqu'un qui ne sait pas additionner les fractions. Comment allez-vous pouvoir lui permettre de comprendre comment ça se passe? Je ne veux pas une explication de la règle. Mais que vous permettiez à la personne de se construire *sa règle*."

- "Comment peut-on trouver une chose qu'on n'a pas apprise soi-même?"

Certains étudiants refusent obstinément de croire qu'ils sont capables de penser une démarche dont ils ont eux-mêmes été privés.

Ces réflexions sont typiques d'étudiants, mais aussi d'enseignants qui sont invités à réaliser une rupture avec leur propre histoire d'apprentissage et doivent affronter l'angoisse de l'inconnu.

6.1.1 Nommer les pièces

"Pour chaque pièce du puzzle reçu (cf. Fig. 6.1), trouvez des noms de morceaux (pas des

noms de forme) de deux sortes différentes (ordre sans importance):

- ce nom est une seule fraction
- ce nom se présente sous une autre forme qui vous paraît intéressante."

Par exemple :

noms donnés à la pièce (1)

$$\frac{42}{72},\quad \frac{21}{36},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{14}{24},\quad \frac{10+\frac{1}{2}}{18},$$

$$\frac{10}{18}+\frac{1}{36},\quad \frac{1}{9}+\frac{1}{54}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right),\quad \frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$

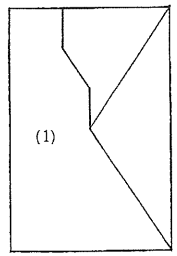
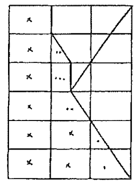


Fig 6.1

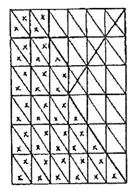
"Est-ce que ces écritures sont correctes? Comment vérifier et comment visualiser cela?"

La vérification des écritures une à une amène des constructions.

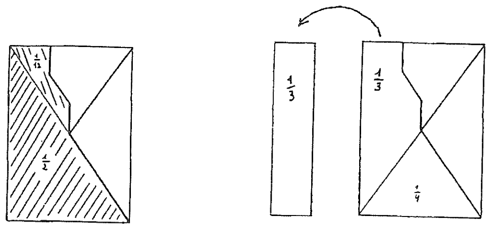
Avec les 18°, ça ne tombe pas juste : $\frac{10+\frac{1}{2}}{18}$.



- le quadrillage en 72^{es} permet de ne pas avoir à "coller des morceaux"...



- la représentation de $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$ donne une forme surprenante au $\frac{1}{12}$. De même, $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ au $\frac{1}{3}$.



Certains étudiants n'arrivent pas à se convaincre qu'il s'agit bien là de 1/3.

La difficulté est la suivante: une part "ne va pas" x fois dans l'unité. Certains éprouvent la nécessité de recouper cette part. "Ça fait bête".Cette difficulté du retour à la manipulation s'observe déjà dès l'école primaire!

- des 24^{es}, 54^{es}, 36^{es}, 144^{es} apparaissent.

La notion de fraction équivalente est particulièrement mise en évidence dans cette activité :

$$\frac{7}{12} = \frac{14}{24} = \frac{21}{36} = \frac{42}{72} = \frac{84}{144}$$

Pour la pièce (1), nous clôturons l'activité après avoir dressé le tableau suivant, reprenant 4 de ses noms significatifs :

	une seule fraction	une somme de 2 fractions
clair au niveau de la manipulation	$\frac{42}{72}$	$\frac{10}{18} + \frac{1}{36}$
Fractions irréductibles	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Ce tableau permet de mettre en évidence que le support du puzzle et les découpages qu'il engendre n'induit pas la notion de PPCM : le découpage en 12^{es} ne figure pas parmi les découpages "significatifs" (c'est-à-dire clairs au niveau de la manipulation).

6.1.2 Vers l'abstraction

"D'un autre puzzle, je n'ai gardé, pour identifier une pièce, que le nom ≪ $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ ≫. Comment faire pour trouver le nom de cette pièce en une seule fraction irréductible?"

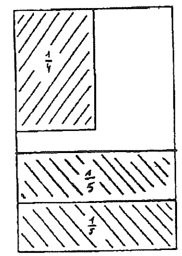
Propositions:

- Pour trouver $\frac{7}{12}$, on a fait 3 × 4 = 12 et 3 + 4 = 7. Ici, on peut faire: 4 × 5 =20. Cela donne un bon dénominateur.

- $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{6}{18} = \frac{7}{21} = \ldots$ et $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ et dès que je trouve $\frac{3}{12}$, je fais $\frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$.
De même ici, je fais: $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \ldots$ et $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20}$ et dès que je trouve $\frac{8}{20}$, je fais $\frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$.
En fait, on a cherché le nom d'une pièce commune qui convient (ici, $\frac{1}{20}$) et par le jeu des fractions équivalentes, nous avons pu déterminer le nombre de fois que cette pièce commune entre dans $\frac{2}{5}$, dans $\frac{1}{4}$, et enfin dans $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$.

- Les diverses tentatives de construction de la pièce $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ pour trouver un seul nom échouent, sauf celle qui travaille explicitement sur les deux dimensions du rectangle unité.

  ∗ "J'ai mis les 2/5 horizontalement, et le 1/4 verticalement; comme ils se superposent, je remonte deux bouts du 1/4 à côté de la pièce verticale. Chaque petit bout représente 1/20 de l'unité; pour m'en convaincre, il suffit que je prolonge les lignes de construction et que j'en quadrille toute l'unité. Si je pense à réaliser ce quadrillage, je découvre la réponse: 13/20, et je vois effectivement qu'elle est correcte."



6.1.3 Est-il nécessaire d'aller plus loin?

"Refaites la même démarche avec la pièce "$\frac{5}{6} + \frac{7}{15}$". Trouvez le plus vite possible le nom irréductible en une seule fraction".

Ceux qui ont encore envie ou besoin de construire un puzzle vont se rendre compte qu'ils débordent de l'unité, et qu'ils vont donc avoir à en utiliser plusieurs. Les étudiants en formation n'ont plus besoin du support des puzzles pour justifier leur démarche:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \ldots et \frac{7}{15} = \frac{14}{30},$$

d'où la réponse:

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{15} = \frac{25}{30} + \frac{14}{30} = \frac{39}{30} = \frac{13}{10} = 1 + \frac{3}{10}.$$

Certains procèdent comme ceci :

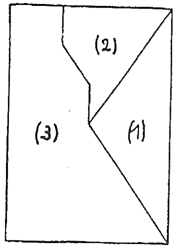
6 12   6 12   6 12 18 24 30   6 12 18 24 **30**
15   → 15 30 →   15 30   → 15 **30**

Cette démarche est une méthode artisanale pour trouver le PPCM.

Tout ceci met en évidence le fait que le PPCM n'est pas "un prérequis nécessaire" à la construction de la somme des fractions, quelles qu'elles soient. On peut aisément mener ce travail sans jamais le mettre en évidence en tant que tel.
Par contre, il est intéressant d'observer, au moment de ce travail ou à un autre, que rechercher le "dénominateur commun le plus petit" correspond à une démarche mathématique qu'on retrouve également dans d'autres contextes où elle permet de résoudre des problèmes "d'optimisation".

6.2 Compte-rendu de l'expérience avec des enfants

Un rectangle partagé de la même façon a été proposé à des enfants de fin de $4^{ème}$ année primaire, enfants qui n'ont jamais travaillé les puzzles de fractions auparavant. Ils ont travaillé en alternance, de manière individuelle, à deux et collectivement. Certains enfants se sont passionnés pour l'activité, d'autres ont eu beaucoup de difficulté à chercher individuellement ou à deux. Ils ont toutefois, pour la plupart, participé activement à la mise en commun.

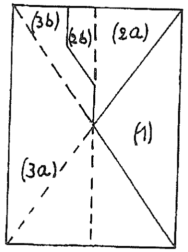


Le professeur a donné la consigne suivante : "Recherchez le nom de fraction de chaque morceau."

Les enfants ont rapidement trouvé le nom de la pièce (1) : 1/4

Comment trouver les 2 autres fractions ?

En traçant certaines lignes, les enfants dégagent la valeur d'une partie de ces morceaux. Ainsi, en prolongeant les deux diagonales du rectangle et en traçant les deux médianes, il est clair que la pièce (3a) vaut 1/4 et la pièce (2a) 1/8. Au passage, un enfant remarque que la pièce (1) vaut également 2/8.

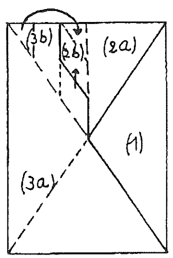


Il reste à évaluer deux petits morceaux, (3b) et (2b). Comment faire ?

Quelques enfants proposent des pistes "géométriques".

Un enfant voit trois fois le trapèze (2b) dans le triangle formé par (2b) et (3b). En effet, (2b) peut se placer entièrement une fois en (3b) et lorsqu'on déplace sur (2b) les morceaux restant de (3b), ils recouvrent parfaitement le trapèze.

Il conclut que la pièce (2b) vaut le tiers du huitième. Il éprouve des difficultés pour la nommer en une seule fraction. En proposant aux enfants de regarder combien de fois la pièce (2b) va dans le rectangle, le professeur débloque la situation. Par dénombrement, les enfants constatent que cette pièce rentre 24 fois dans le rectangle et en vaut donc le vingt–quatrième.



Toujours pour découvrir la valeur de cette pièce (2b), un autre imagine de transformer le trapèze (2b) en un triangle (Fig. 6.4). Il explique que le triangle A recouvre parfaitement le triangle B. Il suffit de le "retourner" (geste à l'appui). Lorsqu'on a transformé le trapèze (2b) en triangle (2c), il constate que le triangle (2c) va 12 fois dans un demi–rectangle (Fig. 6.5). Il vaut donc 1/24. Et le trapèze aussi. La pièce (2) vaut donc 1/24 + 1/8.

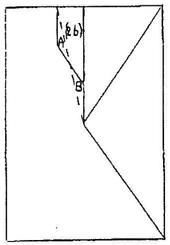


Fig. 6.4

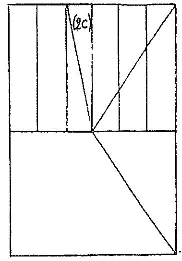
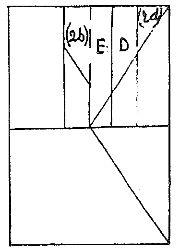


Fig. 6.5

Une autre manière de trouver la valeur de la pièce (2) est de remarquer que cette pièce couvre "deux bandelettes". Il suffit de déplacer la pièce (2b) en la tournant. Elle complète la bandelette D. De la même manière, (2d) complète la bandelette E. La pièce (2) vaut donc 1/6 ou 2/12.



Remarquons que certains enfants s'appuient intuitivement sur les isométries. Notons également que quelques–uns ont partagé le rectangle en douzièmes, contrairement aux normaliens.

Certains enfants proposent de quadriller le rectangle.

Très influencés par les mesures conventionnelles d'aires, ils travaillent en cm^2. Le rectangle complet compte 54 cm^2. La pièce (1) compte 13,5 cm^2, nombre venant, pour certains enfants, de la division de 54 par 4. Les nombres de centimètres carrés comptés dans les deux autres parties sont compris entre 7,5 et 16 pour la pièce (2) et valent 34 ou 36 pour la pièce (3). Comment donner ensuite le nom de fraction de ces deux pièces ? Les enfants en sont incapables.

Les dimensions du rectangle sont entières (6 et 9 cm). Cela facilite le quadrillage en unités conventionnelles. Toutefois, ce dernier réalisé, la tâche se complique : il y a beaucoup de carrés et surtout beaucoup de carrés morcelés. Cela provoque une difficulté de comptage. Les enfants ont été bloqués par l'usage des unités conventionnelles et n'ont pas profité d'unités plus adéquates. De plus, ils manquent de précision dans leur tracé, ce qui induit quelques erreurs.

Rassemblons ces différents noms de fractions donnés à la pièce (2) :

$$1/6 = 2/12 = 4/24 = 1/8 + 1/24.$$

Les égalités entre ces fractions ne font aucun doute pour les enfants. Ils ne savent pourtant pas additionner des fractions. La dernière égalité n'a pas été trouvée par calcul mais par observation des différents découpages proposés.

La valeur de la pièce (3) ne pose plus de problème. On observe qu'elle vaut:

$$1/2 + (1/8 - 1/24) = 7/12.$$

On peut se baser sur des exemples d'égalité comme celles–là pour trouver ensuite des règles de calcul.

L'activité se termine par un retour au quadrillage en cm^2. Il est enfin possible de connaître les "bonnes réponses" ! Les enfants maîtrisant déjà la notion de fraction équivalente, ils peuvent transformer 1/6 en 9/54 (par calcul). Le nombre correct de cm^2 de la pièce (3) s'obtient par soustraction : 54 – 13.5 – 9.

7 Conclusion

Il nous semble que l'approche des fractions ici donne - ou redonne - du sens à la fraction en tant que telle autant qu'aux opérations des fractions entre elles.

Le contexte sert à visualiser des fractions et des opérations avant de et pour les comprendre. Que ce soit à l'école primaire ou en deuxième normale, l'égalité visible géométriquement ne pose aucun doute.

Ce support géométrique a un sens purement pédagogique, "gratuit", mais indispensable pour ancrer les intuitions de manière durable. Plus tard... bien plus tard, lors de l'étude des probabilités par exemple, une non compréhension du fonctionnement des opérations sur les

fractions (compréhension que la géométrie permet) obligerait à s'attarder à nouveau sur les bases.

Ce travail de puzzle permet d'approcher des fractions dans un seul contexte. Notre enthousiasme à vous partager ces expériences ne doit pas vous enfermer dans cette seule approche. Par exemple, nous n'avons pas du tout envisagé l'aspect ordinal des fractions. Mais ce contexte géométrique provoque le passage au calcul comme une économie de temps, d'énergie face à des manipulations qui deviennent lourdes.

Bibliographie

FLORENCE Pascale, *Apprendre les fractions, comment? Pourquoi?*, travail de fin d'étude, ENCBW, LLN, juin 88

GEM primaire, *Partager sans compter*, in Mathématique et Pédagogie, n°94, SBPM, 1993, p. 15-25

ROUCHE Nicolas, *Le sens de la mesure, des grandeurs aux nombres rationnels*, Didier Hatier, Bruxelles, 1992

2. Rapports et proportions[1]

1e partie : A partir de rectangles

A. Activités

Voici une série de questions proposées à des élèves du premier degré. Nous vous invitons à y répondre et à relever les différentes facettes des fractions ainsi que les opérations sur les fractions.

1. Des rectangles

1.1. Dessine plusieurs rectangles dont la largeur vaut les $\frac{2}{5}$ de la longueur.

1.2. Rassemble les dimensions de ces rectangles (et de ceux des autres élèves) dans le tableau ci-dessous :

Longueur ou L							
largeur ou l							

Tab.1

1.3. Ce tableau traduit-il une situation de proportionnalité ? Explique.

2. Une famille de rectangles dans un repère

Dessine ces différents rectangles dans un système d'axes avec un sommet à l'origine et les deux côtés issus de ce sommet alignés le long des axes.

Que peux-tu observer à propos des quatrièmes sommets ? Comment peux-tu caractériser leurs coordonnées ?

3. D'un tableau vers des formules

3.1. Reprends les données du tableau 1 dans le tableau 2 et complète-le en donnant pour chaque rectangle, son périmètre et son aire.

[1]Cet atelier a été conçu et le texte rédigé par ANNE CHEVALIER, LUCIE DE LAET, CHRISTINE DOCQ et ANDRÉ MALO

1	*Longueur ou L*						
2	*largeur ou l*						
3	*Périmètre ou P*						
4	*Aire ou A*						

Tab.2

3.2. Ce tableau traduit-il aussi une situation de proportionnalité ?

3.3. Dans ce tableau, on passe de la ligne 1 à la ligne 3 en multipliant par $\frac{14}{5}$ et de la ligne 2 à la ligne 3 en multipliant par le nombre 7. D'où viennent ces nombres ?

3.4. Par contre, l'aire n'est pas proportionnelle à la longueur. Quelle formule lie les nombres de la ligne 1 à ceux de la ligne 4 ?

3.5. Qu'en est-il entre les nombres des lignes 2 et 4 ?

4. Visualiser des formules par des dessins

4.1. Interprète géométriquement les résultats relatifs aux aires obtenus en 3.4 et 3.5.

4.2. Combien de fois le carré construit sur la largeur du rectangle est-il contenu dans le carré construit sur la longueur de ce rectangle ? Vérifie le résultat algébriquement.

B. Solutions et commentaires[2]

1.1. On donne un rapport entre deux dimensions. Ce rapport doit être utilisé comme *fraction-opérateur* dans la construction effective d'un rectangle.

On engendre ainsi sans le dire une famille de rectangles semblables.

1.2.

Longueur ou L	5	2,5	7,5	1	4	10	6,5
largeur ou l	2	1	3	0,4	1,6	4	2,6

Tab.3

1.3. On trouve aisément que le tableau 3 est un tableau de proportionnalité : en effet, tous les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant les nombres correspondant de la première par $\frac{2}{5}$. On retrouve la relation

[2]Les différentes facettes des fractions et les opérations sur les fractions sont en italique dans tous les commentaires de ce document.

$$l = \frac{2}{5}L.$$

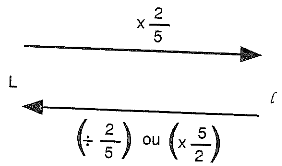
Par ailleurs, on peut aussi observer que quelle que soit la valeur L et son correspondant l, on a

$$\frac{L}{l} = \frac{5}{2},$$

ce qui peut également s'écrire sous la forme

$$L = \frac{5}{2}\,l.$$

C'est l'occasion de mettre en évidence que $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{2}$ sont deux *opérateurs inverses*. On peut schématiser la situation de la façon suivante :



On conclut ainsi que *diviser par* $\frac{2}{5}$ *revient à multiplier par* $\frac{5}{2}$.

2. Cette question permet de faire le lien entre similitude, proportionnalité et équation de droite. En effet, si on place tous les rectangles avec une longueur le long de l'axe des x, tous les quatrièmes sommets sont alignés sur une demi-droite issue de l'origine qui se superpose avec les diagonales des rectangles.

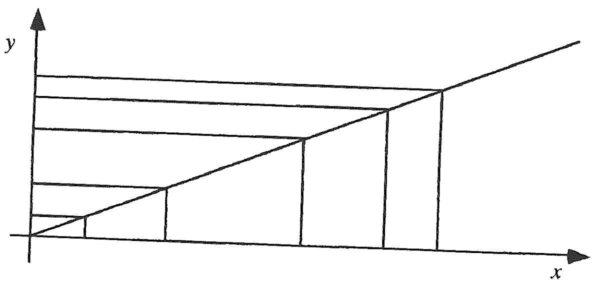


Fig.1

Les coordonnées de chaque point de cette demi-droite correspondent aux dimensions d'un rectangle de cette famille. On passe ainsi

$$\text{de la formule } l = \frac{2}{5}L \text{ à l'équation } y = \frac{2}{5}x$$

qui caractérise tous les points de cette demi-droite. On a un lieu géométrique de points caractérisé par une formule algébrique.

Si par contre, on place tous les rectangles avec une largeur sur l'axe des x, on est amené à exprimer L en fonction de l et on passe

$$\text{de la formule } L = \frac{5}{2}l \text{ à l'équation } y = \frac{5}{2}x.$$

Dans le passage de la formule $l = \frac{2}{5}L$ à l'équation $y = \frac{2}{5}x$, le coefficient $\frac{2}{5}$ passe du statut d'*opérateur agissant sur des longueurs* à celui d'opérateur agissant sur des nombres. Ainsi son statut se rapproche de celui de nombre.

Par ailleurs, les représentations graphiques donnent l'occasion de travailler le concept de *pente* et d' interpréter ainsi les coefficients $\frac{2}{5}$ et $\frac{5}{2}$ comme des *rapports*.

3.1.

1	*Longueur ou L*	5	2,5	7,5	1	4	10
2	*largeur ou l*	2	1	3	0,4	1,6	4
3	*Périmètre ou P*	14	7	21	2,8	11,2	28
4	*Aire ou A*	10	2,5	22,5	0,4	6,4	40

Tab.4

3.2. Pour comparer les éléments des lignes 1 et 3, on peut, par exemple *calculer les rapports* suivants :

$$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}};\ \frac{2,5}{7} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}};\ \frac{7,5}{21} = \frac{15}{42} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}};\ \frac{1}{2,8} = \frac{10}{28} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}};\ \frac{4}{11,2} = \frac{40}{112} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}};\ \frac{10}{28} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}};$$

Il y a donc proportionnalité entre les lignes 1 et 3.

Il en va de même entre les lignes 2 et 3 car en faisant des calculs du même type, on trouve :

$$\frac{2}{14} = \frac{3}{21} = \frac{0,4}{2,8} = \frac{4}{28} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}$$

Par contre, on s'aperçoit rapidement qu'il n'y a pas proportionnalité entre les lignes 1 et 4. En effet,

$$\frac{5}{10} \neq \frac{2,5}{2,5}$$

3.3. Pour retrouver le coefficient $\frac{14}{5}$, il faut exprimer le périmètre P en fonction de la longueur L :

$$\begin{aligned} P &= 2(L+l) = 2(L+\frac{2}{5}L) = 2(l+\frac{2}{5})L = 2(\frac{5}{5}+\frac{2}{5})L = 2\cdot\frac{7}{5}L = \frac{14}{5}L \\ P &= 2(L+\frac{2}{5}L) = 2(\frac{5}{5}L+\frac{2}{5}L) = 2(\frac{7}{5}L) = \frac{14}{5}L. \end{aligned}$$

Dans cette démarche, les élèves sont invités, pour la première fois, à utiliser des *expressions algébriques contenant des coefficients fractionnaires*. De plus ils doivent *réduire au même* *dénominateur, additionner deux fractions, multiplier une fraction par un nombre.* Dans la première résolution, on travaille sur des *nombres* et dans la deuxième sur des *grandeurs.* Dans les deux cas, il faut *fractionner l'unité*, ce qui est peu usuel.

Pour retrouver le coefficient 7, il faut exprimer le périmètre en fonction de la largeur l :

$$P = 2(L+l) = 2(\frac{5}{2}l + l) = 2(\frac{5}{2}l + \frac{2}{2}l) = 2(\frac{7}{2}l) = 7l.$$

3.4. Pour trouver la formule qui permet d'exprimer l'aire A en fonction de la longueur L, on passe par les étapes :

$$A = L \cdot l = L \cdot \frac{2}{5}L = \frac{2}{5}L^2.$$

On peut dire que l'aire est proportionnelle au carré de la longueur. On retrouve le facteur $\frac{2}{5}$ qui lie la largeur à la longueur.

3.5. De la même façon , on obtient la relation

$$A = L \cdot l = \frac{5}{2}l \cdot l = \frac{5}{2}l^2.$$

4.1. Géométriquement, ces deux relations peuvent être interprétées par les Figures 2 à 5.

$A = \frac{2}{5}L^2$

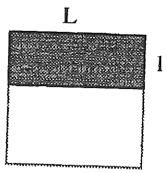


Fig. 2

Le rectangle donné est contenu deux fois et demi dans le carré d'aire L^2.

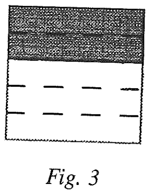


Fig. 3

L'aire du rectangle vaut les $\frac{2}{5}$ de l'aire du carré d'aire L^2.

$A = \frac{5}{2}l^2$

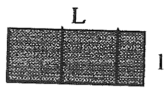


Fig. 4

Le rectangle donné contient deux fois et demi le petit carré d'aire l^2.

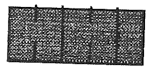
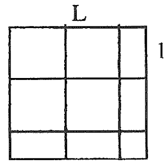


Fig. 5

L'aire du rectangle vaut les $\frac{5}{2}$ de l'aire du carré d'aire l^2.

4.2. Géométriquement, en associant les Figures 2 et 4, on obtient la Figure 6



Le carré de côté l est contenu six fois et un quart dans le carré de côté L.

Algébriquement, on peut retrouver ce résultat soit en égalant les deux formules de l'aire :

$$\frac{2}{5}L^2 = \frac{5}{2}l^2,$$

et donc,

$$L^2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}l^2 = \frac{25}{4}l^2;$$

soit en partant de la relation initiale

$$L = \frac{5}{2}l,$$

ce qui conduit à l'aire du carré de côté L :

$$L^2 = \left(\frac{5}{2}l\right)^2 = \frac{25}{4}l^2.$$

Or, 25 quarts correspondent à 6 unités et un quart.

Nous avons *multiplié une fraction par elle-même. Par ailleurs, nous avons décomposé une fraction en une partie entière et une partie fractionnaire.*

2^e^ partie : les engrenages

1. Activité autour des vélos

1.1. Dans la salle, il y a deux vélos dont un avec trois plateaux à l'avant et six à l'arrière (vélo vert) et un autre avec un plateau à l'avant et six à l'arrière (vélo gris)[3]. Nous indiquons au tableau la réflexion suivante :

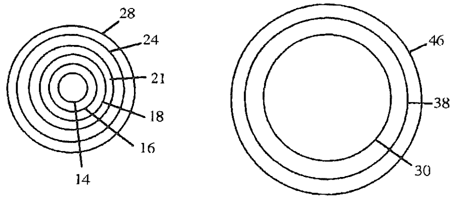
"Tous ces plateaux, c'est du bluff !"

1.2. Voici deux représentations qui peuvent vous aider[4] :

[3] Il va de soi qu'il faut adapter cette séquence aux vélos disponibles.

[4] Cette représentation n'est fournie qu'au moment où les participants manifestent le besoin de compter le nombre de dents de chaque roue.

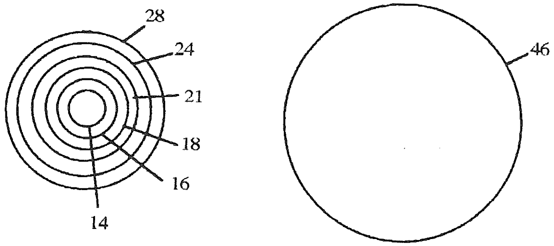
Schéma du vélo vert



Arrière

Avant

Schéma du vélo gris



Arrière

Avant

Fig.7

Solutions et commentaires

1.1. Les élèves sont invités à former des petits groupes, à s'approcher des vélos, à les observer, les manipuler afin de réagir le plus objectivement possible à la phrase écrite au tableau.

Pour certains, c'est déjà une découverte de constater le nombre de plateaux différents et d'observer que ceux de devant sont plus grands que ceux de derrière.

Pour avancer dans la réflexion, il faut fixer son attention sur une association possible d'un plateau avant et d'un plateau arrière et essayer de comprendre ou observer ce qui se passe quand on se met à tourner le pédalier.

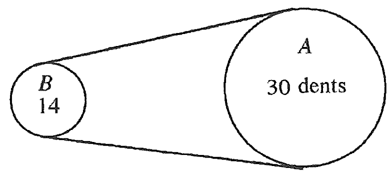
Certains peuvent essayer concrètement en mesurant la distance parcourue au sol par tour de pédale (appelée développement), d'autres vont calculer ce développement à partir du diamètre de la roue et du nombre de dents des plateaux. C'est le moment de fournir les informations relatives au nombre de dents des plateaux des deux vélos.

1.2. Pour comprendre le fonctionnement d'un dérailleur, il faut passer par les observations suivantes :

- les dents des plateaux avant et arrière ont la même forme et la même taille quel que soit leur diamètre de façon à pouvoir s'emboîter dans les maillons d'une même chaîne ;

- lorsque le plateau du pédalier fait un tour :
  - il tourne d'un certain nombre de dents d_A et le plateau entrainé tourne du même nombre de dents d_A ;
  - le nombre de tours réalisés par le plateau arrière dépend aussi du nombre de dents d_B de la roue arrière. Il est d'autant plus élevé que d_B est petit et que d_A est grand.

Considérons le cas particulier où d_A = 30 et d_B =14.



Arrière

Avant

Fig.8

Pendant que le plateau avant réalise un tour complet, 30 dents sont engrenées. Puisque qu'une chaîne relie les deux roues, un même nombre de dents sont engrenées au plateau arrière, ce qui fait tourner le plateau arrière de 2 tours et $\frac{2}{14}$ de tour, qui correspond à $\frac{30}{14}$ de tours.

Ce raisonnement nous permet de conclure que chaque fois que le plateau du pédalier fait un tour, le plateau arrière fait un nombre de tours égal à $\frac{d_A}{d_B}$ qui n'est évidemment pas toujours entier. Le plateau arrière étant lié à la roue arrière, celle-ci réalise donc ce même nombre de tours.

Par tour de pédalier, on avance d'une distance d'autant plus grande que :
- le rapport $\frac{d_A}{d_B}$ est élevé ;
- le diamètre de la roue arrière du vélo est grand.

Pour connaître toutes les possibilités qui nous sont offertes pour un vélo donné, il faut envisager tous les rapports $\frac{d_A}{d_B}$ possibles. Les cyclistes parlent de "braquets"[5] ou de "vitesses"[6] à propos de ces rapports. Le tableau ci-dessous reprend ces différents rapports pour le vélo vert. Remarquons que toutes les possibilités du vélo gris se retrouvent dans la dernière colonne.

[5]On peut s'étonner du fait que, dans les médias, les braquets soient présentés sous forme de produits $d_A \times d_B$ au lieu de rapport $\frac{d_A}{d_B}$.

[6]Le terme est mal choisi dans la mesure où il n'est pas question ici de distance parcourue par unité de temps.

d_B \ d_A	30	38	46
14	$\frac{30}{14}=\frac{15}{7}$	$\frac{38}{14}=\frac{19}{7}$	$\frac{46}{14}=\frac{23}{7}$
16	$\frac{30}{16}=\frac{15}{8}$	$\frac{38}{16}=\frac{19}{8}$	$\frac{46}{16}=\frac{23}{8}$
18	$\frac{30}{18}=\frac{5}{3}$	$\frac{38}{18}=\frac{19}{9}$	$\frac{46}{18}=\frac{23}{9}$
21	$\frac{30}{21}=\frac{10}{7}$	$\frac{38}{21}$	$\frac{46}{21}$
24	$\frac{30}{24}=\frac{5}{4}$	$\frac{38}{24}=\frac{19}{12}$	$\frac{46}{24}=\frac{23}{12}$
28	$\frac{30}{28}=\frac{15}{14}$	$\frac{38}{28}=\frac{19}{14}$	$\frac{46}{28}=\frac{23}{14}$

Tab.5

Pour analyser un tel tableau, il faut comparer et ordonner ces différents rapports qui sont ici tous fractionnaires.

Le plus petit rapport est celui qu'on obtient en choisissant le plus petit numérateur et le plus grand dénominateur c.-à-d. $\frac{30}{28}$; tandis que *le plus grand s'obtient à partir du plus grand numérateur et du plus petit dénominateur* c.-à-d. $\frac{46}{14}$.

La classification par ordre croissant des rapports $\frac{d_A}{d_B}$ est la suivante :

$$\frac{15}{14}\ \frac{5}{4}\ \frac{19}{14}\ \frac{10}{7}\ \frac{19}{12}\ \frac{23}{14}\ \frac{5}{3}\ \frac{38}{21}\ \frac{15}{8}\ \frac{23}{12}\ \frac{19}{9}\ \frac{15}{7}\ \frac{46}{21}\ \frac{19}{8}\ \frac{23}{9}\ \frac{19}{7}\ \frac{23}{8}\ \frac{23}{7}.$$

Pour procéder à cette mise en ordre des différents rapports, il faut comparer les rapports deux par deux.

Toutes les fractions d'une même colonne ont même numérateur. La plus petite aura le plus grand dénominateur. Elles s'ordonnent par ordre décroissant de dénominateur.

Toutes les fractions d'une même ligne ont même dénominateur. La plus petite aura le plus petit numérateur. Elles s'ordonnent par ordre croissant de numérateur.

Malheureusement (pour les élèves !) l'ordre de toutes ces fractions ne correspond ni à celui

des colonnes, ni à celui des lignes. On est donc amené à comparer des fractions n'ayant ni même numérateur, ni même dénominateur. Plusieurs techniques sont possibles :

- On *réduit facilement au même dénominateur* :
$\frac{10}{7}$ et $\frac{19}{14}$ correspondent à $\frac{20}{14}$ et $\frac{19}{14}$. Donc, $\frac{10}{7} > \frac{19}{14}$.
- On *décompose les fractions à partir d'un entier proche* :
$\frac{19}{8}$et $\frac{23}{9}$ correspondent à $\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}$ et $\frac{23}{9} = 2 + \frac{5}{9}$; Or $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$, donc $\frac{19}{8} < \frac{23}{9}$.
$\frac{23}{14}$ et $\frac{5}{3}$ correspondent à $\frac{23}{14} = 2 - \frac{5}{14}$ et $\frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3}$; Or $\frac{5}{14} > \frac{1}{3}$, donc $\frac{23}{14} < \frac{5}{3}$.

La succession des 18 rapports sous forme de fractions permet difficilement de cerner leurs positions relatives. A ce stade, on est amené à *exprimer ces rapports à l'aide de nombres décimaux. Les situer sur trois droites graduées* (une par plateau, placée l'une en dessous de l'autre) peut aussi aider à visualiser les positions relatives des rapports.

Les questions suivantes permettent de poursuivre la réflexion à propos du fonctionnement d'un vélo avec différents plateaux.

- Pour mieux se rendre compte des variations des "vitesses", calculez le rapport entre la plus grande et la plus petite, calculez les écarts absolus et relatifs d'une "vitesse" à l'autre.
- Un vendeur donne le conseil d'utilisation suivant : "Associez le grand plateau avant avec les trois plus petits plateaux arrière, le plateau du milieu avec les quatre plateaux du milieu à l'arrière et le petit plateau avant avec les trois grands plateaux arrière". Comment ce conseil se justifie-t-il d'un point de vue technique ? De cette façon, nos dix-huit "vitesses" annoncées se réduisent à dix. Est-ce vraiment grave ? (Pour y voir plus clair, on peut barrer sur la droite graduée les "vitesses" dont on n'a pas usage.)
- Comment se passent les changements de "vitesse" en pratique ? Passe-t-on toujours d'une "vitesse" à celle qui lui est directement supérieure ou inférieure ?
- Pour chacune de ces "vitesses", calculez la distance parcoure en un tour de pédale (appelée "développement") ?

2. Activité autour des horloges

Pour donner suite au travail sur les engrenages, on peut s'intéresser au fonctionnnement d'une horloge mécanique. Le modèle sous forme de jeu à construire "Horloge 2000"[7] permet de s'interroger à propos des questions suivantes :

Comment peut-on expliquer que l'aiguille des heures et celle des minutes tournent correctement ?

Quelle est la période (temps d'aller-retour) du balancier ?

L'intérêt des cette nouvelle situation réside dans un enchaînement d'engrenages qui amène des *produits de rapports.*

[7]réf.2085000, JOUSTRA 67 402 ILLFIRCH CEDEX.

Références bibliographiques
ROUCHE, N., *Le sens de la mesure*, Bruxelles, Didier-Hatier, 1992.
ROUCHE, N., *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?*, Paris, Ellipses, 1998.

3. Modèles pour calculer avec des fractions[1]

Dans le présent atelier, il s'agit de se pencher sur les calculs de fractions pratiqués dans deux domaines particuliers, les probabilités et les exposants rationnels.

1 Introduction. Julie et le paradoxe du Chevalier de Méré.

Regardons les calculs effectués par une étudiante en dernière année d'études secondaires dans la résolution du paradoxe du Chevalier de Méré. Faut-il rappeler de quoi il s'agit ? La probabilité d'amener 1 au moins une fois en jetant quatre fois un dé cubique est la même que celle d'amener une paire de 1 en jetant vingt-quatre fois deux dés cubiques, pensait le Chevalier. Et vous, quel est votre avis ?

Julie, qui n'en est pas au premier problème de probabilité et qui se débrouille plutôt bien dans le domaine, fait un arbre (Figure 1) en indiquant sur chaque génération de branches les probabilités 0,167 et 0,833.

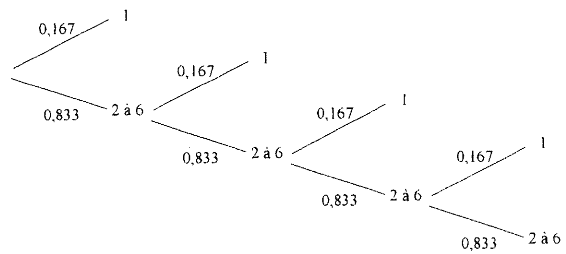


Fig. 1

Elle calcule alors la probabilité de l'événement "ne pas avoir 1 en quatre lancers", complémentaire de l'événement considéré :

$$0,833.0,833.0,833.0,833 \approx 0,48$$

J'interviens : "tu pourrais peut-être considérer que la probabilité est de 1/6 et 5/6 plutôt que 0,167 et 0,833".
- "Oui !? Mais je n'aime pas les fractions".
Pour faire plaisir au prof ou je ne sais quoi d'autre, elle modifie son arbre puis calcule :

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{20}{24}.$$

A ma réaction "Ah, bon !", Julie efface sa réponse sans pouvoir en donner d'autre. J'ai essayé de lui expliquer ce que valait le produit de deux fractions en retournant au modèle de

[1]Ce texte a été rédigé par BENOÎT JADIN

l'aire d'un rectangle. Un comble ! Pour une fois que le calcul des fractions sert vraiment, je suis incapable d'en montrer le sens à l'intérieur même du contexte. Et vous ?

Problème 1. Espoir de vie[1]

Avertissement : justifier toutes les étapes de votre résolution en n'utilisant que des arguments compréhensibles par un débutant qui serait ignorant du langage ensembliste et de tout résultat de la théorie des probabilités ?

La durée de vie est imprévisible. Beaucoup de contrats comme ceux d'assurance vie, de rente viagère, par exemple, reposent sur l'estimation de celle-ci.

A partir du nombre de naissances (tableau 1) en Belgique de 1982 à 1992 et des tables de mortalité (tableau 2), qui reprennent pour un million de naissances et selon le sexe, le nombre de survivants, à chaque âge :

a) Est-il possible de déterminer les chances pour un nouveau-né d'atteindre 85 ans ?

b) Qui a le plus de chances d'atteindre 85 ans : une fille de 16 ans ou une femme de 75 ans ?

c) Ma fille de dix ans a une angoisse, celle de perdre son père et sa mère. Croyez-vous que je puisse la rassurer en calculant les risques qu'elle a de se retrouver orpheline de père et de mère à 20 ans sachant que j'ai 41 ans et mon épouse 38 ans ?

Année	Nombre de naissances		
	total	garçons	filles
1982	120 241	61 831	58 410
1983	117 145	60 209	56 936
1984	115 651	59 331	56 320
1985	114 092	58 572	55 520
1986	117 114	60 493	56 621
1987	117 354	60 390	56 964
1988	119 779	61 520	58 259
1989	120 904	61 948	58 956
1990	123 776	63 421	60 335
1991	125 924	64 586	61 338
1992	124 774	63 883	60 891

Tab. 1

Avant d'envisager les décès, il faut considérer les naissances. La naissance d'un enfant, c'est un peu comme jouer à pile ou face, si ce n'est qu'on ne répète pas l'expérience autant de fois qu'on veut. Au départ, on peut estimer qu'il y a autant de chance d'avoir une fille que d'avoir un garçon. La probabilité *a priori* de l'un et de l'autre est de 1/2. La fraction rappelle le nombre des cas favorables et des cas possibles ou "les chances" de vérifier l'événement.

On peut également s'intéresser à la fréquence des naissances de filles (tableau 3). Celle-ci fluctue au cours du temps. D'où l'idée de cumuler ces fréquences sur 2 ans, puis 3 ans,. . . , et ainsi de suite. On observe une relative stabilisation de la fréquence et on peut considérer que la probabilité empirique ou *a posteriori* d'avoir une fille est de 0,4865. Ce dernier nombre est plus évocatif que la fraction 640570/1316734 même s'il fait perdre le sens premier du rapport. Pour garder l'idée de rapport, on peut l'exprimer en pourcentage : 48,65 %.

[1]Il s'agit d'un problème posé en cinquième année de l'enseignement secondaire.

Nombre de survivants à l'âge x								
x	Homme	Femme	x	Homme	Femme	x	Homme	Femme
0	1 000 000	1 000 000						
1	999 415	999 664	41	964 210	982 167	81	498 950	670 315
2	998 827	999 328	42	962 327	981 327	82	466 949	641 506
3	998 237	998 990	43	960 312	980 427	83	434 106	610 817
4	997 644	998 653	44	958 152	979 461	84	400 631	578 299
5	997 047	998 314	45	955 834	978 421	85	366 772	544 045
6	996 447	997 974	46	953 341	977 299	86	332 810	508 203
7	995 843	997 634	47	950 658	976 084	87	299 058	470 977
8	995 234	997 292	48	947 766	974 768	88	265 855	432 633
9	994 621	996 949	49	944 645	973 337	89	233 556	393 505
10	994 002	996 605	50	941 273	971 779	90	202 525	353 988
11	993 377	996 258	51	937 628	970 079	91	173 113	314 540
12	992 745	995 910	52	933 683	968 222	92	145 653	275 668
13	992 106	995 560	53	929 411	966 190	93	120 434	237 916
14	991 459	995 208	54	924 782	963 962	94	97 692	201 840
15	990 802	994 852	55	919 763	961 517	95	77 591	167 983
16	990 136	994 494	56	914 321	958 831	96	60 210	136 845
17	989 459	994 133	57	908 417	955 877	97	45 543	108 845
18	988 769	993 768	58	902 011	952 625	98	33 492	84 294
19	988 067	993 398	59	895 060	949 044	99	23 878	63 363
20	987 349	993 024	60	887 519	945 096	100	16 452	46 069
21	986 616	992 645	61	879 339	940 744	101	10 917	32 273
22	985 864	992 260	62	870 468	935 942	102	6 951	21 688
23	985 093	991 868	63	860 853	930 645	103	4 228	13 915
24	984 300	991 469	64	850 437	924 800	104	2 446	8 477
25	983 483	991 062	65	839161	918 351	105	1 339	4 874
26	982 640	990 646	66	826 964	911 238	106	690	2 627
27	981 768	990 220	67	813 786	903 393	107	332	1 317
28	980 864	989 782	68	799 564	894 747	108	149	609
29	979 925	989 331	69	784 236	885 223	109	61	258
30	978 947	988 866	70	767 741	874 740	110	23	99
31	977 927	988 386	71	750 022	863 213	111	8	34
32	976 860	987 887	72	731 027	850 551	112	2	10
33	975 742	987 369	73	710 708	836 663	113	1	3
34	974 567	986 828	74	689 026	821 452	114	0	1
35	973 330	986 263	75	665 955	804 822	115	0	0
36	972 024	985 671	76	641 480	786 678	116	0	0
37	970 644	985 047	77	615 606	766 928	117	0	0
38	969 181	984 389	78	588 355	745 485	118	0	0
39	967 627	983 693	79	559 774	722 274	119	0	0
40	965 973	982 954	80	529 938	697 231	120	0	0

Tab. 2

Année	Nombre de filles	Total	Pourcentage de filles	Nombre cumulé de filles	Total cumulé	Fréquence cumulée de filles
1982	58410	120241	48,58	58410	120241	48,58
1983	56936	117145	48,60	115346	237386	48,59
1984	56320	115651	48,70	171666	353037	48,63
1985	55520	114092	48,66	227186	467129	48,63
1986	56621	117114	48,35	283807	584243	48,58
1987	56964	117354	48,54	340771	701597	48,57
1988	58259	119779	48,64	399030	821376	48,58
1989	58956	120904	48,76	457986	942280	48,60
1990	60355	123776	48,76	518341	1066056	48,62
1991	61338	125924	48,71	579679	1191980	48,63
1992	60891	124774	48,80	640570	1316754	48,65

Tab. 3

Le tableau 2 nous indique que sur un million de garçons qui naissent, il n'en reste, 85 ans plus tard, que 366772; ce qui veut dire que la proportion d'hommes atteignant l'âge de 85 ans vaut

$$\frac{366772}{1000000} = 0,366772 \cong 37\%.$$

Puisque ces tables de mortalité ont été élaborées à partir d'un très grand nombre d'observations, on peut considérer que 0,366772 est la probabilité qu'un nouveau-né de sexe masculin vive jusqu'à 85 ans. De même, la probabilité qu'une fille qui vient de naître atteigne l'âge de 85 ans est de 0,544045.

Pour répondre à la question posée, une manière de procéder est de déterminer le nombre de survivants à l'âge de 85 ans pour un très grand nombre de nouveaux-nés, par exemple, un million. Il faut d'abord distinguer combien il y a de filles et de garçons. Si on admet que la probabilité de naître fille est de 48,65 %, il y a de fortes chances d'avoir 486500 filles et 513500 garçons. Parmi ces garçons, combien reste-t-il d'hommes de 85 ans ? On peut calculer de diverses façons. Soit, faire

$$0,366772 \times 513500 = 188337,$$

0,366772 qui est un rapport au départ devient opérateur.
Ou, faire une règle de trois :

sur 1000000 au départ, il y en reste 366772 à 85 ans;
sur 100, il en restera 36,6772
(avec un effort d'imagination pour les morceaux d'homme);
sur 513500, il en restera 5135 × 36,6772 ou à peu près 188337.

Enfin, on peut chercher le nombre x tel que

$$\frac{x}{513500} = \frac{366772}{1000000},$$

ce qui revient à une égalité de rapports.

En procédant de la même façon pour les 486500 filles, on obtient 264678 femmes de 85 ans. Au total, sur un million de nouveaux-nés, on a donc de fortes chances de retrouver 188337 + 264678 = 453015 personnes de 85 ans. Ces calculs peuvent être organisés sous forme d'un diagramme (Figure 2).

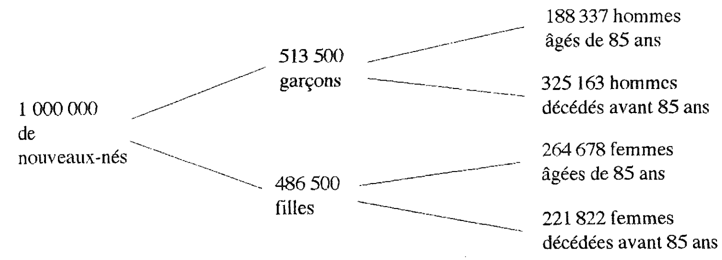


Fig. 2

Le nombre d'un million que nous avons choisi pour la facilité les calculs est arbitraire. Quel que soit le nombre N de nouveaux-nés au départ, nous retrouvons le même type d'arbre (Figure 3).

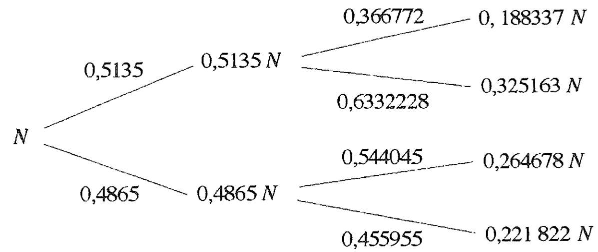


Fig. 3

Sur les branches, on a noté les probabilités respectives qui agissent comme opérateurs pour la détermination des nombres. Dans cette approche fréquentiste, la probabilité pour qu'un nouveau-né atteigne l'âge de 85 ans, vaut

$$\frac{0,366772 \times (0,5135 \times N) + 0,544045 \times (0,4865 \times N)}{N} = \frac{0,188337N + 0,264678N}{N} = 0,453015.$$

La réponse ne dépend donc pas du nombre N arbitraire choisi au départ. On voit que les probabilités suffisent.

La probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon et atteigne l'âge de 85 ans vaut 0,188337 et est obtenue par le produit 0,513500 × 0,366772. Il s'agit d'une probabilité composée. De même, la probabilité qu'un nouveau-né soit une fille et atteigne l'âge de 85 ans vaut 0,264678 = 0,486500 × 0,544045. Enfin, la probabilité recherchée vaut 0,453015 et est obtenue par la somme 0,188337 + 0,264678. Il s'agit d'une probabilité totale. Ces calculs nous inspirent un diagramme plus simple encore (Figure 4), il s'agit d'un arbre de probabilités.

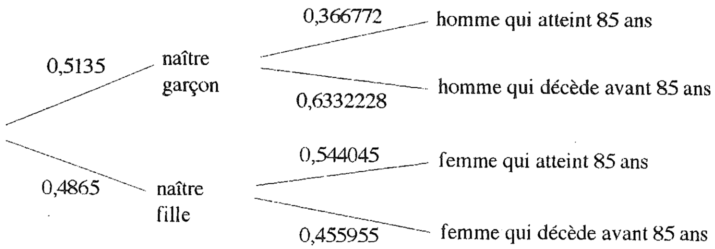


Fig. 4

On peut en déduire deux règles fondamentales du calcul des probabilités. L'une d'elles, appelée règle de multiplication s'énonce comme suit :
Lorque l'on parcourt un chemin (branches consécutives) d'un arbre, la probabilité composée est obtenue en multipliant les probabilités écrites au-dessus de chacune des branches rencontrées.
L'autre est appelée règle d'addition et s'énonce comme suit :
Lorsque l'on doit parcourir plusieurs chemins d'un même arbre pour rencontrer tous les cas d'un événement, la probabilité totale de celui-ci est égale à la somme des probabilités correspondant à chacun des chemins.

Problème 2. Tirages

Avertissement : justifier toutes les étapes de votre résolution sans recourir aux règles du calcul des fractions.

2.1. Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires

a) Si on tire une boule, quelle est la probabilité de tirer 1 blanche ?

b) Si on tire deux boules successivement en replaçant la première dans l'urne avant de tirer la seconde, quelle est la probabilité de tirer deux blanches ?

c) Si on tire deux boules successivement sans replacer la première dans l'urne avant de tirer la seconde, quelle est la probabilité de tirer deux blanches ?

d) Qu'y a-t-il de plus probable, dans chacun des deux modes de tirage : tirer deux boules de même couleur ou tirer deux boules de couleurs différentes ?

2.2. Deux sacs identiques contiennent respectivement 6 et 8 boules, le premier 2 blanches et 4 noires, le second 2 blanches et 6 noires. Si on tire une boule au hasard dans l'un des deux

sacs, quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche ? Est-ce la même probabilité que si toutes les boules étaient dans le même sac ?

Si toutes les boules sont identiques en dehors de la couleur, on peut considérer pour la question a) que la probabilité à priori de tirer une boule blanche, vaut 3/5.
Pour la question b), faisons un arbre de probabilité (Figure 5a).

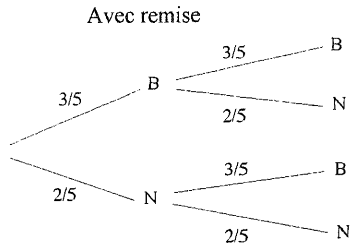


Fig. 5a

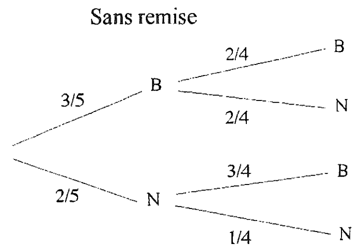


Fig. 5b

En appliquant les règles de multiplication sur cet arbre, on peut dire que la probabilité de tirer deux blanches vaut

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \qquad (1)$$

Que vaut ce produit ? Pour le calculer on peut faire une autre expérience mentale, considérer un autre arbre qu'on peut appeler arbre des possibilités (Figure 6a).

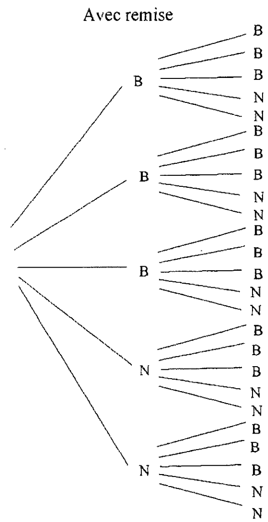


Fig. 6a

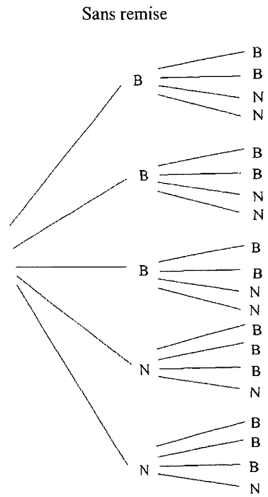


Fig. 6b

Sur ce nouvel arbre, on a une première génération de branches qui correspondent aux cinq choix possibles pour l'extraction de la première boule. Pour chacune de ces possibilités du premier tirage, il y a cinq possibilités au second tirage. En tout, cela fait donc 5×5 ou 25 cas possibles, tous équiprobables. Regardons parmi tous ces cas, ceux qui sont favorables à l'événement "tirer deux boules blanches". Au premier tirage, il faut retenir 3 cas sur les 5. Pour chacun de ces trois cas il y a trois cas possibles au second tirage. Cela porte le nombre de cas favorables à 3×3 ou 9 cas possibles. La probabilité a priori de "tirer deux blanches" est alors de

$$\frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{9}{25}. \tag{2}$$

En faisant le lien entre les expressions (1) et (2) qui expriment la même probabilité, on donne une (nouvelle) perception de la règle du produit de deux fractions :

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{9}{25}.$$

Le produit de deux fractions est la fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs des fractions et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs. De la même façon pour le tirage sans remise, à partir des arbres des Figures 5b et 6b, on peut écrire que

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{6}{20}.$$

Pour la question 2.2., on a représenté à la Figure 7a l'arbre des probabilités correspondant au problème énoncé.

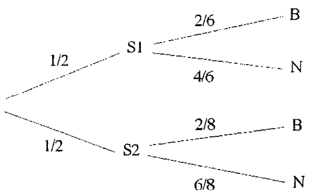


Fig. 7a

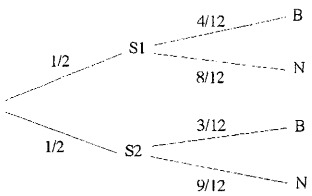


Fig. 7b

En appliquant cette fois les règles d'addition et de multiplication sur l'arbre, on calcule la probabilité de tirer une boule blanche :

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{8}.$$

Ce qui se simplifie en utilisant la règle du produit qu'on vient d'énoncer :

$$\frac{2}{12} + \frac{2}{16}. \tag{3}$$

Que vaut cette somme ? Imaginons une autre expérience, une expérience ad hoc, et son arbre de probabilités (Figure 7b). Dans le premier sac, il y a douze boules dont 4 blanches ;

dans le second, il y a douze boules dont 3 blanches. La probabilité de l'événement «tirer une blanche» est dans ce cas :

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{12} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24}.$$

Ici, il n'y a pas de problème pour effectuer la somme puis qu'on a des 1/24. La probabilité vaut finalement

$$\frac{7}{24}. \tag{4}$$

Il reste à se convaincre que les deux expériences sont tout à fait similaires du point de vue des probabilités pour en conclure que les expressions (3) et (4) sont égales, ce qui donne :

$$\frac{2}{12} + \frac{2}{16} = \frac{7}{24}.$$

Vous n'êtes pas convaincus ? Nous non plus ! Cela veut dire qu'il n'y a pas d'idée de commune mesure dans ce contexte des probabilités et qu'il faut connaître la façon d'addionner deux fractions avec le recours au plus petit commun multiple des dénominateurs pour penser à cette deuxième expérience sensée justifier le procédé.

Problème 3. Croissance[2]

Un biologiste observe une croissance bactérienne. Il constate qu'à un moment qu'il choisit comme origine des temps, le nombre de bactéries est d'un million et que ce nombre double toutes les heures.

3.1. Combien y a-t-il de bactéries après une heure ? Deux heures ? Dix heures ?
Combien y a-t-il de bactéries après une demi-heure ? Après un quart d'heure ? Après vingt minutes ?
Justifiez votre solution.
Combien y a-t-il de bactéries après trois quarts d'heure ?
Combien y avait-il de bactéries une heure auparavant ? Trente minutes auparavant ?
Quel est le nombre de bactéries après un temps t quelconque ?

3.2. Etes-vous sûr d'avoir le bon modèle ? Y en a-t-il d'autres que celui (ceux) que vous avez trouvé(s) ?

Le problème a été posé en quatrième année secondaire pour aborder les exposants rationnels, les exposants entiers et leurs propriétés étant connus des élèves (ou supposés comme tel). Après dix minutes de réflexion personnelle et cinq minutes d'échange en groupe, on relève les premières solutions.

Une grande majorité des élèves propose des solutions correspondant au tableau 4. Au départ, il y a 1 million de bactéries, après 1 heure, il y en a 2 millions, après 2 heures il y a en a 4 millions, et ainsi de suite. Pour 1/2 heure, ils font la moyenne arithmétique des nombres à 0 et 1 heure. Fidèle à un modèle de porportionnalité, ils proposent 1,25 million pour un quart d'heure, 1,33 million pour 20 minutes. Il faut encore vérifier la cohérence du modèle. La population double-t-elle toutes les heures quel que soit le temps de départ choisi ? On essaie pour quelques valeurs, par exemple entre les temps 1/2 et 3/2, la population passe de 1,5 à 3. C'est bon. On met ces valeurs en graphique (Figure 8) pour observer que la fonction est affine par morceaux.

[2] Il s'agit d'un problème posé en quatrième année de l'enseignement secondaire.

Temps (en heures)	Nombre de bactéries (en millions)
0	1
1/4	1,25
1/3	1,33
1/2	1,5
1	2
3/2	3
2	4
10	1024

Tab. 4

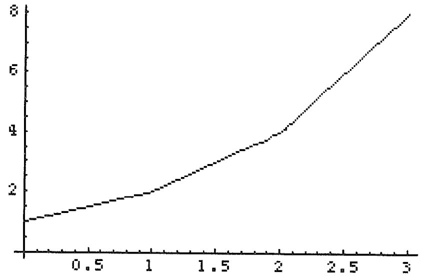


Fig. 8

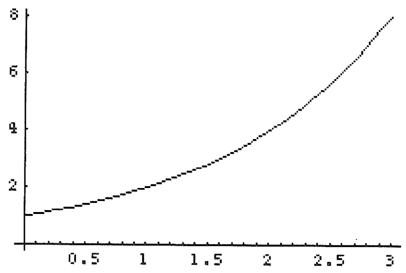


Fig. 9

Certains ont proposé les solutions du tableau 5. A la question, comment avez-vous procédé, ils répondent : "on a remarqué que pour 2 heures, le nombre de bactéries est de 2^2, pour 10 heures, de 2^{10}; alors on a fait pareil pour 1/2 heure, c'est-à-dire $2^{1/2}$ et la machine donne 1,41".[3] On met ces valeurs en graphique (Figure 9), on compare et on discute les deux modèles proposés.

Temps (en heures)	Nombre de bactéries (en millions)
0	1
1/4	1,19
1/3	1,26
1/2	1,41
1	2
3/2	2,83
2	4
10	1024

Tab. 5

Pour le premier modèle, on constate que l'augmentation pour une période donnée, 1/2 heure par exemple, est la même entre 0 et 1 heure, la même entre 1 et 2 heures mais change d'heure en heure (tableau 9).

[3]Rappelons que ces élèves sont en quatrième année secondaire et n'ont jamais entendu parler d'exposants rationnels.

Temps (en heures)	Nombre de bactéries (en millions)
0	1
1/4	1,25
1/2	1,5
3/4	1,75
1	2
5/4	2,5
3/2	3
7/4	3,5
2	4

Tab. 9

Pour le second modèle, c'est moins clair... Jusqu'à ce qu'un élève[4] fasse le rapprochement entre 1,41 et $\sqrt{2}$. D'ou vient ce $\sqrt{2}$? Ah, mais

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$$

On constate dès lors, qu'en 1/2 heure, le nombre de bactéries est toujours multiplié par $\sqrt{2}$, quel que soit le moment choisi (tableau 10). Et en un quart d'heure ?

Certains proposent $\sqrt{\sqrt{2}}$ étant donné que 1/4 d'heure est la moitié de 1/2 heure. Cela fonctionne, $\sqrt{\sqrt{2}}$ vaut à peu près 1,19. On peut aussi dire que 1/4 d'heure, c'est le quart d'une heure et qu'il y a quatre quart d'heures dans l'heure. Il faut trouver une nombre a qui multiplié à lui-même "trois fois" donne 2. C'est-à-dire que

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = 2 \text{ ou } a^4 = 2.$$

Il s'agit de

$$a = \sqrt[4]{2}.$$

Ce qui vaut encore et à peu près 1,19.

Dans ce deuxième modèle, on multiplie toujours le nombre de bactéries par un même nombre quand "on ajoute un même temps" : par 2 pour 1 heure, par $\sqrt{2}$ pour 1/2 heure, par $\sqrt[4]{2}$ pour 1/4 d'heure.

Temps (en heures)	Nombre de bactéries (en millions)
0	1
1/4	1,19
1/2	1,41
3/4	1,68
1	2
5/4	2,38
3/2	2,83
7/4	3,36
2	4

Tab. 10

[4]Quelquefois avec un bon coup de pouce du prof. Il arrive cependant que des élèves optent pour un modèle multiplicatif et obtiennent directement cette valeur.

Si on introduit les écritures suivantes

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}, \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \text{ si } n \in N,$$

on peut constater, par exemple, que 1/4 d'heure étant la moitié d'1/2 heure ou le quart d'une heure, on a

$$(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}.$$

Et, tout naturellement,

$$(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}.$$

Voilà une propriété connue des exposants naturels ($(a^n)^m = a^{nm}$) qui reste vraie avec ces "nouveaux" exposants.

Deux quarts d'heure, c'est une demi-heure, d'où

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Et, tout naturellement,

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}.$$

Voilà une autre propriété connue des exposants naturels ($a^n \cdot a^m = a^{n+m}$) qui reste vraie.

Pour trois quarts d'heure, en utilisant cette deuxième propriété, on a

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}.$$

2 heures et 1/4, c'est 2 heures puis 1/4 d'heure ou neuf quarts d'heure :

$$2^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{9}{4}} = 2^{2+\frac{1}{4}}.$$

Pour 35 minutes, on peut considérer qu'il s'agit de sept douzièmes d'heure ou de 20 et 15 minutes. Dès lors

$$2^{\frac{7}{12}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}.$$

En généralisant, on peut finalement écrire qu'après n'importe quel temps t rationnel positif, le nombre de bactéries (en millions) est de

$$2^t.$$

Il reste à envisager les temps négatifs, à reprendre les exposants rationnels dans leur généralité et à faire le tour de leurs propriétés pour constater la conservation des propriétés vues pour les exposants entiers. Ce faisant, on utilise le calcul fractionnaire.

Conclusion

Dans l'annonce de l'atelier, nous avons indiqué "Mieux vaut tard que jamais" à propos d'une "occasion donnée aux élèves en fin de secondaire de (re)comprendre les opérations sur les fractions et de progresser dans l'idée qu'ils se font de nombre". Au moment de conclure, on pourrait ajouter "Mieux vaut tôt que tard".

Dans un livre consacré aux fractions[5], Nicolas Rouche écrit :

"On l'aura remarqué, nous avons peu parlé jusqu'ici du calcul sur les fractions, qui occupe pourtant une place importante dans l'enseignement et s'avère difficile à comprendre, sinon à apprendre. Ce n'est pas là l'effet du hasard. C'est que beaucoup de phénomènes relatifs aux fractions précèdent pratiquement et logiquement les questions de calcul. Nous commenterons ci-après l'intérêt des additions et multiplications de fractions à petits numérateur et dénominateur.

Par ailleurs le premier usage important des additions et produits de fractions se situe sans doute dans le calcul des probabilités. Ces opérations sont aussi indispensables dans le calcul des exposants rationnels."

[5] N. ROUCHE, Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?, Paris, Ellipses, 1998.

Au terme de notre atelier et des ateliers 1 et 2 du groupe GEM, on pourrait ajouter que

- des contextes géométriques comme les puzzles et les rectangles semblables sont riches et nourrissent de sens et d'intuitions l'apprentissage des fractions et le calcul sur les fractions?
  Mais l'utilité du calcul s'avère relativement restreinte dans ces mêmes contextes.

- des contextes comme les probabilités et les exposants fractionnaires sont riches au niveau de l'utilisation du calcul fractionnaire mais insuffisants pour permettre une bonne compréhension des règles de ce calcul.

Ce qui voudrait dire que même si "le premier usage important des additions et produits de fractions se situe sans doute dans le calcul des probalités" et les exposants rationnels, il faut en commencer l'apprentissage bien avant à partir d'autres contextes.

4. Des décimaux aux nombres[1]

Parmi les fractions les plus faciles à apprivoiser se trouvent les fractions décimales, commodément représentées en écriture décimale finie. Nous les appellerons aussi familièrement les décimaux finis. Ils sont incontestablement des nombres, et peut-être même pour beaucoup de personnes sont-ils les seuls nombres.

Mais une simple opération comme de diviser 1 par 3 engendre une écriture infinie. Et d'ailleurs l'imagination ne peut s'empêcher de rêver à ces cousins à la fois proches et excentriques des décimaux finis que sont les décimaux infinis.

Les décimaux finis peuvent être considérés comme des résultats de mesures, en particulier de mesures de longueurs, et c'est pourquoi ils s'alignent sagement sur la droite des nombres. Mais on sait qu'ils ne la remplissent pas. La droite en elle-même est régulière, continue, lisse, tout point y joue le même rôle que n'importe quel autre. Et pourtant, pour la décrire avec des nombres, avec "du discret", il va falloir mettre des chiffres à la queue leu leu, jusqu'à l'infini, mobiliser des monstres.

Dans ce quatrième atelier de la série "De la fraction-tarte au nombre", nous nous intéressons aux problèmes posés par cette correspondance entre les nombres et la droite. Nous traiterons successivement deux questions. La première nous amènera à regarder de très près autour du nombre 1. Dans la seconde, nous étudierons une fonction particulièrement intrigante.

1 Le mystérieux nombre 1

Nous présentons ci-dessous un dialogue entre un étudiant et son professeur. Chacun est libre d'en imaginer d'autres, illustrant des voies de pensée différentes. Celui-ci est inspiré de discussions réelles avec diverses personnes qui ne possédaient pas toutes les notions élémentaires d'analyse, telles que par exemple le concept de limite. Nous avons poussé plus loin qu'à l'habitude certains arguments qui, de prime abord, nous avaient surpris.

Que pensez-vous des arguments intervenant dans le dialogue suivant ? Imaginez-en la suite.

LE PROFESSEUR. Le nombre s'écrivant 0,999 ... , avec une infinité de 9, est égal à 1.

L'ÉTUDIANT. Non, ce n'est pas possible ! Ce sont deux nombres différents. Cela se voit : ils ont des écritures différentes.

PROF. S'ils sont différents, donnez-moi leur différence.

ÉT. La différence est le nombre qui s'écrit $0,000\ldots1$, avec une infinité de zéros avant le 1.

PROF. Mais s'il y a une infinité de zéros, vous n'arriverez jamais à la dernière décimale, à savoir 1.

ÉT. C'est comme pour votre $0,999\ldots$, vous n'arriverez jamais au bout de votre infinité de 9. Donc, le dernier 9 n'apparaissant pas, $0,999\ldots$ ne sera "jamais" égal à 1.

PROF. Moui ... Autre chose : si ces deux nombres sont différents, vous devez pouvoir trouver un nombre entre les deux, et même une infinité de nombres ...

[1]Ce texte a été rédigé par THÉRÈSE GILBERT et NICOLAS ROUCHE. Il est à peu de choses près extrait de la thèse de doctorat de T. GILBERT [5].

ÉT. Il suffit, par exemple, de calculer la moyenne des deux. Leur somme valant $1,999\ldots$, la moyenne sera $0,999\ldots5$, avec une infinité de 9 avant le 5. En effet $\frac{1,9}{2} = 0,95$, $\frac{1,99}{2} = 0,995$, etc.

Voici une suite possible pour ce dialogue.

PROF. Une infinité de 9 avant le 5, qu'est-ce que ça signifie ?

ÉT. C'est vous qui avez parlé d'une infinité de 9, en premier.

PROF. J'ai parlé d'une infinité de 9 et non d'une infinité de 9 *suivie* de quelque chose.

ÉT. Où est la différence ? Avec vous, c'est toujours la même chose : il y a ce que vous faites, qui est bon, que l'on peut faire, et ce que je fais, qui est mauvais, qu'on ne peut pas faire.

PROF. Intuitivement, vous devez bien admettre que si on écrit une infinité de 9 suivie d'un 5, le 5 va mettre du temps à apparaître. Mieux, il n'apparaîtra jamais. De toute façon, une infinité et encore un, ça ne fait jamais qu'une infinité.

ÉT. Connaissez-vous les ensembles dérivés de CANTOR ?

PROF. Plaît-il ?

Petit intermède. Les ensembles dérivés et les nombres transfinis. (Exposé de l'étudiant, très inspiré par[2] BOREL [1].)

La théorie exposée ci-après est due à Georg CANTOR, mathématicien (1845 - 1918) dont les travaux ont eu une influence considérable sur les fondements des mathématiques.

Considérons l'ensemble

$$E_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\} = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

représenté à la Figure 1 et qui, en base deux, s'écrit

$$\{0,1;\ 0,01;\ 0,001;\ \ldots\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des nombres entre 0 et 1 s'écrivant avec un seul chiffre 1 derrière la virgule. On trouve des éléments de E_1 aussi près que l'on veut de 0. Le nombre 0 est donc un point d'accumulation de E_1. L'ensemble des points d'accumulation de E est appelé le *dérivé* de E et noté E'.
Ici, $E_1' = \{0\}$.

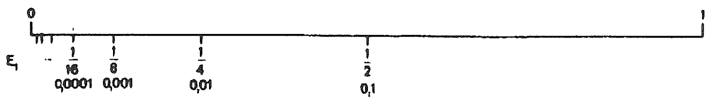


Fig. 1

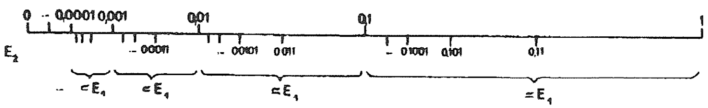


Fig.2

[2]Voir aussi CANTOR [2].

Construisons maintenant l'ensemble E_2 (Figure 2) en insérant dans chaque intervalle $]\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}[$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ c'est-à-dire, en écriture binaire, $]0,1^n;\ 0,1^{n-1}[$, une copie réduite[3] de E_1 :

$$E_2 = \{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}.$$

Comme la base deux se prête bien à ce type de nombres, nous n'emploierons plus que celle-là dans la suite. Ainsi, E_2 est l'ensemble des nombres de $]0,1[$ s'écrivant avec exactement deux chiffres 1 derrière la virgule. Cet ensemble est parfaitement déterminé : on peut dire, d'un nombre quelconque donné, s'il appartient ou non à l'ensemble.

Et on a $E_2' = E_1$ et $(E_2')' = \{0\}$. Ce dernier ensemble est appelé le *dérivé d'ordre 2* de E_2 et noté $E_2^{(2)}$.

Continuons en insérant dans chaque intervalle dont les extrémités sont deux nombres consécutifs de $E_2 \cup E_1 \cup \{1\}$, une copie réduite de E_1 pour former l'ensemble E_3 (Figure 3). Dans ce cas, nous aurons $E_3' = E_2$, $E_3^{(2)} = E_1$ et $E_3^{(3)} = \{0\}$. Et E_3 est l'ensemble des nombres de $]0,1[$ s'écrivant avec exactement trois chiffres 1 derrière la virgule.

Ce procédé de contruction peut être répété un nombre fini quelconque de fois. Ainsi, quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on peut construire E_α ayant des dérivés successifs non vides $E_\alpha', E_\alpha^{(2)}, E_\alpha^{(3)}, \ldots E_\alpha^{(\alpha)}$ avec $E_\alpha^{(\alpha)} = \{0\}$. Et E_α est l'ensemble des nombres de $]0,1[$ s'écrivant avec exactement α chiffres 1 après la virgule.

Repartons maintenant de l'ensemble E_1 et insérons dans chaque intervalle

$$]0,1^n; 0,1^{n-1}[\quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

une copie réduite de E_n pour former l'ensemble J (Figure 4). Nous obtenons l'ensemble des nombres de $]0,1[$ s'écrivant avec n chiffres 1 après la virgule $(n \geq 2)$, dont le premier est au $(n-1)^{\text{e}}$ rang. Cet ensemble admet des dérivés non vides d'ordre quelconque $\beta \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, on note $J^{(\omega)}$ l'ensemble des points communs à tous les $J^{(\beta)}$, $\beta \in \mathbb{N}^*$, que l'on note

$$J^{(\omega)} = \bigcap_{\beta \in \mathbb{N}^*} J^{(\beta)}.$$

Ici, $J^{(\omega)} = \{0\}$.

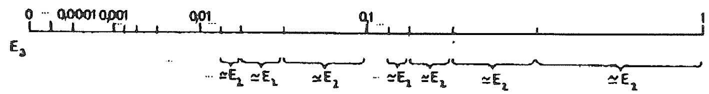


Fig.3

[3]Nous donnons "l'expression algébrique" de l'ensemble, car cela permet de s'assurer qu'il est bien défini. Néanmoins cette expression n'a aucune importance pour la compréhension de l'exposé. Le lecteur que ces calculs ennuient peut donc les ignorer.

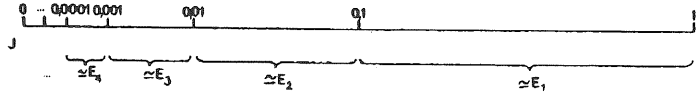


Fig.4

Intuitivement, $J^{(\omega)}$ correspond à ce que l'on obtient si on dérive une infinité de fois J. Mais ne nous arrêtons pas là.

Repartons à nouveau de l'ensemble E_1 et insérons dans chaque intervalle

$$[0,1^n; 0,1^{n-1}]$$

une copie réduite de J pour former l'ensemble J_1 (Figure 5). Nous obtenons l'ensemble des nombres de $]0,1[$ s'écrivant avec n chiffres 1 après la virgule $(n \geq 3)$, dont les deux premiers sont espacés de $(n-2)$ rangs. Nous avons $J_1^{(\omega)} = E$. Le dérivé de $J_1^{(\omega)}$, noté naturellement $J_1^{(\omega+1)}$, est $\{0\}$.

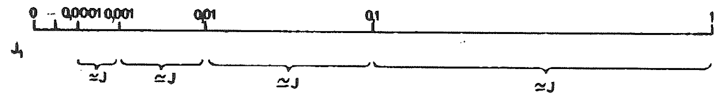


Fig.5

On pourrait itérer le processus pour construire des ensembles ayant des dérivés d'ordre $\omega+2, \omega+3, \ldots$ ou même 2ω et plus. Ces "nombres" sont dits *transfinis*.

Mais ce qui va surtout nous servir dans notre discussion est qu'intuitivement, nous avons construit un ensemble J_1 que nous pouvons dériver une infinité de fois, puis encore une fois. Et cela ne revient pas au même que si nous ne l'avions dérivé qu'une infinité de fois ! La théorie de CANTOR donne ainsi un sens à un "infini plus un" différent de l'infini. (Fin de l'intermède)

ÉT. Vous voyez bien qu'en mathématiques on peut faire certaines choses une infinité de fois et encore une fois. Moi, je mets une infinité de 9 derrière la virgule, puis un 5 !

PROF. Ici, c'est différent, il s'agit d'écrire un nombre, quelque chose qui représente la mesure d'un segment. Les écritures 0,000 ... 1 et 0,999 ... 5 ne représentent pas des nombres, puisqu'ils ne représentent aucune mesure.

ÉT. 0,999 ... ne correspond pas non plus à une mesure ; pourtant vous l'acceptez comme nombre.

Là, on peut imaginer que le professeur parle de limite si l'étudiant est à même de comprendre. En effet, $0,999\ldots$ est une manière d'écrire la limite de la série géométrique

$$0,9 \quad 0,99 \quad 0,999 \quad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{\infty} 9 \cdot (\frac{1}{10})^{i+1},$$

qui vaut $\frac{9}{10} \cdot (\frac{1}{1-\frac{1}{10}}) = 1$. Mais il peut aussi tenter de convaincre l'étudiant en utilisant des arguments de type calculatoire :

PROF. On peut engendrer 0,333 ... en appliquant l'algorithme de division habituel à "1 divisé par 3". Donc $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, puis en multipliant par 3 le résultat, on obtient $1 = 0,999\ldots$; l'écriture 0,999 ... est donc le résultat d'opérations sur des entiers. Et on peut aussi l'utiliser dans des opérations. Par exemple, on peut écrire : si

$$x = 0,999\ldots,$$

alors

$$10x = 9.999\ldots,$$

donc

$$9x = 10x - x = 9.000\ldots = 9,$$

et

$$x = 1.$$

On peut définir les opérations sur ces écritures illimitées (ayant une seule infinité de décimales) pour qu'elles vérifient les propriétés habituelles, qui permettent notamment de justifier le raisonnement ci-dessus. Pouvez-vous faire de même avec vos écritures ? Par exemple, comment faites-vous $0,999\ldots5 + 0,000\ldots1$?

ÉT. C'est facile, cela donne 0,999 ... 6.

PROF. Mais alors puisque

$$0,999\ldots < 0,999\ldots5,$$

vous aurez

$$0,999\ldots + 0,000\ldots1 < 0,999\ldots5 + 0,000\ldots1.$$

Ce qui donne

$$1 < 0,999\ldots6.$$

Cela vous convient-il ?

L'égalité de $0,999\ldots$ et 1 est choquante. En l'écrivant, on a l'impression de négliger quelque chose, à savoir leur différence, que l'étudiant exprime par $0,000\ldots1$. C'est peut-être pareil lorsqu'on écrit $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$. En effet, la division de 1 par 3 ne finit jamais. À chaque étape de celle-ci, il reste un 1 à diviser. Cela peut être rapproché du problème de la limite de la suite

$$0,95 \quad 0,995 \quad 0,9995 \quad \ldots,$$

que l'étudiant décide d'écrire $0,999\ldots5$. Toutes ces difficultés illustrent la tendance à appliquer un certain principe de continuité : "ce qui est vrai de tous les termes d'une suite est vrai de sa limite", principe dont l'origine est attribuée à Leibniz[4]. Ce principe paraît naturel, mais possède de nombreux contre-exemples, dont ceux exprimés ci-dessus ne sont pas les plus connus.

Remarquons que, tant dans le dialogue de départ que dans sa suite, c'est l'étudiant qui tient le beau rôle : il arrive à réfuter les arguments du professeur sur son propre terrain. Ainsi, si le professeur propose d'accepter l'infinité (actuelle) des 9 dans l'écriture $0,999\ldots$, l'étudiant

[4]Cf. LAKATOS [7]

fabrique une différence avec une infinité (actuelle) de 0 suivie d'un 1. Si par contre le professeur en revient à l'infini potentiel en soutenant que l'on n'arrivera jamais au bout de la suite de 0 dans $0,000\ldots1$, l'étudiant embraye et applique cet argument à $0,999\ldots$.

En outre, nous avons attribué l'exposé sur les nombres transfinis à l'étudiant parce que le dialogue s'y prêtait bien. Il serait pourtant étonnant qu'un étudiant dont on met en doute les connaissances sur les limites connaisse cette théorie de CANTOR. Peu importe ! Disons, par exemple, que l'étudiant a un ami plus âgé qui lui a parlé de cela ... De toute façon, l'exposé est là pour rappeler que l'argument cité auparavant par le professeur, à savoir "on ne peut pas faire suivre de quelque chose une infinité de chiffres", et qui apparaît aux yeux de l'étudiant comme un argument d'autorité, n'est effectivement pas défendable jusqu'au bout par un mathématicien. Par contre, comme le professeur le propose ensuite, on peut réfuter les écritures du type $0,999\ldots5$, ou éventuellement les identifier à 1, en se référant à ce que doit être ou représenter un nombre (un point sur une droite, une mesure ...), à ce qu'il doit pouvoir faire (se prêter au calcul avec ses propriétés habituelles).

2 Saisir le continu avec des décimaux

Considérons l'ensemble des nombres positifs ayant une écriture décimale limitée ou illimitée, à l'exclusion de ceux "se terminant" par une suite infinie de 9. Sur cet ensemble, définissons la fonction[5] suivante : à tout nombre a, faisons correspondre le nombre $f(a)$ en intercalant un "0" devant chacun des chiffres de a apparaissant après la virgule. Par exemple, nous faisons correspondre au nombre

$$13,141592\ldots$$

le nombre

$$13,010401050902\ldots$$

Etudiez la continuité, la dérivabilité et la croissance de la fonction f. Rédigez précisément les preuves de vos affirmations.

La fonction f est strictement croissante. Cette propriété s'établit aisément.

Pour étudier la continuité et la dérivabilité, une première idée serait de représenter cette fonction par un graphe pour voir si "on peut le tracer sans lever le crayon" et "s'il n'y a pas de point anguleux". Hélas, toute tentative dans ce sens nous convainc que la fonction est difficile à représenter et qu'en tout cas les notions intuitives de continuité et de dérivabilité liées au graphe ne suffiront pas à résoudre le problème. Il nous faut au contraire nous baser sur des concepts précis. Nous nous baserons sur la caractérisation suivante de la continuité.

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue en un point a de son domaine si, pour toute suite (u_i) dans dom$f$ qui converge vers a, la suite $(f(u_i))$ converge vers $f(a)$. Elle est continue à droite (respectivement à gauche) en a si, pour toute suite (u_i) dans dom$f$ dont tous les termes sont supérieurs (resp. inférieurs) ou égaux à a et qui converge vers a, la suite $(f(u_i))$ converge vers $f(a)$.

Notons $\mathbb{D}^+$ l'ensemble des décimaux limités positifs.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{D}^+$, discontinue à gauche et continue à droite sur $\mathbb{D}^+$.

En effet, si une suite (u_i) tend vers un nombre illimité b, les n premières décimales de u_i "deviennent égales" aux n premières décimales de b, et ce pour n'importe quel n. Et donc les

[5]Cette fonction a été étudiée par E. BOREL dans [1].

$2n$ premières décimales de $f(u_i)$ deviennent égales aux $2n$ premières décimales de $f(b)$. Ce qui entraîne que $(f(u_i))$ converge vers $f(b)$.

Si b est un nombre limité, la situation est quelque peu différente. Examinons par exemple la continuité au point 1. Si (u_i) tend vers 1 par valeurs supérieures, les premières décimales de u_i deviennent égales à celles de $1,000\ldots$ et, comme pour les illimités, $(f(u_i))$ converge vers $f(1)$. La fonction f est donc continue à droite en ce point, ainsi qu'en tout nombre limité. Par contre, si (u_i) tend vers 1 par valeurs inférieures, les premières décimales de u_i deviendront égales à celles de $0,999\ldots$. Le schéma suivant montre l'écart, noté ϵ, entre $f(1)$ et la limite de la "suite-image" $(f(u_i))$:

$$\left.\begin{array}{lcl} 0,999\ldots & \mapsto & 0,090909\ldots \\ & & \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}\right| \quad \epsilon = 0,90909090\ldots = \tfrac{10}{11}$$

Nous dirons que la *discontinuité* à gauche de 1, c'est-à-dire

$$f(1) - \lim_{x\to 1^-} f(x),$$

est de $\frac{10}{11}$.

De même, comme le montre le schéma suivant, la discontinuité à gauche de 0,123 est de $\frac{10}{11} \cdot 10^{-6}$.

$$\left.\begin{array}{lcl} 0,122999\ldots & \mapsto & 0,010202090909\ldots \\ & & \\ 0,123 & \mapsto & 0,010203 \end{array}\right| \quad \epsilon > 0,00000090909\ldots = \tfrac{10}{11}\cdot 10^{-6}$$

Remarquons que l'ampleur de la discontinuité à gauche en a est fonction du rang de sa dernière décimale. Plus précisément, un nombre limité de n décimales après la virgule a une discontinuté à gauche de $\frac{10}{11} \cdot 10^{-2n}$.

En ce qui concerne la dérivabilité de la fonction f, on pourrait croire à première vue que la fonction f n'est dérivable en aucun point de son domaine, l'ensemble de ses points de discontinuité y étant *dense*.

À mieux y regarder et après avoir calculé quelques quotients différentiels, l'impression s'inverse : les accroissements de la fonction diminuent beaucoup plus vite que ceux de la variable. La fonction semble être dérivable sur tout son domaine de continuité et sa dérivée semble y être nulle, ce qui par ailleurs est choquant pour une fonction strictement croissante ! Le tableau suivant donne les quotients différentiels $\frac{f(u_i)-f(b)}{u_i-b}$ liés à des augmentations $\delta_i = u_i - b$ de valeurs $\pm 0,1$, $\pm 0,01$ et $\pm 10^{-n}$ d'un réel illimité b dont les décimales sont toutes différentes de 9 et de 0.

$\delta_i = u_i - b$	$\mapsto$	$\epsilon_i = f(u_i) - f(b)$	quotient différentiel $= \frac{\epsilon_i}{\delta_i}$
$0,1$	$\mapsto$	$0,01$	$\frac{1}{10}$
$-0,1$	$\mapsto$	$-0,01$	$\frac{1}{10}$
$0,01$	$\mapsto$	$0,0001$	$\frac{1}{100}$
$-0,01$	$\mapsto$	$-0,0001$	$\frac{1}{100}$
10^{-n}	$\mapsto$	10^{-2n}	10^{-n}
-10^{-n}	$\mapsto$	-10^{-2n}	10^{-n}

La suite de quotients différentiels correspondant à des accroissements de $\pm 10^{-n}$ tend vers 0. Et pour une augmentation ou une diminution δ comprise entre $10^{-(n+1)}$ et 10^{-n}, le quotient différentiel est inférieur à

$$\frac{10^{-2n}}{10^{-(n+1)}} = 10^{n-1},$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En ces réels s'écrivant sans 9 et sans 0 derrière la virgule, la fonction f est donc dérivable, de dérivée nulle.

Et pour les autres ? Comme un réel illimité ne peut pas se terminer par une suite de 9 (resp. de 0), on sait que, quel que soit le rang N que l'on se fixe, il existe un rang n plus élevé dont la décimale correspondante est différente de 9 (resp. de 0).
Considérons alors une valeur δ_i positive (resp. négative) comprise entre $10^{-n_{i+1}}$ et 10^{-n_i}, où n_i et n_{i+1} représentent respectivement les rangs des i^{e} et $(i+1)^{\text{e}}$ décimales différentes de 9 (resp. de 0) d'un réel illimité b. On aura (pour les δ_i positifs)

$$10^{-n_{i+1}} < \delta_i < 10^{-n_i} \quad \text{et} \quad 10^{-2n_{i+1}} < \epsilon_i < 10^{-2n_i},$$

donc

$$10^{n_i - 2n_{i+1}} = \frac{10^{-2n_{i+1}}}{10^{-n_i}} < \frac{\epsilon_i}{\delta_i} < \frac{10^{-2n_i}}{10^{-n_{i+1}}} = 10^{n_{i+1}-2n_i}.$$

Si la suite (u_i) est telle que $n_{i+1} - 2n_i$ tend vers $-\infty$, alors le quotient différentiel $\frac{\epsilon_i}{\delta_i}$ tend vers 0. Mais il arrive que le réel b considéré soit tel que que $n_{i+1} - 2n_i$ ne tende pas vers $-\infty$. C'est le cas, par exemple, pour le nombre

$$c = 0,0\,9\,0\,999\,0\,9999999\,0\,99\ldots 9\,0\,9\ldots 9\,0\,9\ldots$$

où le nombre de 9 successifs dans un bloc est égal au nombre de chiffres séparant cette série de la virgule. Dans ce cas, le quotient différentiel corres-pondant à un accroissement du nombre c de $\delta = 10^{-n}$ est égal à 10^{-n} si n est égal au rang d'un 0 et supérieur à $0,9$ si n correspond à un rang précédent un 0. On peut donc construire une suite (u_i) correspondant à une suite de quotients différentiels tendant vers 0, et une autre correspondant à une suite de quotients différentiels tous supérieurs à $0,9$. La fonction f n'est donc pas dérivable à droite au point c.

On peut raisonner de la même façon pour la dérivabilité à gauche et trouver des nombres comportant un nombre infini de blocs suffisamment grands de 0 successifs et pour lesquels la fonction f n'est pas dérivable à gauche.

Par ailleurs, on peut aussi déduire que si la dérivée existe, elle est égale à 0, du fait que, pour n'importe quel illimité, le quotient différentiel est "régulièrement" égal à 10^{-n}, avec des n aussi grands que l'on veut. Cela peut sembler étonnant vu que la fonction est strictement croissante, mais rappelons-nous qu'elle est discontinue en tout point limité.

Comment peut-on interpréter les irrégularités de la fonction quant à la dérivabilité ? En quel sens les points de non dérivabilité sont-ils mal situés dans la myriade des décimaux limités ?

Considérons un nombre illimité où la fonction est dérivable. Pour fixer les idées, prenons le nombre

$$d = 0,123123123\ldots$$

Étudions le comportement du quotient différentiel $\frac{f(x_i)-f(d)}{x_i-d}$ lorsque x_i parcourt les éléments de la suite des décimaux tronqués par défaut

$$0 \qquad 0,1 \qquad 0,12 \qquad 0,123 \qquad 0,1231 \qquad \ldots$$

Cette suite est constituée de nombres où la fonction est discontinue et elle s'approche indéfiniment de d. La suite des distances de ses éléments à d est

$$0,123123\ldots \quad 0,023123\ldots \quad 0,003123\ldots \quad 0,000123\ldots \quad 0,000023\ldots \quad \ldots$$

Mais si ces distances sont de l'ordre de 10^{-n} où n est le nombre de décimales après la virgule des décimaux tronqués, on sait que la discontinuité en chacun de ces points[6] est égale à $\frac{10}{11} \cdot 10^{-2n}$. Aux points x_i de cette suite, le quotient différentiel $\frac{f(x_i)-f(d)}{x_i-d}$ fait des "sauts". Sa variation n'est pas continue. Mais on voit que la discontinuité en un point x_i décroît beaucoup plus vite que sa distance au nombre d. En fait, le rapport de la discontinuité en un point à sa distance au nombre d est de l'ordre de 10^{-n} et tend vers 0. Les "sauts" du quotient différentiel sont donc de plus en plus petits, proportionnellement à celui-ci. On peut raisonner de même pour la suite des valeurs arrondies par excès de d.

Considérons maintenant la suite des valeurs arrondies par excès pour le nombre $c = 0,0\,9\,0\,999\,0\,9999999\,0\,99\ldots 9\,0\,9\ldots 9\,0\,9\ldots$, c'est-à-dire

$$1 \quad 0,1 \quad 0,1 \quad 0,091 \quad 0,091 \quad 0,091 \quad 0,091 \quad 0,0909991 \quad 0,0909991$$

$$0,0909991 \quad 0,0909991 \quad 0,0909991 \quad 0,0909991 \quad 0,0909991 \quad 0,0909991$$

$$0,090999099999991 \quad 0,090999099999991\ldots$$

Pour alléger l'écriture, considérons la sous-suite obtenue en éliminant les répétitions de termes. Nous obtenons la suite

$$1 \qquad 0,1 \qquad 0,091 \qquad 0,0909991 \qquad 0,090999099999991\ \ldots$$

La suite des distances de ces éléments à c est

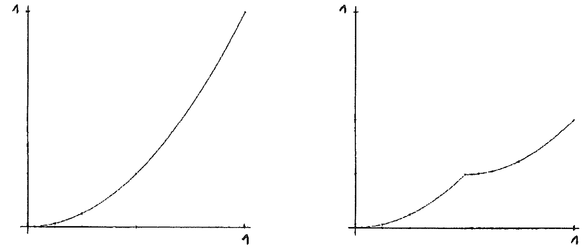
0,9 0 9 000 9 0000000 9 0 . . . 0,00 9 000 9 0000000 9 0 . . .

0,000000 9 0000000 9 0 . . . 0,000000000000000 9 0 . . . . . .

Cette fois, si n est le nombre de décimales après la virgule d'une des valeurs arrondies, la distance de celle-ci au nombre c est inférieure à $\frac{10}{11} \cdot 10^{-2n}$. Le rapport de la discontinuité en un élément de la suite à sa distance au nombre c est donc toujours supérieur à 1 ! La variation du quotient différentiel $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ lorsque x tend vers c continue donc à faire des sauts importants lorsque x passe par un élément de cette suite.

Nous avons raisonné jusqu'ici sans évoquer l'allure du graphe de f. Pourtant un tel graphe pourrait nous aider à comprendre les caractéristiques de cette fonction, au moins en ce qui concerne sa continuité à droite, sa discontinuité à gauche aux décimaux limités et sa dérivée nulle. Essayons de le construire en transformant légèrement la fonction : elle intercalera des 0 entre chaque chiffre après la virgule des nombres exprimés cette fois en base deux. Cela ne change pas beaucoup la nature de la fonction, sa continuité et sa dérivabilité, mais nous permettra de mieux distinguer les discontinuités sur le graphe.

[6] En termes d'ordre de grandeur, ces calculs restent corrects pour d'autres suites de limités tendant vers d.



a b

Fig.6

Intéressons-nous tout d'abord aux puissances de 0,1. Le schéma suivant donne leurs images.

$$\begin{array}{lcl} 0,1 & \mapsto & 0,01 = 0,1^2 \\ 0,01 & \mapsto & 0,00\,01 = 0,01^2 \\ 10^{-n} & \mapsto & 10^{-2n} \end{array}$$

Reportons déjà les points correspondant sur un graphe (Figure 6a) ; ils sont situés sur la parabole d'équation $y = x^2$.

Pour compléter le graphe, calculons les images des points 0,11, 0,101, 0,1001, . . . , sommes de 0,1 et d'une autre puissance de 0,1.

$$\begin{array}{lcl} 0,11 = 0,1 + 0,01 & \mapsto & 0,01\,01 = 0,01 + 0,01^2 \\ 0,101 = 0,1 + 0,001 & \mapsto & 0,01\,00\,01 = 0,01 + 0,001^2 \\ 0,1 + 10^{-n} & \mapsto & 0,01 + 10^{-2n} \end{array}$$

Pour les placer sur le graphe, on peut translater un morceau de parabole (Figure 6b) en la faisant démarrer au point $(0,1;\ 0,01)$. Les nouveaux points y sont inclus.

Continuons pour les sommes de 0,01 ou de 0,11 et d'une autre puissance de 0,1 (d'exposant supérieur à 3). À nouveau, nous pouvons dessiner (Figure 7a) un morceau de parabole (qui se fait de plus en plus court, de plus en plus "horizontal") à partir des points $(0,01;\ 0,00\,01)$ et $(0,11;\ 0,01\,01)$.

Ainsi, à la droite de chaque nombre limité, nous faisons démarrer, à une certaine étape du tracé, un bout de parabole dont nous remplaçons encore une partie, à une étape ultérieure, par un autre bout de parabole plus court encore (Figure 7b). Et ainsi de suite.

Cette construction suffit à nous convaincre qu'en tout décimal limité, la fonction est discontinue à gauche, dérivable à droite et de dérivée nulle.

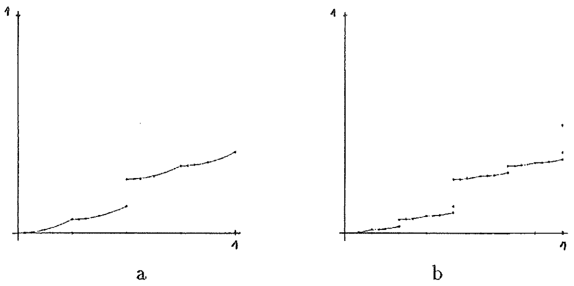


Fig.7

3 Conclusions

Lors du dialogue sur le mystérieux nombre 1 nous avons cité les principales intuitions complémentaires sur les réels et des diverses facettes de ceux-ci :

- les réels sont une écriture, une suite de chiffres éventuellement infinie avec une virgule ;
- les réels servent à mesurer des longueurs, ils peuvent être représentés par des points sur une droite ;
- les réels servent à calculer ; et il faut que les propriétés des opérations et les résultats des calculs soient en accord avec l'idée de grandeurs (mesurées) et d'opérations sur les grandeurs.

Chacune de ces intuitions peut servir de base à une définition des réels : H. G. GARNIR [4] et J. LELONG-FERRAND [8] définissent[7] les réels à partir des écritures, D. HILBERT [6] les a définis comme des segments, en se basant sur sa géométrie, et la méthode axiomatique (dont la première version est également due à HILBERT) présente les réels comme des objets de calcul – ce terme recouvrant aussi le calcul des limites.

Remarquons par ailleurs que nous aurions pu écrire "le mystérieux" nombre $0,43$, ou prendre n'importe quel décimal d'écriture finie. Ce sont (déjà) tous les décimaux limités qui nous causent problème.

Ensuite l'étude de la fonction agissant sur les écritures a montré à quel point l'intuition qui associe les réels aux points d'une droite est différente de celle représentant les réels par une suite de chiffres. Grâce à cette étude, nous nous sommes rendus compte que la "continuité" de l'ensemble $\mathbb{R}$, le fait qu'on peut le parcourir entièrement sans devoir faire de "bond", est perçue très différemment selon qu'on le représente par une droite ou qu'on le considère comme l'ensemble de toutes les écritures possibles.

Sur la droite tous les points sont pareils. On les parcourt tous mentalement sans difficulté en laissant glisser son regard. Aucun point ne demande qu'on s'y arrête plus qu'un autre.

Le parcours de l'ensemble des écritures semble plus chaotique, et le fait que celles-ci constituent une façon de faire du continu à l'aide du discret (les chiffres) est choquant. On peut

[7] Voir aussi J. DHOMBRES [3].

imaginer un compteur formé d'une infinité de roulettes portant les chiffres de 0 à 9. Pour parcourir l'ensemble $\mathbb{R}$, le compteur doit de temps en temps – et même très souvent – faire des "bonds". Plus une roulette est située à droite, plus elle tourne vite. Mais aucune n'a un mouvement continu comparable à celui de la dernière roulette d'un compteur fini. En fait, chacune de ces roulettes n'avance d'un cran que lorsque que le compteur passe à une écriture limitée (ou suivie d'une suite infinie de 0). Ainsi les limités ont un caractère particulier dans le parcours continu de l'ensemble. Mais que se passe-t-il juste avant ou juste après ? On ne peut l'imaginer. Mais cela nous ramène au parcours continu de la droite : que peut-on imaginer juste avant ou juste après un point ?

Les décimaux constituent une façon de faire du continu avec du discret, ce qui est également choquant.

Avec cette fonction agissant sur les écritures, on navigue dans un univers à structure hypermicroscopique sur lequel on essaie d'embrayer une loupe qui dégage autour de chaque nombre un voisinage où on verrait clair, où on n'aurait plus qu'un nombre fini de choses à considérer. Mais c'est impossible. L'intuition touche une limite de sa puissance : elle ne peut décoller complètement du "normal quotidien".

References

[1] E. BOREL, *Éléments de la théorie des ensembles*, Albin Michel, Paris, 1949.

[2] G. CANTOR, Sur les ensembles linéaires infinis de points (Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten), in *Mathematische Annalen* 17, 1880, pp. 355-358. Trad. franç. in *Acta Mathematica* 2, 1883, pp.357-360.

[3] J. DHOMBRES, à l'article Réels nombres, in Encyclopædia Universalis, *Dictionnaire des mathématiques, fondements, probabilités, applications*, Albin Michel, Paris, 1998.

[4] H. C. GARNIR, *Fonctions de variables réelles*, Tome I, Gauthier-Villars, Louvain, 1963.

[5] T. GILBERT, *Évolution des concepts d'infini et de continu de la pensée commune aux mathématiques*, Thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve, 1999.

[6] D. HILBERT, Les principes fondamentaux de la géométrie, trad. L. LAUGEL, in *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, III.s.-17 (1900), pp.103-209.

[7] I. LAKATOS, *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann, Paris, 1984.

[8] J. LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, PUF, Paris, 1985.

5. Conclusions

Sur la progression de la fraction-tarte au nombre.

Quels sont les principales étapes à franchir lors de l'acquisistion progressive du concept de nombre, et plus particulièrement de celui de fraction (de rationnel) en tant que nombre ?

Extraction du concept de fraction de plusieurs contextes. Si les premiers apprentissages sur les fractions passent forcément par une étape où elles apparaissent dans un contexte de partage (de tarte, par exemple), on sait que les fractions ont de multiples facettes : opérateurs, rapports, mesures, proportions, ... Ces quatre exposés proposent divers contextes où les fractions se présentent sous des visages différents. Mais au fil des exposés, le rôle du contexte évolue. Cette évolution est commentée dans la deuxième partie de ces conclusions.

Mesure avec des fractions. Dès la première situation (puzzle), les fractions servent à mesurer. Il ne s'agit pas ici de couper une unité pour obtenir par exemple des quarts, mais bien d'associer une fraction à chacun des morceaux déjà découpés. On retrouve aussi cet aspect dans le problème de croissance de population (voir : Modèles pour calculer avec des fractions), où les fractions servent à mesurer une durée.

Positionnement sur une droite et écriture décimale. Une des images les plus fécondes de l'ensemble des nombres est celle d'une droite. Le fait de positionner les fractions sur une droite est donc important pour que l'idée de fraction-morceau évolue vers celle de fraction-nombre. Cette représentation est utilisée dans les trois derniers exposés. Elle se combine avec la conversion des fractions en écriture décimale, écriture utilisée lors de l'activité sur les engrenages (voir : Rapports et proportions) et travaillée dans les deux activités du dernier exposé (Des décimaux aux nombres).

Calcul avec des fractions. Le fait de pouvoir calculer avec des fractions est un élément fondamental pour progresser vers le concept de nombre. De même que les naturels précédés d'un signe négatif, qui servent à exprimer une altitude sous la mer ou une température en dessous de zéro, n'ont pas grand chose à voir avec les nombres tant qu'on n'a pas introduit d'opération sur eux, les fractions ne peuvent acquérir le statut de nombre tant qu'elles ne sont vues que comme une "façon de parler". Ce calcul est développé dans chacun des exposés et y prend son sens dans divers contextes.

Volonté de compléter le système des nombres. Dans le troisième exposé (Modèles pour calculer avec des fractions), le problème de croissance pousse à élargir l'ensemble des nombres à celui des rationnels, pour mesurer la durée, puis – mais nous n'avons pas approfondi la question ici – à celui des réels.

La question "$0,999\ldots$ est-il égal à 1" (voir : Des décimaux aux nombres) propose un essai de construction de nouveaux nombres : ceux qui correspondraient à une écriture "plus qu'infinie", comme par exemple $0,000\ldots1$ ou $0,999\ldots5$. Essai qui s'avère infructueux, du moins si l'on veut étendre à ces nombres les régles de calcul et les propréiétés des opérations qui s'appliquent aux décimaux limités : par exemple, $0,999\ldots5 + 0,000\ldots1 = 0,999\ldots6$ et la compatibilité de l'addition avec l'ordre.

Distanciation par rapport au modèle des naturels et transfert partiel de ce modèle. Une certaine rupture avec le modèle des naturels est déjà annoncée dès l'activité sur les puzzles : $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$: avec les fractions, ça ne marche pas comme avec les nombres (naturels) ! Le troisième exposé montre, lui, comment on peut transférer les règles sur les puissances à des exposants rationnels, en concordance avec l'interprétation que l'on a donnée de ces puissances

dans le contexte du problème.

Emergence d'une structure. Progresser vers le concept de nombre, c'est aussi – et c'est peut-être une des dernières étapes – arriver à extraire des différentes interprétations des nombres une structure commune : les opérations nécessaires à leur utilisation dans une théorie, et leur propriétés. C'est un travail qui reste à faire après la mise en évidence des images mentales évoquées dans le quatrième exposé.

Sur l'évolution du rôle du contexte

Dans l'activité sur les puzzles de fractions (voir : Savants partages), les enfants restent presque d'un bout à l'autre de l'activité dans du concret. Celui-ci est plus qu'un support aux fractions et aux calculs. Pour les enfants qui découvrent les fractions par cette activité, elles n'ont un sens que dans ce contexte. Elles sont directement associées aux morceaux de puzzle. L'écriture $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ne représente pas encore une somme de nombres, mais bien un assemblage de morceaux. La remarque d'un enfant à ce propos est significative : "avec des fractions, il ne faut pas *calculer*, il faut *regarder*". Schématisons le rôle du contexte dans cette activité de la façon suivante :

CONTEXTE
(Questions, réponses, justifications)

Le problème des rectangles semblables (voir : Rapports et proportions) constitue un contexte concret pour les fractions. Cependant la plupart des questions posées porte sur des nombres, plus précisément sur des tableaux de nombres. Les élèves recherchent (par induction) une relation entre les lignes de nombres. Les justifications de ces lois se font d'une part en utilisant le langage algébrique, d'autre part par retour au contexte. Celui-ci fournit donc un moyen d'interpréter les expressions algébriques et de retrouver le sens (ou un des sens) des fractions. Voici le schéma correspondant :

CONTEXTE	→	NOMBRES (questions, recherche de lois)	→	CONTEXTE (interprétation, justification des lois)

Les problèmes d'engrenages (voir : Rapports et proportions) sont concrets. Ils se situent dans le contexte des vélos et des horloges. Cependant, leur résolution se fait en manipulant des nombres (comparaisons et produits de fractions, conversion en écriture décimale). Mais les règles qui régissent ces opérations (comparaison et produit) peuvent éventuellement être recomprises grâce au contexte. Ceci peut se schématiser comme suit :

CONTEXTE (problèmes)	→	NOMBRES (résolution)	(→	CONTEXTE) (réponses, possibilité de recomprendre les règles sur les fractions)

En outre, on évoque un autre modèle (représentation des fractions sur la droite) pour visualiser la comparaison de rapports.

Le rôle du contexte dans les situations de probabilités (voir : Modèles pour calculer avec des fractions) est à peu près similaire : la situation sert de base et d'arrivée, mais la résolution se fait au niveau des nombres. Le contexte permet-il ici de recomprendre les règles de calcul sur les fractions ? Le professeur peut-il évoquer la situation de départ pour redonner un sens à

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} ?$$

Il semble que oui : il "suffit" de faire le lien entre la réponse donnée par "l'arbre des probabilités" et celle donnée par "l'arbre des possibilités".

Et pour l'addition de fractions ? La résolution du deuxième problème de tirage montre le sens de la recherche d'un dénominateur commun dans le contexte des probabilités. Mais peut-on imaginer qu'un élève de 16 ans qui n'a pas compris la règle d'addition des fractions songe à imaginer cette expérience ? Celle-ci ne permet sans doute que de donner un sens supplémentaire à la règle d'addition des fractions pour ceux qui l'avaient déjà acquise. Quand aux autres, mieux vaut peut-être leur reparler de tarte ... Ainsi, et cela nous paraît curieux, dans un contexte où les fractions sont absolument inévitables, à savoir les probabilités, là où leur utilisation prend tout son sens, il semblerait assez difficile d'introduire (de faire découvrir pour la première fois) les opérations sur les fractions. Pour cela, les contextes où leur utilisation reste plus gratuite (comme les puzzles de fractions) semblent mieux convenir. N'empêche, il n'est jamais superflu de proposer des situations où les fractions peuvent acquérir un sens "supplémentaire".

Dans le problème de croissance (voir : Modèles pour calculer avec des fractions), le rôle du contexte se schématise à peu près de la même façon :

Contexte	→	Nombres	→	Contexte
(problème)		(découverte de nouveaux exposants, règles et justification)		(justification)

Cependant, ici les rationnels apparaissent comme une extension des naturels. De plus, la justification des règles de calcul sur les expressions avec exposants se fait d'une part de façon concrète, à l'aide du contexte, d'autre part de façon abstraite, pour conserver une structure, celle de la fonction exponentielle et de ses propriétés, déjà connues sur les naturels. D'où le nouveau schéma :

Nombres → Structure

Les deux problèmes proposés dans le quatrième exposé (Des décimaux aux nombres) se placent dans un contexte ... mathématique uniquement (et pourquoi pas ?). La première situation concerne des écritures. Devrions-nous dire qu'elle concerne des nombres ? Toute la question est là. Les nombres sont-ils des écritures ? Les écritures sont-elles des nombres ? L'objectif de cette situation est de provoquer le retour aux sens intuitifs des nombres, aux contextes dans lesquels ils apparaissent, aux différentes interprétations possibles des écritures. Et les écritures ne mènent aux nombres (du moins d'un point de vue pédagogique) qu'à travers ces interprétations. Nous avons schématisé cela de la façon suivante :

Recherche de contextes
↓
Écritures ⟶ Nombres

Dans le dernier problème (la fonction bizarre), on se situe à un niveau abstrait et on y reste, mais la particularité de la fonction étudiée provoque des "paradoxes" dans la visualisation des nombres considérés comme des écritures : même si les diverses interprétations associées aux nombres (mesures, points sur une droite, écritures, objets de calcul) ont des liens évidents entre elles, elles provoquent des intuitions parfois bien différentes.

En outre, on dira un mot de la façon dont on peut utiliser les différentes intuitions pour définir les réels :

Nombres
(Questions, réponses, justifications)

Intuitions ⟶ Structure

Atelier 3a (probas)

Contexte	→	Nombre	(→	Contexte)
(problèmes)		(résolution)		(réponses)

Idem que pour l'atelier 2b.

Atelier 3b (croissance)

Pour le reste, les points que nous avions déjà relevés se retrouvent dans plusieurs ateliers. Il me semble que chacun peut faire le relevé. On peut en reprendre certains dans un papier ou un discours commun. Je les ai repris ci-dessous en les enrichissant de réflexions de Nicolas (que j'ai un peu déformées par endroit ...). Les ** sont évoquées dans ce qui précédent.

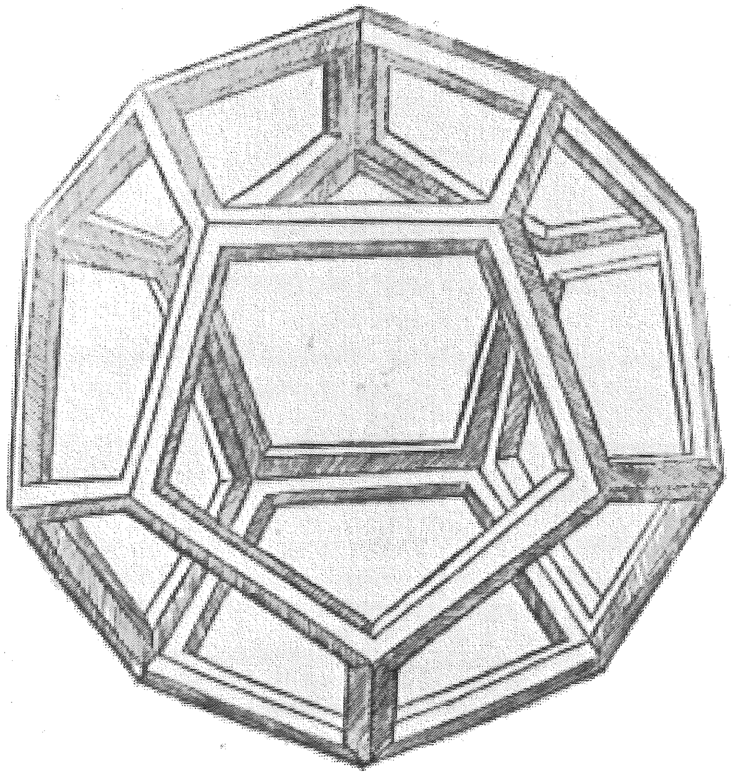
Comment faire progresser de la fraction-tarte à la fraction-nombre ?

- l'abstraction passe par l'extraction du concept de plusieurs contextes ;
- mesurer avec des fractions ; les placer sur une droite ;
- calculer avec des fractions ;
- l'écriture décimale.

Quelques principes épistémologiques (ou méthodologiques)

- **"des phénomènes aux structures" et "de la structure aux (à la recherche des) phénomènes" : des intuitions enracinées dans des contextes et qui deviennent les soutiens intuitifs de la pensée abstraite (apprendre à évoquer le bon modèle),
- "des questions aux notions",
- "des choses aux symboles" : trop souvent, dans l'enseignement, on s'installe dans les symboles trop tôt ; faire une juste part aux choses qui précèdent les nombres;
- les pattern;

- le sens étroit et le sens large : les fractions sont plus que des rationnels;
- point de vue heuristique de Lakatos : ne pas conceptualiser trop tôt. Introduire les concepts au moment où on en a besoin;
- **"l'histoire est utile", quelle histoire ? On a besoin d'une histoire personnelle;
- **il faut ancrer les nouvelles connaissances dans cette histoire personnelle.



Histoire des mathématiques : constructions géométriques

GUICHARD Jean-Paul
IREM de Poitiers (France)

Abstract

Pourquoi réinterroger l'histoire des mathématiques à propos des constructions géométriques ? Notre motivation initiale est essentiellement didactique : depuis une vingtaine d'années, les problèmes de construction ont quasi disparu du cursus de l'enseignement des mathématiques en France, mais, paradoxalement, les logiciels de constructions géométriques se multiplient et se perfectionnent. Et les nouveaux programmes incitent fortement les enseignants à utiliser ces logiciels dans leur enseignement. Mais qu'y a-t-il de commun entre la construction d'une figure géométrique simple et les fameux problèmes de construction où l'on supposait le problème résolu et où les lieux géométriques tenaient une place importante ? La première proposition du premier livre des Éléments d'Euclide n'est-elle pas la construction du triangle équilatéral ? Qu'est-ce qui peut transformer les activités de construction bien présentes dans les programmes, mais traitées comme des recettes de constructions particulières, qu'est-ce qui peut donc les transformer en réels problèmes ? Rechercher et retrouver certains de ces problèmes dans l'histoire de notre discipline devrait nous permettre de mieux cerner ce type de problème et donner sens et intérêt à cette activité géométrique.

Par rapport à cela, notre projet est modeste. Nous proposons de nous focaliser sur de grands problèmes classiques qui ont marqué l'histoire. Pour chacun, nous avons proposé aux participants à l'atelier un certain nombre de textes historiques : l'objectif était de les transformer en textes de problèmes pour nos élèves de collège et de lycée. Nous donnerons donc en illustration un certain nombre de ces textes et de leurs transpositions.

1 Un regard historique

Qui dit constructions géométriques, dit nécessairement utilisation d'instruments pour réaliser une figure géométrique astreinte à un certain nombre de conditions. Un de ses intérêts, qui en fait aussi une difficulté que l'on rencontre effectivement en enseignant, est l'articulation d'un aspect pratique et d'un aspect théorique. Ces aspects se fécondent mutuellement. Ainsi, dans son livre *Constructions géométriques nécessaires à l'artisan*, le mathématicien arabe Aboul-Wafa (940-998) écrit : "Beaucoup d'artisans ont besoin de ces problèmes mais toutes les méthodes utilisées par eux ne se fondent sur aucun principe et sont de ce fait peu sûres et extrêmement inexactes."

Artisans, mais aussi arpenteurs, bâtisseurs, architectes, peintres, ingénieurs ... ont eu et ont toujours besoin de résoudre des problèmes de construction. Parmi ces problèmes, certains ont été des défis tels, pour les mathématiciens, qu'ils ont traversé l'histoire de notre discipline et ont suscité la création de nouveaux concepts, de nouveaux outils, de nouveaux domaines des mathématiques. Dans son livre *Introduction à l'Art analytique* (1591), le mathématicien François Viète en témoigne : "L'analyste résout artificieusement les problèmes les plus fameux appelés jusqu'à présent irrationnels, tels que le problème mésographique (construction de deux moyennes proportionnelles, en lien avec la duplication du cube), celui de la section d'un angle en trois parties égales, l'invention du côté de l'heptagone et tous les autres qui tombent dans ces formules d'équations. . . "

Dans ce vaste domaine des constructions géométriques, nous proposons une classification en lien avec les grands types de construction qui ont marqué les mathématiques au travers de leur histoire.

Les grands types de problèmes	Les objets	Problèmes célèbres
Figures	polygones réguliers	polygones constructibles à la règle et au compas (le cas de l'heptagone cf. Viète)
Figures inscrites et circonscrites	cercles	problème des 3 cercles d'Apollonius (cf. Viète, Descartes,. . .)
Sections	angles	la trisection de l'angle (cf. l'héritage grec, Viète, Descartes,. . .)
Quadratures	carré d'aire égale à celle d'une figure donnée	la quadrature du cercle, la quadrature de la parabole et de la spirale (Archimède), la quadrature de la roulette (Pascal)
Autour des quadratures:		
dimension 3	Cube de volume égal à un volume donné	duplication du cube (problème de Délos)
dimension 2	figure d'aires égales, puzzles, découpages	
dimension 1	rectification des courbes. . .	

Les problèmes de constructions, par le fait même qu'il s'agit de **construire** effectivement une figure, amènent à se poser deux questions importantes.

1. Quel est le rôle des instruments ?

On sait l'importance des conditions imposées à la construction, et qui en changent complètement la nature. Par exemple le tracé de la parallèle à une droite passant par un point donné ne

fera pas intervenir les mêmes propriétés mathématiques s'il s'agit d'une construction à la règle et au compas, ou à l'équerre, ou au trace parallèle. . . Les contraintes instrumentales sont donc à préciser impérativement : il y a celles des instruments classiques (règle non graduée, compas, équerre, règle graduée, rapporteur), mais ce peut être des appareils, des systèmes articulés comme les trisecteurs. On peut également construire par pliages (trisection [1], pentagone ou nœud doré. . .). D'où vient le privilège que nous accordons à la règle et au compas ? Dans *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*, Ellipses, 1993 page109, Rudolf Bkouche écrit : "Ces deux outils auraient-ils seuls le privilège de construire des figures géométriques ? N'est-ce pas plutôt que leur caractère très simple et rudimentaire constituerait justement une garantie de ne pas confondre figure tracée et figure étudiée de façon théorique ? D'ailleurs, quoi de plus "mécanique" et bricolé que le tracé au compas, et peut-on dire que le mouvement et le temps n'interviennent pas dans une telle construction ?"

2. La construction effectuée est-elle exacte ou approchée ?

Ne nous méprenons pas sur ce que veut dire approchée en mathématiques : approchée ne veut pas dire approximative, mais traduit le fait que la construction faite ne donne pas exactement la figure attendue mais l'approche avec une précision que l'on peut donner. Ainsi en est-il de la célèbre construction du pentagone de Dürer (cf. II, ci-après), ou de la trisection approchée d'Ocagne [1], faites à la règle et au compas, alors que la trisection de l'angle ou la construction du pentagone par pliage, déjà citées, sont des constructions exactes, bien que n'interviennent ni règle, ni compas.

L'intérêt des problèmes de construction est qu'ils nous placent au cœur de la démarche mathématique :

Analyse du problème	Trouver la construction	Chercher
Construire la figure	Produire la figure attendue	Agir
Valider la construction	Justifier que l'on a résolu le problème	Démontrer

En particulier ils permettent de retrouver une des fonctions originelles de la démonstration et donc de donner du sens à l'activité de démonstration. L'histoire des mathématiques est à ce propos une source importante de problèmes et d'exercices qui peuvent redonner du sens aux mathématiques, et les réinscrire dans l'aventure humaine.

2 Des documents historiques

Voici la liste des documents historiques proposés avec des indications sur une utilisation possible en classe (les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie) :

Types de problèmes	Documents historiques	Documents à visée pédagogique
Figures : polygones réguliers	1. Dürer : pentagones, 7gone, 10gone	Étoile de Noël (devoir maison 6ème)
Figures inscrites et circonscrites : cercles	2. Euclide prop.3 livre IV (trad. Vitrac) 3. Aboul Wafa : triangle équilatéral Descartes à Elisabeth 4-5-6. Ex-voto japonais (1803, 1913, 1788)	Activité 4ème [10]. Exercice 4ème [12] Exercice 3ème [9] Le problème des trois cercles [8] [6] [11]
Sections : la trisection	7. Descartes (La Géométrie pp. 396-397) 8. Trisecteur de Bergery 9. Systèmes articulés : Pascal et Céva	Parabole et cercle [1] Rallye Poitou-Charentes (3ème-2nde) [1]
Quadratures	10. Marolois (1617) 11. Sulbasutras indiens (8°- 4° s. av. J-C) 12. Aboul Wafa : les 3 carrés	Exercice 3ème [7] [5] Exercice 3ème [9]

Une illustration en classe de sixième (à partir du document 1, ci-après):

6°5 Devoir sur feuille *à faire pour le jeudi 19 décembre 1996.*

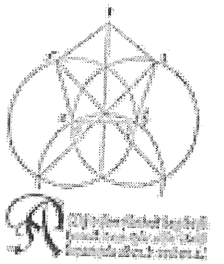
L'étoile de Noël ☆

Pour la construire on va se servir de la construction du pentagone de Dürer qui est expliquée sur la figure ci-contre.

1) Observe bien cette figure pour comprendre comment est construit le pentagone de sommets 1,2,3,4,5. Ce pentagone a tous ses côtés de la même longueur.

2) Prends une feuille blanche, et fais avec soin, au crayon, la construction de Dürer en partant d'un segment [ab] de longueur 6 cm.

3) Trace en couleur les 5 diagonales du pentagone, et **colorie l'étoile**.
Une diagonale est un segment qui rejoint deux sommets qui ne se suivent pas; par exemple le segment qui rejoint le sommet 1 au sommet 3 est l'une des diagonales du pentagone.



4) Sur ta feuille de copie, réponds aux trois questions suivantes.
a) Qui était Dürer ? Quand et où a-t-il vécu ?
b) Pourquoi le troisième cercle que l'on trace passe-t-il par les points a et b ?
c) Quelle est la forme de l'intérieur de l'étoile ? Quelles idées cela te donne-t-il ?

Aide pour le 2
1) Pour commencer on trace un segment [ab] de 6 cm. Ce segment donne :
- deux sommets du pentagone (3 et 4) et les centres des 2 premiers cercles à tracer
- le rayon de tous les cercles à tracer (on ne touche pas à l'ouverture du compas).

2) Observe où se trouve le centre du troisième cercle (celui qui passe par les points a et b).

3) On trace l'axe de symétrie de la figure, puis les 2 autres droites qui vont donner les sommets 2 et 5 (observe bien les 2 points de la figure par où passe chacune de ces droites).

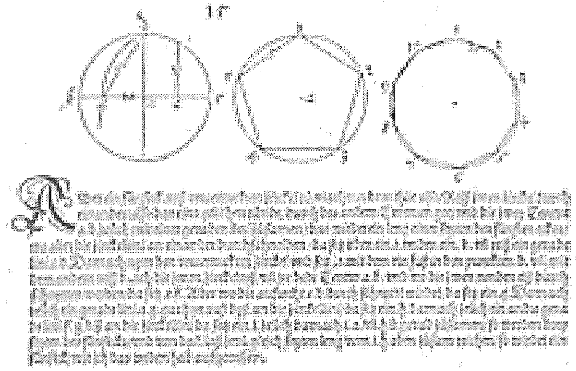
4) Pour construire le sommet 1, on sait qu'il est à 6 cm des sommets 2 et 5. On utilise donc le compas qui a toujours son ouverture de 6 cm. Si le dessin est très bien fait, les 2 derniers cercles que tu viens de tracer se coupent sur l'axe de symétrie de la figure.

Remarque : *si tu as du temps libre tu peux aller au CDI et faire facilement cette étoile sur ordinateur en utilisant* ***l'Atelier de Géométrie****.*

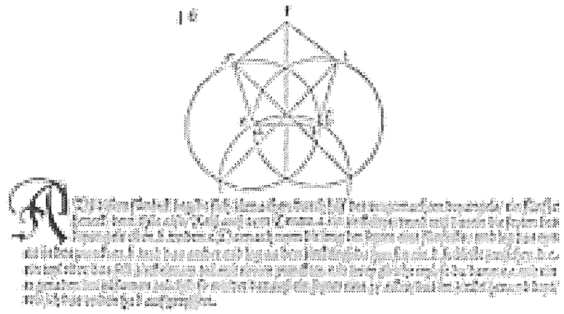
3 Documents exploités

Document n°1 : Albrecht DÜRER (1471-1528). Constructions de polygones. [Document IREM de Caen]
Figure 15 : pentagone, décagone, heptagone (à la règle et au compas).
Figure 16 : pentagone (à la règle et au compas à rayon constant).

15

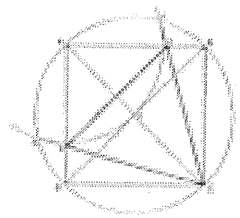


16



Document n°3 : ABOUL WAFA (940-998). Triangle équilatéral inscrit dans un carré. [9]

Dans son livre sur "Les constructions géométriques nécessaires à l'artisan", le mathématicien arabe Aboul Wafa donne de nombreuses constructions géométriques utilisant la règle et le compas. Il s'intéresse aux polygones inscrits les uns dans les autres et donne cinq méthodes pour tracer un triangle équilatéral inscrit dans un carré.

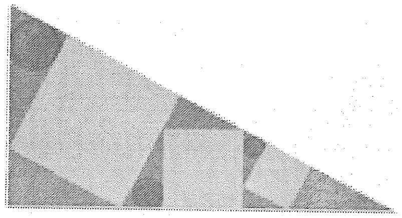


Voici une des méthodes d'Aboul Wafa :

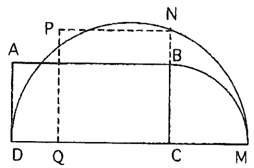
Soit $ABCD$ le carré. On trace le cercle circonscrit au carré, de centre O. Puis le cercle de centre A passant par O, qui coupe le cercle circonscrit en F et G. (CF) coupe (AB) en E. (CG) coupe (AD) en S.

CES est un triangle équilatéral répondant à la question.

Document n°5 : Sangaku (ex-voto) japonais (1913). Triangle, carrés et cercles tangents. [6] [12]



Document n°10 : MAROLOIS (1617). Quadrature d'un rectangle ABCD. [7]

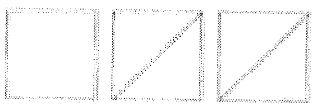


Document n°12 : ABOUL WAFA (940-998). Carré d'aire triple de celle d'un carré. [9]

Dans son livre sur "Les constructions géométriques nécessaires à l'artisan" le mathématicien arabe Aboul Wafa traite de nombreux problèmes sur la division de carrés en somme de plusieurs carrés.

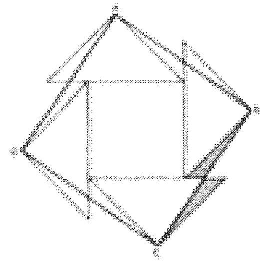
Dans son traité, il résout le problème ci-dessous.

On dispose de trois carrés identiques à découper pour fabriquer avec les morceaux un unique nouveau carré.



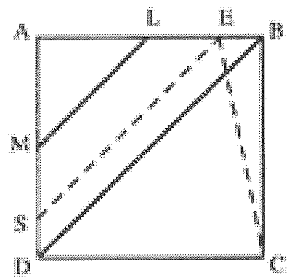
Voici la méthode de Aboul Wafa.

Il découpe deux des carrés suivant une diagonale et les accole au carré restant comme sur la figure. Evidemment ça colle mal mais ce n'est pas grave : $ABCD$ est un carré et ce qui en dépasse correspond à ce qui manque. Son aire est donc triple de celle des carrés de départ. En découpant un petit triangle dans chaque demi carré, on a donc résolu le problème.



4 Transpositions proposées par les participants

Proposition 1. (à partir du document 3 : Aboul Wafa)



Soit ABC un carré, L et M les milieux de AB et AD.

On pose $AB = a$

1. Montrer que $\frac{LM}{LC} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1 < \sqrt{2} = \frac{BD}{DC}$.

Soit E entre L et B, S entre M et D, avec $LE = MS$.

On pose $EB = x$.

2. Montrer que quand E varie de L à B, le rapport $\frac{ES}{EC}$ augmente continûment, passant de la valeur $\sqrt{\frac{2}{3}}$ à la valeur $\sqrt{2}$.

3. Montrer que $\frac{ES}{EC} = \frac{(a-x)\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

4. Montrer que $\frac{ES}{EC} = 1$ si $EB = (2 - \sqrt{3})AB$.

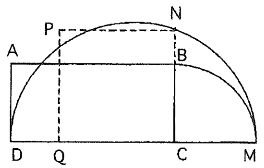
Proposition 2. (à partir du document 10 : Marolois)

Niveau $3^{\text{ème}}$-2^{nde}

1. Soit un rectangle $DCNR$ de côtés b et x $\quad DC = 6, CN = x$.
   Soit Q le point de $[DC]$ tel que $QC = x$ et on complète le carré $QCNP$.
   On trace la diagonale CR), on appelle S le point d'intersection de $[RC]$ et $[PQ]$.
   On trace la parallèle à (DC) passant par S qui coupe $[RD]$ en A et $[CN]$ en B. On pose $CB = a$.
   a) Montrer que l'aire de $PNBS$ est égale à l'aire de $DQSA$, en déduire que $x^2 = ab$.
   b) Soit M le point (DC), extérieur à $[DC]$ tel que $CM = a$.
   Montrer que le triangle DNM est rectangle en N.

2. La figure ci-contre est due à Marolois (1617). De quoi s'agit-il ?

3. Utiliser ce qui précède pour construire à la règle et au compas $\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3}$.

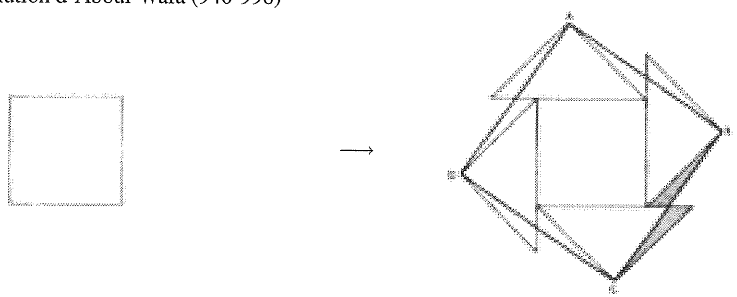


Proposition 3. (à partir du document n°5)

1. Niveau 2^{nde} : Problème ouvert
   On donne la figure terminée, en précisant que ABC est un triangle rectangle en A.
   Trouver une construction à la règle non graduée et au compas des carrés et inscrits dans le grand triangle.
   [C'est l'occasion d'introduire la construction d'un carré inscrit dans un triangle à l'aide d'une homothétie.]
   Question supplémentaire pour ceux qui ont terminé avant les autres : quels rapports existe-t-il entre les côtés des carrés et les rayons des cercles ?
2. Adaptation en $3^{\text{ème}}$: Idem avec agrandissement-réduction.
3. École élémentaire : Puzzle. On donne dix carrés et dix cercles. Choisir les bons carrés et les bons cercles pour reproduire le dessin donné.
4. Collège $6^{\text{ème}}$: On donne la figure terminée (sans les cercles) et le premier petit triangle rectangle, seul. Reproduire la figure donnée.

Proposition 4. (à du problème 12. Construire un carré dont l'aire soit triple d'un carré donné.

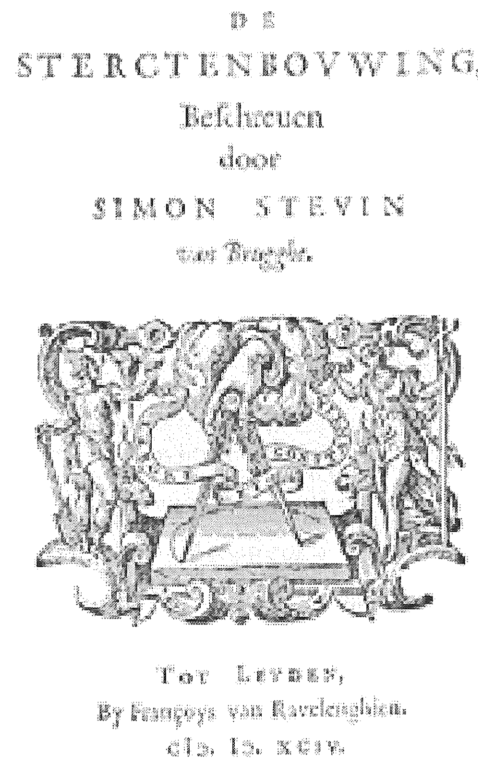
Solution d'Aboul-Wafa (940-998)



1. Quelle est la méthode d'Aboul Wafa ?
2. La construction est-elle exacte ou approchée ? (Justifier)

Bibliographie

[1] AYMES J. Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle). Brochure APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) n° 70. 1988.
[2] CARREGA J.-C. Théorie des corps. La règle et le compas. Hermann, 1981.
[3] KLEIN Félix. Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire. Vuibert, 1931. (Réédition disponible à l'IREM de Paris Sud. En anglais : Elementary mathematics from an advanced standpoint, Dover. En allemand : Elementarmathematik von höheren Standpunkt aus, Springer Verlag, 1968).
[4] BOYÉ A. L'Apollonius Gallus et le problème des trois cercles... Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1998. Disponible à l'IREM des Pays de Loire.
[5] Repères-IREM n° 40, juillet 2000. Spécial constructions géométriques. Topiques éditions, Metz.
[6] Géométrie au Bac. Tangente, Hors série n° 8. Éditions Archimède.
[7] Le calcul littéral au collège, IREM de Poitiers, 1999.
[8] Le logiciel de calcul formel au collège et au lycée, IREM de Poitiers, 1998.
[9] Histoire des mathématiques pour les collèges, Cédic, 1980.
[10] De la figure vers la démonstration, IREM de Rouen, et dans Petit x n° 27 (1990-1991), IREM de Grenoble.
[11] Pour la Science n° 249 juillet 1998, Belin.
[12] Décimale, Maths 4^{e}, Belin, 1998 (exercice n° 42, p. 174).


DE
STERCTENBOVWING,
Beschreuen
door
SIMON STEVIN
van Brugghe.

Tot Leyden,
By Françoys van Raphelenghien.
CIϽ. IϽ. XCIV.

Page de titre du traité des fortifications de Stevin

Les Géomètres-Fortificateurs (XVII$^{\text{ème}}$ siècle)

GUYOT Patrick,
METIN Frédéric
IREM de Dijon (France)

Abstract

Les progrès de l'artillerie au XVI$^{\text{ème}}$ ont amené les architectes à repenser le mode de défense des villes. Les bastions apparaissent en Italie puis en France. Au grè des guerres, les frontières se dotent de citadelles et de forteresse, dont la construction est confiée à des ingénieurs, comme ERRARD, ou plus tard Vauban. Deux grandes écoles : l'hollandaise (MAROLOIS, STEVIN) et la française (ERRARD, PAGAN, De Ville), dont les différences tiennent surtout aux angles des bastions et des courtines. Les traités du XVII$^{\text{ème}}$ siècle sont un éloge au tracé des polygones, à la symétrie. L'apprentissage de la fortification devient une obligation et l'on doit montrer ses aptitudes au maniement de la règle et du compas. Prétexte pour les géomètres ? Ce n'est pas sûr, mais on y voit encore un affrontement entre les théoriciens esthètes et les ingénieurs proches du terrain.

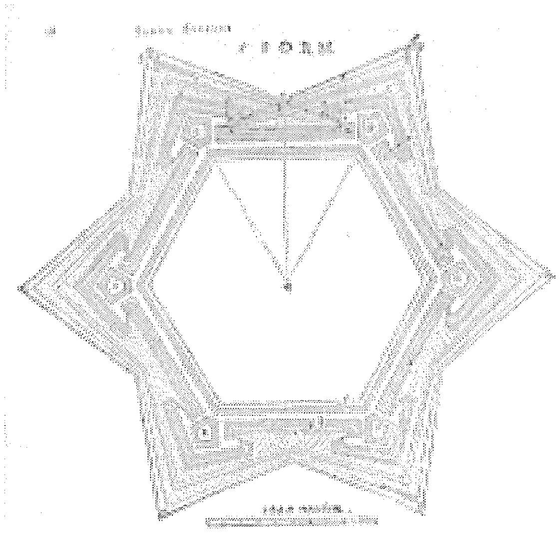
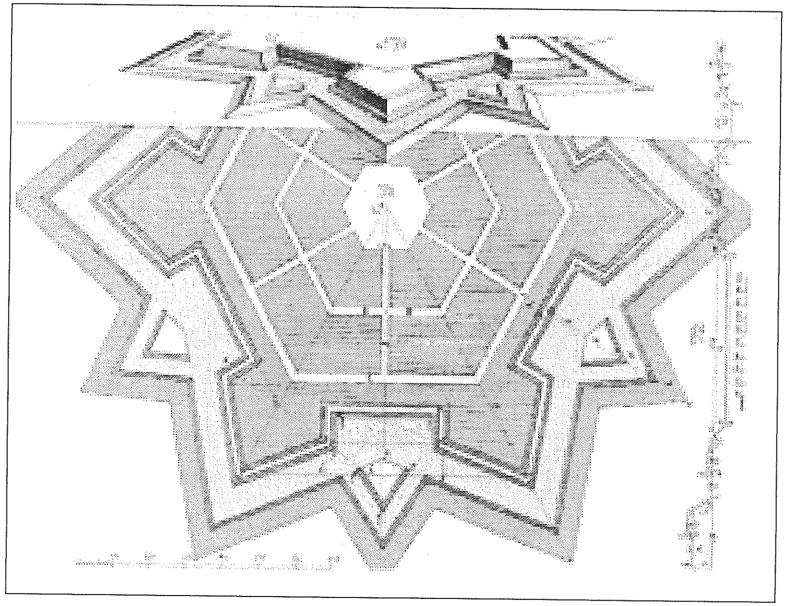


Illustration tirée du De sterkte Bouwing de Stevin

[. . .] mais encore à vous forcer vous-mesme, de prendre la regle & le compas, pour trauailler de la main, & faire sur le papier, ce que vous voyez dans le Liure, non pas en courant, d'vne figure à vne autre, sans aucune suite ny reflexion; mais en commençant par la premiere, la possedant bien, & la pratiquant encore mieux, auant que de passer à la seconde, & de la seconde à la troisiéme. Car allant ainsi de l'une à l'autre, vous auancerez notablement, & vous vous rendrez plus capable de iour en iour.

Silvère de Bitainvieu, *L'Art universel des Fortifications. . .*, seconde édition, Paris, 1667.

Ne vous étonnez pas d'un travail sur les fortificateurs du XVIIème siècle. Nous pourrions vous expliquer pendant des pages les raisons de notre intérêt pour ce sujet, mais l'extrait du livre de Silvère de Bitainvieu (pseudonyme de Jean Du Breuil, jésuite[1]) montrera un exemple de programme éducatif que l'on pouvait trouver dans les manuels de cette époque. Et si vous ne croyez pas que cela puisse vraiment concerner la géométrie, jetez un coup d'œil sur l'illustration suivante (tirée de *Fortification ou Architecture militaire, tant offensive que defensive; Suputée et dessignée par* Samuel MAROLOIS, La Haye, 1615).



[1]A vous de trouver comment on passe de "iean du breuil iesuite" à "siluere de bitainuieu" (indication pour les lecteurs fatigués : il s'agit d'un simple anagramme).

Les ouvrages traitant de fortification au XVIIème siècle ne sont pas tous de même nature. Entre ERRARD de Bar-le Duc, Ingénieur du Roi, qui publie en 1600 le premier traité proprement mathématique[2], du moins en France, et Silvère de Bitainvieu (cité plus haut), il y a un fossé : le premier est ingénieur, a déjà fait la guerre (le siège de Sedan par exemple) et construit ou modernisé des forteresses (Amiens, Doullens,. . .); le second est jésuite, et comme la fortification est inscrite au programme des collèges jésuites, son but est de *[contribuer] quelque chose à rendre capable [la Noblesse] de mieux servir le Roy*. Il écrit aux jeunes Nobles : *Quand l'exercice vous aura fait Sçavant en l'Art de fortifier, vous serez estimé des Souverains, & de l'Estat; & dans les differens qui peuvent arriver, on vous fera le juge de ceux qui s'en meslent.* Silvère avoue aussi que son souci est de permettre la bonne tenue dans la conversation et d'éviter le ridicule ! La guerre était présente partout, même dans les salons. Cela n'empêchera pas les livres d'ERRARD et de Bitainvieu d'être également reconnus, bien après Vauban.

On retrouve donc la querelle entre théoriciens et praticiens, bien présente en ce "siècle des soldats" qui n'aura connu que deux ans de paix totale en Europe[3]. On peut lire dans beaucoup de préfaces de l'époque les attaques des gens de terrain contre les gens de salon, par exemple chez Blaise François Pagan :

> Si la science des Fortifications estoit purement Geometrique, ses Regles en seroient parfaitement demonstrées : mais comme elle a pour obiect la Matiere, & pour principal fondement l'experience, ses plus essentielles maximes ne dependent que de la coniecture[4]

ou Jean Brioys qui prétend

> [banir] tout ce que la speculative peut produire & toutes les Idées intellectuelles d'une justesse imaginaire qu'on trouve par la theorie, car il n'est pas necessaire de se tourmenter l'esprit a la recherche d'une infinité de principes, de définitions, d'axiomes, de problèmes & de Théorèmes mais il suffit seulement de sçauoir descrire un cercle & une ligne droite[5].

À l'opposé, le Chevalier de Saint-Julien écrira en 1710, à propos du mineur :

> La premiere de ses qualitez est d'être excellent en geometrie afin de sçavoir les talus, les hauteurs, largeurs & épaisseurs des terres ou murs qu'il doit mesurer. C'est ici ou l'on auroit sujet de faire une bonne leçon à quantitez de mineurs, d'ingenieurs & d'oficiers d'Artillerie qui bien loing de sçavoir les principes de la geometrie couvrent leur ignorance en la traitant avec mepris, & publiant qu'elle n'est point du tout necessaire; quoi qu'à dire le vrai, ce ne puisse être qu'à des gens faits comme eux qu'ils osent débiter ces maximes[6].

[2]*La fortification réduicte en art et démonstrée par Jean* ERRARD *de Bar-le-Duc, Ingénieur du très chrestien Roy de France et de Navarre*, Paris, 1600.

[3]Voir la préface d'André Corvisier à l'ouvrage collectif *Guerre et Paix dans l'Europe du XVIIème siècle*, 1995, et le n° spécial de *XVIIème siècle*, "présence de la guerre en Europe", 1993.

[4]*Les Fortifications de Monsieur le Comte de Pagan.,. . .* , 3ème édition, Paris, Cardin Besongne, 1669. Préface p. ii.

[5]*Nouvelle manière de fortifications, composée pour la noblesse françoise. . . , par Jean Brioys, Ingénieur & Géographe ordinaire du Roy*, Paris, Gervais Clouzier, 1624.

[6]*La forge de Vulcain ou l'appareil des machines de guerre*, etc. Par le Chevalier de Saint Julien. A la Haye, chez Guillaume Devoys, Marchand Libraire dans le Pooten, à l'Enseigne de Grotius. M. DCC. X.

On s'amusera à comparer cette mentalité à celle de personnalités actuelles, qui, critiquant la tyrannie supposée des Mathématiques, n'osent débiter ces maximes qu'à des gens faits comme eux... Mais le "terrain" pourra à son tour envahir les "salons" : Rohault constate, à propos des techniques de construction de forteresses :

> Toutes ces trois Manières *[la française, la hollandaise et la composée]* ont été executées en France, où elles sont devenües si fameuses qu'on ne peut pas se dispenser d'en parler sans passer pour un ignorant[7].

C'est dire si l'on devait parler d'angles flanqués et flanquants, discuter les mérites de la "fortification à la hollandoise" ou "à la françoise" ! Nous ne résistons pas au plaisir de vous livrer une réflexion de Raimondo Montecuccoli, maréchal italien guerroyant pour les Habsbourg, à propos de certaines discussion sur l'angle à donner aux bastions :

> Le monde curieux de nouveauté, fait dans les Arts comme dans les habits : il se divertit des modes, & quand l'invention des nouvelles est épuisée, il reproduit les vieilles. C'est ainsi que certains Philosophes de ce temps ont fait sortir du tombeau les opinions oubliées des atomes & du mouvement de la terre [...].

Quelle sagacité, n'est-ce pas ?

Mais en fin de compte, les uns et les autres sont assez peu convaincants dans l'exposé de leurs justifications : les diverses écoles se reconnaissent en particulier par la valeur qu'elles donnent à l'angle flanqué (angle de la pointe du bastion) ou son mode de calcul suivant le nombre de côtés du polygone à fortifier, par la longueur des courtines (murs d'enceinte entre deux bastions), mais les arguments donnés ne sont pas très solides. Il s'agit bien sûr de répondre à la puissance de tir de l'adversaire avec un nombre inférieur d'hommes, mais les aspects scientifiques du problème s'effacent souvent devant les aspects pragmatiques, car la fortification doit suivre sans cesse les progrès de l'artillerie.[8]

Résumé historique : l'attaque et la défense

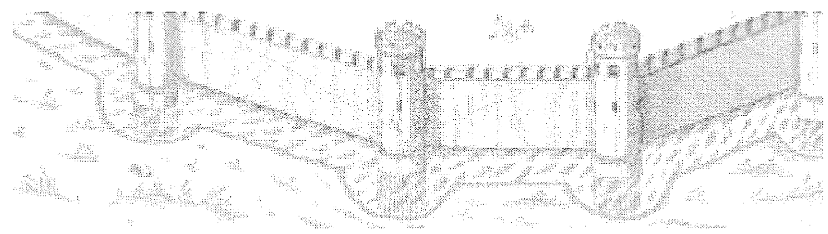
Une bonne synthèse de l'évolution simultanée des théories et pratiques de l'artillerie et de l'architecture mlilitaire se trouve au premier chapitre du livre de Geoffrey Parker, *La Révolution militaire : la guerre et l'essor de l'Occident, 1500-1800* (traduit de l'anglais par Jean Joba, Gallimard, Bibliothèque des Histoires, 1993.) Mais les fortificateurs du XVII$^{\text{ème}}$ eux-mêmes furent historiens, et ne limitent pas leur récit aux années 1500... On trouve au début de nombreux ouvrages théoriques un petit résumé que nous pouvons à notre tour résumer :

Aux temps bibliques (et l'Ancien Testament regorge de récits de guerres et de sièges) et dans l'antiquité romaine, les murailles devaient être élevées aussi haut que possible : les machines

[7] *Œuvres posthumes de Mr Rohault*, Paris, Guillaume Desprez, 1682.

[8] C'est d'ailleurs un des sujets de notre recherche : peut-on caractériser les fortificateurs par leur souci d'épargner des vies (et les artilleurs par celui de créer un maximum de dégâts) ? C'est une tentation d'autant plus forte que l'on peut déceler dans les écrits des fortificateurs des références aux mythes bibliques et aux auteurs stoïciens, et que par ailleurs on remarque une sur-représentation des adeptes de la réforme dans les rangs des Ingénieurs militaires (voir ANNE BLANCHARD, *Les Ingénieurs du Roy de Louis XIV à Louis XVI*, Montpellier, 1979).

de jet n'étant pas fiables du tout, on privilégiait l'assaut à la destruction par projectiles.[9] Cette situation se retrouve au Moyen-Age, tel qu'il a été revu par tous les bons films des années 50 (et donc dans notre imagination), il paraît seulement que la poix brûlante versée depuis les machicoulis, c'est de la blague ! D'autre part, les batailles rangées sont de vrais massacres, l'esprit de chevalerie reste fort et entraîne la conservation du corps à corps, de la lutte face à face et non à distance. C'est à cet état d'esprit qu'on attribue en partie la défaite de Crécy (1346), où les archers anglais brisèrent la charge de la cavalerie française à distance : c'était peu noble, mais tellement efficace ! Songez alors à ce que fut la "révolution de la poudre" : on allait pouvoir tuer à distance à l'aide d'instruments qui se perfectionneraient au fil des siècles; mais au fond, ce fut quand même assez lent, et plus encore pour l'artillerie. Les premières bouches à feu étaient rudimentaires, ne projetaient que des boulets de pierre qui se désagrégaient à l'arrivée, et avec une précision ridicule. Des progrès décisifs furent accomplis par les frères Jean et Gaspard Bureau, artilleurs de Charles VII et vainqueurs de la bataille de Castillon : ils avaient mis au point des procédés de fonte des canons et de boulets de fer qui en rendaient la précision bien meilleure. A la fin du XV$^{\text{ème}}$ siècle, l'invasion de l'Italie du Nord par Charles VIII marqua le début d'une guerre nouvelle : les beaux remparts italiens offraient des cibles de choix à une artillerie d'une efficacité jamais égalée. La "crise du boulet métallique" battait son plein. En réponse à cette nouvelle façon de voir les sièges, les savants et architectes italiens inventèrent (peut-être) la fortification bastionnée, que l'on appelle parfois "trace italienne", et les séjours d'ingénieurs italiens dans toute l'Europe au XVI$^{\text{ème}}$ siècle eurent vite fait de répandre cette nouveauté. Le tracé du bastion est fondé sur des considérations de lignes de tir et d'angles "morts", ce qui existait déjà avant les canons, mais d'une manière bien moins dramatique. L'idée du flanquement n'est en effet pas nouvelle : depuis longtemps, on a compris qu'il fallait des ouvrages avancés pour défendre la muraille de tout contact destructeur (on prenait donc l'ennemi par l'arrière). Mais le profil de ces ouvrages avancés a suivi l'évolution des armes de tir : au départ destinés à prendre à revers les soldats téméraires, ils deviennent des obstacles au tir en ligne droite contre le mur d'enceinte. La forme polygonale est bien expliquée par Fritach[10] en 1635, par la considération de la zone inaccessible au tir des défenseurs, située devant l'ouvrage avancé de forme ronde :



[9] On se reportera au premier livre d'architecture de Vitruve, chapitre 8, par exemple dans la traduction qu'en donne Fleury aux *Belles Lettres*. Le commentaire de Fleury montre que les archéologues sont d'accord pour voir dans les principes de Vitruve ceux qui étaient à l'œuvre dans à peu près tout le monde antique (occidental). On pourra aussi consulter les œuvres de Végèce, mais c'est moins accessible... (trad Christine de Pisan, 1488).

[10] ADAM FREYTAG, *L'Architecture militaire, ou la Fortification nouvelle...*, Leide, les Elzeviers, 1635.

La période qui nous intéresse a été taxée de "révolution mathématique" : STEVIN le premier[11], en 1594, a le souci de justifier ses constructions par les théorèmes ordinaires de la géométrie plane, de calculer les longueurs des courtines et les angles des bastions; il fait œuvre de géomètre, mais son tracé n'aura pas de postérité (les Pays-Bas préfèreront MAROLOIS). En France, le premier homme de terrain vraiment géomètre est Jean ERRARD.

Jean ERRARD (dit "Errard de Bar-le Duc"[12])

Né en 1554, le premier grand Ingénieur des Fortifications devait avoir reçu une solide formation en Mathématiques (à Nancy ?), puisqu'il publia, outre son ouvrage de fortifications, un *livre des instruments mathématiques mécaniques* (1584) constitué de dessins de machines, une *géométrie et practique générale d'icelle* (1594) qu'Henrion trouvera suffisamment digne d'intérêt pour la republier avec ses commentaires en 1630, et une édition des *Éléments* d'Euclide en 1629 (mais ERRARD est mort en 1610, la même année que son roi Henri IV.) Protestant, il fut un intime du Roi et de Sully, qui lui confièrent d'importantes missions en Picardie (contruction des citadelles d'Amiens et Doullens en particulier)[13]. Ces deux forteresses, qui ont été conservées (quoique celle d'Amiens soit à l'abandon) nous permettent de retrouver les caractéristiques de la fortification d'ERRARD : l'angle de l'épaule est droit, l'angle flanqué toujours aigu, les longueurs des lignes sont strictement encadrées, selon la portée des armes à feu.

L'influence d'ERRARD sera grande, car il invente (en France) une nouvelle façon de penser l'art du fortificateur, inséparable de tout aspect pratique mais préoccupé en permanence de la justification mathématique euclidienne de ses choix. On l'appellera "Barleduc" en Hollande, comme on peut le lire dans l'ouvrage de Fritach déjà cité. Pourtant, cette influence sera, en ce qui concerne l'aspect technique, de courte durée : l'évolution de la guerre de siège et du sens critique des officiers mettra en évidence les défauts des polygones fortifiés à la manière d'ERRARD. Justement ! Laissons-lui la parole (écrite...)

[11]Ou comme jamais personne auparavant selon Corvisier (op. cit. page précédente).

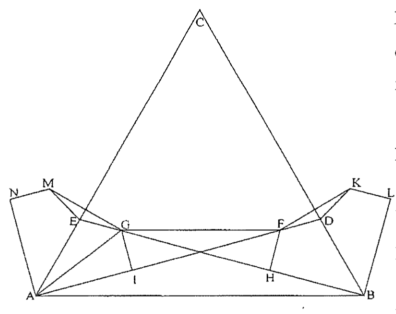
[12]Comme Jean ERRARD était originaire de Bar-le Duc, on ne peut que se féliciter de la pertinence de ce surnom.

[13]On pourra se reporter à l'excellent article de D. BUISSERET, *Les ingénieurs du Roi au temps de Henri IV*, Bulletin de la section de géographie, M.E.N., Comité des travaux historiques et scientifiques, t. 77, Paris, 1964.

DE LA CONSTRVCTION DE L'HEXAGONE

CHAPITRE II.

Soit proposé à fortifier un Hexagone, d'autant que l'Hexagone se diuise en six triangles équilateraux. Soit sur AB descrit le triangle équilateral ABC, puis soit faict l'angle CAD de quarante-cinq degrez : Soit faicte la ligne AE égale à la ligne BD, en après soit tirée BE. Soit diuisé l'Angle EAD en deux également par la ligne AG, & soit prise DF égale à EG, & tirée la Courtine GF : comme aussi FH perpendiculaire sur la ligne BE. Soit prise AI égale à BH, & soit tirée la ligne GI perpendiculairement comme FH. Ainsi seront descrits les deux demy Bastions AIG, & FHB.



Et pour plus facile intelligence, i'ay tracé à la figure les deux Bastions entiers $MNAIG$, & $FHBLK$, afin de faire cognoistre la gorge du Bastion MG, & FK.

Et d'autant que la ligne du flanc GI, ou FH, doit pour le moins auoir seize thoises, nous ferons l'eschelle selõ ceste quantité, & trouuerons toutes les mesures des lignes de la Fortification sur icelle proportionnée selon la portée de l'Harquebuse.

Que si nous donnons neuf thoises vn cinquiéme à la ligne du flanc, nous aurons les mesures proportionnées, en sorte que la ligne de defence AF aura cent vingt thoises, qui est la portée du Mousquet.

Vous vous serez sans doute conformé(e) aux recommandations de Silvère de Bitainvieu figurant en tête de cet article et aurez pris le temps de "posséder la figure"; en ce cas vous n'aurez pas manqué de remarquer la prépondérance des angles dans cette construction. Ce ne sera pas du tout le cas de Pagan (voir plus loin) et la comparaison entre les deux méthodes est fructueuse. ERRARD semble avoir en tête la similitude des figures (puisqu'il lui suffira par la suite de donner une valeur à la ligne du flanc (AI) pour avoir les "mesures proportionnées"); Pagan se base, lui, sur les mesures finales. Il est vrai qu'il ne s'est mis au Mathématiques avec bonheur qu'une fois sa carrière militaire terminée...

Malgré sa réputation de "premier", ERRARD avait des précurseurs scientifiques dont le moindre n'est pas STEVIN...

Simon STEVIN (dit "Stevin de Bruges"[14])

C'est sans conteste le plus illustre des quatre auteurs que nous avons retenus, "un des plus Sçavans de son Siecle"[15]. La preuve ? Il est le seul cité dans le Petit Larousse[16] pour qui STEVIN est "célèbre par ses travaux sur l'hydrostatique et sur les fractions décimales". Or ces deux titres de noblesse ne doivent pas constituer l'arbre cachant la forêt, et nous faire négliger le reste de son œuvre.

Né à Bruges en 1548, il débute sa vie active dans le commerce à Anvers. On le retrouve un peu plus tard employé dans l'administration des finances à Bruges. Après des voyages à l'étranger, il se fixe aux Pays-Bas. En 1583, il est chargé de plusieurs cours à l'université de Leyde; ses publications scientifiques sont postérieures à cette date. Le Prince Maurice de Nassau qui passe pour avoir été son élève lui confie plusieurs travaux dont la charge de castramétateur (concepteur des fortifications passagères des camps militaires) des armées des Provinces Unies en 1617. Il mourra à La Haye en 1620, ayant vécu dans des pays protestants, ou au moins permettant la liberté de conscience (point commun avec ERRARD ?).

Pour résumer ses travaux scientifiques, on trouve dans la *Nouvelle Biographie Générale* de Hoefer (1864) cette notice[17] dans laquelle le lecteur peut déceler entre les lignes une très légère pointe d'admiration, mais des plus discrètes :

> "Depuis deux mille ans la mécanique était stationnaire. STEVIN, le premier après Archimède, a donné la solution des problèmes qui en arrêtaient les progrès. Il est le père de la statique moderne. Il a exposé tous les grands principes qui constituent aujourd'hui la science de l'équilibre dans les corps solides. Il a trouvé la théorie des plans inclinés, inconnue aux anciens. Il a découvert le parallélogramme des forces et posé en termes exprès ce principe, devenu le fondement des sciences mécaniques, et révélé ensuite au monde comme une grande découverte de Varignon. Il a tenté même quelques pas sur le terrain de la dynamique. Il a fait de l'hydrostatique une science tout à fait différente et indépendante de la statique. Le premier il a ajouté aux découvertes faites par Archimède, et démontré comme une des principales conséquences de l'équilibre des fluides, qu'un liquide peut exercer sur le fond d'un vase une pression beaucoup plus grande que son propre poids, principe fameux, connu sous le nom de paradoxe hydrostatique, et dont on a fait honneur à Pascal. Il a découvert la loi de la pression des fluides sur les parois d'un vase. Il a employé dans ces recherches des artifices mathématiques qu'on peut considérer comme un premier acheminement vers le calcul infinitésimal. Il a introduit le premier la pratique des fractions décimales, quoique Regiomontanus eût fait un grand pas vers ce progrès et que Ramus même l'eût indirectement employée. Il a donné un des meilleurs traités de navigation, qui a servi de texte dans toutes les écoles chez les nations maritimes. Il a entrevu l'importance de la géologie, et indiqué les moyens d'en faire une science. Sa fortification par écluses est encore aujourd'hui un ouvrage digne de remarque."

[14]Devinez pourquoi ?

[15]Allain Mannesson-Mallet (*Les Travaux de Mars*, seconde partie, 1671).

[16]Une référence.

[17]Extraite d'un ouvrage de M. van de Weyer, *Simon Stevin et M. Dumortier* (Nieuport, 1845, in-12).

Michaud dans sa *Biographie Universelle* (tome 40) lui attribue l'invention d'un chariot à voiles, célébré par Grotius dans une pièce en vers de 1617, et "qui, dit-on, dans les plaines de la Hollande, allait plus vite que la voiture la mieux attelée".

Ses ouvrages, pratiquement tous publiés en flamand, ont été traduits en français par Albert Girard en 1634 sous le titre général d'*Œuvres Mathématiques de Simon* STEVIN, et c'est de la dernière partie de ces œuvres, la *Fortification*, qu'est extrait le texte que nous présentons. Il s'agit comme pour ERRARD de la construction de l'hexagone ("l'hexangle" pour l'auteur).

La description est particulièrement fouillée, rien n'y manque. Le lecteur peut suivre, sur une figure particulièrement soignée la succession des constructions proposées par l'auteur (ceux que la perspective de refaire la figure n'enchante pas peuvent se reporter à la fin du texte de STEVIN, nous n'avons pas reculé devant les heures de travail et vous en présentons une version électronique : voyez plus loin); vous pourrez remarquer, dans le paragraphe numéroté 8, l'explication minutieuse que STEVIN apporte pour fournir au lecteur une explication plus claire de sa méthode. On trouve fréquemment chez lui ce souci de clarifier les passages les plus difficiles (et il y en a !).

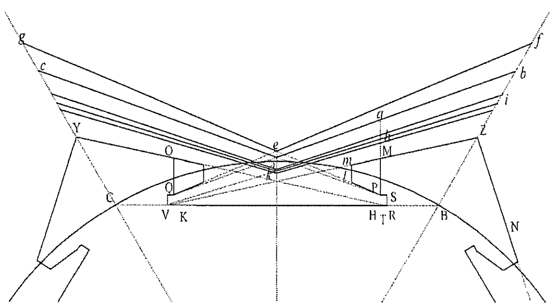
> Or pour faire un pourtraict selon les mesures susdites, & pour avoir premierement de l'hexangle; je pren avec le compas sur l'eschelle 1000 pieds pour un costé, & parce qu'il est esgal au demy-diamètre de son cercle circonscriptible, par la I5. proposition du quatriesme livre d'Euclide, j'en tire sur le centre A d'un cercle occulte BCDEFG, lequel je partis avec la mesme distance du compas en six parties esgales és poincts B, C, D, E, F, G, & tire les lignes de poinct à autre : ce qui me donne l'hexangle requis.
>
> 2. Je mets le compas sur I80. pieds, pour la longueur, despuis chaque angle de l'hexangle , jusques au costé exterieur du merlon de la moyenne place, & marque ladite distance despuis B jusques à H d'un costé : & despuis B jusques à I, d'autre costé : puis de C à K, & de G à L : & ainsi des autres.
>
> 3. Pour avoir la largeur du flanc avec l'espaisseur de son oreillon , je tire HM longue de I40 pieds en angle droit sur BC. Et de mesme sorte, je tires IN en angle droit sur BG, & KO en angle droit sur CB; faisant le mesme des autres lieux semblables.
>
> 4. Je tire HP 30 pieds, pour la largeur du flanc , sur le costé exterieur du merlon de la moyenne place : signant aussi 30. pieds de K à L : & ainsi de toutes autres semblables lignes.
>
> 5. Je signe HR de 20 pieds en la ligne CB, pour l'espaisseur du mesme merlon, & tire RS parallele à HP, faisant de mesme à tous les autres lieux semblables. Puis je mets le poinct T au milieu de HR & semblable poinct pres de K en V, & pres de L en X. Puis je tire despuis A par le point C une ligne infinie : pareillement des lignes infinies par tous les autres poincts semblables. Puis du poinct T, je tire une autre ligne par le poinct O touchant l'infinie AC en Y. Semblablement la ligne depuis le poinct V par le poinct M touchant l'infinie AB en Z, puis la ligne ZX : Et si en l'œuvre on n'a point failli, la ligne ZX passera par le poinct N. Le mesme se fera aussi à tous les autres lieux semblables.

6. Pour avoir la largeur du grand fossé, je tire la ligne HM plus avant jusques à a, si bien que Ma fait I20 pieds : Je tire puis apres une ligne du poinct Q par le poinct a, jusques à ce qu'elle touche l'infinie AB au poinct b. Apres je prends la longueur Bb & la marque de C à c à sçavoir en l'infinis AC : & tire la ligne Pc, coupant Qb en d. Ce qui estant ainsi, les deux lignes cd & db signifient les rayës d'iceluy costé de la forteresse, & selon la mesme manière on tirera toutes les autres rayës & le fossé sera large despuis M jusques à a de 20 pieds, selon le requis.

7. Pour figurer le chemin couvert, je tire une ligne infinie de A par d & par tous les autres endroits semblables. Puis je signe despuis d jusques c la longueur de 20 pieds, pour la largeur du chemin couvert, là où il est le plus estroict, et tire la ligne de Q par e, jusques à ce qu'elle touche l'infinie AB en f : Puis je prens avec le compas la longueur bf, & la marque despuis c jusques à g; à savoir en l'infinie AC, et tire la ligne ge de sorte que les deux lignes ge & ef, signifient le parapet du chemin couvert d'iceluy costé de la forteresse : & ce qui est compris entre iceluy parapet, & les extremitez du rais ed, db, signifie le chemin couvert lequel sera de mesme figure aux autres lieux à l'entour de la forteresse.

8. Pour avoir le contre-fossé, je marque le point h au milieu de Ma : par lequel je tire Vi (ou pour dire encore plus proprement, ladite ligne sera tirée vers P, despuis un poinct qui est distant de V vers O d'un pied, à sçavoir au milieu du plus estroicts de la canonniere, lequel est declaré au precedent article) coupant Ae en K , & touchant AF en i. Puis des deux costez de cette ligne Ki, je tire deux paralleles finissantes en Ae, & Af : tellement que despuis la ligne Ki jusques à chaque ligne qui est tirée joignant icelle, on trouve l'espace de I0 pieds, lesquels estans comptés aussi en la ligne Ae, ou Ma font ensemble, pour la largeur du contre-fossé au coing, qui est à l'opposite du milieu de la grande courtine de 20 pieds, comme il a été mis cy-devant. Or comme cette partie de contre-fossé est designé icy, ainsi s'achevera tout le reste, qui est à l'entour de la forteresse.

9. Pour avoir la longueur de l'oreillon de I00 pieds, je marque depuis le poinct P en la ligne Pe I00 pieds, comme Pl. Puis je tire la ligne lm parallele à PM, à sçavoir le poinct m en la ligne MV; & le trapese mMPl, est le parapet requis.

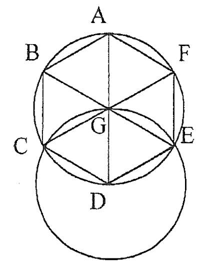


STEVIN montre un souci de la précision beaucoup plus important que la plupart des autres fortificateurs de son époque, il fournit les mesures, indique même à quel moment il faut utiliser le compas, il justifie enfin son travail en s'appuyant sur la référence incontournable de toute personne utilisant la géométrie, les *Éléments* d'Euclide, qui font partie du bagage de tout lettré

de ce temps, et renvoie, dans l'extrait présenté, à la quinzième proposition du quatrième des treize livres que comportent les *Éléments*. Voici cette quinzième proposition extraite des *Six premiers Livres des Éléments d'Euclide*, premier traité des *Œuvres Posthumes* (Paris, 1682) de Rohault, physicien et mathématicien du dix-septième siècle :

Livre quatrième. Proposition XV. Problème XV. (pages 185 et 186)

Dans un Cercle donné, décrire un Hexagone Equilateral & Equiangle.



Je suppose que le Cercle ACE, soit donné; & je propose d'y inscrire un Hexagone Equilateral & Equiangle. Pour le faire.
Menez un Diametre tel qu'il vous plaira, par exemple AGD; Puis du Point D, & de l'Intervalle DG, décrivez le Cercle CGE, ce Cercle coupera le premier aux Points C, & E; Menez par ces Points les Diametres CGF, & EGB; Puis menez les six Lignes Droittes AB, BC, CD, DE, EF, FA; Cela estant, je dis que l'Hexagone $ABCDEF$, qui est inscrit au Cercle donné, est Equilateral & Equiangle. Pour le prouver.

Par le raisonnement de la premiere Prop. du 1. on prouvera que les deux Triangles DGC, DGE, sont Equilateraux, & par la 5. du 1. on prouvera qu'ils sont Equiangles; Et partant par la 32. du 1. chacun de leurs Angles vaut le tiers de deux Droits. Or par la 31. du 1. les deux Angles CGE & EGF, valent deux Droits; Partant si on oste l'Angle CGE, l'Angle restant EGF, vaudra aussi le tiers de deux Droits; Et ainsi les trois Angles CGD, DGE, EGF, sont égaux entr'eux; Mais les Angles AGF, AGB, BGC, qui leur sont opposez au Sommet, leur sont égaux, par la 15. du 1. Donc les six Angles qui sont autour du Centre G, sont tous égaux; D'où il suit par la 26. du 3. que les six Arcs sur lesquels ils s'appuyent sont égaux; Et par la 29. du 3. que les six Lignes Droittes AB, BC, CD, DE, EF, FA, qui les soûtiennent sont égales; Par consequent l'Hexagone $ABCDEF$ est Equilateral.

Maintenant, qu'il soit équiangle, cela suit de la 27. du 3. Car chacun de ces six Angles s'appuye sur un Arc qui contient quatre fois la 6. partie de la Circonference du Cercle; Ainsi nous avons dans un Cercle donné décrit un Hexagone Equilateral & Equiangle; Ce qu'il falloit faire & démontrer.

Corollaire.

Il suit de cette Proposition, que le Costé de l'Hexagone est égal au Rayon du Cercle auquel il est inscrit; Puisque chaque Costé a esté prouvé égal au Demy-diametre.

STEVIN est justement reconnu de nos jours comme un des grands mathématiciens et ingénieurs de son temps, pourtant la fortification "à la hollandoise" n'est pas attachée au nom de ce génial inventeur, mais à celui d'un scientifique moins connu :

Samuel Marolois (dit “de nulle part”[18])

Le traité de MAROLOIS, dont est issue la première illustration de cet article, est resté un classique (l’auteur en a acquis le surnom de “père de la fortification hollandaise”), mais ce n’est certainement pas sa première édition qui lui a valu cette réputation; celle-ci n’est pas si claire que d’autres traités qui suivront, comme celui de Fritach vingt ans plus tard par exemple, dont le plan est clair et l’exposition particulièrement limpide. La première édition du traité de MAROLOIS (1615) est, comme sa *Géométrie* de 1616, truffée de fautes de langage et semble rédigée à la hâte. En outre, les principes ne sont pas exposés clairement (comme avaient pu l’être ceux d’ERRARD) en début d’ouvrage : tout en affirmant *[traicter] brievement de la calculation d’icelle [fortification]*, MAROLOIS raisonne longuement sur des tracés déjà faits (on ne sait comment) *faisans sur chasque Poligone 3. ou 4. divers desseings pour puis apres en choisir le melieur.* On s’aperçoit donc que les principes ne sont pas posés *a priori* mais découleront, pour ainsi dire, du geste du dessinateur !

Pour continuer dans le pragmatisme, il affirme : *pour ce que les angles ne sont guerrez changez par la diversité des desseings il sera bon d’en bailler une regle generale* et donne en fait une justification venue du sens commun (des ingénieurs) :

> C’est une chose receue de tous que la Forteresse quarée n’est si bonne que la Pentagonale & ladicte Pentagonale noms bonne que l’exagonale & ainsi consecutivement. Si on recherche la cause de cecy on remarquera qu’elle procede de la petitesse de leurs angles ne pouvans endurer tel corps des Bastõ que les Poligones subsequents de sorte que la Forteresse quarée sera pour c’este cause plus deffectueuse que la Pentagonale & c’este cy plus vitieuses que l’exagonale & ainsi des suivantes jusques au dodecagonne qui a l’angle du bastion droict ce qui est cause qu’on est contrainct de faire les angles flancquez plus petites que la raison de bien bastir ne requiert les flancqs, trop petits la gorge trop estroicte, & la ligne de deffence trop longue[19].

La suite du texte permet de saisir un peu mieux le mode de tracé, même si, encore une fois, ce dernier n’est pas explicite :

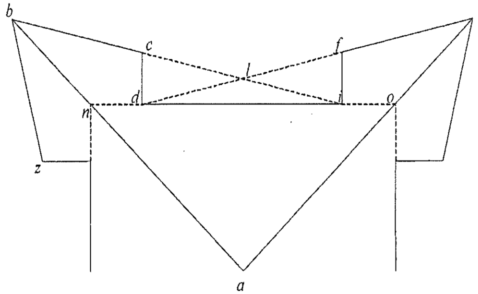
> Pour doncques proportionellement accroistre les angles des Forteresses selon qu’augmente l’angle de leur Poligone nous prendrons la moitie des angles d’iceux y adjousterons I5. degrez la somme sera l’angle du boulevert lequel nous nommerons angle flancque & si l’angle, flancque est soubstraict de l’angle du Poligone restera le double de l’angle flancquant interieur lesquel estant soubstraict de I80. deg : restera l’angle flancquant exterieur ou de tenaille & si a l’angle flancquant interieur est adjouste 90. degrez la somme sera l’angle de l’espaule.

Il n’est peut-être pas inutile de reproduire la première illustration de la première planche du traité, un carré, fortifié apparemment en partant de l’angle de la pointe du bastion, fixé à 60 degrés selon la première règle (mais dans la suite, MAROLOIS proposera pour l’angle flanqué

[18]Cette mauvaise boutade est un signe de notre dépit. En effet, notre groupe de Dijon travaille d’arrache-pied sur sa *Géométrie* (pratique) et nous en avions fait presqu’un héros, que dis-je ? un Bourguignon (comme le furent plus ou moins un jour tous les belgo-neerlando-flamands, n’est-ce pas ?) Notre religion était faite, c’était forcément un protestant exilé, comme Girard qui traduisit ses œuvres en flamand. Mais voilà que Jan van Maanen (que son nom soit honni pour trente générations) nous fait obligeamment parvenir une note biographique montrant que MAROLOIS est né dans le nord des Pays-Bas. Ah ! Cruel destin !

[19]L’orthographe et les expressions sont garantis d’origine; vous avez dû remarquer que l’auteur est relativement peu au fait de l’usage de la ponctuation, c’est un vrai précurseur de Proust.

des valeurs qui dérogent à cette règle), sachant que la ligne de défense bi a en principe une longueur maximale autorisée, égale à la portée du mousquet; i est le point de rencontre de la face du bastion bc et du côté du polygone (carré) initial, il est une des extrémités de la courtine di.



Légende

Angle de polygone : tout le monde connaît,
Angle au centre du polygone : aussi.
Angle flanqué (ou *angle du bastion*) : cbz,
Angle flanquant intérieur : dic,
Angle flanquant extérieur : clf,
Angle de l’épaule : dcb.

On voit le problème : la forme est donnée, mais les tailles sont à ajuster. C’est d’ailleurs l’objet de toute cette première partie du traité, remplie de calculs trigonométriques, et qui représente les deux tiers du total. Par exemple, le problème 22 : *En la Figure Octogonale est le flanc B.C. II verges des angles d’vn Boulevert a l’autre 76. verges. On demande combien seront toutes les parties de la dicte Forteresse Octogonale.*

Revenons au début du Traité. L’auteur donne ensuite la table qui permettra d’effectuer les tracés d’après les angles, en adaptant les lignes aux conditions requises :

	4 .	5 .	6 .	7 .	8 .	9 .	I0 .	II .	I2 .	
	90 .	72 .	60 .	5I$\frac{5}{7}$.	45 .	40 .	36 .	32$\frac{8}{11}$.	30 .	angl:du centre
	90 .	I08 .	I20 .	I28$\frac{4}{7}$.	I35 .	I40 .	I44 .	I47$\frac{3}{11}$.	150 .	angl:du Polig.
	45 .	54 .	60 .	64$\frac{2}{7}$.	72$\frac{1}{2}$.	70 .	72 .	73$\frac{7}{11}$.	75 .	moitie
	15 .	15 .	15 .	15 .	15 .	15 .	15 .	15 .	15 .	
	60 .	69 .	75 .	79$\frac{2}{7}$.	82$\frac{1}{2}$.	85 .	87 .	88$\frac{7}{11}$.	90 .	ang. flancq.
Rest	30 .	39 .	45 .	49$\frac{2}{7}$.	52$\frac{1}{2}$.	55 .	57 .	58$\frac{7}{11}$.	60 .	doub.de l'ang.
	I80 .	I80 .	I80 .	I80 .	I80 .	I80 .	I80 .	I80 .	I80 .	flanc:interieur
	I50 .	I4I .	I35 .	I30$\frac{5}{7}$.	I27$\frac{1}{2}$.	I25 .	I23 .	I2I$\frac{4}{11}$.	I20 .	angle flancq.
	I5 .	I9$\frac{1}{2}$.	22$\frac{1}{2}$.	24$\frac{9}{11}$.	26$\frac{1}{4}$.	27$\frac{1}{2}$.	28$\frac{1}{2}$.	29$\frac{7}{22}$.	30 .	angle flancq.
	90 .	90 .	90 .	90 .	90 .	90 .	90 .	90 .	90 .	interieur.
	I05 .	I09$\frac{1}{2}$.	II2$\frac{1}{2}$.	II4$\frac{1}{4}$.	II6$\frac{1}{4}$.	II7$\frac{1}{2}$.	II8$\frac{7}{22}$	II9$\frac{7}{22}$.	I20 .	an. de l'espaule

(N.B. la première ligne du tableau représente le nombre de côtés du polygone)

Avez-vous remarqué les trois erreurs que le tableau contient ? Non ? Et vous êtes fatigué(e)? D'accord, pour tout lecteur assez courageux qui sera parvenu jusqu'ici, voici l'indication : il y a une erreur dans la ligne des moitiés et les deux autres sont à la dernière ligne...

Blaise François Pagan

C'est le dernier auteur retenu, en tant qu'inspirateur reconnu de Vauban[20]. Son travail présente à nos yeux un grand intérêt géométrique.

Blaise-François, Comte de PAGAN, issu d'une famille avignonnaise, né en 1604, débuta dans l'armée à l'âge de douze ans, et sut se distinguer et se faire apprécier tout au long de sa carrière militaire. Il perdit l'œil gauche sur blessure, puis un peu plus tard, en 1642, une maladie le priva de l'usage de l'œil droit; aveugle, il quitta alors l'armée, mais connut une "reconversion" réussie dans le domaine scientifique : il recevait chez lui de nombreux savants et publia des ouvrages sur des sujets variés, mathématiques, fortification, astronomie, astrologie, géographie. Il mourut à Paris en 1665.

Nous nous sommes penchés sur un ouvrage publié en 1669 (2ème édition, la 1ère étant de 1645) *"Les fortifications de Monsieur le Comte de* PAGAN *avec ses théorèmes sur la fortification"*. Comme le titre l'indique, l'ouvrage se compose de deux parties; publiées à l'origine séparément, elles sont regroupées pour l'occasion en un seul volume. La technique géométrique exposée par PAGAN dans ses *"Fortifications"* semble en soi digne d'étude, nous le montrerons, mais la confrontation de cette exposition avec ses *"Théorèmes"* accentue le besoin de s'arrêter plus longuement sur ses écrits. Les "Fortifications" contiennent dix-sept chapitres, dans lesquels l'auteur décrit ses tracés et leur réalisation avec de nombreuses justifications, puis les compare avec ceux de ses prédécesseurs (De Ville, MAROLOIS$\cdots$).

PAGAN est un homme de guerre, et dans son ouvrage il se défend de figer par ses écrits les techniques de fortification (voir la citation au début de cet article). Son ouvrage décrit néanmoins les constructions géométriques fondamentales à partir desquelles les réalisations pourront s'effectuer. Dans le tracé de la grande fortification (il y a chez lui la grande, la moyenne et la petite qui sont homothétiques et ne diffèrent donc que par leur taille), PAGAN ne sépare pas les constructions des polygones réguliers selon le nombre des côtés, comme le faisait ERRARD, sa description est valable depuis le pentagone jusqu'au dodécagone.

> Tirez la base AB de 200. toises, & la divisez en deux esgalement au point D. Puis tirez du point D la ligne perpendiculaire DC de 30. toises de longueur, & en suitte, les deux lignes de deffence partans, l'une du point A passant en C & allant en N, & l'autre du point B passant en C & allant en M toutes deux de raisonable longueur.
>
> Cela fait, marquez sur lesdites lignes de deffence,les deux faces des Bastions AE & BF de 60. toises chacune : Puis les complements des deux lignes de deffence CM & CN l'une & l'autre de 37. toises, & en suitte tirez les deux lignes des Flancs de E, à M, & de F, à N, & la ligne de la Courtine de M à N.

[20]L'avènement de Vauban marque la fin de la période naïvement mathématique; il prétendait d'ailleurs que seule l'expérience apprend à fortifier. On sait pourtant que Vauban a eu une formation scientifique et qu'il montre des aptitudes certaines en mathématiques.

> Ainsi vous tracerez tres-facilement & avec autant de diligence que de justesse, toutes les faces de la grande Fortification, en observant tousiours la mesme regle sur les bases de 200 toises dont les principales Parties, seront. Les deux faces des Bastions AE, & BF de 60. toises : les deux flancs EM, & FN de 24. toises & deux pieds : La courtine MN de 70. toises & 5. pieds : Les lignes de deffence MCB, & NCA de 141. toises & 2. pieds chacune : Et l'Angle flancquant ACB de 146.degrez & 36 minuttes.

L'élément de base de la construction est la ligne brisée AEMNFB constituée de deux moitiés de bastions et d'une courtine MN entre les deux. PAGAN s'attache à décrire en premier lieu cette figure-clé.

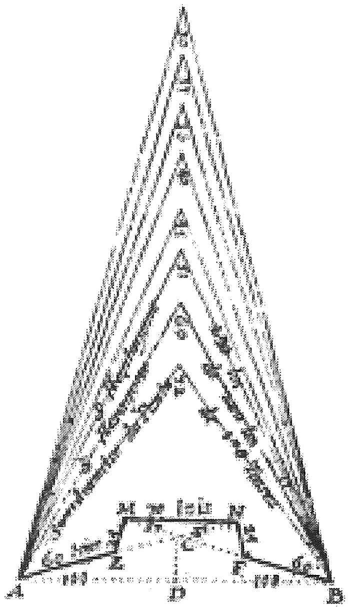
Il ne reste plus alors qu'à trouver le centre du polygone à construire, puisqu'on connaît les angles pour chacun d'entre eux.

La figure présentée rend à elle seule le travail de l'auteur digne d'un grand intérêt.

En effet la construction des polygones réguliers bastionnés de cinq à douze côtés apparaît sur celle-ci.

PAGAN fournit dans un premier temps les valeurs des côtés obtenus par construction.

Dans le cadre d'une utilisation de ce texte par un enseignant de mathématiques dans sa classe, on peut demander aux élèves de retrouver les valeurs obtenues en effectuant les calculs nécessaires. On peut alors faire intervenir de la trigonométrie dans le triangle rectangle et dans le triangle quelconque, le théorème de Pythagore, le théorème de Thalès...



Une information sur les unités de longueur utilisées à l'époque est nécessaire : une toise (1 t = 1,949 m) est égale à 6 pieds. Les valeurs énoncées par PAGAN ne concernent que les flancs (ME), les faces (AE), la courtine (MN) et l'angle flanquant (ACB), valeurs qui sont communes à tous les polygones (de cinq à douze côtés pour PAGAN). L'élément-clé étant tracé et étudié, on va ensuite passer à la totalité du polygone souhaité. Dans sa volonté d'utiliser la généralité de sa figure, le fortificateur décrit ensuite le calcul de l'angle des bastions et des polygones, mais sans donner de valeur numérique; le lecteur n'aura qu'à adapter au cas particulier choisi.

> Mais quant aux Angles des Bastions & des Polygones ils se trouueront en cette maniere. Ostez de l'Angle flancquant de la Fortification, l'Angle du centre du Polygone, & vous aurez les Angles des Bastions dudit Polygone : Puis prenez le complement au demy-cercle de l'Angle du mesme centre , pour les Angles du Polygone formez par les costez ou bases de 200. toises, autour de la circonference du Cercle.

Nous sommes loin du travail d'un ERRARD ou d'un STEVIN qui décrivent point par point leur construction en traitant successivement tous les polygones du carré au dodécagone et en appuyant leurs dires d'une démonstration avec des références précises à telle ou telle propriété de tel ou tel livre d'Euclide.

La deuxième partie du livre contient 100 théorèmes (pourquoi 100 ? Pourquoi "théorèmes"?)[21] qui sont en réalité des descriptifs ou des résultats de calculs et de constructions. La présentation sous cette forme découpée sans aucune figure n'apporte rien par rapport à la description détaillée de la première partie. Mais une chose retient l'attention : les méthodes proposées dans la *Fortification* et dans les *Théorèmes* présentent des différences qui sont plus que de détail. Par exemple, les théorèmes 33 à 37 décrivent la réalisation de la figure-clé à laquelle nous nous sommes intéressés précédemment (deux demi-bastions encadrant la courtine).

33. En tous les Polygones reguliers : les costez exterieurs sont les Bases de nostre Fortification, tracée interieurement, & dans la Figure sur la longueur des costez du Polygone.

34. Si vous divisez la Base ou le costé exterieur en deux également, & que du point du milieu vous esleviez une Perpendiculaire, égale à la troisiesme partie de la moitié de la Base, l'extremité de cette Ligne Perpendiculaire sera le Centre de l'Intersection des deux Lignes de deffence.

35. Si des deux extremitez de la Base ou costé exterieur du Polygone vous tirez deux Lignes droites, qui se coupent sur l'extremité de la precedente perpendiculaire, ces deux Lignes droites serõt les deux Lignes de deffence de vostre Fortification reguliere.

On suit la même construction que dans les *Fortifications*; la seule différence vient de la perpendiculaire à la base qui était donnée de 30 toises pour une demi-base de 100 toises, alors que le théorème 34 demande de prendre la "troisiesme partie de la moitié de la base" (qui correspondrait à 33 toises 2 pieds pour une demi-base de 100 toises).

Le théorème 36 qui suit est moins clair, il est nécessaire de suivre les indications en s'aidant de la figure fournie précédemment.

36. Si vous prenez la troisiesme partie du plus grand Segment de ces deux Lignes droites tirées, vous aurez la longueur de l'un & de l'autre complement des deux Lignes de deffence; & ces complemens adjoustez aux plus grands Segmens de ces deux Lignes droites, feront toute la longueur de l'une & de l'autre Ligne de deffence.

On prend le tiers de AC ou BC, ce tiers sera le complément CN ou CM permettant de tracer les lignes de défense AN et BM.

En choisissant 100 toises pour la demi-base AD, l'application du théorème de Pythagore au triangle ADC donne 105 toises 2 pieds pour AC donc (105 toises 2 pieds) : 3 = 35 toises pour CN (à comparer avec les 37 toises des *Fortifications*).

Mais la démarche devient tout à fait différente pour le théorème 37 :

[21]Nous ne fournissons pas la réponse, chacun doit se faire son idée.

37. Si de l'un à l'autre bout de ces deux Lignes de deffence vous tirez une Ligne droite, cette Ligne droite sera la Courtine, Paralelle à la Base; & si vous eslevez des Lignes Perpendiculaires sur ces mesmes Lignes de deffence aux deux points de leurs extremitez, ces Lignes Perpendiculaires seront les deux Flancs, & marqueront les deux Faces des Bastions sur les plus grands Segmens des deux Lignes de deffence.

La construction des flancs ME et NF ne s'opère plus du tout comme dans les *Fortifications* : il est indiqué ici que le flanc NF s'obtient en traçant la perpendiculaire à la ligne de défense AN en N jusqu'à son intersection avec l'autre ligne de défense BM qui est le point F. Signalons qu'un calcul à partir des données des *Fortifications* fournit 89° pour l'angle ANF. On se retrouve donc face à des résultats numériques très voisins par les deux méthodes.

La question que nous souhaitons soulever pour clore cette partie est celle de la réalisation pratique des deux procédés et de la supériorité éventuelle de l'un sur l'autre. Peut-on suggérer une plus grande facilité à mémoriser la méthode des *Théorèmes* plutôt que la fastidieuse liste des chiffres des *Fortifications*, ou est-il plus important de signaler que dans les *Théorèmes*, on ne se contente pas de mesures de longueurs, il faut par trois fois (pour DC, puis NF et ME) élever des perpendiculaires sur le terrain ?

Mais il se fait tard, Monsieur. . . [22]

. . . et il ne faudrait pas que cet article se fasse trop long ! Nous espérons avoir convaincu le lecteur de l'intérêt des ouvrages de fortification, et ce à plusieurs titres. Il s'agit de géométrie appliquée à un domaine où on ne l'attendait pas (la guerre), alors que la géométrie ne devrait pas voir de limite à son champ d'action, dans la mesure où elle est un langage universel. Il aurait certainement été possible de tracer des plans de forteresses sans toute cette symétrie et tous ces angles. On verra peut-être dans les polygones un reflet de la culture d'une catégorie de la population européenne à une certaine époque, ou le fait que la présence divine[23] se révélait dans une forme de perfection que seul le tracé géométrique peut donner.

D'ailleurs, puisqu'il est question de présence divine, il faut remarquer que les ingénieurs cités semblent très soucieux de donner un fondement mathématique solide à leurs théories, ce qui ne semble pas avoir été le cas des ingénieurs italiens du siècle précédent, réputés inventeurs du système bastionné. On trouve dans la plupart des ouvrages du XVII[ème] siècle des préfaces historiques à vocation morale, parlant des premiers hommes (dans une description naïve digne du paradis terrestre) incapables du mal, mais obligés, pour se protéger des méchants (d'où sortaient-ils ?), de construire des remparts puis de les perfectionner au fur et à mesure de l'avancement des techniques et des forces des agresseurs.

En outre, ce siècle et son précédent sont ceux de la grande redécouverte par l'Europe des textes de philosophes stoïciens comme Sénèque (traduit par Calvin) ou Marc Aurèle. On peut lire un indice de l'influence de cette "nouvelle" philosophie dans un siècle marqué par la guerre la plus sordide et l'insécurité généralisée, sous la plume du protestant ERRARD, qui intitule un de ses paragraphes de présentation *Des choses indifférentes et qui ne sont pas de l'essence de la fortification.* L'indifférence à ce qui n'est pas essentiel, voilà un des slogans les plus célèbres

[22]C'est en hommage à nos hôtes belges, que nous citons ici Brel. Mais nous nous adressons aussi aux dames.

[23]Rappelez-vous le début du *Nisi Dominus* ou du psaume 127 : *Si l'Eternel ne garde la ville, celui qui la garde veille en vain.* C'était très à la mode à l'époque baroque.

du stoïcisme, réintroduit dans l'actualité par Juste Lipse[24] puis Guillaume Du Vair, sans parler de l'écho que lui donnera ensuite Descartes.

Ceci montre que notre travail est loin d'être fini...

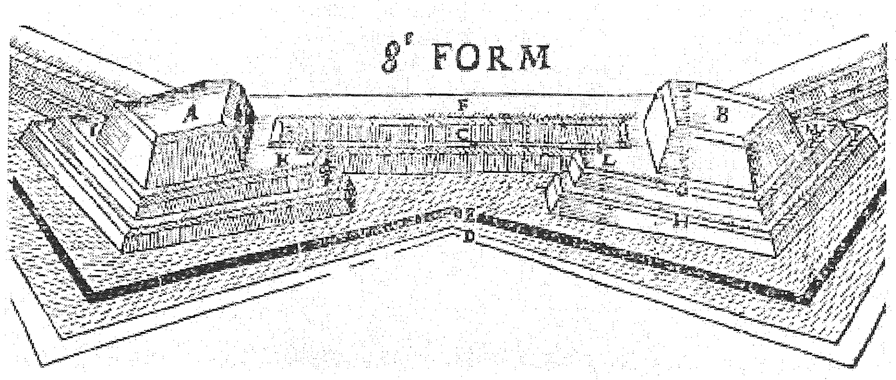


Illustration tirée du *De sterkte Bouwing* de Stevin

[24]qui, soi dit en passant, publiera aussi un traité sur l'art militaire.

Le calcul différentiel selon Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

KELLER, Olivier
IREM de Lyon (France)

Abstract

Le texte[1] choisi pour cet atelier illustre avec les deux exemples de la cycloïde et de la chaînette, la double préoccupation fondamentale de LEIBNIZ, liée à un sens aigu du tournant historique des mathématiques du 17ème siècle :

1- faire admettre par le monde savant un **nouvel objet**, à savoir les courbes transcendantes qui seules permettent de "construire" les problèmes transcendants, alors que Descartes n'avait traité que les courbes algébriques, dont les équations sont de la forme $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme.

2- faire connaître au monde savant un **nouveau calcul**, qu'il nomme lui-même le Calcul Différentiel, et aussi une **nouvelle forme d'équation des courbes**, la forme différentielle (ou intégrale), deux nouveautés grâce auxquelles on peut aisément résoudre les problèmes habituels, même pour les courbes transcendantes : tracé des tangentes, rectification, recherche du centre de gravité, calcul d'aires.

Les textes de LEIBNIZ sont des articles des *Acta Eruditorum* de Leipzig et ne constituent pas un traité, au contraire du *Traité des fluxions et des suites infinies* de Newton. Ils sont touffus, souvent très elliptiques pour un lecteur contemporain, et le détail des calculs manque la plupart du temps[2]; il est intéressant de retrouver ces détails *dans l'esprit de l'époque*, et c'est ce que nous chercherons à faire[3]. Les règles du nouveau calcul ont été établies dans l'article *Nova Methodus...*[4] d'octobre 1684 : différentiation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de puissances et de radicaux; tracé des tangentes par similitude d'un triangle et du triangle différentiel (ou caractéristique) de côtés ds, dx et dy.

[1]Notre source est : LEIBNIZ, *Naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta Eruditorum*. Introduction, traduction et notes de Marc Parmentier. Paris, éditions Vrin, 1989.

[2]LEIBNIZ répond à cela : "J'avoue que cette démonstration ne pourra être entendue de tout le monde, parce qu'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux qui sont versés dans les nouvelles découvertes et qui savent manier les caractères ou symboles. Mais il n'y en a que trop pour ceux-ci, et il faudrait un volume pour satisfaire aux autres." Lettre à La Roque, 1673.

[3]À ce propos, si nous remercions Marc Parmentier pour avoir traduit pour la première fois en français un grand nombre de textes mathématiques de LEIBNIZ, nous nous permettrons de le critiquer pour ses notes mathématiques qui se contentent de vérifier ce que dit l'auteur *avec les méthodes actuelles*, à grand renfort de fonctions logarithmes, exponentielles, cosinus et sinus hyperboliques etc.

[4]La traduction française du titre complet est : *Nouvelle méthode pour chercher les Maxima et les Minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique.*

1 Sur la géométrie profonde et l'analyse des indivisibles et des infinis (Juin 1686)

1.1 L'origine des problèmes transcendants

> Je dois à présent dévoiler l'origine des quantités transcendantes, et montrer pourquoi certains problèmes ne sont ni plans, ni solides, ni sur-solides[5], ni d'aucun degré déterminé, mais surpassent toute équation algébrique. Je révèlerai du même coup un moyen de démontrer, sans calcul, qu'il est impossible de trouver une quadratrice algébrique du cercle et de l'hyperbole.
> Supposons en effet que nous en disposions, s'ensuivrait grâce à elle la possibilité de diviser un angle ou un rapport, soit encore un logarithme, dans le rapport de deux segments donnés, et cela par une construction unique et générale; par conséquent le problème de la section de l'angle ou de l'établissement d'un nombre quelconque de moyennes proportionnelles, seraient de degré déterminé, alors que, selon le nombre de divisions de l'angle, ou le nombre de moyennes proportionnelles, l'équation algébrique qu'il faut employer est de degré chaque fois différent et que, de ce fait, considéré en général, pour un nombre quelconque de divisions et de moyennes proportionnelles, le problème est de degré indéterminé et transcende toute équation algébrique.
> Il n'empêche que de tels problèmes peuvent réellement se poser en géométrie, qu'il faut même les compter parmi les plus fondamentaux, et qu'ils constituent des problèmes déterminés; il est donc à tout le moins indispensable d'admettre dans la géométrie les seules courbes permettant de les construire; or ces courbes peuvent être tracées rigoureusement par un mouvement continu, la Cycloïde et les autres figures similaires le montrent bien, il ne faut donc pas les juger Mécaniques mais Géométriques, notamment parce que les ressources qu'elles offrent laissent à mille lieues derrière elles, exception faite du cercle et de la droite, les courbes de la Géométrie ordinaire, et qu'elles recèlent des propriétés très importantes, concernant directement des démonstrations de Géométrie. C'est pourquoi *l'erreur qu'a commise Descartes en les excluant de la Géométrie fut aussi grave que celle des Anciens*[6] qui rejetaient comme non géométriques certains lieux solides ou linéaires. (p.133-135).

LEIBNIZ réunit ici génialement en un seul les trois fameux problèmes de l'antiquité grecque : la quadrature du cercle, la trisection de l'angle et la duplication du cube. Ce dernier problème est équivalent à celui de l'insertion de deux moyennes proportionnelles entre 1 et 2. LEIBNIZ démontre que les courbes qui permettent de "construire" ces problèmes sont transcendantes, et il affirme, avant de le démontrer plus loin pour le cas de la cycloïde, que son nouveau calcul permet de les traiter aussi aisément que les courbes traditionnelles.

[5] Vocabulaire des géomètres grecs de l'antiquité d'après Pappus (4ème siècle de notre ère) : les problèmes plans sont ceux qui se résolvent au moyen de la droite et du cercle, les problèmes solides nécessitent l'usage des sections coniques. Les autres sont dits "sur-solides" ou "linéaires".

[6] Souligné par LEIBNIZ.

Sa démonstration de transcendance, particulièrement concise, signifie ceci : supposons qu'il existe une quadratrice algébrique du cercle, c'est-à-dire une courbe $P(x,y) = 0$, où P est un polynôme de degré fixé n, x l'abscisse d'un point M quelconque du cercle (Figure 1) et y l'aire $\mathcal{O}$.

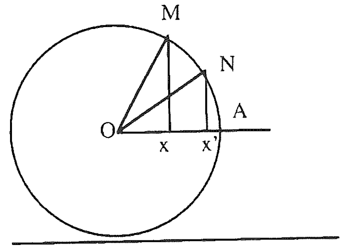


FIGURE 1

$a(\alpha)$ du secteur d'angle $AOM = \alpha$. La courbe P permettrait de diviser l'angle $AOM = \alpha$ en m parties égales comme ceci : soit N tel que $AON = \alpha/m$ (Figure 1), x' son abscisse et $a(\alpha/m)$ l'aire du secteur AON; comme $a(\alpha/m) = a(\alpha)/m$, on aura $P(x', y/m) = 0$, ce qui permet de construire x' (puis N sur le cercle) comme l'indique la Figure 2.

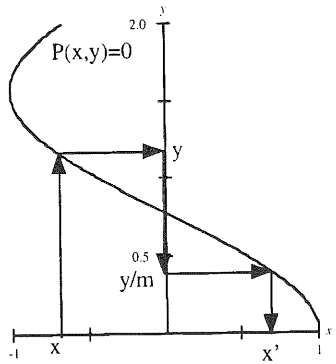


FIGURE 2

Or le calcul de $x' = \cos(\alpha/m)$ en fonction de $x = \cos\alpha$ est un problème de degré m puisque $\cos\alpha$ est un polynôme de degré m en $\cos(\alpha/m)$, ce qui contredit la prétention de le résoudre, quelque soit m, avec une courbe de degré fixé n.

Supposons de même qu'il existe une quadratrice algébrique de l'hyperbole, c'est-à-dire une courbe $P(x,y) = 0$, où P est un polynôme de degré n, x l'abscisse d'un point M de l'hyperbole et y l'aire $L(x)$ du domaine limité par l'axe des abscisses, l'hyperbole et les verticales d'abscisses 1 et x (Figure 3).

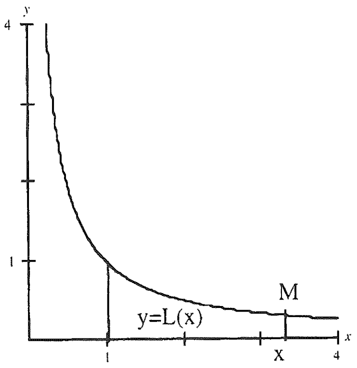


FIGURE 3

On pourrait alors insérer m moyennes proportionnelles entre 1 et k, c'est-à-dire construire x tel que $x^{m+1} = k$, k fixé supérieur à 1 : comme en effet[7] $L(x) = \frac{1}{m+1}L(k)$, il suffirait de suivre le procédé illustré par la Figure 4.

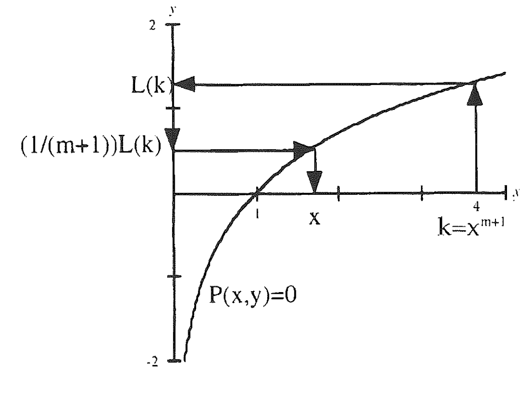


FIGURE 4

Comme pour la quadratrice du cercle, la contradiction est de prétendre résoudre un problème de degré variable $m+1$ au moyen d'une courbe de degré n fixé.

[7]La propriété des "aires logarithmiques", à savoir que $L(ab) = L(a) + L(b)$, a été découverte par Grégoire de Saint-Vincent et son élève De Sarasa en 1647.

1.2 Equation de la cycloïde

> Voilà comment il est possible d'expliciter par une équation même les courbes transcendantes; à titre d'exemple, soit a un arc, x le sinus verse, nous aurons $a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-xx}}$, et si y est l'ordonnée d'une cycloïde : $y = \sqrt{2x-xx} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-xx}}$, équation qui exprime complètement la relation entre l'ordonnée et l'abscisse x, et dont nous pouvons déduire toutes les propriétés de la cycloïde. Voici de ce fait le calcul analytique étendu aux courbes qu'on avait jusqu'à présent écartées, précisément parce qu'on les croyait capables de s'y plier. (p.138).

Soit a un arc et x son "sinus verse", c'est-à-dire 1-sin a dans un cercle de rayon 1. (Figure 5). Le triangle caractéristique, dessiné agrandi, a en réalité pour côtés des segments d'extrémités infiniments voisines, et l'élément d'arc da est assimilé à un segment de droite infiniment petit porté par la tangente au cercle.

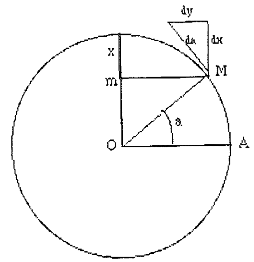


FIGURE 5 : a est l'arc AM et x son "sinus verse".

Par similitude du triangle OmM et du triangle caractéristique de côtés da, dx et dy (angles à côtés perpendiculaires) on a :

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{mM} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Par conséquent, $a = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

On notera que le signe est laissé de côté, puisque par exemple lorsque a est élément de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, a et x varient en sens inverse et que par conséquent $\frac{da}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ et $a = -\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$. LEIBNIZ s'en explique dans un article antérieur, *Nova methodus*... (ouvrage de référence p.106 et 108), par des remarques sur ce qu'il appelle les "signes ambigus" : on ne calcule qu'avec des quantités positives, et on "voit" après, sur la figure, s'il faut mettre tel ou tel signe, c'est-à-dire s'il faut les ajouter ou les retrancher. On notera en outre que la formule donne l'arc a à une constante additive près.

Voici maintenant une dérivation possible de l'équation de la cycloïde donnée par LEIBNIZ. Le cercle générateur (de rayon 1) ayant roulé sur l'axe des y (horizontal chez LEIBNIZ) d'un arc $MN = b$ depuis l'origine I des axes (Figure 6), on obtient un point $M(y,x)$ de la cycloïde (C) tel que $IN = b, y = b - \sin b$ et $x = Nn = 1 - \cos b$. En prenant $a = \frac{\pi}{2} - b$ comme paramètre, les équations qui précèdent deviennent : $y = \frac{\pi}{2} - a - \cos a$ et $x = 1 - \sin a$, le "sinus verse" de a; comme $\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{2x - x^2}$, l'équation de la cycloïde est $y = \frac{\pi}{2} - a - \sqrt{2x-x^2}$. Mais dans le cas de la Figure 6, a et x varient en sens inverse, donc $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = -a$ à une constante additive près, en l'occurence $\frac{\pi}{2}$; l'équation de la courbe sera donc : $y = -\sqrt{2x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

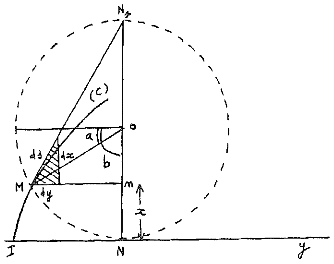


FIGURE 6

Cette équation transcendante, nous dit LEIBNIZ, permet "de déduire toutes les propriétés de la cycloïde", mais il ne s'étend pas davantage. Nous complétons avec deux exemples qui illustrent la simplicité et la fécondité du nouveau calcul, par rapport aux considérations purement géométriques qui avaient cours avant l'invention du calcul différentiel :

a) *La tangente en M à la cycloïde* est MN_1, où N_1 est le point du cercle générateur diamétralement opposé à N (Figure 6).

Nous partons de l'équation de la cycloïde $y = -\sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ d'où : $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$. Or $Nn = x, Mn = \cos a = \sqrt{2x - x^2}$, donc $\frac{dy}{dx} = \frac{Nn}{Mn}$; comme par ailleurs Mn est moyenne proportionnelle entre nN et nN_1 dans le triangle rectangle NMN_1, $\frac{Nn}{Mn} = \frac{Mn}{nN_1}$ d'où finalement $\frac{dy}{dx} = \frac{nM}{nN_1}$. Le triangle caractéristique de côtés dx, dy et ds est par conséquent semblable au triangle MnN_1, donc la tangente en M (qui "porte" ds) est portée par MN_1.

b) *La longueur de l'arc de cycloïde* est égale à quatre fois celle du diamètre du cercle 4, soit deux fois le diamètre du cercle générateur. En effet :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \frac{x^2}{2x - x^2}\right) = dx^2\left(\frac{2}{2-x}\right), \text{ d'où } : \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{2}{2-x}}.$$

En intégrant de 0 à 2, on obtiendra la longueur d'un demi-arc de cycloïde, qui est bien égale à 4, soit deux fois le diamètre du cercle générateur.

2 Courbe que dessine un fil sous l'action de son propre poids et ses étonnantes ressources pour établir toutes les moyennes proportionnelles et tous les logarithmes qu'on désire (Juin 1691)

Le texte est particulièrement elliptique, puisque LEIBNIZ ne fait qu'énoncer des résultats, sans aucun calcul, ni même donner l'équation de la chaînette. Essayons d'éclaircir tout cela, sans utiliser d'autres instruments que ceux des mathématiciens du 17ème siècle.

2.1 Equation de la chaînette

On peut la retrouver grâce à un passage de Montucla[8] : "Nous croyons ne pouvoir nous dispenser de mettre ici les lecteurs géomètres un peu sur la voie de la solution de ce curieux et difficile problème. Nous emprunterons pour cela la subtile analyse qu'en a donnée Jean Bernoulli dans ses *Lectiones calculi integralis*".

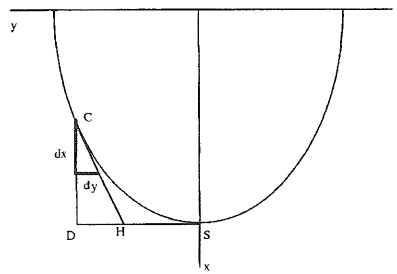


FIGURE 7

Le raisonnement de Jean Bernoulli est fondé sur une propriété statique, selon laquelle le poids de la section SC du fil (proportionnel à sa longueur s) est à la tension constante (notée a) du fil en S comme CD est à DH, où CH est la tangente au fil en C (Figure 7). En faisant intervenir le triangle caractéristique, $\frac{CD}{DH} = \frac{dx}{dy}$. L'équation différentielle de la chaînette est donc : $\frac{s}{a} = \frac{dx}{dy}$ "équation qui, traitée avec adresse", nous dit Montucla, "se réduira à celle-ci : $dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}}$". Le traitement adroit, que Montucla laisse aux bons soins du lecteur géomètre, devait ressembler à ceci : $\frac{s^2}{a^2} = \frac{dx^2}{dy^2} = \frac{dx^2}{ds^2-dx^2}$, donc $\frac{dx}{ds} = \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}$ et $x = \sqrt{a^2+s^2}$. On peut donc remplacer s par $\sqrt{x^2 - a^2}$ dans l'équation de départ $\frac{s}{a} = \frac{dx}{dy}$, ce qui donne enfin : $dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

2.2 Construction de la courbe

> Je ramène en définitive le tout aux logarithmes; j'obtiens de cette manière le type d'expression mais aussi de construction le plus parfait qui soit pour les transcendantes. Car il suffit alors de connaître ou de supposer un unique rapport constant pour être à même de décrire ensuite, en ne faisant appel qu'à la Géométrie ordinaire, sans plus faire intervenir ni quadrature ni rectification, une infinité de points exacts. On aura peut-être plaisir à remarquer à travers ma construction cette singulière et élégante concordance entre la Chaînette et les Logarithmes.[9]

Le rapport constant $k < 1$ étant fixé, LEIBNIZ construit en premier lieu la courbe $y = -\ln x / \ln k$ (axe des ordonnées horizontal et axe des abscisses vertical), ou $x = k^{-y}$, en se fondant sur la propriété suivante : une progression géométrique des x de raison $1/\sqrt{k}$ entraîne une progression arithmétique des y de raison 1/2. Plus précisément (Figure 8) :

[8] Histoire des mathématiques, Tome II, p. 468.

[9] Naissance du calcul différentiel, p.203. Texte de septembre 1691.

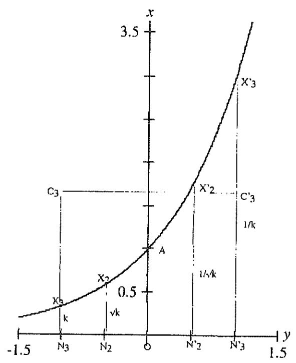


FIGURE 8

Construction point par point de la "courbe logarithmique" et, à partir de celle-ci, de la chaînette.

On porte $OA = 1, ON_3 = 1, N_3X_3 = k$; prendre $ON_2 = 1/2$, et porter N_2X_2, moyenne proportionnelle entre OA et N_3X_3, c'est-à-dire $N_2X_2 = \sqrt{OA \times N_3X_3} = \sqrt{k}$. Placer ensuite $ON'_2 = 1/2, ON'_3 = 1$, puis $N'_2X'_2$ et $N'_3X'_3$ tels que $N_3X_3, N_2X_2, OA, N'_2X'_2, N'_3X'_3$ soient en progression géométrique (de raison $\frac{1}{\sqrt{k}}$). Les points X_i obtenus relient une progression arithmétique horizontale et une progression géométrique verticale et forment donc une courbe "que j'ai coutume d'appeler logarithmique" (p.194); le processus se continue à l'infini : prendre le milieu N_4 de N_3N_2, porter N_4X_4 moyenne proportionnelle de N_3X_3 et N_2X_2 etc.

Les points C_i et C'_i de la chaînette sont alors construits à partir de la courbe logarithmique en portant $N_iC_i = N'_iC'_i = (1/2)(N_iX_i + N'_iX'_i)$, soit en termes actuels $x = \frac{1}{2}(k^y + k^{-y})$.

La construction de la courbe logarithmique se comprend bien; mais comment LEIBNIZ a-t-il pu déduire de celle-ci la construction de la chaînette, sachant que son équation est $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}$, comme nous l'avons vu plus haut ? Nous hasarderons la procédure suivante : ayant remarqué que $\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+1\right)dx}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$, qui est de la forme du/u, on en déduit que $dy = adu/u$ et que par conséquent, en paraphrasant un passage de l'article *Nova Methodus...*" (p.117) : "si les y sont en progression arithmétique, les u seront en progression géométrique, et si les u sont des nombres, les y seront leurs logarithmes."

A une constante additive près, y sera donc égal à $aL(\sqrt{x^2-a^2}+x)$; en prenant $x = a$ pour $y = 0$, nous obtenons la primitive $y = aL(\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}+\frac{x}{a})$. En prenant l'inverse de la quantité située dans la parenthèse et en utilisant son conjugué, on obtient : $-y = aL(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1})$, et par suite : $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\left[L^{-1}(\frac{y}{a}) + L^{-1}(-\frac{y}{a})\right]$, ce qui justifie la construction des points C_i de la chaînette à partir des points X_i de la courbe logarithmique.

Voici une déduction, probablement plus proche de la réalité historique, suggérée par Dominique Benard[10] à la suite de cet atelier :

[10]IREM du Mans.

Quant au lien si étroit avec les logarithmes, il peut provenir de l'intégration proprement dite de l'équation qui a pu (a du ?) être faite par LEIBNIZ.

Toutefois cette équation seule, considérée du point de vue de la variation, ne caractérise que la branche croissante de la chaînette. Il y a donc deux équations différentielles "symétriques" :

$$dy = a\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = a\frac{dx}{s} \text{ et } dy = a\frac{-dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{-dx}{s},$$

considérations que l'on peut raccrocher aux considérations similaires faites par LEIBNIZ à propos de la différentielle d'un quotient dans la "Nova Methodus".

Mieux encore : $\frac{dx}{s} = \frac{ds}{x} = \frac{dx+ds}{x+s} = \frac{d(x+s)}{x+s} = \frac{-d(x-s)}{x-s}$.

D'où une intégration commode des deux équations différentielles :

$(y) = a.\int\frac{dx}{s} = a.\text{Log}(x+s)$ pour la branche croissante et $y = a.\int\frac{-dx}{s} = a.\text{Log}(x-s)$ pour la branche décroissante.

Pour que $(y) = y = 0$ quand $x = a$, un jeu sur la constante d'intégration donne :

$$(y) = a.\text{Log}\left(\frac{x+s}{a}\right) \quad \text{et} \quad y = a.\text{Log}\left(\frac{x-s}{a}\right).$$

Prendre en compte la remarque de LEIBNIZ sur la possibilité de choisir $a = OA$ pour unité, cela revient à considérer $Y = y/a, X = x/a$ et $S = s/a$, ce qui nous donne :

$$(Y) = \text{Log}\,(X+S); \quad Y = \text{Log}\,(X-S), \quad S = \sqrt{x^2-1}.$$

X est la moyenne arithmétique de $X+S$ et $X-S$, tandis que l'unité en est bien la moyenne proportionnelle.

D'où la construction à partir de la logarithmique ..."

LEIBNIZ est très fier de sa méthode, simple en effet dans le sens où elle ne fait appel qu'à des constructions de moyennes géométriques; en outre, on dispose grâce à elle d'une table "physique" de logarithmes :

> "Inversement, si la chaînette est construite physiquement, en suspendant un fil ou une chaîne, nous pouvons grâce à elle établir autant de moyennes proportionnelles que nous souhaitons, et trouver les Logarithmes de nombres, ou les nombres de Logarithmes, donnés." (p.194)

Nous laissons au lecteur le plaisir de déchiffrer cela, et donnons maintenant les preuves de résultats énoncés sans démonstration par LEIBNIZ dans son article.

2.3 Tracé de la tangente CT en un point C de la chaînette (p.195)

En posant $OA = a$, et en reportant $OR = OB$, on a (Figure 9) :

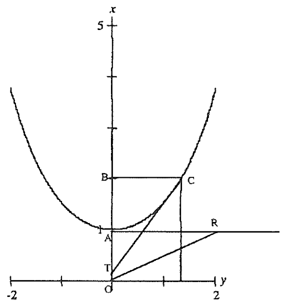


FIGURE 9

$$\frac{CB}{BT} = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{OA}{\sqrt{OB^2 - OA^2}} = \frac{OA}{\sqrt{OR^2 - OA^2}} = \frac{OA}{AR}.$$

Les triangles BCT et AOR sont donc semblables, donc l'angle AOR est égal à l'angle BCT, ce qui fournit un procédé de construction de la tangente.

2.4 Trouver un segment égal à un arc AC de chaînette (p.196)

On sait que (Figure 9) :

$$s = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{OR^2 - OA^2} = AR.$$

L'arc AC a donc même longueur que le segment AR.

2.5 Quadrature du secteur $AONCA$ (p.196)

Cette aire est :

$$\int xdy = \int a\frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a\sqrt{x^2 - a^2} = OA \times AR.$$

Le secteur a donc une aire égale à celle du rectangle de côtés OA et AR.

2.6 Centre de gravité de la portion de courbe $(C)AC$ (p.196)

Soit (C) le symétrique de C par rapport au point B (Figure 9); le centre de gravité de la portion de courbe envisagée a une ordonnée nulle, et son abscisse est donnée par $\frac{1}{s}\int xds$.
Mais :

$$\int xds = \int x\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$= \int x\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2 - a^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \int \left(\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right)dx = \int sdx + ay$$

Mais $\int sdx = sx - \int xds$ (Figure 10), d'où $\int xds = sx - \int xds + ay$ soit : $\int xds = \frac{1}{2}(sx + ay)$.
L'abscisse du centre de gravité est donc : $\frac{\int xds}{s} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{ay}{s}\right) = \frac{1}{2}\left(OB + \frac{OA \times BC}{AR}\right)$. Cette dernière formule correspond à la construction indiquée par LEIBNIZ.

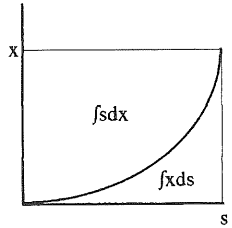


FIGURE 10 : $\int xds + \int sdx = sx$

On a donc vu comment, sur les deux exemples de la cycloïde et de la chaînette, les courbes transcendantes se traitent avec une grande facilité à condition d'admettre une nouvelle forme des équations, la forme différentielle, et un nouveau calcul, le calcul différentiel. Il n'y a donc plus aucune raison de les exclure de la géométrie : le Descartes de la *Géométrie* est vaincu.

La géométrie des Sulbasutras. Exemple de géométrie rituelle de l'Inde védique : l'agrandissement de l'autel en forme de faucon

KELLER, Olivier[1]
IREM de Lyon (France)

Abstract

L'histoire des mathématiques s'est très peu intéressée aux Sulbasutras de l'Inde védique, annexes de textes rituels consacrées à la construction géométrique d'autels et à leur agrandissement proportionnel. Pourtant, les Sulbasutras sont exceptionnels au sein des mathématiques qui précèdent les "Éléments" d'Euclide, et ceci par deux aspects :

1- Le but rituel est unique et explicite, à l'exclusion de tout autre but pratique ou pédagogique.

2- Ils mettent en œuvre des constructions rigoureuses purement géométriques, avec pour instruments une corde et des piquets, et sont donc par là beaucoup plus proches des "Éléments" que ne le sont les textes mésopotamiens ou égyptiens antiques.

Nous étudierons une sélection significative de ces textes.

[1]**Avec la collaboration de Jean-Michel Delire**, chercheur à l'Institut de Philologie et d'Histoire Orientales à l'Université Libre de Bruxelles, bénéficiaire d'une bourse 1999-2000 de la Fondation Wiener-Anspach.

1 Note historique

Malheureusement, on ne sait rien de l'Inde védique, sinon par des textes[2] auxquels il est impossible de donner une date précise. La période védique de l'histoire de l'Inde fut précédée par la civilisation dite de l'Indus — -2400 à -1700—, découverte à partir de 1921[3] par la mise au jour des villes d'Harappa et de Mohenjo-daro. L'évidence archéologique est abondante, mais l'écriture n'a pu être déchiffrée. A l'inverse, la période védique — -1500 à -500— nous offre une abondance de textes en sanskrit mais n'a laissé aucune autre trace archéologique; même son origine supposée, une invasion de tribus aryennes, n'est étayée que par des spéculations d'ordre linguistique. Les régions à scruter, comme le dit Jean Varenne, sont parmi les plus disputées de l'Asie, où se croisent les frontières de l'ancienne URSS et de la Chine, de l'Inde et du Pakistan; il est donc possible qu'un avenir plus pacifique permette des fouilles et nous apporte des révélations. D'après le même auteur, c'est en fin de période que le védisme, confronté aux tout jeunes bouddhisme et jaïnisme, éprouva le besoin de mettre par écrit et de codifier ce qui jusque-là n'était que traditions orales; ce fut un travail de plusieurs siècles, probablement entrepris à partir du 8ème siècle avant notre ère —apparition du jaïnisme—, et qui accoucha d'une énorme littérature sanskrite de milliers d'hymnes totalisant des dizaines de milliers de vers. Le *Satapatha Brahmana* à lui seul, dans sa traduction anglaise, occupe 2000 pages.

Le *Veda*, terme qui signifie savoir, science "par excellence", possède donc un canon tardif composé de textes disparates au premier abord. Classés d'après la catégorie de "fonctionnaires" du sacrifice auxquels ils s'adressent, on obtient les recueils (*samhitas*) suivants : le *Rg Veda* destiné aux verseurs de l'oblation, le *Jayur Veda* des préposés aux manipulations pratiques, le *Sama Veda* des chantres et l'*Atharva Veda* des chapelains royaux. À ces *samhitas* s'ajoutèrent plus tardivement, pour chaque *Veda*, un *Brahmana* —exégèse du rituel—, une *Upanisad* —court traité spéculatif—, et des *sutras*—prescriptions rituelles sous forme d'aphorismes—. Ces compilations nous sont en outre parvenues avec des titres, noms des clans familiaux qui en assurèrent la transmission.

Les *Sulbasutras* sont une section des *sutras* consacrée aux règles de construction d'autels sacrificiels. Nous disposons de quatre textes complets, traduits en anglais par Sen et Bag, avec le nom de leurs auteurs : Baudhayana, Manava, Apastamba, Katyayana. Ce sont des textes remarquablement courts puisqu'à eux quatre, dans leur traduction anglaise, ils n'occupent que soixante-six pages. *Sulba* signifie "corde" et les *sulbakas*, experts géomètres védiques, étaient de remarquables "tendeurs de cordes"; Démocrite se déclarait supérieur aux tendeurs de cordes égyptiens, qui n'ont laissé aucun écrit, alors que nous avons des témoignages indiens abondants. Malgré cela, malgré aussi les similitudes étonnantes entre les problèmes abordés par les tendeurs de cordes indiens et certains problèmes euclidiens, les *Sulbasutras* sont peu en vogue et peu étudiés : les traductions de G. Thibaut, en 1877 et 1882, sont introuvables et celle de SEN & BAG, publiée en 1983, ne connaît qu'une diffusion confidentielle.

Ces textes sont, comme les *Vedas* dont ils font partie, extrêmement difficiles à dater[4]; et

[2]On dispose d'extraits des hymnes védiques (magnifiques) en français, édités par Louis RENOU et Jean VARENNE. Voir la Bibliographie.

[3]Selon *Civilisations anciennes du Pakistan*, p.38.

[4]Les estimations sont, ici comme dans le cas des invasions aryennes, fondées sur des arguments linguistiques; le style des Sulbasutras est comparé à celui du grammairien Panini, qui *aurait* vécu au quatrième siècle avant notre ère et codifié la langue. L'ordre chronologique qui en résulte, et qui est généralement accepté, est le suivant : Baudhayana, Apastamba, Manava, Panini, Katyayana. Mais les dates des textes védiques varient énormément d'un auteur à l'autre : pour les Brahmanas, les estimations vont du 10ème au 6ème siècle avant notre ère; pour les Upanisads, du 9ème au 4ème. On admet souvent que le Rg Veda fut rédigé au plus tard au 10ème siècle, mais cela met à mal la théorie de Varenne —fondée sur des faits nouveaux?— qui fait démarrer les rédactions au moins deux

même si les experts finissaient par se mettre d'accord, le problème de la naissance et de l'origine des savoir-faire qu'ils expriment ne serait pas résolu pour autant puisque les *sulbakas* ont probablement codifié une tradition orale millénaire. Les chercheurs semblent assurés qu'ils sont antérieurs aux *Éléments* d'Euclide, mais là n'est pas le plus important; tout d'abord, on trouve des allusions assez nombreuses aux "anciens", comme dans le Manava 11-17 : "On fait les côtés avec 3, 4 et 5; ceux des autres sont faits en multipliant par ce que l'on veut, suivant le besoin des autels; c'est ce qui a toujours été indiqué par les anciens maîtres", qui confirment l'hypothèse d'une assez longue tradition autochtone de savoir-faire mathématicien. Mais surtout, l'idée que les *sulbakas* auraient pu piller Euclide se heurte à une objection de fond : ils auraient eu le plus grand mal à déchiffrer une somme abstraite d'*Eléments*, infiniment éloignée dans le style et dans les méthodes de leurs propres traditions, traditions qui sont à rapprocher au contraire des mathématiques babylonniennes, égyptiennes et chinoises de l'époque Han. Même si, dans l'avenir, il finissait par être prouvé que les *Sulbasutras* sont postérieurs aux *Éléments*, cela ne changerait rien au fait que, comme le *Jiuzhang suanshu*, assurément plus tardif que la somme euclidienne, ils sont d'*esprit* pré-euclidien, ils appartiennent à la vieille école des mathématiques primitives.

Il est surprenant que les *Sulbasutras* aient aussi peu attiré l'attention des historiens des mathématiques, malgré leur très grande originalité : les textes mathématiques védiques se présentent en effet explicitement comme annexes d'un rituel, et non comme des traités autonomes de géométrie, et cela leur donne un "cachet" unique dans l'histoire écrite des mathématiques, ne serait-ce que parce qu'ils sont clairement motivés. D'autre part ces textes présentent des similitudes frappantes, non seulement avec certains problèmes du Livre II des *Éléments* d'Euclide, mais avec les méthodes euclidiennes qui s'attachent à construire géométriquement toutes les figures et leurs modifications : les instruments consistent en une corde et des piquets chez les techniciens du culte védique, en des droites et des cercles chez le théoricien grec. En particulier, le problème de la construction de figures égales en aires est au centre des Livres I et II des *Éléments*, et il est également au centre des *Sulbasutras*; les Grecs se sont en outre posé le problème de la construction de figures égales en volume, et on sait qu'ils ont buté sur la duplication du cube, c'est-à-dire la construction d'un cube de volume double d'un cube donné, qui est impossible à la règle et au compas. Or ce cube est un autel ou un tombeau, d'après le commentaire d'Eutocius aux œuvres d'Archimède[5] : on peut se demander alors si une partie au moins des mathématiques euclidiennes n'auraient pas une lointaine origine mythique-rituelle ressemblant au védisme.

On peut se demander encore, au vu des nombreux rituels "mathématisés" que révèle l'enquête ethnographique, si les mathématiques védiques ne sont pas l'expression d'une des formes les plus abouties, dans l'état actuel de nos connaissances, d'une gestation de la géométrie au sein de la pensée primitive mythique-rituelle, avant l'accouchement proprement dit dû au travail de la nouvelle pensée philosophique née en Grèce antique[6].

Nous présentons ici quelques *sutras*, dans leur concision et pour certains leur obscurité originales, extraits des *Sulbasutras* de Baudhayana et Katyayana, d'après la traduction du sanskrit

siècles plus tard.
Les quatre Sulbasutras sont généralement datés d'avant le 3ème siècle, et même d'avant le 5ème siècle (pour Baudhayana et Apastamba), selon certains auteurs.

[5]Archimède. 1970. *Œuvres, Tome IV : commentaires d'Eutocius et fragments*. Trad. Charles Mugler. Paris: Les Belles Lettres.

[6]Ce point de vue est développé dans KELLER (1998).

en anglais par SEN & BAG (1983), *The Sulbasutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava with Text, English Translation and Commentary*; nous avons parfois également utilisé la traduction du sanskrit en français de Jean-Michel DELIRE (1993). Nous y avons joint quelques commentaires succints pour que le lecteur comprenne de quoi il s'agit.

Les extraits ont été choisis de telle sorte que le lecteur puisse se faire une idée précise et complète de la façon fort élégante dont était résolu le problème, très important rituellement, de l'agrandissement homothétique d'un autel en forme de faucon[7], problème qui mobilise une très grande partie des connaissances mathématiques présentes dans les *Sulbasutras*.

Le fait que les textes que nous présentons soient motivés, dans le sens où ils sont des éléments d'un rituel, ne signifie pas que la liaison entre le mythe et la ritualisation géométrique soit immédiate et limpide. Je soumets au lecteur les grandes lignes de l'interprétation développée dans ma thèse.

a)- Le rite est un rite de sacrifice; la fonction de l'objet sacrifié (denrée alimentaire, animal et peut-être même humain) est double : il est d'abord la substance intègre, l'énergie sacrée concentrée qui, coupée ensuite en morceaux ou répandue dans l'espace par le feu et par la parole de l'officiant, devient créatrice, redonne naissance au monde suivant le modèle d'une naissance primordiale. Le sacrifice est donc reconstruction effective, et non simple commémoration, et par là il manifeste l'intelligence du monde.

b)- La même "quantité" d'énergie peut diversement s'incarner, et la reproduction rituelle en sera la construction de figures diverses de même aire, souvent égale à 7,5 pour des raisons de correspondance numérologique avec des démiurges; ces figures sont, entre autres, des triangles, des losanges, des cercles. D'où, par exemple, des formulations de quadrature du cercle et inversement de circulature du carré. Mais d'autre part la création est extension d'une même force créatrice, et la reproduction rituelle en sera par exemple l'extension homothétique de l'autel en forme d'oiseau, dont nous donnons le détail ci-dessous.

c)- Les formes, leur extension et leurs transformations rigoureuses les unes dans les autres, sont un moyen inventé pour résoudre la contradiction entre le mythe, qui exprime à la fois l'unité du monde et les infinies transformations de ses éléments les uns dans les autres, et le rite, qui doit déterminer cette dialectique universelle en des gestes précis et des objets précis. La mathématique, en tant que quantité déterminée, participe du rituel. Comme rituel concret, elle s'oppose d'abord violemment à la poésie du mythe universel des êtres se transformant les uns dans les autres : elle est froide, absurdement minutieuse, maniaque. Mais comme forme abstraite qui se transforme et qui s'étend, elle récupère la dialectique spontanée de la pensée primitive en donnant aux analogies innombrables une forme extérieure déterminée, faute de leur donner un véritable contenu.

d)- Il s'agit de création; tout doit donc sortir du sacrificateur lui-même identifié au démiurge primordial. C'est de lui que doivent surgir la mesure et la forme : l'unité de base est le *purusa*, égale à la hauteur d'un homme les bras levés. Faute de pouvoir créer à partir de rien, le rituel cherche à créer à partir de presque rien; pour ce qui nous concerne, il s'agit de cordes et de piquets, qui font penser à la règle et au compas grecs. Ce minimalisme de départ donne nécessairement naissance à un corpus de constructions géométriques qui s'enchaînent les unes les autres, ou plus exactement qui tentent de le faire; telle est la nature des *Sulbasutras*.

[7]Pour les motivations mythiques-rituelles, on pourra consulter RENOU, VARENNE, les travaux de Jean-Michel DELIRE et la thèse de KELLER.

Note de J.M. DELIRE : pour les besoins de leurs sacrifices, les Indiens védiques construisaient sur le terrain sacrificiel différentes formes géométriques simples. Ainsi, l'autel qui servait à cuire les offrandes représentait le monde terrestre et était circulaire; l'autel qui servait à brûler les offrandes pour les envoyer aux dieux via le feu représentait le monde céleste et était carré. Ils étaient tous deux faits de cinq couches superposées de même forme, composées de 21 briques chacune. D'autres structures, comme les tables d'offrandes, étaient de forme trapézoïdale. Enfin, durant un rituel nommé *agnicayana* (empilement de l'autel du feu), un autel particulièrement important était construit en vue de grands sacrifices. C'était le cas, par exemple, lors de l'*asvamedha* 'sacricifice du cheval', un grand rituel royal encore pratiqué à l'époque du *Mahabharata*. Cet autel était, lui aussi, composé de cinq couches de briques, au nombre de 200 dans chacune. La forme de cet autel pouvait varier selon le but recherché par le sacrifiant : triangle isocèle ou double triangle (i.e. losange) pour vaincre ses ennemis, disque pour obtenir de la nourriture, en forme d'oiseau de proie (*syena*, souvent traduit 'faucon') s'il voulait obtenir le ciel. C'est cet oiseau de proie qui nous intéressera plus particulièrement dans cet article, sous la forme simplifiée dite *caturasrasyenacit*, 'empilement de l'oiseau de proie formé de carrés'.

Nous avons présenté, lors de l'université d'été, un montage N/B fait à partir des films réalisés par l'université de Berkeley, montrant plus particulièrement les opérations de mesurage lors d'un agnicayana accompli en 1976 dans l'état du Kérala. Les auteurs de ces films, Frits Staal et Robert Gardner, ont réalisé un montage couleur d'une heure présentant l'agnicayana de manière plus générale[8].
Fin de la note de J.M. D.

2 Extraits des *Sulbasutras*

A. Méthodes générales[9]

1-1 Les diverses constructions de foyers sacrificiels vont être données.

1-2 Nous allons expliquer les méthodes de mesure des aires de leurs figures sur le sol.

1-4 Si l'on veut un carré, une méthode est de prendre une corde de longueur égale au carré donné, faire des nœuds aux deux extrémités et une marque en son milieu. On trace la ligne et on plante un piquet en son milieu. On fixe les deux nœuds au piquet et on trace un cercle avec la marque. Deux piquets sont plantés aux deux extrémités du diamètre. Un nœud étant fixé à l'est, on trace un cercle avec l'autre; la même chose à l'ouest. Le second diamètre est obtenu des points d'intersection de ces deux; on plante deux piquets aux deux extrémités du diamètre. Avec deux nœuds fixés à l'est, on trace un cercle avec la marque; on fait la même chose au sud, à l'ouest et au nord. Les points d'intersection donnent le carré.

Commentaire : construction d'un carré "à la corde et au piquet". Soit c la longueur de la corde, qui détermine le côté du carré; tracer successivement : la ligne est-ouest EO=c et son milieu I, le cercle C de centre I et de rayon c/2, les cercles de centres E et O et de rayon c dont les intersections déterminent la ligne nord-sud NS (les points N et S sont placés sur le cercle C), et

[8]Nous remercions Frits Staal pour nous avoir autorisés à projeter des extraits de ses films lors de l'Université d'Été. Une copie du montage fait à Berkeley peut être consultée à l'Institut Kern de l'Université de Leiden (Pays-Bas) ou commandée via le Center for Media and Independant Learning – 2000 Center Street, Fourth Floor – USA – Berkeley – CA 94704.

[9]Extraits du *Baudyayana Sulbasutra*; la numérotation des *sutras* suit l'édition-traduction de SEN & BAG.

enfin les quatre cercles de centres E, O, N et S et de rayons c/2. Les quatre sommets du carré sont les intersections (autres que I) de ces cercles.

1-5 Maintenant une autre. Faire des nœuds aux deux extrémités d'une corde de deux fois la mesure et faire une marque au milieu. C'est pour la ligne est-ouest. Sur l'autre moitié, à une distance plus courte d'un quart, faire une marque appelée *nyancana*, puis une marque au milieu pour les coins. Les deux nœuds fixés aux deux extrémités de la ligne est-ouest, tendre la corde vers le sud par la *nyancana*; la marque du milieu détermine les coins est et ouest[10].

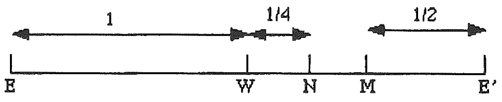


FIGURE 1

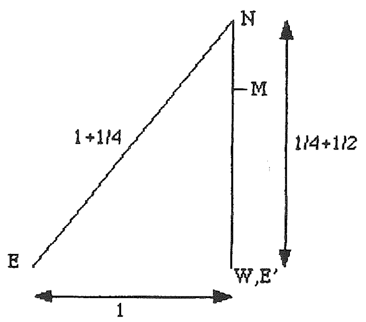


FIGURE 2

Commentaire : construction du même carré de côté c avec un triplet pythagoricien. On marque une corde de longueur EE'= 2c, avec W en son milieu; WN=1/4 c et ME'=1/2 c (Figure 1). Attacher les extrémités E et E' de la corde à deux piquets plantés en E et en W, et tendre la corde vers le haut en la tenant en N (Figure 2). On obtient un triangle rectangle d'hypothénuse EN=5/4, et de côtés EE' = 1 et E'N=3/4. Le point M est l'un des "coins" du carré; la même opération, mais en tendant la corde vers le bas, donne le deuxième "coin" du carré en M. Les deux derniers "coins" sont obtenus de même, après avoir inversé l'orientation de la corde.

1-9 La diagonale du carré produit le double de l'aire.

Commentaire : le carré construit sur la diagonale d'un carré a une aire double de celui-ci.

1-10 La largeur d'un rectangle étant le côté d'un carré donné et la longueur le côté d'un carré

[10]D'après J.M. DELIRE, la traduction littérale des "coins est et ouest" est "les épaules et les cuisses"; cela est dû à une vision anthropomorphe de l'autel, être humain dont la tête est à l'est et les pieds à l'ouest. Les coins est sont alors ceux des épaules, et les coins ouest sont ceux des flancs ou des cuisses. (DELIRE 1993 p. 27)

double (ou la productrice du double), la diagonale est le côté du carré triple (ou la productrice du triple).

1-11 Par là on explique le côté du carré égal au tiers d'un carré donné : c'est le côté du carré neuvième du carré.

Commentaire : pour construire un carré dont l'aire est le tiers d'un carré donné, on construit d'abord le triple de celui-ci, comme expliqué en 1-10, puis on en prend le neuvième; il suffit pour cela de partager chaque côté du carré triple en trois parties. On suppose (d'après un témoignage visuel[11]) que le partage d'un segment en n parties égales se faisait en pliant une corde de même longueur n-1 fois sur elle-même.

1-12 Les aires produites respectivement par la longueur et par la largeur d'un rectangle, donnent ensemble l'aire produite par la diagonale.

1-13 Ceci est observé dans les rectangles ayant pour côtés 3 et 4, 12 et 5, 15 et 8, 7 et 24, 12 et 35, 15 et 36.

2-1 Si l'on souhaite combiner deux carrés de mesures différentes : couper une partie du plus grand avec le côté du plus petit. La diagonale de la partie coupée est le côté du carré combiné . . .

Commentaire : voir figure 3.

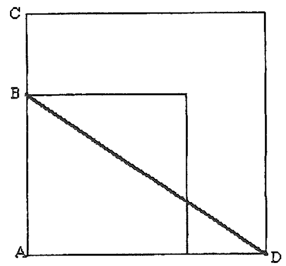


FIGURE 3

BD est le côté du carré dont l'aire est la somme des carrés de côtés AB et AC.

2-2 Si l'on souhaite enlever un carré d'un autre : couper une partie du grand avec le côté du petit que l'on veut enlever. Le côté de la partie coupée est placée en travers de façon à toucher le côté opposé; par ce contact, c'est coupé. Avec ce qui est coupé la différence est obtenue.

Commentaire : On porte AH=AB; GH est le côté du carré dont l'aire est la différence des aires des carrés de côtés respectifs AB et AC (Figure 4).

[11]Seidenberg, p.336, n.53.

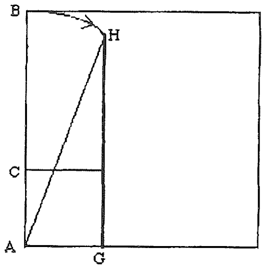


FIGURE 4

2-5 Si l'on souhaite transformer un rectangle en carré, prendre sa largeur comme côté d'un carré; le reste est divisé en deux parties égales et placé sur deux côtés. La place vide est remplie avec un morceau; l'enlèvement de ce morceau a déjà été établi.

Commentaire : Pour transformer le rectangle ABCD (Figure 5) en carré (de même aire), construire le carré (1) de côté AB, partager le rectangle restant de diagonale ED en deux parties égales, et transférer la partie (2) en (3). Le rectangle ABCD est donc équivalent en aire à la différence des carrés de diagonales respectives AF et EF; la façon de procéder pour construire cette différence est en 2-2.

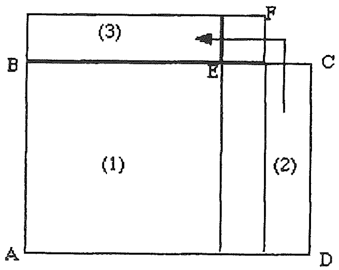


FIGURE 5

2-9 Si l'on souhaite transformer un carré en cercle, tendre la demi-diagonale du centre vers l'est. Avec un tiers ajouté au reste, le cercle est tracé.

Commentaire : formule de la circulature du carré; reporter (Figure 6) le demi-diagonale du carré "vers l'est" en OB; le rayon du cercle équivalent en aire à ce carré est OC+(1/3)CB.

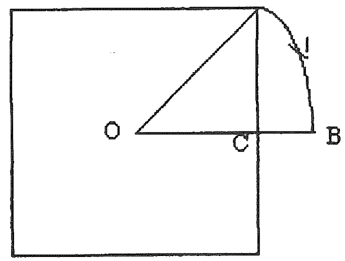


FIGURE 6

2-10 Pour transformer un cercle en carré, diviser le diamètre en huit parties; diviser une partie en vingt-neuf parties, réduire de vingt-huit d'entre elles puis du sixième moins le huitième.

Commentaire : formule de la quadrature du cercle. Le côté c du carré équivalent en surface au cercle de diamètre d est :

$$d\left(1 - \frac{28}{8 \times 29} - \frac{1}{8 \times 29}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6 \times 8}\right)\right).$$

2-11 Ou bien, diviser en quinze parties et le réduire de deux d'entre elles; cela donne le côté approché[12] du carré.

Commentaire : ou bien c=d-(2/15)d.

2-12 La mesure doit être augmentée de son tiers et ceci à nouveau de son quart moins la trente-quatrième partie; c'est la diagonale du carré.

Commentaire : la diagonale du carré de côté c est : $d = c\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}\right)$.

B. Application : l'agrandissement homothétique de l'autel en forme de faucon

8-1 Maintenant celui qui désire le ciel doit construire un foyer-autel en forme de faucon.

8-5 Un autre *Brahmana* dit : le foyer-autel est celui qui est construit à la ressemblance d'un

[12]D'après la traduction anglaise de SEN & BAG, mais le terme utilisé, *nitya*, renvoie plutôt à quelque chose de 'traditionnel', par rapport à quoi la première quadrature proposée dans *Baudhayana* serait nouvelle et effectivement moins approximative. L'auteur en avait certainement conscience, mais il a conservé la méthode avérée, sanctionnée par la tradition, comme le fait généralement tout auteur indien. (Note de J.M. D.)

oiseau, c'est-à-dire d'après l'ombre portée par l'oiseau en vol.

8-10 Le corps est un carré de quatre *purusas*[13]; son aile sud est un carré de un *purusa* rallongé d'un *aratni*[14] sur le côté sud, et de même pour l'aile nord. Sa queue est un carré de un *purusa* rallongé d'un *pradesa*[15] sur le côté ouest. Ainsi, avec l'addition d'*aratni* et de *pradesa*, le sept-part est réalisé.

Commentaire : schéma (Figure 7) du faucon d'après l'ombre portée en vol. Il est composé de sept parties, et son aire totale est de 7,5 *purusas* carrés. Le fait que les sept parties initiales sont carrées justifie son nom de base, *caturasrasyenacit*, modifié en *saratnipradesasaptavidha* ('l'autel-foyer en sept parts avec *aratni* et *pradesa*') lorsqu'on prolonge ses ailes et sa queue (J.M. D.).

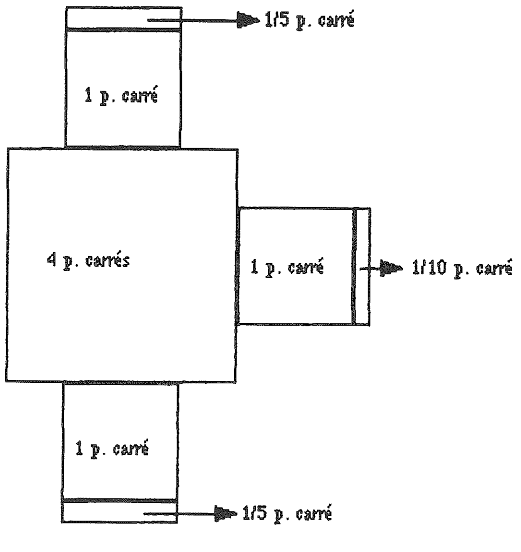


FIGURE 7

[13]Selon les *Sutras* 8-7 et 9-1 d'Apastamba : "Conformément à la tradition, être mesuré avec un *purusa* signifie être mesuré avec une tige de bambou. On fait deux trous sur une tige de bambou à une distance égale à la hauteur du sacrificateur les bras levés . . . ", comme le montre bien le film de Frits Staal.

[14]1/5 de *purusa*.

[15]1/10 de *purusa*.

5-1[16] On va expliquer comment le feu-autel cent-une-parts est obtenu graduellement.

5-3 Jusqu'à vingt-et-une parts, le feu-autel doit-être accru d'un *purusa* carré.

Commentaire : (J.M. D.) : au départ, lorsque le sacrifiant le fait construiire pour la première fois, l'autel doit avoir une aire de 7,5 *purusas* carrés; s'il le fait construire à une autre occasion, il doit mesurer 8,5 *purusas* carrés, et ainsi de suite. Si 21,5 apparaît ici, c'est parce qu'il s'agit de la taille obligée de l'autel d'un *asvamedha*, quel que soit son rang dans la succession des autels construits par le sacrifiant.

5-4 Pour ajouter un *purusa* à l'autel original en forme de faucon, construire un carré égal à l'autel original avec ses ailes et sa queue, et ajouter un *purusa*.

Commentaire : à partir de l'autel original de 7,5 p. carrés, il faut construire géométriquement un autel de même forme mais d'aire 8,5 p. carrés. On commence pour cela par transformer l'autel original en un seul carré C: l'officiant sait en effet, grâce aux *sutras* précédents, transformer des rectangles (le bout des ailes et de la queue) en carrés, et ajouter des carrés. On peut maintenant ajouter à ce grand carré C un carré de 1 p. carré, et nous avons maintenant un carré C' de 8,5 p. carrés.
J.M. D. : Baudhayana procède autrement (5-6) puisqu'il propose de diviser le carré additionnel (d'un *purusa* carré) en 15 parties égales, puis d'additionner deux de ces parties à chacun des sept carrés qui composent l'autel. Bien entendu (mais sous-entendu), il faut aussi augmenter proportionnellement les prolongations des ailes et de la queue.

5-5 L'autel original doit être divisé en quinze parts égales. Deux de celles-ci doivent être transformées en carré. Cela donne l'unité du *purusa*.

Commentaire : Le carré C' de 8,5 p. carrés doit à présent être retransformé en un autel de même forme que le précédent; la technique est de construire une nouvelle unité (le nouveau *purusa*)[17], telle que le nouvel autel ait pour aire 7,5 nouveaux *purusas* carrés. Pour cela : diviser le carré C' en quinze rectangles égaux, en partageant un côté en trois et un côté en cinq, et transformer deux de ces rectangles (2/15 = 1/(7,5)) en un carré C"; 7,5 de ces carrés C", agencés comme il est prescrit en 8-10, donneront un autel de même forme que le premier et d'aire 8,5 p. carrés.

5-7 Ou bien, une aire d'un *purusa*-carré est divisé par cinq lignes des deux côtés. Cinq de ces petites parties doivent être transformées en un carré, dont on enlève le tiers. Le reste est ajouté à un *purusa*-carré. C'est une autre méthode.

[16]À partir d'ici, extraits du *Katyayana Sulbasutra*.

[17]J.M. D. : il semble cependant que Baudhayana, dont nous avons déjà vu qu'il pouvait innover tout en respectant la tradition, a essayé de construire directement le nouvel autel, puisqu'il énonce des méthodes de transformation de carrés en rectangles. Celles-ci seraient nécessaires, par exemple, pour adapter aux bouts des carrés représentant les nouvelles ailes et queues (obtenues selon 5-6) les carrés obtenus après avoir additionné (sous forme de carrés bien entendu) chaque prolongement (en *aratni* et *pradesa*) à la portion du *purusa* supplémentaire qui leur revient. Ces méthodes de transformation de carrés en rectangle peuvent aussi provenir d'une attention supplémentaire portée par Baudhayana aux méthodes inverses des méthodes connues (cf l'exemple de la quadrature du cercle). D'autre part, il peut aussi avoir répugné, plus traditionnellement, à utiliser un nouveau *purusa*, alors que cette mesure (de la taille du sacrificateur, rappelons-le) était l'étalon de l'autel, et, partant, de la représentation du monde, 'à la mesure de l'homme', qu'il symbolisait dans la pensée védique.

Commentaire : il s'agit d'une autre méthode de construction du nouveau *purusa*; diviser un carré de un *purusa* de côté en 25 parties, transformer le rectangle formé de cinq de ces parties en un carré, et enlever à ce carré son tiers (voir 1-11). On obtient un carré d'aire $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15} = \frac{1}{7,5}$ p. carré; si on lui ajoute un carré de un *purusa* de côté et que l'on fait un carré de l'ensemble, celui-ci est le nouveau *purusa* carré. En effet 7,5 de ces carrés auront une aire totale de 7,5 (1 + 2/15) = 8,5 p. carrés.

5-10 Ou bien, une aire de un *purusa* doit être divisée par sept lignes des deux côtés; combiner sept de celles-ci. De cette somme combinée, 1(1/7) *d'angula*[18] par 1 *purusa* doit être soustrait. Le reste est ajouté à un *purusa*. C'est une autre méthode.

Commentaire : abrégé de la liste des opérations pour fabriquer le nouveau carré unité : carré de un p. carré, carré de 7/49 = 1/7 p. carré, puis de 1/7 – (1 + 1/7)(1/120) = 2/15, et enfin 1 + 2/15 comme en 5-7.

6-7 Le côté transversal doit mesurer un de moins que le nombre de carrés à combiner en un carré; les deux côtés doivent mesurer un de plus que cela. On forme un triangle; l'altitude le produit.

Commentaire : méthode pour transformer n carrés identiques (de côté 1) en un seul carré d'aire n.
$AC = n - -1, AB + BC = n + 1$, donc $BH^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = n$. Le carré de côté BH est donc équivalent à n carrés de côté 1. (Figure 8)

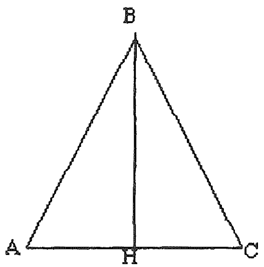


FIGURE 8

[18]1/120 de *purusa*

Bibliographie

BAG, A.K. 1979. *Mathematics in Ancient and Medieval* India. Dehli: Chaukhambha Orientalia.

Civilisations anciennes du Pakistan, 1989. Catalogue de l'exposition présentée aux Musées Royaux d'Art et d'Histoire. Bruxelles.

DEDRON, Pierre, et Jean Itard. 1959. *Mathématiques et mathématiciens.* Paris : Magnard.

DELIRE, Jean-Michel. Indian Mathematics in the Context of the Vedic Sacrifice (Sulbasutra). Article soumis à publication dans la *Revue d'Histoire des Mathématiques* de la Société Mathématique de France.

DELIRE, Jean-Michel. 1993. Un chapitre du *Baudhayana Sulbasutra.* Traduction et commentaires concernant les connaissances mathématiques de l'Inde védique. Mémoire, Philologie et Histoire Orientales, Université Libre de Bruxelles.

KELLER, Olivier. 1998. Préhistoire de la géométrie : la gestation d'une science d'après les sources archéologiques et ethnographiques. Thèse, Histoire et civilisations (Histoire des sciences), Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.

LLOYD, Geoffrey E.R. 1993. *Pour en finir avec les mentalités.* Trad. Franz Regnot. Paris : La découverte.

RENOU, Louis, ed. 1956. *Hymnes spéculatifs du Véda. Traduits du sanskrit et annotés par Louis Renou.* Paris : Gallimard.

SARASVATI AMMA, T.A. 1979. *Geometry in Ancient and Medieval India.* Dehli : Motilal Banarsidass.

SEIDENBERG, A. 1962. The Ritual Origin of Counting. *Archive for the History of Exact Sciences* 2 (1) : 1-40.

SEIDENBERG, A. 1978. The Origin of Mathematics, *Archive for the History of Exact Sciences* 18 (4) : 301-342.

SEIDENBERG, A. 1983. Geometry of the Vedic Ritual. in Staal vol. 2 : 95-126.

SEN, S.N., & BAG, A.K. 1983. *The Sulbasutras of Baudhayana, Apastamba, Katyayana and Manava.* New Dehli : Indian National Science Academy.

SMITH, David Eugene. 1958. *History of Mathematics.* 3rd ed. 2 vols. New York : Dover.

STAAL, F. (Ed.).1983. *Agni, the Vedic Ritual of the the Fire Altar.* 2 vol. Berkeley.

VAN DER WAERDEN, B.L. 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Berlin : Springer.

VARENNE, Jean. 1967a. *Le Veda. Textes réunis, traduits et présentés sous la direction de Jean Varenne.* Paris : Les Deux Océans.

VARENNE, Jean. 1967b. *Mythes et légendes extraits des Brahmanas.* Trad. J. Varenne. Paris : Gallimard.

VARENNE, Jean. 1989. Veda. In *Encyclopedia Universalis.* Paris.

Shaping Mind by Shaping Space
- Friedrich Froebel and the Romantic Tradition in Education -

KLEIN, Peter
University of Hamburg (Germany)

Abstract

While Friedrich Froebel's "Kindergarten"-idea for early education has been a world-wide success, the "Spielgaben" which he conceived as the corresponding educational medium widely have not been used in that universal and comprehensive sense Froebel had intended. Conceived as a series of building blocks of basical geometrical forms, they were not meant as just another toy, but as concrete symbols of the structures of matter as well as of the human mind, which in the playing child should act as incentives of mental development and of orientation in a complex world.

The specific shape of this idea emerges from "Romantic Natur-philosophy" (RNP) (in which Froebel participated as a philosopher and as a (crystallographer-)scientist) : Based on idealistic "Identitätsphilosophie" (Schelling), RNP developed a concept of nature, that postulated an undividable unity of divine spirit (as the creator of nature), of the structures of the human mind, and of the dynamical structure of nature itself. RNP thus replaced the mechanistic, materialistic selfunderstanding of modern science by laying the grounds for contemporary concepts about matter and mind, both taken as systems of fields of force, of symmetries and of selforganisation.

Thus, Froebel's concept seems to be apt to inspire and to unify contemporary ideas about the role of structures, of selforganisation, and of symmetry in mathematical, physical and chemical instruction.

1 Froebel's "Spielgaben" : the Pedagogy of Romantic Philosophy of Nature

1. 1 Dynamic Explanation of Nature

In 1804, the German Crystallographer Christian Samuel Weiß wrote one of the most charming attacks in history of science. After translating René Just Haüy's "Traité de minéralogie" he vigorously denies that the theories he had just translated are useful for any exact definition or explanation of the different forms of crystals; in an annex to vol.1 he contrasts them with his own "dynamic" ideas. The humorous aspect of such selfassurance consists in the fact that the then 24 years old Weiß, though having grown up in the good "school" of Abraham G. Werner, was a still completely unknown junior scientist, whilst Haüy was the most famous crystallographer of his time.

Haüy's explanations of the regular crystal forms, as they are characterised by specific constant plane angles, can nowadays be found in every textbook on crystallography or solid state physics, and we wonder why Weiß objected to them. Haüy imagines crystals as being composed by tiny regular parallel-epipedical elements whose regular increments small scales let grow the manifold real, geometrically specific forms of crystals on a big scale. Weiß (and other "dynamists") did not absolutely object, as is frequently stated, to the existence of those quasi atomic elements which Haüy assumes in his definitions, nor to the possibility of deriving crystal forms from them. But he denied that this derivation can be accepted as a final explanation, as true knowledge, as knowledge of the truth, of the forms of the elements or of the structures of the crystals : "(The atomist) acknowledges a distinct form as given directly from the existence of atoms. The dynamist denies this"; what really he demands is the explanation also of the structure of those postulated building elements and of the laws of the increments as caused by the innate bonds, forces and energies of the substance of matter, be this now atomistic or not. Yes, he even "opposes the absolute, unconditioned existence of matter at all", which perhaps, under certain circumstances, may be just a "temporary" phenomenon which on its part needs explanation by the eternal, unchanging forces of nature - in my eyes a consideration by no means irrelevant, if we look on contemporary field theories about the structure of atoms, on Quantum-electrodynamics, on laws of symmetry and interaction. Thus, the demands of Weiß can be looked upon as an absolutely modern and legitimate program, although 150 years had to pass for its fulfilment this demands were legitimate also insofar as the atomistic constructions by means of simple addition of building elements do not only take for granted the form of these elements themselves, but could not fulfil even in those days (Werner taught at an institution of applied science, the mining academy in Freiberg!) the postulates of applied mineralogy, an aspect, however, which we cannot discuss in detail here.

1. 2 The philosophical basis : Romantic Natural Philosophy

The deeper motivation of Weiß' critique, however, was of philosophical origin. Atoms in Haüy´s sense could at best render mere phenomenological descriptions of natural phenomena, but no explanations based on causes immanent in Nature. In this point, the critique of Weiß is congruent with that of the other so-called "Naturphilosophen" of those times. They elaborated a fundamental criticism of the mechanical, materialistic understanding of Nature as it was preferred by the Enlightenment movement, an idea finally extended even on the spiritual life of man (de la Mettrie : "l'homme machine"). Contrary to this understanding, the Romantic

Natur-Philosophy (RNP) demanded a definition of Nature as based on internal forces and energies. Nature was imagined as a unit of a whole, interwoven by forces, or, more generally, as a texture of forces unfolding from themselves, guided by their inner dynamics. As it is fully comprehensible in its structures only as a whole, it has the character of an organism. Nature was looked upon as animated, even as endowed with a soul, with a creative urge, which enables Nature to unfold on the basis of the energies inherent to it - if we disregard some quaint linguistic details typical for the time, this concept can well be looked upon as quite a modern program of "selforganisation" of Nature.

Corresponding to a "philosophical" view on Nature, these energies have been endowed by certain general laws of formal kind, postulations of equilibrium, symmetries, polarities - theorems of conservation of the basic qualities imagined as substantial - postulates which, when uncritically applied by weaker philosopher-scientists, in fact often led to untenable structures of mere speculations, which up to now discredited this philosophy as a whole. On the other hand, when critically applied those guiding ideas of empirical research yielded important results which have since proved fundamental to modern science; like Oerstedt's and Faraday's insight into the connection of electricity and magnetism, or like the theorem of the mechanical heat equivalent which Julius Robert Mayer as the first conceived as a general theorem of energy-conservation, yielded on the basis of RNP arguments. But only nowadays the whole value and depth of RNP has become evident, insofar as ideas and general considerations about symmetries of energies, their correlation with theorems of conservation and interactions play a constitutive part in actual physics and express the most general interfering principles of Nature (KLEIN 1992).

In general, and as a focus of our further considerations, RNP considers Nature not as something fixed and finished, a product like a ready but dead clockwork wound up, perhaps by God the creator, and now running down according to mechanical laws ("natura naturata"); rather it is understood as something permanently changing and lively-dynamic, as something spontaneously intertwining according to inner laws, modifying in manifold ways, creating itself by internal activity and change ("natura naturans").

1. 3 Philosophy of Identity

RNP has not only to do with Nature as something exterior to Man, but Man himself is part of Nature. Though finding himself opposite of Nature, he is also interwoven in it in manyfold ways caused by his dependency on Nature as an intelligent and active creature. The idea that Man and Nature are correlated to each other in an isomorphic, complementary sense can be traced back to the philosophy of Friedrich Schelling.

Usually, Schelling is looked upon as one of the three German "Idealistic" philosophers - Fichte, Schelling, Hegel, in this sequence, with Hegel as its culmination and perfection. This view, however, is not what we have in mind here. An idealistic philosophy generally means - misinterpreting and exaggerating Kant's basic idea about the limitation of our cognition by means of Man´s cognitive structures - that our knowledge of Nature can be completely (re)constructed merely by using our knowledge of the structure of our cognition (thus at least Hegel's opinion).

Schelling does not go so far but balances out the relation between Nature and Man more cautiously. His chief question (which is taken up again in science mpre recently in "Evolutionary Epistemology") is this : When taking seriously Kant's critique about the impossibility of direct cognition of Nature - is it possible to derive, from these very cognitive structures, the qualities Nature must have so that it could procreate a living being like Man, with these empirically stated cognitive structures?

Thus in a methodically direct and philosophically comprehensive sense, which even surpasses the mere cognitive function, a unity of Man and Nature can be constituted. The nature of Man, also that of living beings at all, their spontaneity, their permanent agitation, mobility, and capacity for metamorphosies are being declared as structural moments of Nature in general, a kind of universal creative urge attributed to Man as well as to Nature.

This duality now will be completed by the third partner, God himself as the creator of both, in the so-called "Pan*en*theism" of Karl Christian Friedrich Krause (with whom Froebel was in friendly relations). Quite in the sense of RNP, for him "the whole organic realm of Nature on earth" "proves" to be "a unique indivisible organism, a huge all-embracing body, which celebrates itself in the abundance of all plants and species of animals." (KRAUSE 1819, p. 15). But at the same time he looks upon Nature and Man as in their connection with God (l.c. 18) : "Man is not only spirit or merely body, nor both merely imagined as co-existing beneath each other. He is something new, consisting of body and spirit, but being formed by (the power of) God and destined to develop the life of Nature and the life of Reason as a unity, and to represent this unity by a harmonical interchange of all united and spiritual vital energies in common acts." In Krause's opinion God dismisses (releases) the world and Man, both according to His own image, and He persists in both His creations as the creative energy - therefore called pan*en*theism, i.e. the idea of God as certainly existing on His own, yet nevertheless at the same time immanently hidden in Nature as well as in Man.

The formal structures of God (as the creator), of the world and a human mind are identical insofar, as they all are of mathematical kind. Hence, "in practicing mathematics, Man participates in Divine spirit." (Novalis) Consequently, e.g. in Humboldt's plans about the German "Humanistisches Gymnasium", mathematics, together and equivalent with Greek language, becomes the core of the curriculum. The same holds for Froebel's ideas on education of Man, which we will study now.

1. 4 Froebel : "Menschenerziehung" (Education of Man)

Froebel had studied in Jena, so most likely (though not proven) had attended the lectures of Schelling. He was friendly with Krause, as already mentioned, and as a (natural) scientist and crystallographer he at times assisted Christian Samuel Weiß. Thus he participated in all three mentioned directions of romantic thought, and as we will see, he was prepared in the best way and in an highly adequate field of science to his own pedagogical mission, with a sound scientific basis that preserved him, different from many contemporaries, from bad-grounded speculations.

According to what we said before, Froebel's basic idea should be evident, after all. If Nature is considered as a productive, selfgenerating and continuously metamorphosing "natura naturans", instead of a mechanical, statical "natura naturata"; and if Man is also being conceived as a spiritual-organic being that generates itself according to its own internal energies; then the child, insofar as it develops and differentiates from a germ in accordance with internal laws, can be regarded as the most beautiful and most copious symbol of this vital energy in Nature. For Man

in general Froebel states :

> Man - mankind in Man - must not be understood as something ready, as something isolated nor finished, not as something stable or static, but as a living entity, continuously developing, eternally vivid, unfolding and generating itself step by step, actively aiming for its final and eternal goal (Froebel 1826, ME 44f.)

as something in development however which deploys itself only and simply by internal blind and undirected dynamic, but, as it is, and should become a reasonable creature, also guided and unfolding itself by the instruction of the surrounding Nature.

The child now, running through this process of development on an elementary level, also depends upon elementary experience of Nature which, on this elementary level comprises and expresses symbolically Nature as a whole in itself. Here now Froebel's crystallographic basis comes into play insofar as the crystalline forms and shapes appear as such elementary symbols of Nature as a whole which for the child represent nature in an elementary perceptible and conductive manner, initiating and regulating the child's own development, reaching far beyond simple, prima vista chaotic nature, and equivalently important as social relations with parents, the family, and the whole socio-cultural environment (ME 74f).

As a free and spontaneous relation fed by an inner dynamic this connexion with Nature must not result from externally motivated, didactic instruction, but has to be spontaneous in itself, and this becomes obvious for the child when it appears to him as a play :

> In fact all this happens especially by play, by the cultivation of children´s play, which in the beginning has the character of unconscious living-with-nature. Play in this phase is not a silly trifle; it is of high value and has an earnest meaning. Mother, nourish and care for it! Father, protect and guard it ! (ME 75)

Froebel continues emphatically :

> Playing, play is the highest level of the development of the child, of the development of mankind in this time, for it is freely active expression of internal life, a necessary expression, a basic need of innermost life. Play is the purest, the most spiritual produce of Man in this phase, at the same time it is ideal and after-image of the whole human spirit, of the innermost, secret life of Nature in Man and in all things.

The intercourse with Nature also fulfills the requirements of turning to God, i.e. of religion :

> What religion says and expresses, nature shows and exhibits; what is taught by the reflection of God, is confirmed by Nature; reflection of internal processes is verified by external nature; what religion demands, is fulfilled by Nature. For Nature, and everything that exists is a manifestation, revelation of God. Everything is of divine nature, divine essence. (ME 175)

1.5 Pedagogics of the Spielgaben

For the young child, the crystals and crystalline forms are by far too complicated for a playful approach (the same is true for the adult inquiring reason - that is why scientific research ("solid state physics") is necessary also for them!) The crystals themselves have more elementary geometric roots, which even more basically symbolize the cosmic structures. For a playfully learning access Froebel conceives a series of donations for play ("Spielgaben") which in their inner logical structure correspond to the structure of the cosmos as well as to the conformities (inherent laws) of the child's unfolding mind. We will attend now to these structures for a while on the basis of the lithographs which the editor added to Froebel´s works on the pedagogics of the Kindergarten (FROEBEL 1862, *cit.* PK)

The "Spielgaben" at the beginning are destined for children of two or three years old. They constitute an ascendant series of elementary geometric basic forms, which in their tactile qualities as also in their conceptual schemes thoroughly shape the child's play, thus rendering comprehensive possibilities of development. Now, for Froebel comprehensive playing doesn't mean just a stupid and mute handling with objects, but also - Man being a creature of language! - to set it into a linguistic intercourse - to give to this action of handling objects a linguistic counterpart : to accompany action by singing, rhythms, little verses and sayings, which arise by themselves, but which also mean describing, conceiving exact linguistic expressions for facts and clear ideas of the structures of the world.

Prior to language, the whole body gets into interference with the material. A ball on a string, for example, swinging to and fro, the hand stimulating the ball to swing in resonance and counterresonance, then also the arm automatically will be involved, and with the arm also the whole body; and murmuring and singing "to" and "fro", and the eyes following the ball on the string, the body will participate nearly dancing; and quite in the sense of Piaget's principle of "internalisation", the structures within and behind action will be internalized pre-rationally, as structure of space, or as structure of swing.

Generally, the first Spielgabe is "the ball" - geometrically : the *sphere* (WAGEMANN, 1957). It is the overarching symbol of the cosmic order : as the most perfect, since most symmetrical regular form, equally extending to all its parts and directions, giving the same aspect from all sides, consistent, perfect, of ideal beauty (Froebel´s "Spherical Law"). For the baby the ball is made of stuff. Moved by a thread we can see again (Fig.1 = PK 1) this simple to and fro, which further on now differentiates the shapes of the ball's movement, revealing the structures of space as well as the physics of movement under constraint : lifting it over an obstacle, again accompanied by murmuring "hither and thither", "hither and thither". The ball moves "up" and "down"; it leaps, "tip, tap, tap", over the floor; jumps up and leaps down again; "rolls away" and "comes back" again, forced by the string. Thus, by swinging to and fro, moving up and down, or "left" and "right", the directions of space and their relations to the body, to its axes and directions, the coordination of sensual experiences, of optical or motional orientation will playfully be internalised. In connection with this, by the impulse to give to these movements of the ball a verbal expression, a term, a description, the linguistic competence will be exercised, quite in the sense as e.g. - there, however, merely verbally, and for the children looking on : merely in a receptive way - the verbal games of Erny and Bert in the Sesamstraße to be carried out in a compensatory way for the socially or linguistically deprived.

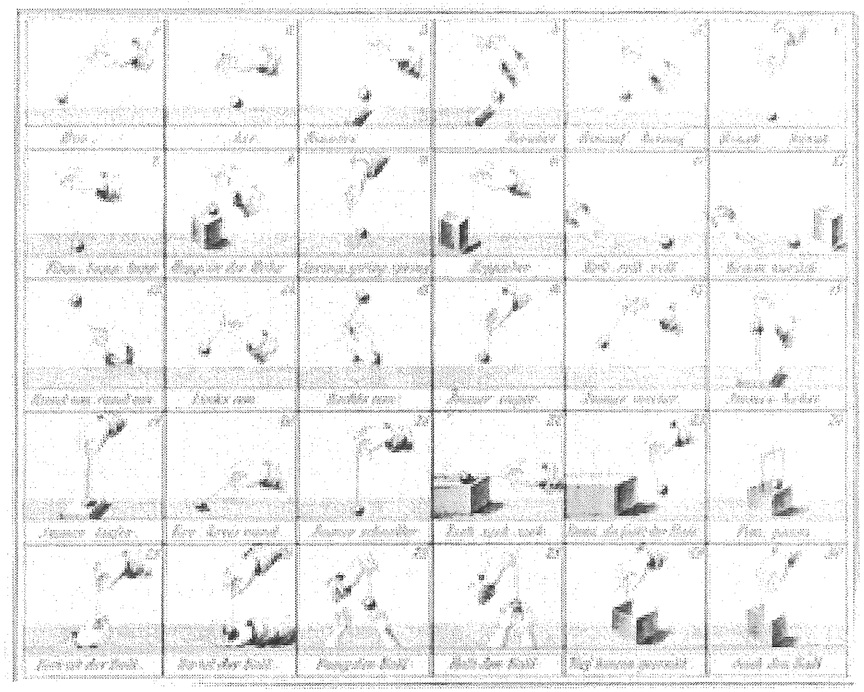
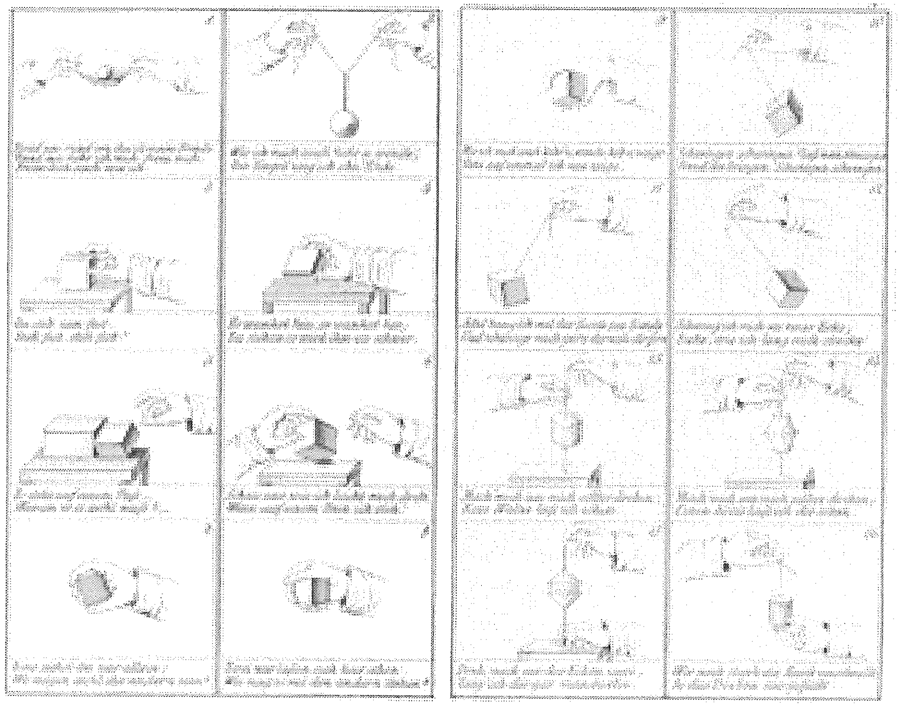


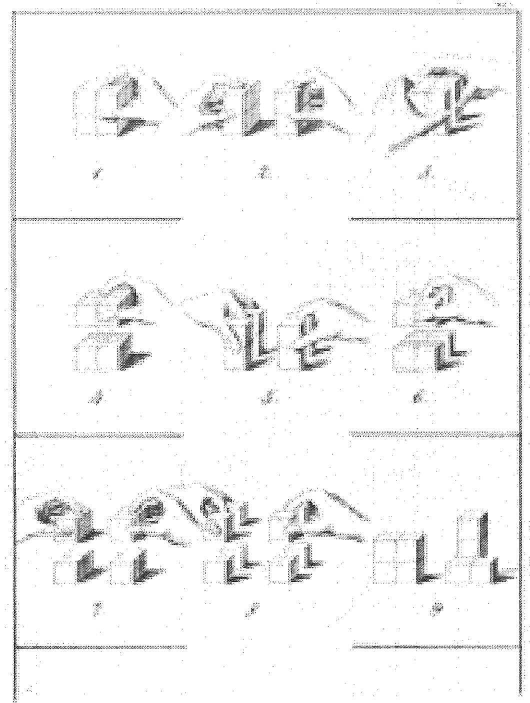
FIGURE 1

Fig.1/13-20 shows further bound movements, which are coupled with physical laws : with centrifugal force, with translatory and rotary movements in space, with damped oscillations, i.e. the helical movement of the ball approaching zero position "by itself", or moving in an opening helix when energy is added by a synchrone rhythmic movement of the hand.

In Fig.1/25, 26 notice the use of the category of "conservation" : catching the ball, it disappears in the closed hand, re-opening it : the ball is still there; that means : "conservation" is established already at this age - no, not only established but already playfully varied. In fact, the baby is very early and naturally familiar with this kind of "conservation" when, for example, it creeps under a sofa in search for a disappeared ball, because it knows for certain that it must be *somewhere* - thus is the manner by which Piaget's concept of conservation is acquainted at a very early age.



As for Weiß the indexing of crystal axes, so for Froebel it is the play with the ball, the correlation of its movements to the axes of the body (to/fro, up/down, right/left) which already elucidated the marking of the threefold space extension, which, irrespective of rational valuing of space as homogenous, will remain a lifelong unconscious background association. The basic geometrical form, which mathematically specializes the threefold directions of space, is the *cube* (ME 2oo). So the cube is accordingly the second Spielgabe, which shows a wealth of characteristic mathematical and physical regularities (conformities with natural laws) (Fig. 2, a,b = PK 2). Nr.3 shows the stability of the cube, considered as basis for every life, Nr.4 the unstable balance when standing on the edge, Nr.5 the effect of friction, within certain limits making possible stability of unstable mechanical configurations. Nr.6 shows the pecularities of axes and freedom of rotation in case of punctual resting, 7, 8 and 9 show the symmetries of different views of the cube, the number of the appearing planes, in relation to the laws of symmetry : of one plane with its fourfold rotational symmetry (7), the two-planes view and its twofold (8), the threefold symmetry when looked along the space diagonal (9) (cf. also ME 200 f.). The faculty of fancied metamorphosing of geometric structures - the experience of their metamorphoses are being prepared by the winding movements of the cube around different axes and of the then appearing veiling structures (PK 2,13-16).



The third Spielgabe is the threefold divided cube, divided into eight small cubes by three planes vertical to each other, in correspondence to the three directions of space. It gives mathematical reference - and exercises the fine movements of the fingers - when they are separated into the mathematically possible arrangements (Fig.3 (=PK3). The divided cube now is specialised enough to experience the three essential methods of composing complex forms out of elements resp. elementary forms. Different aspects of the world can be represented as

- forms of living
- forms of cognition
- forms of beauty.

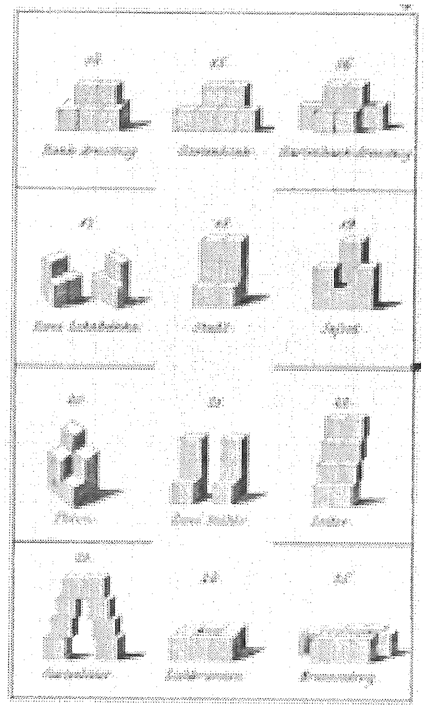


Fig.4 (=PK4) shows some of such *"forms of living"* : objects of everyday's life are constructed by use of the set of small cubes, thus give vivid experience, how the world can be imagined as being constructed from basic geometric bodies. The complex shapes of the world are reduced to elementary forms, in the sense how Kandinsky conceived his elementary course of "analytic drawing" at the Bauhaus. Complex things comprehend elementary parts, and can be constructed from these elements. Abstraction, feeling for space, and imaginative thinking will be exercised by supplying mentally those elements that are hidden behind others (Fig.4; 15, 16, 19, 20) - nowadays a standard part of maturity tests at schools.

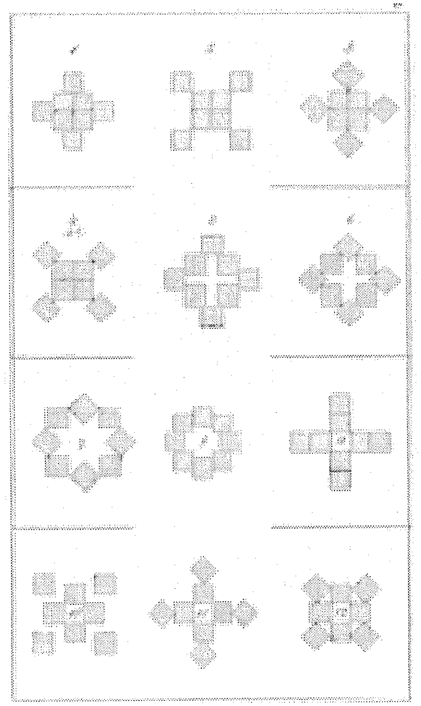
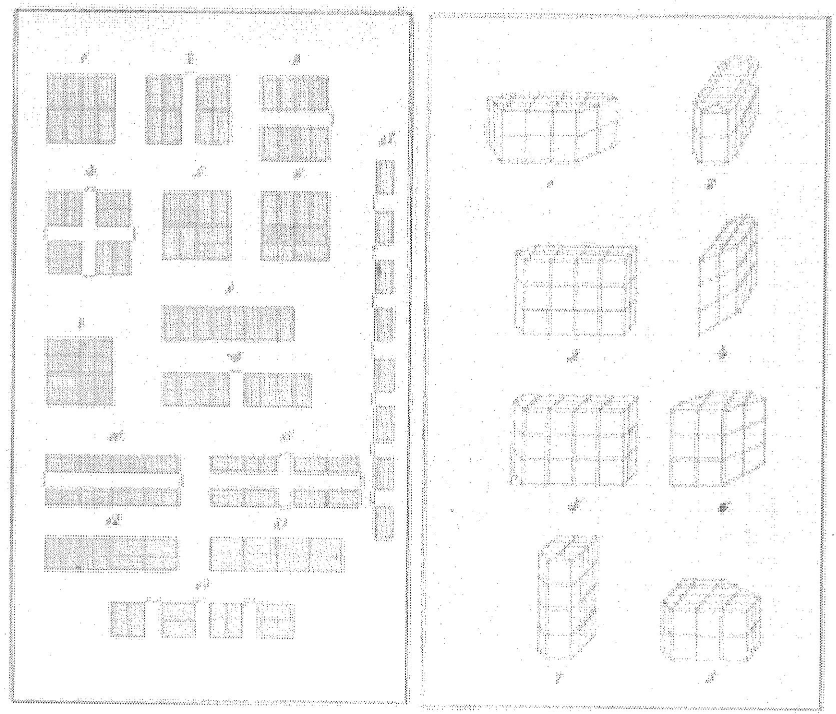


Fig.5 (=PK5) shows *forms of beauty*, regular ornaments without concrete signification, which can be composed from the small cubes and which we perceive as beautiful. Here again the complex comprehends the elementary, now in such a manner that the symmetries of the ornaments result more of less determined from the symmetrical qualities of the elements. Beauty appears as the playful combination of freedom and constraint. Displacements of the structure elements cause fractions of symmetry and metamorphoses on the whole scale.

Finally, *"forms of cognition"* show the regular interchange between elementary and complex arrangements that will be examined according to those laws, that come out as mathematical theorems (e.g. Fig.6 (=PK 8) for the fourth Spielgabe, the "quadered" cube). It becomes evident, that decomposing and synthesising of the world are but different aspects of a world of abstract formal rules "behind" the appearing objects, which result a system of laws (called "mathematics") that governs their concrete manifestation. In a manner familiar for contemporary mathematical didactics this formal analysis can be further developed to divisions and calculations of planes, to the illustration of number systems and of the elementary rules of addition, subtraction and multiplication. That the world is penetrated and ordered by formal rules which we call mathematics will be experienced by play and trained by schooling.

By the last Spielgabe of the pedagogy of the Kindergarten, the diagonally divided cube, the division of planes will be extended into space (Fig.7 (=PK.11)). Columns, complex polygons, discrete divisions of space and cellular structures lead to the metamorphoses of polygons and their zone-rules. Froebel's crystallographic starting point is regained by play.



To sum up, it should become evident how Froebel, in decomposing and synthesising elementary and complex forms, intends to enable children to understand the structure of the world as a beautiful entity ordered according to rational laws, and how this experience is apt to stimulate the mental development of children in harmony with the world.

2 "Games with Rules", or : Symmetry as a Ferment of Mental Development

2.1 Symmetry and Self-Organization : the Modern Paradigm

The scientific ideas of RNP of course did not remain unchanged during the last two centuries of research. On the contrary, the "original" RNP suffered serious criticism and neglect, whilst science itself developed independent from philosophical considerations (at least supposed to do so!). Even the already achieved (or better : postulated) unity of (atomistic) "matter" and (fields of) "force" separated again through the 19th century. They were unified again, however, on the base of renewed and modernised ideas of RNP, that had remained as influential substreams of formal ideas about natural laws, which were recombined since about 1900 by the new paradigm of modern science : to understand atoms as centers of fields of force, that constitute matter

by processes of selforganisation, which are directed and controlled by the symmetries of their fields.

Thus, the concept of *symmetry* became the overarching idea to tie together the various fields of science about nature - and those of science about our mind as well, since the mind must be understood as both : as the tool for getting knowledge about nature, and as a part of nature itself. "Only" the idea of God, as the creator of both, has been expelled from science. (The numerous monographs on symmetry and its application in science and art can easily be found in book catalogues or the internet; the "International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry" (ISIS-Symmetry, founded in 1989) dedicates its work and its periodical, "Symmetry - Culture and Science", to this nearly limitless scientific and artistic field).

I want to sketch now some ideas for implementation of symmetry in education, which I have developed and tested on various school levels. Parts of them were introduced into the Hamburg "General Science Syllabus" for Comprehensive Schools. The full range of the possible interdisciplinary role of symmetry for the formation of mind and for study of science cannot be exhibited here for reasons of briefness. I want to confine myself to some remarks on *mathematics* in *primary*, and to *science* on *secondary level.*

The intention to implement symmetry in school must not be considered as an addition of a mass of new, just different topics of instruction, meant for a merely receptive learning and memorising by heart. Instead, it shows its full wealth only when taken as a general horizon of mental development, a vivid and multifunctional ferment of mental formation ("Bildung"), in about the same manner as Froebel had understood his concept of education. Thus, many of the following consideration are valid for a modern re-interpretation of Froebel-pedagogy as well. With respect to science education, two further views should act as general background ideas :

- The idea that our mind, as the medium of understanding the world, is the product of its interaction with the world. Thus mind receives its shape by the experience of the world during its development, general (in evolution), or individual (in education). Reversely, the mind also shapes the conception of the world, by applying its structures to the world (- the basic idea of Kant´s "Critique of Pure Reason").
- The consciousness that the empirically stated order in nature (e.g. symmetry), and the control of natural processes to verify this order by natural laws ("self-organisation") are just two different aspects of the same thing.

Considering the realisation in school now, the basic methodical postulate would be : keep away from mere verbal instruction, but aim for a participation of the pupils´ whole person. Esp. in lower classes, this may best be achieved, in a relaxed manner which is very suitable to the topic, by true manipulating work with appropriate materials and techniques. Preferable esp. for scientific modelling would be types of material that do not command a *special* interpretation (e.g. in the manner of "look, this is a model of a NaCl-crystal"), but rather by the use of types of building elements which show only certain symmetrical qualities, but further are free for concrete scientific or artistic interpretation. Froebel proposed a manifold of materials to make children play with structures, yet favoured his Spielgaben as optimal. To my knowledge, the most versatile modern system of material in this respect is "Geomix" from Ratec/Frankfurt (it was used for the illustrations in the 2nd part of this paper).

The advantage of these symmetrical qualities would be that constructing and modelling activities achieve the character of games that follow certain rules, yet have an earnest intellectual background. It would even be a serious obstacle of understanding and of mental development to declare a certain activity as a topic of "art" or "mathematics" or "chemistry" (not even as a part of the background-theory in the mind of the teacher!). A vivid variation of the different meaning-levels seems the best method to improve both, formal development of mind, and topical learning.

With these basic guide-lines in mind, we will find symmetry an outstanding medium of erudi-tation, since it fulfils nearly all formal requirements which modern education would demand as principles of fertile instruction :

- It aims at interdisciplinary approach since it deals first with formal conditions of understanding applicable to all possible objects of experience;
- It relates objects of learning to each other, thus rendering possible *shaped, understanding* learning;
- All formal laws raise from and remain closely related to *sensual experience*;
- A deep feeling of comfort is raised by having symmetrical orders open to our senses; this affects our sense of *beauty*;
- Learning with symmetries may be based on action, and action will continue to give a basis of understanding for complicated problems; the promoting unity of action, of sensual and intellectual activity in understanding will be experienced;
- These activities may be abstracted and *formalised* towards mathematics, simple enough, yet basic, thus *evolving* the mathematical interpretation of the world;
- On the other side, they are applicable for detailed concretisation, yet with very general principles as promoters and guideline;
- These problems also cover all school levels, but its typical subjects are not too far from traditional school topics, so that implementation would not raise serious difficulties in syllabus : It is more a new spirit than new contents that are aimed for.

Of course, there will be, and shall be, some topics which school hitherto has not dealt with, or topics, that will seem to be introduced "too early", so that teachers might be in fear of additional stress and of extension of an already overcrowded curricula. This would be an unnecessary fear, since, as you remember, the intention is not to introduce problems artificially, but that the problems *introduce themselves*, so that, on the contrary, it would be an artificial obstacle to keep them from affecting pupils' minds : the intrinsic logic and inner dynamics of the symmetries of the used materials and methods should (nearly) always generate the problems being treated,

thus creating a sort of *self-organisation of problems*, so that the result, though it demands hard motoric and intellectual work, should be joy and relief.

I will now give a survey of topics I treated in schools on the various levels I had access to. The illustrations are but a small selection of the activities being done. On the other hand, this necessary restraint could be an advantage for the reader : Instead of being limited, your imagination should be inspired – so feel free in imagining!

2.2 Preschool Level

The fields of activities mentioned here respectfully remember Froebel´s pedagogy. Activities should only *prepare* exercises in symmetry by laying emphasis on *topological* aspects of action and imagination in space, such as :

- Orientation in space (up – down, left – right, before – behind, inclined, diagonal, through, around. . .)
- Spatial relations between different objects.
- Connect different objects ("trains", garlands), let them close (chains, necklets, fences), cross each other (bridges, warps), encircle areas, erect boundaries. . .
- Study qualities of simple geometrical bodies : balls (look alike from all directions), bricks (different types : cubes, blocks, pyramids, bars; different views : surfaces, edges, corners); stable and unstable positions.
- Generation of lines by stringing points, of planes by shifting bars (or whirling bars around your fingers, or around axes, or. . .), covering space by shifting planes, asf.

Do not drill the children to do certain exercises, but let the challenge of material do the job; vary problems; embed them into "meaningful" games, into narratives, artistic activities; or, at different occasions, abstract them and make them conscious. Very important : make the children speak about what they do, this give them implicit selfreference; but do not intend a canonic, nor an even "professional" terminology, on the contrary : intend a versatile common language, rich with associations, yet precise.

All these are well-known axioms of preschool teaching; just make them rich, and be sure they will effect implicitly what you intend.

2.3 Primary Level

The "New Math" reform of primary mathematics, in spite of its condemnation and pretended failure, in fact resulted a considerable enrichment of classical geometry and of calculating towards activities with symmetries and structures. Apart from regional differences, one nevertheless might criticise in general :

- that they do not go far enough. Especially the symmetries of space usually are lacking – for bad reason : aversion of teachers against true actions ("no time", "no materials") and the difficulty of illustrating them in textbooks. The latter however is the reason for their importance : symmetry operations in space would need a fourth dimension - the simulation of line-symmetry in (dim n) by a true operation, turning around an axis on (dim n + 1), is no longer possible – so action in space basically must happen in imagination.

- A further criticism is that symmetries are fixed on the mathematical use, but neglect the colourful enrichment they could gain by looking on biology, on arts, on music and dancing; in reverse direction, artistic activities, or the beauties and functions of biological objects, lack a deeper understanding by structural insight, which would lead immediately into mathematics. (In general, the split into the "two cultures" caused a completely unwarranted fear of mathematics teachers to lose "strictness" by artistic fantasy, of teachers in arts, to hinder "creativity" by disciplined reflection on the process of creation – numerous books on ornament construction in art nouveau, many of which have been reprinted recently, show the contrary.)
- Finally, the inner-mathematical use of symmetries in school is too poor, too : the study or the construction of ornaments is shown immediately to lead to classical geometrical problems, whilst the autonomous value of symmetry problems, e.g. first steps into group theory, are estimated low – caused by the flop of New Math., but without reason, since group theory allows us to denote the formal (= mathematical) structures of empirical space.

To turn to primary instruction now, symmetry would appear especially as a matter of "mathematics", but with respect to the media by which it should be introduced, mainly as a matter of "art".

In fact, at this level an approach of a certain systematic character should introduce the various types of symmetry operations. First would be finite symmetries : line symmetry and rotational symmetries (Fig.8); their combinations constitute the full range of rotational structures and fulfil the axioms of cyclic groups. When studying them (in the sense of : playing with them), notice how originally non-symmetrical problems come into consideration, too : rotational subgroups and submultiples; line symmetries of rotations, odd and even numbers, order of rotational symmetry, fractions and angles.

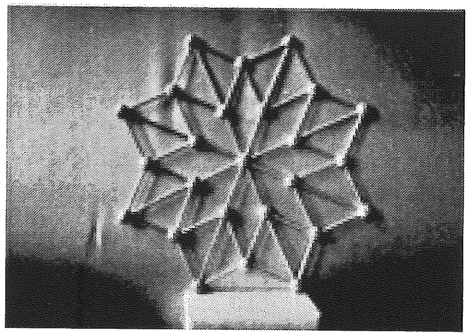


FIGURE 8

Adding shift operations (translatory symmetry) will cause infinitely extended ornaments : strings in one dimension, mosaics in the plane (Figs.9,10), finally lattices in 3-dim. space. It is an enormous step for children of age eight or nine to understand what really it means to say just "and so forth", and to operate with it – this needs careful elaboration. New types of symmetry operation will arise from this addition, fulfilling the group axioms again, now resulting the two types of (Felix) Klein's four element group; so the structure of space, insofar it is constituted by symmetry operations, is active mathematics on Klein's group.

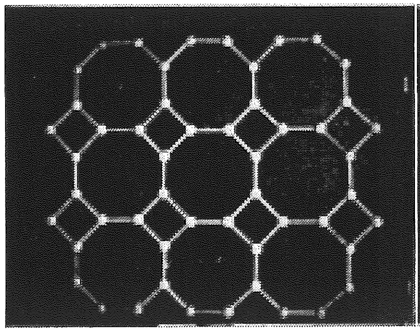


FIGURE 9

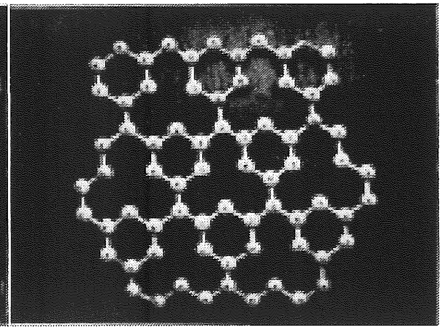


FIGURE 10

Take the simplest and most general one of the polyhedra, a parallel-epiped, and shift it translatory into three independent direction over whole space, thus children will get first experiences with lattices; construct regular aggregates of bricks, of matchboxes, cells; for oblique epipeds take sphere-and-rodlets structures; these immediately render experience with symmetry centres, mirror type symmetry in space and the crystallographic laws of rational indices - all this will happen nearly automatically.
"Automatically" – that´s the key-word for the basic experience when dealing with all these things; for it is by no means intended to "learn" all this by verbal or formal drill; instead, all these subjects mentioned should evolve intrinsically from the structures of materials and methods, most of which, as mentioned, under classical categories would appear as "arts".

The intention with them all is that the resulting symmetries are automatically generated by the techniques used, so that the more or less surprising effect causes the question why that is so, and what are the details. Well known in this respect, dealt with in many publications, is the generation of linear symmetries by paper folding, gluing, blotting; for rotational symmetries : folding through centres, puttering with straw... Regular plane ornaments are constructed with "elementary ornaments" (paste board or wood) which are encircled and added to each other by continuously repeated rules of symmetry operations. Translatory symmetry of all types is most easily achieved by constructions with bricks or spheres regularly pierced and tied together by rodlets (e.g. Geomix-type).

All plane ornaments can also be drawn or painted free-hand on paper. But this would be a conscious *decision* to regularity instead of an instrinsic automatism of elements or techniques.

In some techniques, one finds even both. In Javanese batik, for instance, the restraint to regular design in spite of free "painting" technique serves as a medium of contemplation, whilst modern, semi-industrial techniques of stamping batik patterns by use of a "cap" represent intrinsic regularity, the laws of which must be considered during production and afterwards are fixed. The same holds for European "blue print" on textiles with wooden stamps, whilst the well known "potato prints" allow both types of design. The various techniques of weaving, by different rules of interweaving warp and welt, render convincing examples how the technical process itself implies different symmetrical textures.

Of course, all these *active* methods should be paralleled by studying and contemplating given ornaments and works of art, by pictures or better with the originals. Combine the study of mere formal textures with possible meaning, for instance, when enjoying a Gothic window for its fine ending, tell the narrative of the pictures in the field, too – imagine why the medieval artist has combined them!

2.4 Secondary Level

This is the appropriate age to experience the dependence of structures in nature from the symmetries of building elements, and this will last as an "open end" situation - its still ours in scientific research.

You may start with "lattices", on basis of linear and plane translatory symmetry, as mentioned in the preceding chapter; this would be in particular adequate if, as usual, an extended phase of primary level work with symmetries does not exist.

You may also start with particles of highest symmetry, spheres, which would restitute the 17th century atomistic approach, with anticipated success today, however, since knowledge increased since to steer this process of learning. In Germany, there has been done a lot of conceptual work in this direction (listed in SCHMIDT, 1987) which one might call a "starting chemistry with structures"-concept ("Strukturorientierter Chemieunterricht").

The principal idea is just to put together a lot of spheres of provisionally same size (made from styropore, wood, or metal), and to look what will happen. There will result densely packed, hexagonal plane layers, which when stacked up will render the densely packed spherical lattices; there are two of them, the plane centered cubic and the hexagonal densest lattices (plus the energetically interesting bodycentered cubic).

The spheres of course are meant to represent particles of spherical symmetry, i.e. particles which commit equal forces into all directions. This is the case for electrically charged particles, ions (with stripped or added electrons) and metals (with their outer electrons delivered to the "electron gas").

The three mentioned lattices indeed are the typical structures of metals, and the study of lattice gaps and configuration groups will render many chemical problems, while plausible arguments on stacking faults, dislocations and particle exchange lead immediately on problems of plastic flow and of alloys, thus to metallurgy and solid state physics.

Ions, to their side, are geometrically characterised by different particle radii, and in fact, when

throwing together spheres with different size (preferred ratios of radii 1:2 [for the NaCl-lattice, Fig. 11] and 3:4 [for the CsCl-lattice]), the main types of salt crystals will immediately result.

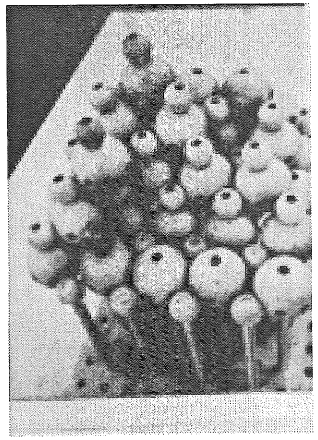


FIGURE 11

Isolated molecules are constituted by atoms which commit directed forces, so their symmetry is low, and also shows a great variety of subtypes. But the very representative of directed (homeo-polar) forces is the *tetrahedral* configuration, since the symmetry of four equivalent forces, which is the preferred symmetry of the four electron pairs of the rare gas shell, shows this shape (KLEIN, 1980). Tetrahedral forces may be represented by all carbon models, or, as a "merely symmetry"-particle, with Geomix by a tetrahedron brick or a tetrahedral pierced sphere. Consequent use of symmetrical orientation of neighbours in tetrahedral configurations ("cross" or "parallel" (Fig. 12)) will automatically lead to wide fields of organic chemistry. Nearly all subjects of basic organic chemistry are comprised, but also subjects which rarely if ever will appear in school - like cyclo-alcanes or polyhedral alcanes (Fig. 13). Even important modern materials like silicates and silicone come into view by the automatisms of modelling by means of symmetry.

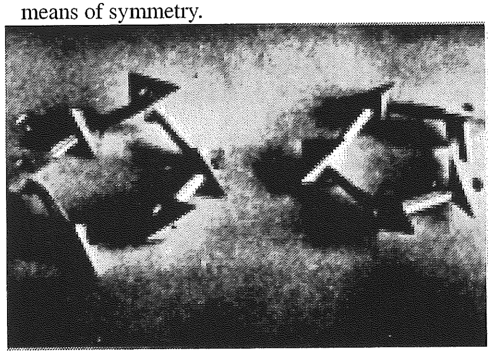


FIGURE 12

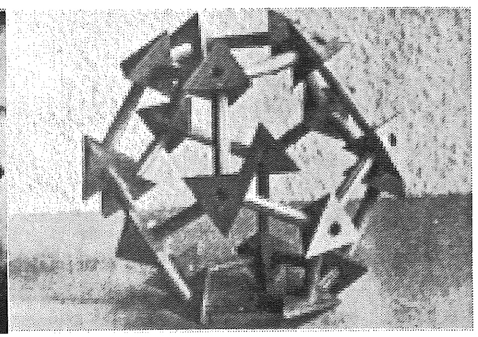


FIGURE 13

The tetrahedral configurations may also be extended infinitely into three dimensions, so that there will result the structures of diamond (Fig. 14), semi-conductors and ice or clusters of water (Fig. 15 : Pauling´s "Chlatrat"-model of water), rendering a structural approach to their interesting large scale phenomena.

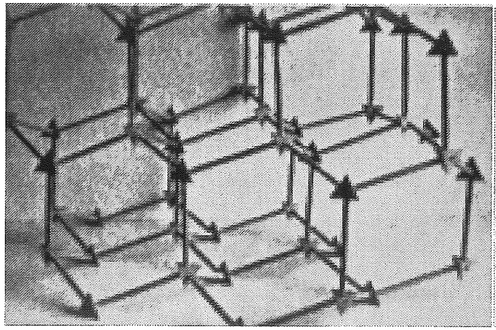


FIGURE 14

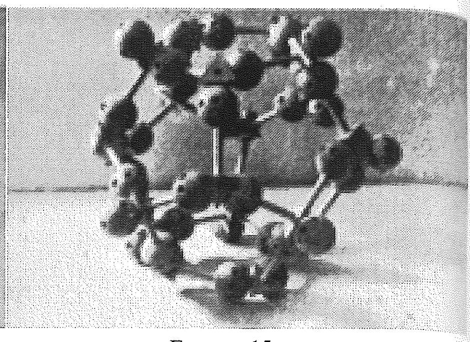


FIGURE 15

Parallel to these structural games, and their interpretation as and application in "classical" themes of science education there should be rich experiences and activities with topics connecting phenomena with structures as KELLER (1980) proposed for crystal growth.

Let this be enough for a gross sketch of the fruitful problems which may be generated and mastered by symmetry considerations in science education. I have confined myself to science here for reasons both of briefness and competence. I hope the interdisciplinary role of symmetry stretching also into the fields of "humanities" has become obvious, though.

This comprehensive role does not mean, however, that it should happen mainly within comprehensive - so called "interdisciplinary" or "integrated" - courses; though frequently favoured, this aim usually can result only a more or less diffuse unit of a whole. In contrast, education on secondary level should make use of the full clearness and differentiation of knowledge and problem-solving that is rendered possible by the discursive nature of mind and which happens most effective "classically", namely in different sciences. "Different" must not mean "isolated". It was my main intention here to stress the understanding that especially during phases of parallel strings in different sciences, symmetry can act as an overarching background organiser of learning in school that ties students' minds together and protects them from the stupidity of learning into separated boxes.

Thus, instead of being just more or less efficient *instruction*, learning would become a medium of true cultural formation. By its intrinsic beauty, symmetry would connect knowledge with morality - and that would be the *humane* task of symmetry in education.

Bibliography

BOLLNOW, Otto Friedrich (1952); Die Pädagogik der deutschen Romantik (= Geschichte der Pädagogik Bd. 4); Stuttgart

FROEBEL, Friedrich Wilhelm August (1826); Die Menschenerziehung,. . . ; quoted as ME from H. Zimmermann (ed.), Leipzig (Reclam) 1926

(FROEBEL) (1862); Die Pädagogik des Kindergartens (= F.F. coll. papers (Wichard Lange (Ed.) vol. II); Berlin (quot. PK)

KELLER, E. (1980); Wachstum und Aufbau der Kristalle; Köln (Aulis Praxis Schriftenreihe Bd. 10)

KLEIN, Peter (1980); Das Tetraeder als Baustein räumlicher Strukturen; in : chimica didactica vol. 6; pp 173-191

KLEIN, Peter (1992); Symmetry Arguments in Romantic Natur-Philosophy; in : Symmetry - Culture and Science; vol. 3; pp 401-420

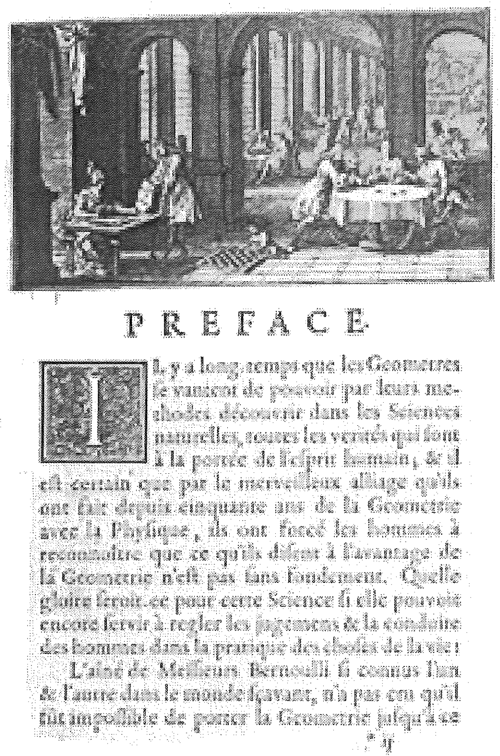
KRAUSE, Karl Christian Friedrich (1819); Das Urbild der Menschheit; Dresden (2.ed.)

SCHMIDT, S. (1987); Die Struktur von Stoffen als Leitlinie zum Verstehen chemischer Prozesse; Kiel (PH (=Teacher College); Doctoral Thesis)

WAGEMANN, Elmar Bussen (1957); Quadrat - Dreieck - Kugel; die Elementarmathematik und ihre Bedeutung für die Pädagogik bei Pestalozzi, Herbart und Froebel, Weinheim O.J.

The "International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry" (ISIS-Symmetry) is accessible via the Secretary General :
Dr. György Darvas; SYMMETRION; P.O.Box 994; H-1245 Budapest; Hungary;
Phone : 36-1-131-8326; Fax. : 36-1-131-3161; e-mail : h492dar@ella.hu

"Geomix" is produced and distributed by "Ratec" Modellsysteme (Georg H. Schmidt);
Körberstraße 15; D-60433 Frankfurt/Main; Phone : 49-(0)-69/525981; Fax. : 49-(0)-69/516331


PREFACE.

IL y a long-temps que les Geometres se vantent de pouvoir par leurs methodes découvrir dans les Sciences naturelles, toutes les veritez qui sont à la portée de l'esprit humain; & il est certain que par le merveilleux alliage qu'ils ont fait depuis cinquante ans de la Geometrie avec la Physique, ils ont forcé les hommes à reconnoître que ce qu'ils disent à l'avantage de la Geometrie n'est pas sans fondement. Quelle gloire seroit-ce pour cette Science si elle pouvoit encore servir à regler les jugemens & la conduite des hommes dans la pratique des choses de la vie!

L'aîné de Messieurs Bernoulli si connus l'un & l'autre dans le monde sçavant, n'a pas cru qu'il fût impossible de porter la Geometrie jusqu'à ce

Première page de l'*essai d'Analyse sur les jeux de Hazard* (1713) de Montmort

On the duality of the probability concept – from the epistemological point of view

LAKOMA, Ewa
Institute of Mathematics – Military University of Technology, Warsaw (Poland)

Abstract

The dual character of probability concept -described from historical point of view by Ian Hacking- has become an inspiration to me for research in epistemology of probability in the process of learning in today's classroom.

In this presentation I would like to show and to analyse students' natural ways of probabilistic thinking and forming probabilistic mental objects which can be matematised by the mature dual concept of probability. The essential feature of this concept -duality- serves as a tool for diagnosis and evaluation of a degree of maturity of student's probabilistic knowledge and understanding. In order to recognise the main features of the process of probability learning many didactical situations in various cases will be carefully considered. Participants will have an opportunity to experience these situations.

1 Introduction

The dual character of the probability concept –described from the historical point of view by Ian HACKING (1975)– has become an inspiration to me for research in epistemology of probability in the process of learning in today's classroom. In this article I would like to show and to analyse students' natural ways of probabilistic thinking and forming probabilistic mental objects which can be mathematised by the mature dual concept of probability. The essential feature of this concept –duality– serves as a tool for diagnosis and evaluation of the degree of maturity of the student's probabilistic knowledge and understanding. In order to recognise the main features of the process of probability learning many didactical situations in various cases are carefully considered.

2 The duality of the probability concept from the historical viewpoint

Ian HACKING (1975) –analysing old authentic or reconstructed probabilistic reasonings– argues that *the concept of probability* in its historical development *has a dual nature*. He distinguishes two aspects of this concept. One of them –*epistemological*– is implied by the general state of our knowledge concerning a phenomenon under consideration, and is related to the degree of our belief, conviction or confidence, in an argument. The other aspect –*aleatory*– is related to the physical structure of the random mechanism and to its tendency to produce stable relative frequencies of events. The first aspect gives the basis for the "chance calculus" and the other for the "frequency calculus". The analysis of old probabilistic reasonings shows that both these aspects became inseparable starting from the time of Pascal (about 1660). Before that time they were developed independently. Consciously joining them together, which was made mainly thanks to Blaise Pascal and Pierre Fermat – has illuminatied probabilistic thinking. From that moment the concept of probability acquired a dual, mathematically mature, character. (LAKOMA 1992, 1999a)

However, when we analyse old probabilistic reasonings from the pre-Pascal time, we can recognise in some of them ways of thinking and mental objects which are predecessors of the dual probability. The most spectacular examples, which can be treated as anticipating further evolution of probability and indicating the right directions leading to a crystallisation of dual probability, we can meet in works of Galileo or Cardano (HACKING 1975, LAKOMA 1992). It is important to notice that both authors –using in their reasonings those mental objects which referred to different aspects of probability– tried *to gain a balance* in two-sided arguments. Feeling of such balance brought them sufficient *explanatory value* of their arguments and let them find the right solution.

For example, let us observe Galileo's solution of a problem of throwing three dice and taking into account sums of points (HACKING 1975). Galileo reports that somebody noticed inconsistency between two opinions concerning that game : "With three dice 9 and 12 can be made up in as many ways as 10 and 11. Each can be decomposed into 6 partitions. However *it is known from long observation* that dice players consider 10 and 11 to be more advantageous than 9 and 12".

Galileo decided that "there is a very simple explanation, namely that *some numbers are more easily and more frequently made than others*, which depends on their *being able to be made up with more variety of numbers*". In particular, 6 ways of obtaining sum of 9 and 12 can be acquired by 25 permutations of results of throwing three dice. Similarly, 6 ways of obtaining

10 and 11 can be acquired from 27 permutations. If all these permutations *are equally easy to obtain*, then 11 is more advantageous than 12 in the ratio 27:25.

Galileo posed the hypothesis that permutations are equally probable, against the hypothesis that ways of obtaining sums (partitions) are equally probable. The second hypothesis is inconsistent with the facts, whereas the first one fits the facts exactly. This way of reasoning we can consider as an example of refuting statistical hypothesis on the base of long observation. This way of thinking also shows its general idea – to make some observations of random phenomena and to confront them with a model. If the model does not fit to the reality, there is a need to build another model, which will better fit the phenomenon under consideration. Observing experimental frequencies of outcomes is confronted with estimating *chances* of obtaining these outcomes. These chances or *theoretical frequencies* are estimated by means of the *propensity* or *facility* of random mechanisms to produce them.

Also Cardano –in his solutions of problems concerning throwing two dice (HACKING 1975, LAKOMA 1992), which were presented in his work "De ludo aleae" (1550)– makes *idealisation* of a problem and searches for *symmetry* of dice : "I am able to throw 1, 3 or 5 *equally easy* as 2, 4 or 6. Therefore it is possible to make some bets according to this equality, if dice are honest". Cardano is convinced that probability is connected with a *propensity (tendency)* of a die to produce stable frequencies in repeating trials. Galileo's opinion on some results that are easier and more frequently appear also refers to this *proclivity* of a die.

Thus, in the solutions quoted above, we can notice that there is a natural need to adduce arguments based on physical features of random mechanisms and to support them by arguments related to a state of knowledge or conviction concerning this mechanism. Both these aspects, epistemological and aleatory, are present clearly enough; also a tendency to support arguments based on one aspect by arguments based on the other seems to be strong. Finding a balance between them leads to formulating conclusions and to the solution of a problem. It is also worth remembering, that the word "probability" was not used in pre-Pascal time to solve problems as described above, but all mental objects like propensity, facility, tendency, chances or theoretical frequencies belonged to pre-origins and pre-conditions of the dual probability.

History shows that in order to acquire the probability concept it is necessary to make conscious its dual nature. Therefore I believe that in the process of probability teaching –from the very beginning of education– it is necessary to create such conditions that it will be possible to form in the student's mind the dual probability concept (LAKOMA 1990).

In my educational research this fundamental feature of probability has become a basis for investigating the process of developing students' probabilistic concepts and reasonings. I search for some symptoms of understanding in student's probabilistic arguments, and also for mental objects, which the student creates at various stages of his cognitive development and by means of which he forms in his mind the dual probability concept in a proper way.

In order to achieve this aim, it is necessary to create such educational conditions that the process of probability learning could be developed according to student's cognitive development.

3 Dual concepts probability in the process of stochastics learning

Careful observation of a process of mathematics learning shows that the process of probability learning can be naturally developed when there is a need to solve a problem (LAKOMA 1990, 1998). When analysing students' work, it is possible to distinguish four main steps of a process of problem solving :

> discovering and formulating a problem; constructing a model of the "real" phenomenon; analysing of a model; confronting results obtained from a model with the "real" situation.

This way arises directly from student's common sense thinking while considering simple problems as well as more advanced ones. When we look at history, we find out that this methodology comes from Isaac Newton (1678).

Mathematical models used by students are usually as simple as possible, have a local character and a strong *explanatory value*. These are *the local models*. However, what is essential is the general way of reasoning and acting which can be developed in a unique way on every level of mathematics learning. Only the classes of problems considered, and the mathematical tools useful for solving, can change on various levels of education (LAKOMA 1990).

The main aim of probabilistic education is to create such didactical situations that students will have an opportunity to solve probabilistic problems by means of those mathematical tools which are at hand for them. In the further part of this article I will present some examples of such mathematical activities in which we follow students' probabilistic reasonings and use of mental objects. In particular, we will observe in what way the duality of the probability concept is formed in the student's mind.

During analysis of students' work it would be profitable to distinguish two aspects of probability, using the methodology of Leibniz (HACKING 1975). Leibniz identifies epistemological aspect of probability with arguments *de dicto*, which means – with arguments referred to this, what we know about the phenomenon and what we would express. On the other hand, an aleatory aspect is identified by arguments *de re*, that means by arguments concerning physical characteristics of a random phenomenon. Thus, mental objects such as *experimental frequencies* express an *aleatory* side of probability, whereas *facilities, theoretical frequencies, chances* –based on analysis of a model– express the *epistemological* side of probability. However, we must remember that carefully supporting each of these sides are symptoms of understanding the *dual* probability concept.

For an example of how we can recognise different aspects of probability in students' reasonings, let us consider the simplest random phenomenon – the throw of a coin. Why do we argue that the probability of throwing a head is $\frac{1}{2}$? When we pose this question to our students, we usually obtain various arguments like the following : 1) *Probability is* $\frac{1}{2}$ *because there are two possible outcomes.* 2) *A coin has two sides – both are equal (the same), so the probability of obtaining a head is one half.* 3) *When we throw a coin many, many times, we will obtain one half of heads.* There are also some doubts : 4) *There is also another outcome – when a coin stands up on its edge.*

Students often give all these arguments. It is easy to notice that argument 1) is not sufficient to answer the question correctly. In this case it is necessary to add that we consider a coin as symmetric one. Only this conviction justifies the probability given in the question. But it is very symptomatic that argument 2) is also not sufficient for many of students. They feel a need to find a support for this *epistemological* consideration – they analyse the throw of a coin from the *aleatory* point of view, by observing experimental frequencies or by trying to predict their values in a long observation of this random mechanism. When students use both arguments 2) and 3) they usually are satisfied with their reasonings and they decide to formulate final conclusions. If argument 4) appears in student's reasoning, it seems to be a symptom of *lack of*

balance in both sides of arguments. We can observe an excessive attachment to considerations *de re* – concerning physical structure of a random mechanism. This disturbs correct thinking.

This example also shows the natural way of presenting and exploring a random mechanism – students in their arguments usually describe it by specification of possible outcomes and predicting chances of their appearing.

When we –mathematics teachers– use the mature probability we certainly do not distinguish and do not expose explicitly two aspects of this concept in our concept reasonings. Our students do not have the dual concept of probability at their disposal yet. Thus we are able easily to recognise in their reasonings both probability aspects, which appear separately and independently of each other. The way in which students use these aspects shows us what is a degree of advance of their probabilistic thinking and what is their stage of forming dual probability. Reaching a balance in using both arguments *de re* and *de dicto* usually shows us that their probability concept is developing properly and that they are able to gain a relational understanding of probabilistic concepts such as probability, or frequency.

Let us consider some examples of probabilistic activities of students.

4 Examples of didactical situations

A. "Once upon a time. . . "

The picture (Figure 1) presents the Market Square in Cracov (the former capital city of Poland) on the 15^{th} of July 1410. Everybody in Poland knows this date. This is the date of the battle of Grunwald (far from Cracov) in which Polish and Lithuanian forces –commanded by the Polish king Vladislav Jagiello– fought against the Teutonic Knights. Students 11 years old know this date from history lessons. They are asked to analyse carefully the whole picture (e.g. in the centre they can recognise the king!) and to answer a number of questions: Is it possible that the king Vladislav Jagiello was present that day on the Market Square in Cracov? Is it possible that one of three students has his birthday that day? Find in the picture some examples of things that could be impossible, possible or certain at that time.

FIGURE 1

This example refers to the situation which is embedded in a historical context. Its consideration leads to posing various hypotheses of a probabilistic nature. The main aim of this activity is to enable students to distinguish and to develop the *epistemological* aspect of probability, necessary to form its dual nature, and also to make a qualitative evaluation of a "degree of certainty". Children formulate their opinions, discuss and convince each other. (LAKOMA 1999)

In order to express a "degree of possibility" they use the "measure of chances" – the model of interval (Figure 2). They decide where on this interval "clouds" containing various events could be hung and they try to justify their decisions :

A: I can see things, which were not known that time – air plane, radio, ice cream etc.

B: "3" – small chances, they [the vendors] are rather of various ages. "2"–equal chances, the horse could be black or white. "1"–large chances.

A: "1"– equal chances – rain was also possible; one man has an umbrella!

B: Did an umbrella exist that time? We cannot know for sure. But in summer there is the advantage of sun.

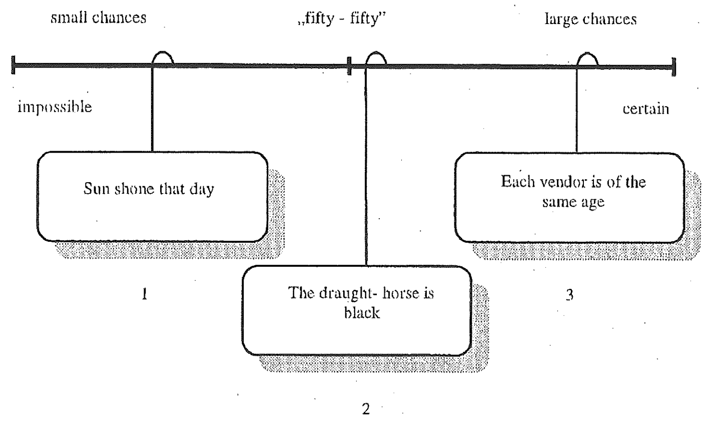


FIGURE 2

Children use different mental objects connected with probability. They describe the chances of events on the base of their belief concerning the frequency of events (in summer *advantage of sun*) – aleatory aspect of probability. They also use the concept of symmetry (*equal chances – black or white*) – epistemological aspect of probability. Exposing arguments *de dicto* sometimes leads to distinguishing only two possible outcomes and to describing their chances just as even: *rain or no rain, horse – black or white* etc. This is a good point of departure to find more information concerning the phenomenon under consideration. Often it is also possible to introduce arguments *de re*. For example, in a case of a draught-horse, students try to estimate the chances of meeting a black horse – by considering a population of horses and estimating the percentage of different colours. They usually evoke their own experience or knowledge concerning colours of horses; sometimes they feel a need to find more information in lexicon. During such a discussion students use both kinds of arguments: *de dicto* and *de re*, although the nature of this example is inclined to develop an *epistemological* aspect of probability. They usually realise that their conclusions are not sure, are only probable, so they describe events as *certain* rather rarely. It is much easier for them to call some events *impossible*. Making the decision where to place a "cloud" representing an event on a measure of chances is rather difficult for pupils; sometimes they do it rather arbitrarily. But some pupils try to find a reasonable explanation – mainly in the categories : *large chances* or *small chances* – and to indicate a place on "the measure of chances". Of course these reasonings are very simple and naive but this is a good opportunity to gain the experience necessary to form in a further stages of education the mature probabilistic concepts in a proper way.

B. "The measure of chances" – two dice

The main aim of this activity is to encourage students to estimate the chances of some events connected with a throw of two dice. Students 13 years old are asked to place on "the measure of chances" (Figure 2) the following "clouds" indicating events:

1) The number 24 will appear
2) The number 78 will appear
3) A number not greater than 67 will appear
4) A number not less than 10 will appear
5) A number, whose digits are equal, will appear
6) A number, whose difference between digits is equal to 1, will appear
7) A number divisible by 3 will appear
8) A number divisible by 5 will appear

Usually pupils consider this example in different steps. First they make only some qualitative estimations of chances, which are based just on observation of throws two dice. Usually, however, they try to support their predictions *de re* by means of considering step-by-step possible outcomes of a throw of two dice (arguments *de dicto*). They use implicitly a model of even chances, based on symmetry of a random mechanism. In these reasonings a need to make some quantitative estimation and to identify a chance with some number strongly appears. Mainly, students start to obtain such numbers by specifying and counting all possibilities promoting the given event. For example : event 8) is promoted by numbers : 15, 25, 35, 45, 55, 65. So, there are 6 *possibilities*. Then, event 1) is represented only by *1 possibility*. Thus, event 1) has smaller chances than event 8). On "the measure of chances" it will be placed much more on the left side than event 8). This comparison relays on students' conviction that *all possibilities are equal* – a die is *symmetric*.

In many students' reasonings we can also observe that in order to estimate chances of an event they choose a number belonging to the interval $< 0; 1 >$. It is rather typical when students are able to compute how many possibilities of outcomes represent their result – in comparison to the whole number of possibilities. So, they create mental objects *such as absolute theoretical frequencies* or *relative theoretical frequencies*. However, it is important to stress that all these estimations are strongly confronted with *experimental frequencies* obtained during introductory observations of throws of two dice. All these arguments support each other.

C. Game "Crossing the River"

You need: 2 × 10 counters, 2 × 1 gameboard (Figure 3), 3 circle chips of different colours – on each chip number "1" is written on one side and number "2" on the other.

This is a game for two persons or two teams. Each of two players -"leaders"- obtains the gameboard (Figure 4) and 10 counters -"competitors". At the beginning of the game each player puts his/her "competitors" on places 1-8 of the gameboard. It is allowed to put more than one "competitor" on a chosen place. Afterwards three "1-2" chips are thrown.

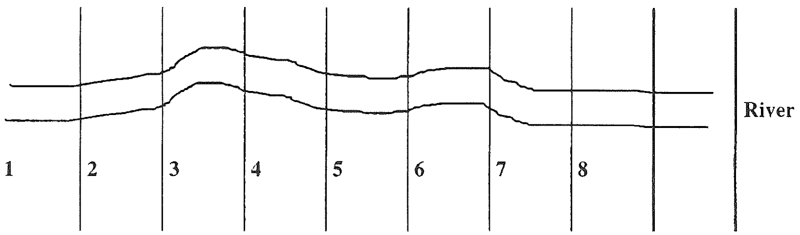


FIGURE 3

The sum of numbers obtained (e.g. 2+2+1) points to a place number (i.e. 5) on the gameboard. If player has any "competitor" standing on this place, he/she moves it (only one "competitor"!) to the other bank of the River. This player who first moves all 10 "competitors" to the other bank of the River wins.

The natural problem which arises in connection with this game is as follows : How to distribute "competitors" in the best way? What places are worth choosing?

Pupils 11 years old decided to create two teams and to play on the school terrace. Their preliminary distributions are :

team A : "3" – 2, "4" – 2, "5" – 2, "6" – 2[1]   team B : "3" – 1, "4" – 3, "5" – 2, "6" – 2.

Team A won this game. In the next game, team B exactly followed the distributions proposed by team A. In opinion of team B this is a warrant of a fair game. [2] Searching for symmetry is typical at this stage of considering this game. There is symmetry of distribution of players within a team, and also symmetry in distribution of whole teams. Searching for symmetry helps students to understand the rules of this game and to work out a strategy to win (LAKOMA 1998).

The pupils work in pairs with paper and pencil. They observe that "4"s are the most frequent. Some of the pupils place all "competitors" on this position. [3]

Pupils draw on the blackboard a bar diagram of all results: "3"-26, "4"-38, "5"-56, "6"-17.

Simultaneously they comment upon these results:
Gabi: "5"s are leaders. [4]
Reni: But "4" has only one point disadvantage in comparison with "5". [5]
Jacob: Now "3" and "5" are the best positions. [6]
Gabi: But there is only one point of difference between them. [7]

When the diagram is finished, pupils try to give a good advice to a player :
Gabi: Place on "3" at most five "competitors", maybe less; on "4" about six or seven; and on "5" ten, maybe more. [9]
Thomas: I propose to place most competitors on "5". [10]

The first pupils' attempts to predict results of the game have an *epistemological* character and are based on the simple symmetry of the situation. But it turns out soon that both models of even chances [1, 2] are not adequate and pupils decide to make conclusions based only on experimental frequencies of results - their reasonings have an *aleatory* character [3, 9, 10]. Pupils realise that gathering data should be reliable [8, 5, 7], they feel a need of comparisons during analysing data [4-7, 9-10], they discover that predictions based on experimental data can't be categorical [5, 7, 10]. Though children use mental objects, which expose both aspects of probability separately, they have good conditions for developing the probability concept according to its dual nature.

Students 12 years old arranged the 2-teams-game in a classroom. During the game they remark that "4" appears often and "6" rarely. [1] Students say that it is difficult to obtain "6", but easy to obtain "4". [2] So they formulate a hint for players: to place "competitors" on "4". [3] Then students work in pairs. They notice that results "1", "2" and "7", "8" are impossible. [4] They distribute "competitors" on places "3" - "6" doing it just by chance or according to the previous observations. [5]

Students write on the blackboard the preliminary distributions of winners :

"3"-3, "4"-4, "5"-2, "6"-1;   "3"-2, "4"-5, "5"-3, "6"-0;   "3"-3, "4"-3, "5"-4, "6"-0 [6].

Maggy: I know that I shouldn't place ["competitors"] : on 1,2,7,8 because these numbers never appear. The best way to distribute "competitors" doesn't exist.
This is just luck. [7]
Mary: But there are numbers, which appear very rarely. So it is good to place few "competitors" for "3", most of all on "4" and "5", and a few on "6". [8]
Thom: No, no! To pose a few on "3" but nothing on "6"! [9]
Peter: But what is the difference between "3" and "6"? There is no difference! [10]
Mary: I would like to pose most "competitors" on "4" and "5" because it is better chance to obtain 2-2-1 than 2-2-2. [11]
Peter: or 1-1-1! [12]

Students notice that there are more mixed results than pure ones.
Thom: Thus we would place most counters on "4" and "5",
hardly any on "6", a few on "3". But this is a query of luck.

These reasonings are more advanced than those done by pupils 11 years old. On the ground of empirical frequencies students notice that some results are "impossible", "possible", "difficult" or "easy" to obtain [1-4]. These are reasonings in style of Cardano and Galileo (see LAKOMA, 1992). Students try to make conscious the symmetry of the situation [4, 7] but they don't use it during the game [4, 6, 7]. During discussion students already notice this symmetry of situation [8,10, 12].

It is evident that these interactions among students help them to develop their individual ways of thinking [8]. The influence of Peter on Thom's reasoning is very spectacular. Also Mary tries to use not only *aleatory* but also some *epistemological* arguments. Both these aspects reinforce each other in the final part of the discussion [8-13]. It seems that for these students it can be only one step to find an adequate model and to calculate chances or theoretical frequencies of all results. It seems also that nobody in this group is able to solve this problem individually - without any co-operation with other students.

Let us observe the solution of two students 15 years old : Martin and Christopher. Their preliminary distributions are :
Ch: "3"- 2, "4" - 4, "5" - 2, "6" - 2 M: "3"-2, "4"-3, "5"-3, "6"-2 [1]
They motivate their choices to each other :
Ch: I already know what results [sums of numbers obtained on 3 chips] I should avoid : "1" and "2" because I will never obtain them. [2]
M: It is possible to obtain : "3", "4", "5" or "6" but "7" and "8" are also impossible. [3]

They play the game recording all results obtained. They are very engaged in playing.

Chris has lost this game. Both players try to find the reason for it. They consider all results obtained :
Ch: "3"-2, "4"-6, "5"-4, "6"-2 M: "3"-3, "4"-3, "5"-5, "6"-3
Ch: I think I should place more "counters" on "3". [4]
M: I obtained different results from yours! But "3"s and "6"s are also the rarest. [5]
Ch: This might be because you had crooked chips. Look, one should avoid "3" and "6" because these results are rare. [6]
M: Yes, maybe. But, you know, I obtained "3" three times! [7]
Ch: Maybe it happened by chance - you can check it in other games. "5"s and "4"s - there are many of them. And "3"s and "6"s should be avoided. [8]

M: It is necessary to put most chips on the two middle positions. [9]

Chris is convinced that his results are "typical" for this game. He classifies Martin's results as extraordinary. Martin eventually agrees with Chris. They both return to the question : how to distribute the counters in an optimal way?
Ch: I pose one counter on "3", and one on "6" - because they happen rarely. Wait, maybe I will throw "6"... but it will not happen; there is no chance ... number 2 on every chip?? [10]
M: I place ["competitors"] on "4" and "5". We have mostly "4" and "5". [11]
Ch: Yes, so I propose; one counter on "3", four on "4", four on "5" and one on "6". [12]

They formulate their opinion :
M: The best way is to place most counters on the middle positions, because the extreme positions are the rarest. [13]
Ch: "6" is the rare position because it happens very rarely - when it is obtained only number 1 or only number 2 on every chip. [14]
M: We can distribute our "competitors" in parts : on place "3" 1/10 of all "competitors", on "4" 4/10, on "5" 4/10, and on "6" 1/10. That means - not always so exactly. We place the fewest counters on the extreme places and most on the middle places. It arises from our experience concerning this game. Mixed results are the most frequent. [15]

After some hours it turns out that Martin during his next look on the problem has doubts :
M: Now I think that counters should be distributed in equal parts because there is no power which could say that it is necessary to obtain number 1 or number 2. [16]

The first attempts to consider the game were based on epistemological reasonings: searching for any symmetry [1], eliminating impossible results [2,3]. Then the *aleatory* aspect dominates in students' arguments [4-9]. Nevertheless students try to find an *epistemological* basis for their opinions. They search for symmetry again [6,9], they distinguish "typical" and "extraordinary" results - their motivations at this stage contain already both aspects of probability [10, 12, 14]. Martin tries to find an adequate model. He has good intuitions - expressing distribution by means of fractions is a good way although not yet proper [15, 16]. His reasoning *in style of d'Alembert* [16] (LAKOMA, 1992) confirms that he feels a need to consider both the nature of random phenomenon and its theoretical model.

D. Shooting at the target :

A shooter hits the target with frequency $\frac{1}{2}$. He shoots until he hits this target.

How many trials – most probably – should he make in order to hit?

If we like, we can formulate this problem in another way and arrange any real everyday life situation in which students repeat some trials (which are successful or not with even odds) in order to gain some aim. When (in which trial) they have the best possibility to obtain what they need?

It is very important to ask students to express –just after formulating the problem– their predictions. The most common answer is as follows: three, four, or two.

Then, in order to get acquainted with this problem, students make a Monte Carlo simulation, for example by repetitions of randomly drawing a ball (white or blue) from a basket. (When you draw a blue ball, you have gained your aim, if not, you put the white ball back into the basket and you repeat your trial again). They observe how many trials they needed to obtain a blue ball.

After some experiments they realise that the most common number of trials to obtain a blue ball is just one. They are confused. Is it really true?

Their arguments *de dicto* contradict the results of their experiment (*de re*). In order to check if their observations are typical, students try to construct a local model of the phenomenon and compute on this basis the chances of gaining an aim after one, or two etc. trials. Drawing a tree is already available for pupils 13 years old (Figure 4). This model helps them to understand the reason of apparent contradiction of both aspects. After considering this tree it is confirmed that the most probable trial is the first one. But this answer appears very rarely when we ask pupils, students, mathematicians or even probability theory experts – before an experiment. Students treat the right answer as a paradox. The reason for this wrong intuition is that they use the concept of *expected value* rather than the concept of *probability*. But developing both aspects of probabilistic reasoning helps to overcome this obstacle. It is possible to ask older students to compute an expected value *EX* of the number of trials needed to gain an aim (Figure 4).

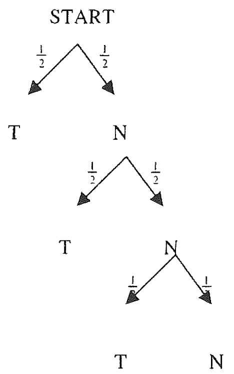


FIGURE 4

$$EX = \sum x_i \cdot p_i$$

$$\begin{array}{ccccccccccl}
1\cdot\frac{1}{2} & + & 2\cdot\frac{1}{4} & + & 3\cdot\frac{1}{8} & + & 4\cdot\frac{1}{16} & + & \ldots & = & EX \\
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \cdots & = & 1 \\
 & & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \cdots & = & \frac{1}{2} \\
 & & & & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \cdots & = & \frac{1}{4} \\
 & & & & & & \frac{1}{16} & + & \cdots & = & \frac{1}{8} \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & & & 2
\end{array}$$

FIGURE 5

Final remarks

All the examples which we had the opportunity to analyse above show that the process of forming the dual probability concept is according to the cognitive development of students. Natural ways of a student's reasoning –followed in these examples– convince us that the process of development of probabilistic thinking is accompanied in a natural way by using both aspects of probabilistic arguments – *de re* and *de dicto*. It is strongly connected with the natural need to observe the phenomenon under consideration and to make efforts to build its model. These activities allow students to understand the essence of *mathematical modelling*. This competence lets them analyse real phenomena or regularities by means of *mathematical reasoning*, making conclusions on the basis of a model, posing hypotheses and verifying them. What is important is an ability to explain and a practical efficiency (DAVIS & HERSH 1981, LAKATOS 1976). Creating and analysing models, accompanied by empirical observations, mathematical thinking and mathematical reasoning must be expressed and explained in a clear way. This competence –*mathematical communication*– is the third fundamental aspect of mathematics that must be developed, in a necessary balance, during the process of mathematics learning. Learning probability seems to expose these aspects in a spectacular way.

It seems that in order to encourage students to learn probability according to their own individual cognitive development it is very useful to create didactical situations for which various forms of *interactions* among students will be the natural style of work (SIERPINSKA & KILPATRICK 1998, LAKOMA 1998, BROEKMAN 1995). The main aim of provoking interactions in a classroom is to stimulate students to think independently, to formulate their own opinions, to motivate these opinions and communicate them to other students, to make conscious errors, to discover their own natural ways of thinking, to create and use a natural language for communicating with each other (FREUDENTHAL 1983, SIERPINSKA 1994). All these activities seem to be especially fruitful because they contribute to develop pupils' probabilistic thinking and to create in their minds the concept of probability in its mature dual form. All presented forms of interactions among student -working in teams, in pairs, competing in the game, preparing a common solution of a problem, discussions in a small group or in a whole class- seem necessary to the process of probability learning at every level of education. They evidently influence students' individual development of probabilistic thinking.

From the examples shown above let us also notice that interactions among students encourage them to be more effective in the process of problem solving. Using parallel representations of a problem, explaining this problem from various points of view, increase student's progress in developing probability concepts.

The duality of probability concept, which seems to be evident in students' activities, plays a very important role when we consider the process of probability learning from the point of view of a teacher. Using both aspects of probability in student's arguments, supporting and reinforcing each other seems to mean that a student is able to create and to use various mental objects which in the future will coalesce and will form the mature probability concept. Thus, a teacher –thanks to this essential feature of probability– is able to recognise the student's way of reasoning, to evaluate it and to organise such mathematical activities, as can help him to make his learning more effective.

The ideas which I have briefly presented here have been studied for some years in the frame of an educational project for students of age 10-16 (LAKOMA, 1990, LAKOMA & ZAWADOWSKI a.o., 1996-2000) and, at experimental stage of research, at tertiary level, for future professional users of mathematics : teachers, engineers and economists (LAKOMA, 1998a).

Acknowledgement

I would like to thank all Participants in my workshop at the Summer University (Louvain-la-Neuve / Leuven, July 1999) for their active work together, all important remarks and kind advice.

References

BROEKMAN H., 1995, *The changing image of mathematics for school children age of 11-16*, (in Polish), CODN-SNM, Warsaw.

DAVIS Philip, HERSH Reuben, 1981, *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston.

FREUDENTHAL Hans, 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, D. Reidel.

HACKING Ian, 1975, *The Emergence of Probability Concept*, Cambridge University Press.

LAKATOS Imre, 1976, *Proofs and refutations*, D. Reidel, Dordrecht.

LAKOMA Ewa, 1990, *Local Models in Probability Teaching* (in Polish), doctoral thesis, Warsaw University, Department of Mathematics, Informatics and Mechanics, Warsaw.

LAKOMA Ewa, 1992, *Historical Development of Probability Concept* (in Polish), CODN-SNM, Warsaw.

LAKOMA Ewa, 1998, On the interactive nature of probability learning, in : *Proceedings of CIEAEM-49*, Setubal, July 1997,144-149.

LAKOMA Ewa, 1998a, On the active methods in mathematics teaching for future engineers, in: Demlova M. (Ed.), *Proceedings of SEFI-10*, Helsinki, 1998, Finland.

LAKOMA Ewa, 1999, The diachronic view in research on probability learning and its impact on the practice of stochastics teaching, in: Jaquet F. (Ed.), *Proceedings of the CIEAEM-50*,

University of Neuchatel, Switzerland, August 1998, pp.116-120.

LAKOMA Ewa, 1999a, On the historical phenomenology of probabilistic concepts –from the didactical point of view, in: Boye A., Lefort X. (Eds.), *Actes de la 7e Université d'Été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques*, Nantes, France, 1997, pp.439-448.

LAKOMA Ewa & ZAWADOWSKI Waclaw a.o., 1996-2000, *Mathematics 2001* (in Polish) – series of textbooks, teachers' guides, films, programs for students of age 10-16, WSiP, Warsaw.

SIERPINSKA Anna, 1994, *On Understanding in Mathematics*, Kluwer, Dordrecht.

SIERPINSKA Anna & KILPATRICK Jeremy (Eds.), 1998, *Mathematics Education as a Research Domain : A Search for Identity*, An ICMI Study, Kluwer, Dordrecht.

'Telling mathematics', an activity that integrates

VAN MAANEN, Jan
Department of Mathematics, University of Groningen (Nederland)

Abstract

The aim of this paper is to review the value of a classroom activity, in which a student tells a problem or story that she or he knows from hearsay. In this activity a variety of aspects come together : the problems and stories that enter the classroom in this manner often belong to the very long tradition of so-called 'recreational mathematics', they are challenging, generally they surpass the borders of the school curriculum, and they contribute to the self esteem of the person who tells the problem or story. In this sense it is an activity that integrates several aspects of mathematical work.

1 Just before the start

Formally the lesson began already some minutes ago, when the bell prompted the change of classes.
Pupils are still coming in, the teacher remains seated at his desk, pondering about the proper moment to raise his voice. One of the pupils, a boy, comes to him and says:

Boy Sir, I have a sum for you. Do you want to try it?

Teacher Yes, please, do tell me.

Boy It is a multiplication... It starts with

$$(x-a)(x-b)(x-c)$$

and goes on like that.

The teacher plays his role well, and starts to calculate. After a while he suddenly stops, he looks at the boy and says:

Teacher Oh I see, the result is zero; there is no need to continue the multiplication, since there is a factor $(x - x)$, and if in a multiplication one of the factors is zero, the whole product is zero.

The boy seems to be satisfied. The teacher has found the right answer, but at least he had to think hard, for a while. The teacher seems to be satisfied too. He has met the challenge.
By this time the class is complete and the lesson begins.

2 The problem set

The multiplication with outcome zero is maybe not the prototype problem for what I shall call 'telling mathematics'. Yet I have chosen to stage it before anything else.

The first reason for doing so is that the story really happened to me, when I was a secondary school teacher. I even heard the 26-factor problem on several occasions, sometimes with years in between, and my deep thoughts before I 'saw' the answer were theatre, except maybe for the first time it occurred. In this sense the problem is characteristic, since in this paper I shall deal almost exclusively with mathematics that people told me. 'Telling mathematics' of course goes beyond the observations of one single person. On the other hand the personal perspective is valuable, as a kind of proof that the tradition of 'telling mathematics' still goes on.

The second reason for starting with the multiplication problem is that it came up in an educational context, in which it had a clear function —challenging the teacher. Many of the cases that follow are set in the educational dimension, and the role of these 'oral' problems in the classroom is one of the main topics of the paper.

Many problems from the oral tradition have a long history. That does not hold for the multiplication problem, at least I have not found early records of it, so with respect to the historical dimension the problem is not representative. As we shall see, the historical dimension is well recognisable in my personal cross-section of the oral tradition.

After these preliminary remarks the central problem can be stated: how is the tradition of 'telling mathematics' reflected in the experience of one individual mathematician, and what possible

value can it have, especially its historical dimension, in mathematics education?

3 Hundred 'birds'

My father brought the oldest problem in my (re)collection home from work. His professional career was entirely with the Dutch Post, at that time still owned by the state and called PTT, where the T's stand for Telegraph and Telephone. He was a white collar employee who did a lot of paper work. Apart from some basic mathematics that he had done at school (secondary school with an emphasis on languages and bookkeeping and without a science branch) my father had no background in maths, nor had he any interest in it. So, it was rather peculiar that one evening he presented me with a problem that he had heard from a colleague at work. If I remember well it happened when I was in the upper half of secondary school (16 or 17 years old). I have asked my father if he remembers the episode, but he has completely forgotten it.The problem ran as follows:

> Someone has one hundred guilders, and wants to buy one hundred animals for it. He can choose between cows, pigs and chickens. A cow costs 5 guilders, a pig 1 guilder and a chicken 25 cents (a *kwartje*). How many of each animal should he take?

I went to my room, and still know that, before I wrote anything down, I was puzzled by the combination of two equations and three unknowns; and amazed when I realised that the extra condition of integer solutions reduced the infinite number of real solutions to only a few solutions. I was also amazed that I had to do some reasoning in order to find the solutions. At school mathematics was more a kind of imitating the teacher.

As to the mathematics: the system

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 5x + y + 0.25z &= 100 \end{aligned}$$

reduces to one equation in x and z. This equation, $16x = 3z$ must have integer solutions, and here the non-school mathematics entered. Since 3 and 16 have no common factors, the smallest solution in positive integers is $x = 3$ and $z = 16$, which gives $y = 81$. The other solutions are $(6, 62, 32)$, $(9, 43, 48)$, $(12, 24, 64)$ and $(15, 5, 80)$.

The problem, always referred to as the problem of the 100 birds, has travelled through the ages and through the world[1]. It appears already in China in the work of Chang Ch'iu-chien, about 485 A.D., with birds indeed (cocks, hens and chickens) and with different prices (5, 3, $\frac{1}{3}$). Chang Ch'iu-chien already recognises that for these prices there are three triples of integers that solve the problem. The problem is subsequently found in India (a.o. with Mahāvīra, 9th century, and Bhāskara II, 11th century), in arab texts (a.o. Abū Kāmil, 9th century), and in Byzantium. The oldest latin text, the *Problems to sharpen the young*[2], which is attributed to Alcuin (c. 732–804), is quite early. The oldest manuscript in which 'Alcuin' is preserved dates from the 9th century. 'Alcuin' has several variants of the problem (see [FOLKERTS 1978, p. 37]), but his Problem 39 is clearly rather close to the version I cited above. It stages a merchant who wants to buy in the east 100 assorted animals for 100 *solidi*. Acceptable prices are: 5 *solidi* for a camel, 1 *solidus*

[1] The following survey is based on [TROPFKE, 1980] and [FOLKERTS, 1978]

[2] Available in english translation in [HADLEY & SINGMASTER, 1992] and in latin with german commentary in [FOLKERTS, 1978]

for an ass and 20 sheep for 1 *solidus*. In this case there is a unique solution $(19, 1, 80)$, which 'Alcuin' checks without deriving it; in almost the same manner I presented my solutions to my father. Singmaster remarks that the same prices feature in the work of Abū Kāmil, but there for ducks, hens and sparrows. [HADLEY & SINGMASTER, 1992, p. 120]

Apparently the problem went around extensively. After 'Alcuin' many of the great medieval and renaissance mathematicians present it in one form or another: Fibonacci, Regiomontanus, Pacioli, Rudolff, Apianus, Ries, Cardano, Tartaglia and many later ones. Euler takes the hundred birds in his explanation of Diophantine equations (*Von der unbestimmten Analytic*, in his 'Complete Introduction to Algebra', Part 2, Section 2, Chapter 2, Question 4 [EULER, 1770, 1911, pp. 342–344]):

> Someone buys 100 pieces of cattle for 100 Rthl. 1 oxen for 10 Rthl. 1 cow for 5 Rthl. 1 calf for 2 Rthl. 1 sheep for $\frac{1}{2}$ Rthl. How many oxens, cows, calves and sheep were they?

From the equations

$$\begin{aligned} p+q+r+s &= 100 \\ 10p+5q+2r+\frac{1}{2}s &= 100. \end{aligned}$$

Euler eliminates s, and reworks the remaining equation to

$$r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3}.$$

Since r is an integer, $p-1$ should be a multiple of 3, so Euler puts

$$\begin{aligned} p &= 3t+1 \\ q &= q \\ r &= 27-19t-3q \\ s &= 72+2q+16t. \end{aligned}$$

Since r cannot be negative, $19t+3q$ should be less than or equal to 27, which is only possible if $t=0$ or $t=1$. The first case ($t=0$) gives $p=1$ and since $r = 27-3q \geq 0$, q can range from 0 to 9. The second case ($t=1$) leads to $p=4$, and via $r=8-3q \geq 0$ to three possible values for q, viz. $0, 1$ and 2. Euler finds a total of 13 solutions. When there should be at least one animal of each sort, 10 solutions remain valid.

4 Extending the repertoire

In later years I added several problems and stories to my collection. Lessons and lectures were occasions where I caught them. Obviously, we encounter a definition problem, since if I would consider everything I heard during lectures as 'telling mathematics', the length of this article would go beyond any reasonable limit. So, what I propose to include here is the unexpected sidestep, the bit about number theory in a calculus lecture, the unofficial part of the lecture.

Conjectures are good material for sidepaths. At the university Fermat's last theorem and the Goldbach conjecture were told in this manner. I shall concentrate here on Goldbach, which was told to us as a long standing problem: "Solve it and you'll be famous." One of the attractive aspects of the conjecture is that it is so easy to remember:

> Every even number from 4 onwards can be written as the sum of two prime numbers.

The conjecture was stated in 1742 by Goldbach in a letter to Euler, deliberately in order to solicit new mathematical theory. As a school teacher I often cited the Goldbach conjecture —not twice or more in the same class, I hope— as an example of a well understandable mathematical claim that still goes without proof. Not every claim in mathematics is so easily found true or false; and fame is reserved for the person who finds the clue, think about the case of Fermat's last theorem, for which a sum of money was awarded.

Another of these stories, that was told as a sidestep in a lecture (I do not remember what and whose lecture it was), was about the Hilbert hotel. The hotel has an infinite number of rooms, numbered 1, 2, 3 and so on. When the hotel is complete someone comes in who is looking for a room. No problem, for the management moves the persons in room n to room $n+1$ ($n \in \{1, 2, 3, \dots\}$) or, if they are clever, the persons in room 10^n to room 10^{n+1}, since that will give less complaints.

A bus arrives. No rooms reserved, but yet forty customers to satisfy. No problem to house them. Either the moves from room n to room $n+40$, or the moves from room p^n to room p^{n+1} (where p runs through a set of 40 prime numbers), will vacate enough rooms. And again the Hilbert hotel is complete.
What then if a Hilbert-bus, with infinitely many passengers, stops at the parking lot? Here the hotel procedures prescribe that the occupants of room n "are kindly requested" to move to room $2n$, and the newcomers may occupy the odd-numbered rooms. And so the story went on. It ended with the case when the hotel was complete and infinitely many Hilbert-buses announced themselves. Here the diagonal procedure determines the order in which the newcomers may leave their bus and go to their room. In the secret language of mathematics: a countable union of countable sets is countable, and closely related to this: the rational numbers are countable.

I used the Hilbert-hotel is my school in a prefinal class (pupils aged 16,17), where I used to start the lesson with a brief —3 minutes long, say— mathematical story outside the regular topic of the lesson. The Hilbert-hotel featured for weeks (we had 4 hours a week), the pupils each time taking home the new problem that the hotel management had to meet.

As to the historical dimension: I do not know who has designed this pleasant and profitable transformation of the theory of countable sets into the Hilbert-hotel, but the theory itself is rather recent. The notion of countability was introduced by Cantor in the 1870's. In my class I ended the Hilbert-hotel series with some minutes about this history, and the increasing rigour and axiomatisation at the end of the 19th century. As a separate brief story this would have had little impact, but after the ground had been paved this historical bit went quite well.

Another acquisition in the field of 'telling mathematics' stems from a lecture given by a colleague. Since I had to lead a workshop about what this colleague would discuss, I went to his lecture. It was intended for a general audience of prospective science teachers, biologists as well as chemists, physicists and mathematicians. So it could not be too mathematical, chemical etc. The lecturer had decided that he wanted to give an example of a mathematical proof, in order to contrast the deductive method with the inductive method of the other, non-mathematical science. The amazing thing was that he presented a proof of the irrationality of $\sqrt{2}$ that I had never seen before. Later on I discovered that it originated in an article by H.-J. WASCHKIES (1971), but originally it came to me by the way of 'telling mathematics'. Although the proof is rather recent, its style is very classical and fits well to the pebble-arithmetic of the Greeks and to techniques of Nikomachos.

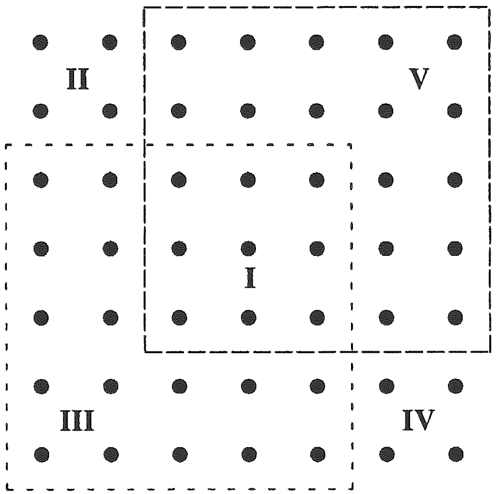


FIGURE 1 : 'Proof with pebbles' that $\sqrt{2}$ is irrational

The proof is by contradiction (also see figure 1). Suppose that $\sqrt{2}$ is rational, then it can be written as $\frac{p}{q}$, in most simplified form, so we suppose that p and q are the smallest possible numbers which satisfy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Now make a square array of $p \times p = p^2$ pebbles. Since $p^2 = 2q^2$, one can replace the large square of p^2 pebbles by two smaller squares of q^2 pebbles each. If one draws these squares within the $p \times p$ array, one in the left lower corner, the other in the right upper corner, then for reasons of symmetry the two $q \times q$ squares (I+III and I+V in figure 1) overlap in a square (No. I). Since the two $q \times q$ squares contain all pebbles of the $p \times p$ array, the number of pebbles in (I+III) plus the number of pebbles in (I+V) is equal to the number of pebbles in (I+II+III+IV+V), and therefore the number of pebbles in I is equal to the number of pebbles in II+IV. That, however, is impossible, since the figures I, II and IV are squares, and II and IV are congruent; this would imply that there is a solution in smaller numbers to $x^2 = 2y^2$ than (p, q), whereas we supposed that (p, q) was the smallest. We conclude that $x^2 = 2y^2$ does not have a solution in integer numbers, in other words that $\sqrt{2}$ is irrational.

5 The educational value

I shall introduce the discussion of the educational value of 'telling mathematics' with yet another case.

Imagine a class of 16-year-olds during the last lesson before a holiday, a lesson that must be given even if you have done the whole syllabus for the period. Pupils proposed that we should do problems from outside the book, problems that they and I knew by heart. I agreed with pleasure, since this seemed to me a bright type of activity for such a lesson.

I remember one pupil and one problem in particular. The class decided that they would set a problem for me, and Liesbeth said that she had a good problem. Mathematics was not Liesbeth's

favourite discipine. But this time she was well-determined and in good spirits, bringing the following problem to the fore:

> You walk along a road when you arrive at a fork, where you have to choose between two ways to continue. One of the two leads to happiness, the other to eternal sorrow. Two brothers are guarding the fork, they both know the destination of the roads. One of them always speaks the truth, the other one always lies. You may ask one question, only to one of them. Whom are you going to ask what question?

In Cartesian style I prefer not to deprive the reader from the pleasure of searching and finding the solution. So let me now try to draw conclusions from the cases presented.

5.1 Challenge

What strikes me in the first place is the aspect of challenge. In the 26-factor problem and in the problem of the two brothers the pupils were curious whether their teacher would be able to solve the problem, just as I was curious which pupils would have a right answer to the next question in the series about the Hilbert-hotel.

Unexpected evidence for this aspect of challenge is provided in by a newspaper advertisement, where problems from the oral tradition are used to challenge the reader and to depict the advertising firm as a challenging environment to work in. The Eiffel company, which presents itself as a consultant in Financial-Economical and Economical-Juridical matters, and which works in three divisions (Commerce & Industry, Banking & Insurances, Public Affairs & Non-Profit), searched with an add in *Carp* 17 (27/04/1999) for "Legal personel with a drive". "If you m/f too think that the nice thing of a problem is not the problem, but just on the contrary the solution, you could very well fit precisely with Eiffel." Etc., etc.

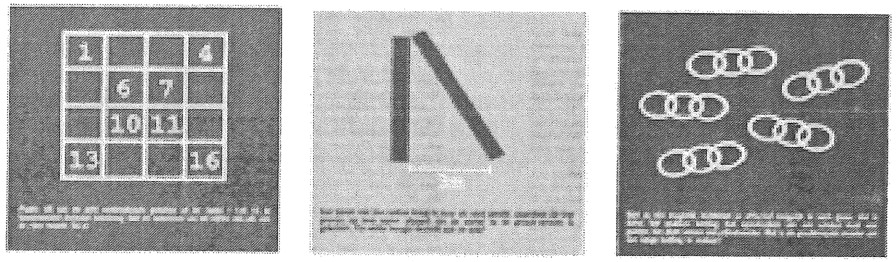


FIGURE 2 : Pictures from a personel advertisement

Towering texts, illustrated with six pictures which each state a more or less mathematical problem. In figure 2 three of these are presented: a 4×4 magical square of which 8 numbers that lack should be completed (this reminds strongly of the square in Dürer's *Melencholia* of 1514). In the text it is stated that the sum in each row and column should be 34. The second problem is about a tree of 10 meters high, which is broken and touches the ground 3 meters from its root. One is asked how high above the ground it is broken. The numerical values are still the same as in the *Chiu Chang Suan Shu* of the early Han-period (i.e. between 202 BC and 9 AD), only the Chinese bamboo has been replaced by a tree. But that was already the case in Renaissance Italy (with Calandri, in 1491, for example). The third problem makes an allusion to the work of the

Company, since the reader is asked to make the greatest possible effect with the least possible means. One is asked to make one chain from five parts, which each have three links. Breaking a link costs one guilder, closing it again costs 2 guilders and 50 cents. What is the cheapest way to do this.

Challenge is omnipresent, the work of the Company is depicted as challenging, but primarily the six problems are an overt challenge to the reader. For the company searches for "high potential starters" (this did not need translation; English is usual in the terminology of Dutch personel advertisements of this type); apparently you should not have the feeling that you are a high potential person if you cannot solve these mathematical riddles.

5.2 The usual mixed with the unexpected

A second characteristic that I would like to point at is the mixture of usual and unexpected elements. Generally the problems are stated in very common language. But also, the solution often requires an uncommon step, something that you tend to overlook. Well-known is this respect is the problem about the man who had to take a wolf, a goat and a bunch of cabbages across a river ('Alcuin's' problem 18, [HADLEY & SINGMASTER, 1992, p. 112]. The solution depends on the insight that it might be necessary for one or more of the passengers to cross the river more than once. Being on the other side does not imply that you should stay there. Not recognising this possibility can be compared with the monkey-trap. A coconut is emptied via a hole in the shell through which a monkey's hand can pass. The coconut is fixed somewhere, and some rice is put in the shell. The monkey puts its hand in the shell, and takes the rice in his hand. This increases the diameter of the hand so that it cannot pass through the hole any more. Freedom is close (the monkey only needs to open its hand), but what is close is easily overlooked.

Similar phenomena play a role in the solution of problems from the oral tradition. A look into the literature will present more evidence, see for example the problem of the division of 8 litres of wine in two portions of 4 liter, using cans of 3, 5 and 8 liters. A mathematics teacher told me that this problem was once posed to him on an air flight when his neighbour, a retired actor, had found out that he was a mathematician. The uncommon step is also required in the problem of drawing —without lifting your pencil— four straight lines through nine dots which are in a square array (three rows of three dots).

5.3 Beyond school mathematics

The tradition of 'telling mathematics' does not stop at the borders of school mathematics. Liesbeth's two brothers belong to the domain of logic, the 100 birds require some number theory, and the Hilbert-hotel is about the cardinality of sets. This aspect of crossing borders gives these problems a special flavour. They deal with something different (whereas school mathematics is again and again about the same subjects), and that also implies that they are open to everyone. Thinking properly should be sufficient.

5.4 Of all ages

Not every story or problem that comes through the air is centuries old, but quite a few are. If that is the case, teachers can use it to add to the flavour of the problem. The 'young', at least some of them, puzzled already about the wolf, goat and cabbage before the year thousand, and

the broken tree problem is even twice as old. In this respect mathematics is a very special discipline. Its knowledge is not broken by time, nor hindered by distance. Why not tell our students?

One interesting question pops up here: what qualifies a new story or problem to be added to the existing collection. For me the three squares that prove the irrationality of $\sqrt{2}$ is such a story. Point one is that I heard it, unexpectedly, and point two is that I like to tell the story. Why? I think that the proof is appealing in that it has great effect with simple means.

5.5 Fun

If the listener is well-tuned and she or he recognises these positive aspects of the problems that are in the air, pleasure is granted. And that is the best way to learn and teach mathematics.
With pleasure!

References

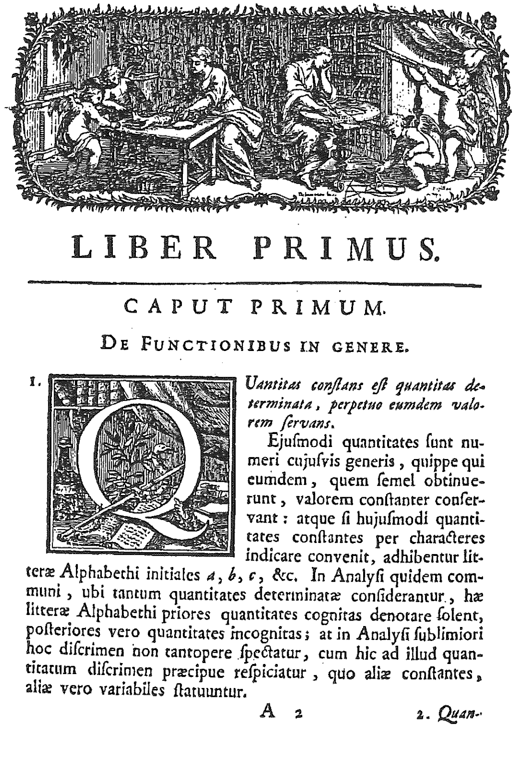
EULER Leonhard, 1770, 1911. *Vollständige Anleitung zur Algebra*, St. Petersburg 1770; I used the edition by Heinrich Weber in *Opera Omnia*, Series 1, Vol. 1, Leipzig, Berlin : B.G. Teubner, 1911.

FOLKERTS Menso, 1978. 'Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache : Die Alkuin zugeschriebenen PROPOSITIONES AD ACUENDOS IUVENES Überlieferung, Inhalt, Kritische Edition', *Österreichische Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Denkschriften* 116. Band, 6. Abhandlung. Wien 1978.

HADLEY John & SINGMASTER David, 1992. 'Problems to sharpen the young. An annotated translation of *Propositiones ad acuendos juvenes*, the oldest mathematical problem collection in Latin, attributed to Alcuin of York', *The mathematical gazette* 76 No. 475 (March 1992), 102–126.

TROPFKE Johannes, 1980. *Geschichte der Elementarmathematik* 4. Auflage, Band 1 (Arithmetik und Algebra. bearb. von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gericke), Berlin, New York: Walter de Gruyter 1980.

WASCHKIES H.-J., 1971. 'Eine neue Hypothese zur Entdeckung der inkommensurablen Größen durch die Griechen', *Archive for History of Exact Sciences* 7(1971), 325–353.



LIBER PRIMUS.

CAPUT PRIMUM.

DE FUNCTIONIBUS IN GENERE.

1. *Quantitas conſtans eſt quantitas determinata, perpetuo eumdem valorem ſervans.*

Ejuſmodi quantitates ſunt numeri cujuſvis generis, quippe qui eumdem, quem ſemel obtinuerunt, valorem conſtanter conſervant: atque ſi hujuſmodi quantitates conſtantes per characteres indicare convenit, adhibentur litteræ Alphabethi initiales *a*, *b*, *c*, &c. In Analyſi quidem communi, ubi tantum quantitates determinatæ conſiderantur, hæ litteræ Alphabethi priores quantitates cognitas denotare ſolent, poſteriores vero quantitates incognitas; at in Analyſi ſublimiori hoc diſcrimen non tantopere ſpectatur, cum hic ad illud quantitatum diſcrimen præcipue reſpiciatur, quo aliæ conſtantes, aliæ vero variabiles ſtatuuntur.

A 2   2. *Quan-*

Première page de l'*Introductio in Analysin infinitorum* (1748) d'Euler

Le concept de fonction dans les écoles italiennes; usage de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens.

MARCHINI Carlo, GRUGNETTI Lucia, MAFFINI Achille
Unità locale di ricerca didattica,
Dipartimento di Matematica, Parma (Italy)

Abstract

Le concept de fonction est largement traité dans la littérature didactique en ce qui concerne les difficultés dans l'apprentissage et les conceptions erronées; l'analyse logique d'une perspective historique du concept est moins présente et c'est cette direction que nous travaillons.

Nous cherchons aussi à interpréter les conceptions des élèves comme des transitions entre les aspects morphologiques, syntaxiques et sémantiques.

Les présentations actuelles du concept de fonction sont proches des idées de l'infini (potentiel et en acte), comme point d'arrivée d'une longue évolution.

Il est assez étrange que, dans l'école italienne, cette approche soit, en général, le premier objet avec lequel les élèves doivent se confronter, sans tenir compte du développement historique.

Par une analyse plus fine, nous pouvons trouver des usages implicites des fonctions à l'école élémentaire et après avec les polynômes. Ces usages peuvent être aussi trouvés dans l'histoire des mathématiques. Très souvent, ils cachent le concept de variable tel qu'il est présenté en logique.

1 Introduction

L'idée fondamentale qui a donné lieu à ce travail réside dans le fait que le concept de fonction, qui est vu comme porteur dans l'approche didactique des mathématiques à l'école secondaire supérieure en Italie, est loin d'être clair et défini et, surtout, n'est pas traité avec continuité dans sa présentation.

Nous sommes ainsi partis de l'analyse de 23 manuels, 11 du cours des deux premières années d'école secondaire supérieure (biennio) et 12 des trois dernières années de l'école secondaire supérieure (triennio), pour voir comment les fonctions y sont présentées[1].

Le concept de fonction est apparu pour la première fois en Italie dans le programme de l'Institut technique de Bergamo en 1906. Ensuite, ce concept est présent dans les programmes de 1913 pour le "lycée moderne" qui a été d'ailleurs supprimé après la Grande Guerre et finalement les fonctions sont présentées dans les programmes de 1945 (cfr Vito).

Donc il s'agit d'un concept très "jeune" dans l'école italienne.

Par contre pour YOUSCHKEVITCH (1981) une idée vague de fonction était déjà présente dans l'antiquité. À l'époque moderne, le concept de fonction a pris petit à petit des connotations plus claires.

La recherche internationale sur l'argument est riche (voir par exemple, HAREL & DUBINSKI, ARCAVI & NACHMIAS); en Italie aussi l'argument est bien présent (voir Prodi, BOERO & GARUTI, FERRANDO).

Nous avons voulu chercher, par un questionnaire, quelles idées de fonction étaient présentes chez les élèves en tenant compte de ce qu'ils ont appris à l'école.

Nous sommes allés aussi au-delà des intentions effectives de la présentation didactique du concept; par exemple nous avons voulu voir quel rôle a la continuité dans l'intériorisation du concept de fonction, si la différence entre fonction et graphique est perçue, comment est compris le domaine des fonctions, comment est vu le concept d'égalité entre deux fonctions et finalement comment sont ressenti, les aspects purement logiques (syntaxique, sémantique et morphologique) qui sont inclus dans le concept de fonction (voir aussi SFARD, 1992 et SIERPINSKA, 1992).

Nous avons estimé que l'aspect logique est particulièrement important parce que, en plus de sa vision 'interne', c'est celui qui est souvent passé sous silence et le moins correctement traité dans les manuels.

Nous ne nous sommes pas préoccupés des propriétés des fonctions en pensant qu'il s'agit d'une étape successive et moins importante pour la compréhension du concept.

[1]A ce propos, nous avons analysé les définitions de relation, de fonction, de domaine et de codomaine et nous avons vérifié s'il y a une définition d'égalité entre fonctions.

2 Le questionnaire

Le questionnaire a été construit selon les tableaux suivants, où nous avons indiqué, pour chaque item, à quelle typologie de fonction (selon MAC LANE) il appartient, les finalités, les problèmes associés, les aspects logiques et les liaisons avec les autres items :

Item	Type de fonction	Finalités	Problèmes associés	Aspects logiques	Liaisons avec les autres items
1	Fonction comme tableau	L'approche déjà présente dans *C*. Ptolémée, est typique de ce qu'on fait en Physique et en Statistique, quand on compile des tableaux de données. Nous voulions rendre évidents surtout trois aspects : 1) si et combien l'usage de lettres "non canoniques" comme variables peut déranger; 2) si les élèves ont des exigences de trouver une loi liant les valeurs données; 3) comment les élèves voient le domaine et le codomaine, c'est-à-dire s'ils interprètent domaine et codomaine comme des intervalles où bien des ensembles.	1) Hypostatisation des variables 2) L'idée de continuité (qu'on voit quand le domaine et le codomaine est exprimée par des intervalles). 3) Si l'idée de fonction est toujours liée à celle de loi ou bien s'il y a une approche par les ensembles.	Selon nous quelques réponses mettent en évidence des aspects logiques particulières : 1) répondre **oui** : vision sémantique du tableau (vu comme données liés à un contexte); 2) **oui motivé** avec l'idée d'une loi : vision syntaxique.	Les réponses sur domaine et codomaine sont liées à 2, 3.c) et 3.d) pour évaluer combien est forte l'idée de continuité liée au concept de fonction
2	Fonction comme graphique	Dans cette question l'aspect le plus évident concerne la continuité du graphique proposé. Ce qu'on voulait voir était si la continuité influence l'interprétation d'un graphique comme fonction. Il y a aussi un problème avec le domaine : tous les livres utilisés introduisent le domaine comme l'ensemble des valeurs ayant une et une seule image; en ce cas on voulait voir si les élèves limitent dans une façon "naturelle" le domaine à l'intervalle sur lequel le graphique est défini.	1) Le rôle joué par la continuité. 2) La restriction du domaine. 3) La conception entre figuratif de l'espace.	1) **Non** et **non motivé avec non continue** : réponses sémantiques (elles font penser au graphique inséré dans le milieu des fonctions réelles avec variable réelle de l'analyse); 2) **Non motivé** avec non continue et **segments** : réponse syntaxique (on pense à l'être géométrique)	Voir item 1. Item 4.e) dans lequel il y a l'équation de ce graphique.

Item	Type de fonction	Finalités	Problèmes associés	Aspects logiques	Liaisons avec les autres items
3	Fonction comme graphique	On rencontre l'usage de graphiques de cette façon sur un tas de media, pour cela ils participent à l'expérience mathématique aussi de ceux qui ne s'occupent pas de Mathématique. En plus la représentation d'un graphique discret comme s'il était continu peut conditionner la conception. À partir de ça nous voulons voir 1) combien d'influence a la continuité (dans ce cas induite par la représentation, mais non pas de la nature des données qui sont discrètes); 2) si la représentation empêche l'individuation des éléments de la fonction (vue comme ensemble de couples ordonnés); 3) si l'idée de fonction entraîne de nécessité celle de loi; 4) si la fonction est interprétée indépendamment de la forme d'un de ses graphiques.	Le problème principal est dû à l'exigence (par les personnes qui utilisent ces graphiques) de représenter des valeurs discrètes liées entre elles. Nous voulons voir si cette représentation conditionne le concept de fonction. Il y a donc un problème complémentaire à celui de l'item précédent. Les problèmes liés à la continuité sont exprimés aussi dans l'indication du domaine et du codomaine. En plus, il y a un problème de représentation qui passe à travers la reconnaissance des éléments de la fonction. Dans un certain sens les questions les plus ambiguës et les plus difficiles à interpréter sont, selon nous, les 3.e) et 3.f).	Les aspects logiques de l'item sont assez complexes parce qu'ils sont liés entre eux. Pour leur lecture voir graphique en 'Évaluation des Aspects syntaxiques et sémantiques'.	Voir item 1. En plus, item 1 pour la représentation tabulaire et celle graphique. Pour les aspects logiques, les résultats ont été comparés avec ceux des items 5-8.

Item	Type de fonction	Finalités	Problèmes associés	Aspects logiques	Liaisons avec les autres items
4	a) règle b) formule c) règle d) fonction implicite e) règle	L'item est pensé pour voir combien une écriture est reconnue comme fonction; en particulier dans les questions a) et c) on veut voir : 1) si les variables appelées par des noms "non canoniques" peuvent empêcher la compréhension; 2) combien d'influence a dans la réponse l'interprétation sémantique des écritures comme formules pour le calcul des aires des figures de la Géométrie. Dans la question b) on veut mettre en relief si la distinction entre polynômes et fonction polynomiale est évidente, tandis que dans d) on veut voir si la présence des deux variables "canoniques" suffit pour regarder l'écriture comme fonction. Dans la question e) on veut voir comment sont considérées les "fonctions en morceaux" surtout par rapport au domaine et quand la fonction est exprimée avec plusieurs lois.	1) Hypostatisation des variables. 2) Reconnaissance explicite d'une loi associée à une fonction 3) Fonction avec plus variables	1) Hypostatisation des variables 2) Aspects sémantiques relatifs à l'expression des aires des figures géométriques.	Voir item 2
5-6	Règle	Les deux items sont pensés pour examiner des questions relatives à l'interprétation de formules définissants une fonction 'classique' de l'analyse. En particulier, on veut mettre en relief dans quelle mesure est 'senti' ou 'lu' l'ensemble sur lequel la fonction est définie et si le nom des variables influence la lecture. En plus, on va commencer à traiter de façon analytique le concept d'égalité de fonctions.	Egalité des fonctions.	1) Domaine d'une fonction : sémantique 2) Expression d'une fonction : syntaxique 3) Nom des variables : morphologique Pour un tableau complet des résultats, voir l'aperçu (B).	Nous avons relié les items 5, 6, 7 et 8 pour une analyse des aspects syntaxiques et sémantiques.

Item	Type de fonction	Finalités	Problèmes associés	Aspects logiques	Liaisons avec les autres items
7	Règle	Dans cet item nous voulons voir dans quelle mesure l'écriture différente (c'est-à-dire l'aspect syntaxique-morphologique) influence le concept d'égalité de fonctions	1) Egalité des fonctions 2) Représentation des fonctions	1) Egalité des fonctions : syntaxique 2) Graphique et domaine : sémantique 3) 'Ecritures' différentes : morphologique	Voir item 5-6
8	Règle	Dans cet item on fait une référence explicite aux domaines des fonctions par l'indication seulement des lois et non des ensembles dans lesquels elles sont définies. Nous avons voulu voir si, faute d'indications explicites, l'interprétation en R est naturelle.	1) Domaine d'une fonction 2) Différence entre loi et fonction	1) Egalité des domaines : syntaxique (il regarde seulement la règle) 2) Domaines différents : sémantique (il pense la règle interprétée)	Voir item 5-6
9	Règle	Dans ce cas l'attention est adressée au rôle des variables pour reconnaître deux fonctions comme égales.	1) Égalité des fonctions 2) Égalité des graphiques de fonctions	1) Graphiques différents : sémantique 2) Fonctions différentes à cause des variables : morphologique	Il se lie à 5 et 6 pour l'échange des variables; en particulier, si on a beaucoup de réponses a, les réponses négatives à 5 et 6 sont à considérer peu influencé par l'échange des variables

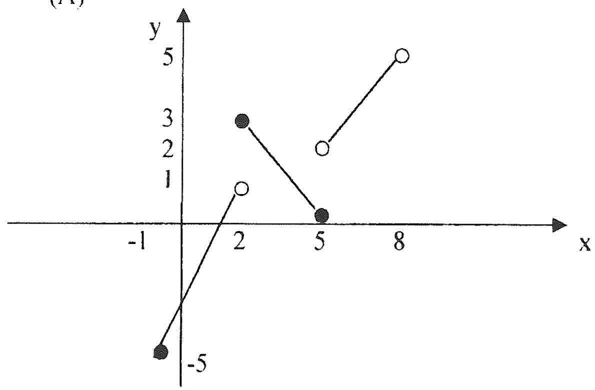
QUESTIONNAIRE

1) Le tableau à côté, on va l'utiliser en statistique. Tu dois dire s'il est celui d'une fonction en spécifiant domaine et codomaine.

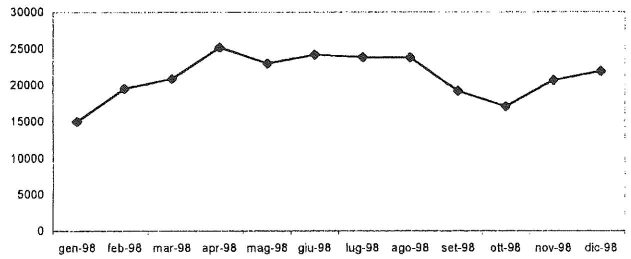
z	t
0,0	0,3989
0,1	0,3970
0,2	0,3910
0,3	0,3814
0,4	0,3983
0,5	0,3521
0,6	0,3332
0,7	0,3123
0,8	0,2897
0,9	0,2661
1,0	0,2420
1,1	0,2179
1,2	0,1942
1,3	0,1714
1,4	0,1497

2) Est-ce que le graphique suivant représente le graphique d'une fonction? Justifie ta réponse.

(A)



3) Le graphique suivant montre le cours de l'index Mibtel de la Bourse italienne pendant le 1998.



Répondre aux questions suivantes :

a) Est-ce que c'est une fonction? ....

b) Est-ce qu'il représente une fonction? ....

c) Quels sont les éléments du domaine? ....

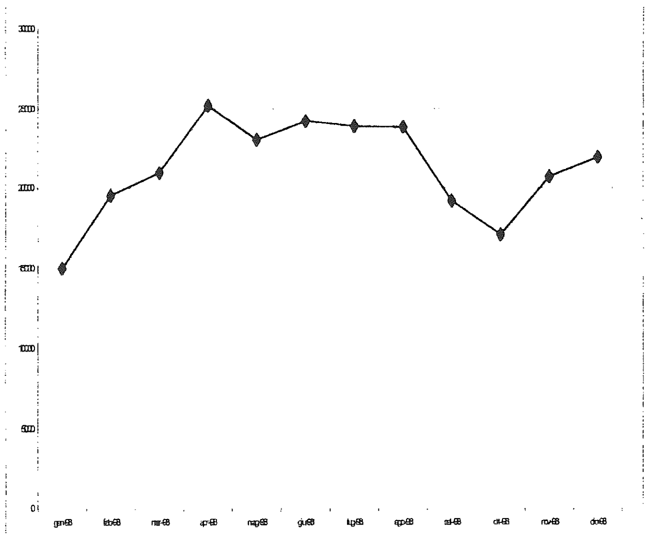
d) Quels sont les éléments du codomaine? ....

e) Dans le graphique, quels sont les éléments de la fonction? ....

f) Comment on peut représenter la fonction associée au graphique? ....

g) Est-ce qu'il y a une loi qui lie les variables impliquées? ....

h) Est-ce que le graphique précédent et le suivant sont différents? ....



4) Indique, en motivant la réponse, quelles "écritures", parmi les suivantes, peuvent être des fonctions :

a) $A = \pi \bullet r^2$ ....

....

b) $3x^3 + 2x^2 - 1$ ....

....

c) $A = \frac{b \bullet h}{2}$ ....

....

d) $x^2 + y^2 = 4$ ....

....

e) $y = \begin{cases} 2x - 3 & -1 \leq x < 2 \\ -x + 5 & 2 \leq x \leq 5 \\ x - 3 & 5 < x < 8 \end{cases}$ ....

Pour chacune des questions proposées de 5) à 9) indique quelles affirmations entre a)-d) sont vraies et lesquelles sont fausses :

	Vraie	Fausse	Je ne sais pas
5) Les fonctions $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ et $y = \frac{t+1}{t-1}$ définies en N			
a) sont égales	—	—	—
b) ont le même graphique	—	—	—
c) ont des domaines différents	—	—	—
d) sont différentes	—	—	—
6) Les fonctions $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ et $y = \frac{t+1}{t-1}$ définies en R			
a) sont égales	—	—	—
b) ont le même graphique	—	—	—
c) ont des domaines différents	—	—	—
d) sont différentes	—	—	—
7) Les fonctions f, g, h définies en R par $f(x) = x, g(x) = x \bullet 1, h(x) = x + 0$			
a) sont égales	—	—	—
b) ont le même graphique	—	—	—
c) ont des domaines différents	—	—	—
d) sont différentes	—	—	—

8) Si on indique par D_f et D_g les domaines des fonctions

$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ et $g(x) = \frac{1}{x+2}$ on peut dire que

a) $D_f = D_g$ —— —— ——

b) $D_f \neq D_g$ —— —— ——

c) on ne peut pas répondre —— —— ——

d) $D_g \subset D_f$ —— —— ——

9) Les graphiques des fonctions $y = \frac{x^4+x^3}{x^3-x^2}$

et $y = \frac{t^4+t^3}{t^3-t^2}$ définies en R sont

a) égaux —— —— ——

b) différents parce que les fonctions sont différentes —— —— ——

c) différentes parce qu'ils ont des points différents —— —— ——

d) différents à cause du zéro —— —— ——

Le questionnaire a été assigné à 99 élèves : 28 du lycée scientifique (14 ans; nous indiquerons cette classe par I), 22 de la deuxième année de l'école technique commerciale (15 ans; II), 19 de la quatrième année de l'école technique pour géomètres (17 ans; IV), 16 de la 5e lycée artistique (18 ans; Va) et 14 de la 5e lycée linguistique (18 ans; Vs). Les résultats du questionnaire sont résumés dans le tableau suivant (les nombres à gauche des réponses ont été utilisés pour une évaluation par Excel). Après il y a l'évaluation des aspects logiques et de la continuité.

TABLEAU D'ÉVALUATION DU QUESTIONNAIRE (on a mis en évidence les aspects *syntaxiques*, les aspects **sémantiques** et les aspects morphologiques; entre parenthèses est indiqué le nombre de réponses) :

1) a) Réponses à "C'est une fonction"

-1: échange de variables	(3)
0: aucune réponse	(37)
1: non	(0)
1,5: non motivé	(2)
2: **oui**	(36)
2,5: *oui motivé (proportionnalité inverse)*	(9)
3: oui motivé par caractère fonctionnel	(12)

b) Réponses à domaine et codomaine

10: domaine ou codomaine; 0: +variables; 1: +intervalle; 2: +ensemble	(0 ; 1 ; 0)
20: domaine et codomaine; 0: +variables; 1: +intervalle; 2: +ensemble	(31 ; 16 ; 3)

2)

0: aucune réponse	(11)
1: **non**	(5)
1,5: non motivé	(50)
1,75: + **discontinuité** (+ *discontinuité* par droite)	(10)
2: oui	(7)
2,5: oui motivé	(11)
3: + discontinuité	(4)

3)

a)

0: ils ne répondent pas	(9)
1 ; 1,5: non; + motivation	(24-4)
2; 2,5: **oui; + motivation**	(51-6)

b)

0: ils ne répondent pas	(16)
1 ; 1,5: non; + motivation	(14-1)
2; 2,5: *oui; + motivation*	(66-2)

c)

0: ils ne répondent pas	(21)
1: intervalle, jours, axe x	(10)
2: mois	(51)
3: autre	(17)

d)

0: ils ne répondent pas	(30)
1: intervalle, axe y	(19)
1,5: valeurs marquées	(1)
2: valeurs, nombres, points index Mibtel	(18)
3: index	(4)
4: autre	(26)

e) 0: ils ne répondent pas (37)
1: mois et valeurs
(LET. PROCEDURALE) (25)
1,5: **points** (22)
1,75: **couples** (2)
2: mois ou valeurs (9)
3: autre (4)

f) 0: **ils ne répondent pas** (84)
1: **couples ou par un tableau** (4)
2: autre (4)
3: *loi* (7)

g) 0: ils ne répondent pas (42)
1 ; 1,5: *non; + motivation* (20-3)
2; 2,5: oui; + motivation (33-1)

h) 0: ils ne répondent pas (6)
1 ; 1,5: non; + motivation (60-30)
2; 2,5: oui; + motivation (3-0)

4) 0: non
0,5: non motivé
1: oui
1,5: oui motivé

a	b	c	d	e
35	77	43	61	38
0	4	2	3	0
29	11	30	21	30
39	7	24	14	31

NB : Dans les réponses suivantes ne viennent pas montrés les **non** (implicites ou explicites) qu'on peut calculer par différence

5) 0: non
0,5: non motivé
1: oui
1,5: oui motivé

a	**b**	**c**	d
0	0	1	0
25	14	16	34
3	0	3	4

6) 0: non
0,5: non motivé
1: oui
1,5: oui motivé

a	**b**	**c**	d
0	0	0	0
14	23	35	26
0	1	4	3

7) 0: non
0,5: non motivé
1: oui
1,5: oui motivé

a	**b**	**c**	d
0	0	0	0
62	35	11	6
3	0	0	0

8) 0: non
0,5: non motivé
1: oui
1,5: oui motivé

a	**b**	**c**	d
0	0	0	0
26	32	3	39
1	3	0	2

9) 0: non
0,5: non motivé
1: oui
1,5: oui motivé

a	b	**c**	d
0	0	0	0
73	4	4	1
9	0	0	0

ÉVALUATION DU QUESTIONNAIRE

Évaluation de la continuité

Nous avons considéré 4 points :

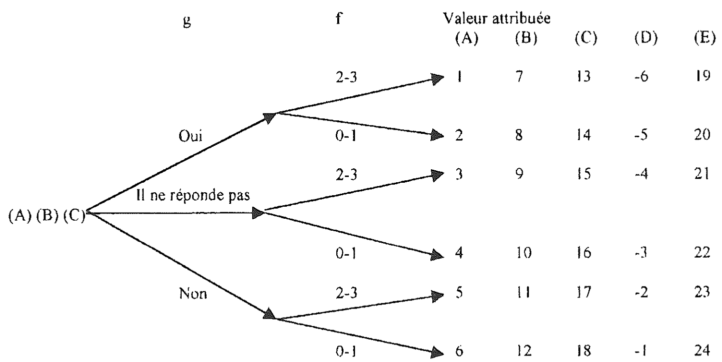
a) le domaine et le codomaine de l'item 1 (l'idée de continuité est vue dans les intervalles), à laquelle nous avons assigné un point;

b) la motivation que le graphique de l'item 2 ne représente pas une fonction parce qu'il n'est pas continu; à cette motivation nous avons assigné 1,5 points puisque c'est une idée plus forte;

c) les réponses aux items 3.c) et 3.d) auxquelles nous avons assigné 2 points (1+1) quand les élèves ont indiqués des intervalles.

Évaluation des aspects syntaxiques et sémantiques

L'évaluation a été faite parmi deux paramètres : la condition liée à l'item 3 et celles relatives aux items 5-8.
Pour l'item 3 l'évaluation a été faite par un diagramme en arbre construit en partant des réponses aux items a) e b).
Dans la première phase nous avons consideré les couples de réponses respectives (motivées ou non)
(A) Non-Oui (syntaxique)
(B) Oui-Oui (sémantique-syntaxique)
(C) Oui-Non (sémantique)
Aprés nous avons évalué les réponses de 3.g) et 3.f) (en l'ordre) selon un degré décroissant des aspects syntaxique et croissant des aspects sémantiques (voir le diagramme sous-reporté; pour les réponses 0,1,2,3 relatives à 3.f) il faut regarder le tableau d'évaluation du questionnaire)



Comme nous l'avons dit, la valeur attribuée suit une échelle décroissante des aspects syntaxique et croissant des aspects sémantiques. Nous avons consideré à part les cas
(D) Ils ne répondent pas-Oui (maximale syntaxique)
(E) Oui-Ils ne répondent pas (maximale sémantique)
auxquels on a attribué les valeurs qu'on peut voir dans le diagramme.
Aux cas
(F) Non-Non (G) Ils ne répondent pas-Ils ne répondent pas
nous avons attribué la valeur zéro, indépendamment des réponses de 3.g) et 3.f).
Pour l'évaluation à propos des aspects syntaxiques et sémantiques de l'idée de fonction, nous avons examiné aussi les items 5-8 et qu'ils sont montré en le tableau d'évaluation du questionnaire.
En particulier nous avons examiné les points 5 a,b,c ; 6 a,b,c ; 7 a,b,c ; 8 a,b,d en assignant 1 pour chaque réponse "sémantique" et -1 pour chaque réponse syntaxique et puis nous les avons additionnés. Puisque l'équilibre est 1, chaque valeur inférieure ou supérieure à celle-ci fait pencher vers une idée ou l'autre.
Aprés, ces deux résultats ont été comparés.

Évaluation des aspects morphologiques

Nous avons considéré les items 5.d), 6.d), 7.d) et 9.b) auxquels nous avons attribué 1 point pour chaque réponse affirmative et puis nous les avons additionnés (le total est compris entre 0 et 4).

L'évaluation qu'on a choisie nous semble la meilleure pour nos buts.
Pour l'item 3 l'équilibre est à peu près autour des valeurs 9-10. De l'analyse des résultats on trouve : 45/99 ont une vision sémantique et 40/99 une vision syntaxique, sans différence substantielle entre les résultats du biennio et ceux du triennio. Cet équilibre change si on enlève les résultats de la classe Va; de cette façon on a 29/83 'sémantiques' et 41/83 'syntaxiques'.
Le résultat est intéressant et sous certains aspects surprenant. Des graphiques comme celui que nous avons proposé sont peut-être la liaison la plus forte entre le concept de fonction et la quotidienneté. La priorité d'une vision syntaxique entraîne un renforcement de l'idée que le graphique soit 'réglé par quelque chose'. A ce propos le résultat de la classe I est significatif : 13/28 sémantiques et 7/28 syntaxiques. Selon nous ces nombres sont justifiés par l'habitude que la physique donne aux élèves de représenter des données expérimentales par des graphiques, sans se préoccuper de leur provenance. On trouve confirmation de cela même en analysant le nombre des élèves qui ont répondu de la même façon (positivement ou négativement aux items 2 et 4.e) : en I il y en a seulement 10/28, par rapport aux 21/30 de Va et Vs (pour des problèmes sur la photocopie nous ne considérons pas les réponses des classes II et IV). Cela ne signifie pas que le saut épistémologique qu'on a quand on passe du graphique d'une fonction à sa loi ait été fait en V et pas en I. En effet parmi les 38/99 élèves qui ont exclu que 4.e) soit une fonction, personne ne motive sa réponse; en particulier personne ne parle de la discontinuité, comme au contraire cela a été motivé par 10/99 pour l'item 2. Deux élèves de V classifient l'item 2 comme le graphique d'une fonction par morceaux, tandis que 3, différents des précédents, classifient 4.e) comme fonction par morceaux. Il faut aussi remarquer que 'fonction par morceaux' est une expression ambiguë qui se relie à la continuité selon Euler (voir YOUSCHKEVITCH).
A propos de la continuité, 27/49 élèves du triennio et 13/50 du biennio ont obtenu au moins un point. Le résultat montre que l'obstacle épistémologique de la continuité est plus fort au triennio.

L'analyse des items 5-8 a montré une différence significative entre biennio et triennio : 29/50 élèves du biennio ont une vision syntaxique et 10/50 sémantique. Au triennio nous avons des résultats opposés : 26/49 'sémantiques' et 9/49 'syntaxiques' (22/30 'sémantiques' et 1/30 'syntaxiques' si nous considérons seulement les classes Va et Vs).
Selon nous, pour les élèves du biennio le rôle du calcul littéral est très fort tandis que la différence entre fraction algébrique et fonction rationnelle fractionnaire n'est pas claire (parmi les 18 élèves qui disent que 4.b) est une fonction, 10 appartiennent à la classe I). Au contraire, les élèves du triennio interprètent naturellement les lois en R (GRUGNETTI, 1994) et négligent les aspects morphologiques pour ne voir que le 'résultat' obtenu. En effet dans l'évaluation morphologique que nous avons faite sur les items 5.d), 6.d), 7.d) et 9.d) où l'équilibre est supposé 1 (pour les réponses qu'ils auraient dû donner selon la pratique didactique la plus commune), 14/30 élèves de Va et Vs ont obtenu une valeur inférieure à 1 et 7/30 une valeur supérieure (en général pour le triennio : 19/49 et 12/49); pour les élèves du biennio les résultats sont : 25/50 ont obtenu une valeur inférieure à 1, 7/50 une valeur supérieure à 1.

Conclusions

Les Mathématiques ne sont pas un corps clos ni terminé. La notion de fonction qui a une longue histoire, depuis la définition donnée par BOURBAKI en 1939, a eu d'autres interprétations et généralisations :

- les transformations naturelles de Eilenberg et Mac Lane 1945 (lois) et la Théorie des Catégories qui a suivi;
- la Théorie des Faisceaux (Leray, 1945) (local-global) (cf GRAY);
- la Théorie des Distributions (SCHWARTZ, 1950).

Ces sujets sont traités à l'Université et peuvent rentrer dans l'apprentissage des enseignants, mais souvent sans qu'on harmonise les différentes notions avec celle qu'on va enseigner à l'école.
Étant donné le développement actuel des Mathématiques, on ne peut proposer aucune définition "juste" de fonction, mais seulement souligner des aspects problématiques qui sont intrinsèques des différentes définitions, en mettant à jour leurs raisons et leur chemin dans l'histoire. Le processus contrôle-échec-adaptation (ERNEST) doit faire partie de l'enseignement-apprentissage, du moment que ce processus n'est pas encore terminé dans la communauté mathématique, donc il n'a pas lieu au dogmatisme.
Selon nous, la définition "moderne" de fonction est le meilleur compromis entre différentes conceptions; elle est la plus cohérente si on utilise les ensembles comme fondement des Mathématiques. Mais cette définition n'est pas épistémologiquement neutre en privilégiant le cadre "classique"; dans l'Intuitionnisme où dans le Prédicativisme les notions de fonction sont fort différentes (cfr BORGA, Palladino et NRD Modena).
Des aspects logiques, analytiques et géométriques ont pris place dans la notion de fonction. Tout ça demande une coordination des registres pour laquelle chaque aspect joue le rôle de médiateur pour les deux autres.
En lisant les graphiques on peut prendre une attitude "statique" (au sens de BACCIOTTI & BECCARI) où "dynamique" : la vision statique du graphique participe à l'idée en acte d'infini, tandis que l'interprétation dynamique sous-entend un temps de "déroulement" de

gauche à droite, en répétant le mouvement de la main qui dessine. La vision dynamique participe à l'idée d'infini en puissance.
D'autre part il y a un conflit entre la ligne (continue) et les points (qui sont pensés comme discrets) (cf NORDON). Tout ça a pris beaucoup de temps historique et n'entre pas "naturellement" dans l'intuition des élèves.
Les réponses aux questions nous montrent qu'il y a des différences entre le style d'apprentissage des élèves : les uns préfèrent les aspects morphologiques et syntaxiques (langage), les autres les aspects sémantiques (méta-langage).
Ce qui nous semble un véritables *Obstacle Épistémologique* est la présence d'une notion intuitive de continuité aussi dans ceux qui n'ont pas encore traité l'argument. La continuité empêche la *réification* (dans le sens de SFARD, 1991) de la définition "abstraite".
Il y a aussi un phénomène de "*hypostatisation*" des indéterminées, c'est-à-dire, on confère un signifié concret et autonome aux lettres x et y et c'est une cause des difficultés dans les autres Sciences.
La définition à la BOURBAKI demande un développement de la Théorie des Ensembles poussé bien au-delà des simples aspects intuitifs : il s'agit de traiter avec des couples ordonnées (cf WHITEHEAD & RUSSELL et PEANO) et leurs écritures : $\{\{a,1\},\{b,2\}\}$ (HAUSDORFF) ou $\{a,\{a,b\}\}$ (Wiener) (cf MANGIONE & BOZZI) ou $\{\{a\},\{a,b\}\}$ (KURATOWSKI) ou bien "concept primitif" (PEANO).
Tout ça entraîne un problème de hiérarchie de types (simples à la RAMSEY et CHWISTEK). À notre avis la complexité des types est un vrai Obstacle Épistémologique.
Il y a une dialectique entre *extension* et *intention* : fonctions comme ensembles et fonctions comme formules, en réfléchissant sur la différence entre fonction et expression analytique.

Quelques suggestions didactiques :

- faire des représentations avec échelles différentes (logarithmique aussi) pour distinguer la fonction de ses représentations;
- maintenir séparées les deux notions de fonction en Algèbre et en Analyse, avec deux appellations (*application* et *fonction*). Souvent les fonctions algébriques (applications) n'ont pas besoin d'expressions analytiques, ni d'infini ni de la continuité; selon nous c'est plus facile la réification de celles-ci. Les fonction analytiques (fonctions) ont des problèmes liés à l'expression analytique par laquelle souvent sont données et aussi à leur statut procédural. Seulement à la fin de l'école on pourra identifier leurs aspects communs.
- Est opportun de distinguer entre codomaine et image.
- On doit remarquer qu'il y a un tas de fonctions réelles de variable réelle qui n'ont pas une expression analytique; tandis que chaque fonction a son domaine, mais si on n'a pas une expression analytique la détermination du domaine peut être impossible. Tout ça entraîne des conflits entre syntaxe et sémantique.
- Traiter d'une manière profonde les problèmes de l'égalité entre les fonctions.
- Distinguer les rôles des indéterminées, variables, constantes, inconnues, paramètres, en faisant attention à la dimension logique du sujet.

Annexe

Un bref aperçu historique

En tenant compte de ce qui c'est passé de l'époque moderne à nous jours, on peut indiquer comme personnages principaux pour l'histoire de la définition de fonction les suivants (IUFM 1 Poitiers) :

1694 LEIBNIZ (1646 - 1716)
"J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, et aux points de la courbe".

1718 BERNOULLI J. (1667 - 1748)
"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes". Notation φx.

1748 EULER (1707 - 1783)
"Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur... Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle qui comprend toutes les valeurs déterminées... Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple, $a + 3z; az - 4zz; az + b\sqrt{aa - zz}; cz$; etc., sont des fonctions de z. Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable".

1755 EULER
"Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autre. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x".

1782 CONDORCET (1743 - 1794)
"Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités $x, y, z, \ldots F$, et que pour chaque valeur déterminée de $x, y, z, \ldots$ etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent : je dis que F est une fonction de $x, y, z, \ldots$
Enfin je sais que lorsque x, y, z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en x, y, z, ni la forme de l'équation entre F et x, y, z; je saurai que F est fonction de x, y, z".

1797 LAGRANGE (1736 - 1813)
1. *"On appelle fonction* d'une ou plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.
2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^2 ou $a + bx$ ou etc., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x, $f(x^2)f(a + bx)$, etc. désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, etc. Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres".

1797 LACROIX (1765 - 1843)
"Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première".

1821 FOURIER (1768 - 1830)
"En général, la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire".

1821 CAUCHY (1789 - 1857)
"Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable".

1834 LOBATCHEVSKY (1792 - 1856)
"La conception générale exige qu'une fonction de x soit appelée un nombre qui est donné pour chaque x et qui change graduellement en même temps que x. La valeur de la fonction peut être donnée soit par une expression analytique, soit par une condition qui donne un moyen pour tester tous les nombres et sélectionner l'un d'eux; ou, finalement, la dépendance peut exister mais reste inconnue".

1851 RIEMANN (1826 - 1866)
"Soit z une quantité variable, qui prend peu à peu, toutes les valeurs réelles possibles, alors on appelle w une fonction de z, si à chacune de ces valeurs correspond une valeur unique de la quantité indéfinie w, et si z parcourt continûment toutes les valeurs qui se trouvent entre deux valeurs constantes, w change aussi continûment, alors on appelle cette fonction continue".

1870 HANKEL (1839 - 1873)
"On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x".

1902 LEBESGUE (1875 - 1941)
"Bien que, depuis Dirichlet et Riemann, on s'accorde généralement à dire qu'il y a fonction quand il y a correspondance entre un nombre y et des nombres $x_1, x_2, \ldots$ sans se préoccuper du procédé qui sert à établir cette correspondance, beaucoup de mathématiciens semblent ne con-

sidérer comme de vraies fonctions que celles qui sont introduites par des correspondances analytiques. On peut penser qu'on introduit peut-être ainsi une restriction assez arbitraire; cependant il est certain que cela ne restreint pas pratiquement le champ des applications, parce que seules, les fonctions représentables analytiquement, sont effectivement employées jusqu'à présent".

1939 BOURBAKI
"Soient E et F, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable x de E et une variable y de F est dite relation fonctionnelle en y ou relation fonctionnelle de E vers F, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à F, qui soit dans la relation considérée avec x.
On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y dans F qui se trouve dans la relation ' donnée avec x; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée".

1927 WEYL (1885 - 1955)
"Personne n'a jamais su expliquer ce qu'est une fonction. Mais une fonction f est définie si par un moyen quelconque on peut associer à un nombre a, un nombre $b\ldots$ On dit alors que b est la valeur de la fonction f pour la valeur a de l'argument".

A cette liste on peut ajouter S. MAC LANE et il nous semble intéressant de signaler ce qu'il écrit sur le concept de fonction (1986) :

> **"What is a function?".**
> The various intuitive ideas about functions and functional dependence are helpful but vague. Here are some of them.
>
> *Formula.* A function is a formula in a letter x. When x is replaced by a number, the formula produces a number, the value of the function for the given argument x.
>
> This description is not very helpful for notions of functional dependence of variable quantities in physics, but it does describe the elementary Mathematical function well : Polinomial, rational, algebraic, trigonometric, and exponential functions. The idea of "formula" does need to be specified. It should include algebraic or "analytic" formulas, perhaps also the formulas given by infinite series, but it doesn't seem to encompass functions defined by several different formulas in different portions of the domain. The essential problem remains : What sorts of formulas are envisaged? Are all functions given by formulas? "Formulas" depend on the symbolism, but function depend upon the facts.
>
> *Rule.* The variable y is a function of the variable x when there is given a rule which to each value of x produces the corresponding value of y.
>
> This description, and its variants, has for generations puzzled the students of calculus. It has a pleasant generality : Any "rule" will do. Also, the use of rules clearly takes care of the case of function defined by different formulas in different portion of the domain; any such collection of alternative formulas is clearly a *rule*. Neverthless this is not a formal definition, since it uses the undefinied words "corrresponds" and "rule". Even if one defines a rule as something expressed in a specified formal language, there are troubles. (In the usual formal languages, the set of all formal expressions is denumerable, while the set of possible functions on R to R is not denumerable).

> *Graph.* A function is a curve in the (x, y)-plane, such that each vertical line $x = a$ meets the curve in at most one point with coordinates (a, b). When it does so meet, the number b is the value of the function at the argument a. For other arguments a, the function is undefined.
>
> The description emphasizes the geometric aspect. It is persuasive for functions of real numbers which are smooths or at least continuous, but doesn't fit well with a function which jumps from 0 to 1 as the variable changes from rational to irrational. It involves also the (undefined) notion of a curve, and so makes arithmetic depends upon geometry.
>
> *Dependence.* The variable quantity y is a function of the quantity x if and only if a determination of the value of x also fixes the value y, so that y depends on x.
>
> This, a physicist's definition, is also not formal.
>
> *Tables of Values.* A function is determined by a table of values, which opposite to each entry for the first quantity x lists the corresponding numerical value for the second quantity y.
>
> This is a hard-nosed, no nonsense definition; evidently inspired by table of trigonometric or logarithmic functions. Trouble is, the actual tables are finite while most of the intended functions have infinitely many different values. It is not clear what would be meant by an infinite table.
>
> *Syntax.* A function f on a set X to the set Y is a symbol f such that whenever the term x stands for an element of X, then the string of symbols fx stand for an element of Y, the value of f at the argument x.
>
> This doesn't really describe functions, but just the use of symbols for functions. It is a mute protest against the confusion of standard notations in which $f(x)$ ambiguously denotes a function of x and a value of that function. (Thus strictly speaking, "sin" is the trigonometric function, while "$\sin\varphi$" denotes its value at the angle φ.
>
> Enough. The variety of these descriptions of "function" illustrate well one of our theses as to the nature of Mathematics : Human activities and facts about phenomena togheter indicate many examples of dependence of one item upon another. This leads to useful but informal idea about dependence and functions - and poses the problems of producing a formal definition, necessary to make unambiguous Mathematical statements about functions.

Bibliographie

APMEP., 1981. Fragments d'histoire des mathématiques. Brochure n° 41.

ARCAVI, A. & NACHMIAS, R., 1993. 'What Is Your Family Name Ms. Function? Exploring Families of Functions With a Non-Conventional Representation' Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching **12** (3/4), 315 - 329.

BACCIOTTI, A. & BECCARI, G.T., 1988. 'Problemi didattici nei corsi universitari. L'introduzione del concetto di funzione', *Archimede*, XL, 41 - 49.

BOERO, P. & GARUTI, R., 1999. 'Les inéquations fonctionnelles: lieu de developpement et d'étude de la maitrise des fonctions', Preprint Sfida 10.

BORGA, M. & PALLADINO, D., 1997. *Oltre il mito della crisi - Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*, La Scuola, Brescia.

BOURBAKI, N., 1939. *Éléments de Mathématiques, Livre I, Ch. 2*, Hermann, Paris.

CHWISTEK, L., 1922. 'Uber der Antinomien der Prinzipien der Mathematik', *Mathematische Zeitschrift*, **14**, 236 - 242.

DAHAN-DALMEDICO, PEIFFER, 1986. *Une histoire des mathématiques.* Seuil 1986 (Points Sciences n° 49). Chap.6.

DEDEKIND, R., 1926. *Essenza e significato dei numeri - Continuità e numeri irrazionali*, Traduzione dal tedesco di Oscar Zarinski, Alberto Stock Editore, Roma.

DHOMBRES & al., *Mathématiques au fil des âges.* Gauthier-Villars 1987. Chap.4.

EILENBERG, S. & MAC LANE, S., 1945. 'General Theory of Natural Equivalences' Transactions of the Americal Mathematical Society, **58**, 239 - 294.

ERNEST, P., 1993. 'Il costruttivismo sociale come filosofia della matematica: riabilitazione del costruttivismo radicale', Speranza, F. (Ed.) *Quaderni di Didattica della Matematica e dei suoi fondamenti*, nr 1.

FERRANDO, E., 1999. 'A multidisciplinary approach to the interpretation of some difficulties in learning Mathematica Analysis', in *Proccedings of 50-th CIEAEM, Neuchatel, 1998*, 308 - 312.

GRAY, J.W., 1979. 'Fragments of the History of Sheaf Theory', Fourman, M.P. and Mulvey, C.J. and Scott, D.S. (Eds.) *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics, nr 753, Springer, Heidelberg.

Groupe d'histoire des mathématiques. "Vous avez dit: Fonction?". Feuille de vigne Nr spécial. IREM de Dijon 1982.

GRUGNETTI, L., 1994. 'Il concetto di funzione, difficoltà e misconcetti', L'educazione Matematica, Anno XV - Serie IV - Vol. **I**, nr 3, 173 - 183.

HAREL & DUBINSKI. voir Sierpinska 1992.

HAUSDORFF, F., 1914. Grundzüge der Mengenlehre

KURATOWSKI, C., 1921. 'Sur la notion de l'ordre dans la Théorie des Ensembles', *Principia Mathematica*, Tom II, ?-171.

MAC LANE, S., 1986. *Mathematics Form and Function*, Springer, Heidelberg

MANGIONE, C. & BOZZI, S., 1993. *Storia della Logica - Da Boole ai nostri giorni*, Garzanti, Milano.

N.R.D. Modena: 1985, *Il concetto di funzione nella scuola superiore*, Quaderno nr 3, Dipartimento di Matematica di Modena, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Contratto 84.01953.01.

NORDON, N., 1995. 'Le continu quand il n'était qu'attribut', *Actes de l'Université d'été '95: Epistémologie et Histoire des Mathématiques* (Besançon).

PEANO, G., 1911. 'Sulla definizione di funzione', Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie V, Vol. **XX**, 3 - 5.

PIOCHI, B. (Ed.), 1995. *Funzioni, Limiti, Derivate, Atti 4° Incontro Nuclei di Ricerca didattica in Matematica nella Scuola Secondaria Superiore, Siena, 1994*, IRRSAE Toscana.

RAMSEY, F.P., 1925. 'The Foundations of Mathematics', *Proc. London Math. Soc.*, **25**, 338 - 384.

SCHWARTZ, L., 1950. *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris.

SFARD, A., 1991. 'On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as differents sides of the same coin', Educational Studies in Mathematics, **22**, nr 1, 1 - 36.

SFARD, A., 1992. 'Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function', Harel, G. and Dubinski, E. (Eds.) *The Concept of Function*, MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America, 59 - 84.

SIERPINSKA, A., 1992. 'Theoretical Perspectives for Development of the Function Concept', Harel, G. and Dubinski, E. (Eds.) *The Concept of Function*, MAA Notes, Vol. **25**, Mathematical Association of America, 23 - 58.

YOUSCHKEVITCH, A.P., 1981. 'Le concept de function jusqu'au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle', Ovaert, J.L. and Reisz, D. (Eds.) *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P., n° 41, 7 - 68.

VITA, V., 1986. *I programmi di Matematica per le scuole secondarie dall'unità d'italia al 1986*, Pitagora Editrice, Bologna.

WHITEHEAD, A.N. & RUSSELL, B., 1910. *Principia Mathematica* - Vol **I**, Cambridge University Press.

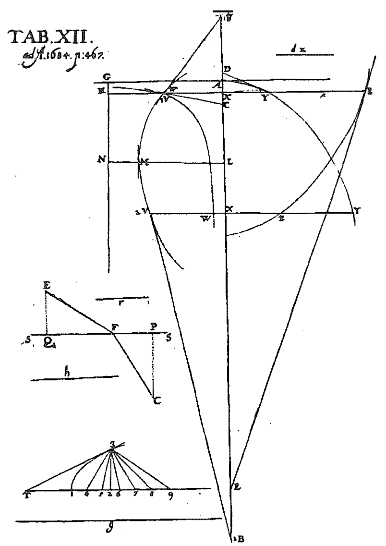
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

L'invention du Calcul différentiel, racontée par Leibniz

MICHEL-PAJUS Annie
Lycée Claude Bernard - IREM Paris 7
Université Denis Diderot (France)

Abstract

L'atelier était consacré à l'étude d'un texte de LEIBNIZ : *Histoire et Origine du Calcul Différentiel*[2] et à une possible utilisation de ce texte avec des étudiants de niveau post Bac. Faute de place, nous nous limiterons ici à une lecture commentée d'extraits du texte. Les documents pour les élèves seront par ailleurs publiés dans une prochaine brochure du Groupe M. : A.T.H[3].



[2]Ce texte est disponible dans *Mnémosyne* n° 13 et Brochure n° 90. IREM Université Denis Diderot Mathématiques : Approche par les Textes Historiques. IREM Université Denis Diderot

[3]Ce qui signifie Mathématiques : Approche par les Textes Historiques. Ce groupe travaille à l'IREM de l'Université Denis Diderot à Paris (ex Paris 7)

1 Introduction

Ce texte est rédigé en 1714, quarante ans après l'invention du Calcul Différentiel, alors que la controverse de priorité entre Newton et LEIBNIZ s'éternise. Il ne sera pas publié du vivant de l'auteur, mort un an après, mais retrouvé au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. LEIBNIZ précise d'abord ses objectifs :

> Il est très utile de connaître les véritables origines des inventions mémorables, surtout de celles dont la découverte n'est pas due au hasard, mais au pouvoir de la pensée. En effet, cela permet non seulement à l'Histoire de reconnaître la part qui revient à chaque inventeur et invite d'autres esprits à rechercher les mêmes titres de gloire, mais contribue de plus au développement de l'art d'inventer, en faisant connaître la méthode sur des exemples remarquables.

L'objectif est donc double : pédagogique et polémique. LEIBNIZ précise ensuite ce que n'est pas son Calcul différentiel : ce n'est pas l'étude des développements en séries infinies, à la manière de Mercator ou Newton - ce n'est pas l'utilisation de "quantités qui épuisent progressivement la surface de la figure" pour effectuer une quadrature, à la manière de Cavalieri, Fermat, Huygens, Wallis. C'est un Algorithme, c'est-à-dire un jeu réglé de symboles, qui permet "d'affranchir l'imagination d'une attention continuelle aux figures".

LEIBNIZ revendique un méthode nouvelle, appelée à renouveler les mathématiques aussi radicalement que celles de Viète et de Descartes, mais valide dans un champ beaucoup plus large,

> . . . en considérant les différences dx, ddx, etc.- ainsi que les sommes qui sont les inverses de ces différences - comme des fonctions de x et en les introduisant ainsi dans le calcul alors qu'auparavant on n'avait pas employé d'autres fonctions que $x, xx, x^3, \sqrt{x}$, etc. c'est-à-dire des puissances et des racines.
> Par conséquent, on peut comprendre que ceux qui ont exprimé ces quantités [différentielles] par zéro, comme Fermat, Descartes et ce rival en personne, dans ses *Principia* publiés en 16**, sont restés par ce fait très éloignés du calcul différentiel car, dans ces conditions, on ne peut distinguer ni les ordres de différences, ni les fonctions différentielles des diverses quantités[1].

Il faut se méfier du vocabulaire. Il n'y a pas chez LEIBNIZ de fonctions au sens actuel du terme, seulement des "variables" $x, y, z\ldots$ reliées entre elles. x peut donc désigner une fonction d'une autre variable. Ici d, d^2, etc... sont plutôt, dans le langage moderne, des opérateurs sur des fonctions.

2 Première étape : des observations sur les différences et les sommes

Après quelques considérations amères sur la querelle, LEIBNIZ commence son récit (en parlant de lui-même à la troisième personne). Avant son séjour à Paris, ses préoccupations tournaient essentiellement autour de la logique et de la combinatoire; il n'est donc pas étonnant qu'à l'origine soit la vérité identique : $A = A$. Puis l'égalité que LEIBNIZ affirme ici équivalente : $A - A = 0$[2]. C'est de cette rupture de symétrie que va naître tout le calcul différentiel. En effet, en accumulant autant que l'on veut de ces riens ($A - A, B - B, C - C$, etc.) - en nombre fini, infini, dénombrable ou non, on obtient toujours 0[3].

[1] Dans tout cet article, les termes soulignés le sont par moi. Les citations sans références viennent de *Historia et Origo*.

[2] Dans certains manuscrits cette deuxième égalité est démontrée comme un corollaire

[3] cf Gilles Deleuze (conférence du 29/4/80, disponible sur www.imaginet.fr/deleuze/TXT/290480.html)

> . . . il observait que, à partir de ceci : "$A = A$" ou à partir de son équivalent : "$A - A = 0$"
>
> $$A\underset{+L}{\overline{-A+B}}\underset{+M}{\overline{-B+C}}\underset{+N}{\overline{-C+D}}\underset{+P}{\overline{-D+E}}-E=0.$$
>
> Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences des deux quantités consécutives $B - A, C - B, D - C, E - D$, sont appelées L, M, N, P, il s'ensuit alors que :
> $A + L + M + N + P - E = 0$, ou : $L + M + N + P = E - A$,
> c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel que soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.
> Si, par exemple, à la place de : A, B, C, D, E, F, on prend des nombres carrés : 0, 1, 4, 9, 16, 25, on découvrira, en fait de différences, les nombres impairs : 1, 3, 5, 7, 9.
>
> | | | | | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | 0 | | 1 | | 4 | | 9 | | 16 | | 25 |
> | | 1 | | 3 | | 5 | | 7 | | 9 | |
>
> De manière évidente, on aura :
>
> $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 0 = 25,$$
>
> et l'on obtiendra le même résultat, quel que soit le nombre de termes ou de différences et quels que soient les termes choisis comme extrémités.

On peut évidemment recommencer avec la suite de la deuxième ligne, etc... et LEIBNIZ note un résultat curieux, qui constitue un exercice "d'une agréable facilité" pour les élèves (travail sur le binôme, récurrence, analogie avec la dérivation des polynômes) :

> De cette manière, il observait que s'annulent les différences secondes des nombres entiers naturels (c'est-à-dire des nombres pris dans l'ordre à partir de zéro), que s'annulent les différences tierces des carrés obtenus à partir des nombres naturels, que s'annulent les différences quatrièmes des cubes, les différences cinquièmes des bicarrés, les différences sixièmes des nombres élevés à la puissance 5 et ainsi de suite ; et il observait que la différence première des nombres entiers naturels était constante et égale à 1, que la différence seconde des carrés était égale à 1.2 = 2, que la différence troisième des cubes était égale à 1.2.3 = 6, la différence quatrième des bicarrés à 1.2.3.4 = 24, la différence cinquième des nombres élevés à la puissance 5 égale à 1.2.3.4.5 = 120, et ainsi de suite; observations que d'autres pouvaient faire depuis quelque temps, mais, pour l'auteur, elles étaient neuves et invitaient à continuer par leur agréable facilité.

On peut, à rebours, disposer les sommes partielles d'une ligne directement sur la ligne audessous. On obtient alors un tableau où chaque ligne est la suite des différences de la suivante et la suite des sommes de la précédente. Or LEIBNIZ a déjà fabriqué dans sa Dissertation sur l'Art Combinatoire de 1666 un tableau de ce type (dans lequel nous reconnaissons évidemment les combinaisons)[4].

"Qu'est-ce que Leibniz appelait l'analyse infinie ? l'analyse infinie remplit la condition suivante : elle apparaît dans la mesure où la continuité et les petites différences se substituent à l'identité".

[4] C'est moi qui ait ajouté le schéma permettant de lire une somme partielle.

1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	6	d^3u
1	3	6	10	15	21	d^2u
1	4	10	20	35	56	du
1 +	5 +	15 +	35 +	70	126	u
1	6	21	56	126	252	$\int u$
1	7	28	84	210	462	$\int\int u$

Pour ajouter quelque chose qui n'est peut-être pas banal, il découvrait aussi des théorèmes à propos des différences et des sommes qui sont les suivantes :

La suite a, b, c, d, e, etc... décroissant à l'infini, soient :

$$\begin{array}{lcccccccccccccl}
\text{les termes} & a & & b & & c & & d & & e & & & & & \text{etc ...}\\
\text{les différences 1ères} & & f & & g & & h & & i & & k & & & & \text{etc ...}\\
\text{les différences 2èmes} & & & l & & m & & n & & o & & p & & & \text{etc ...}\\
\text{les différences 3èmes} & & & & q & & r & & s & & t & & u & & \text{etc ...}\\
\text{les différences 4èmes} & & & & & \beta & & \gamma & & \delta & & \varepsilon & & \theta & \text{etc ...}\\
\text{etc ...} & & & & & & \lambda & & \mu & & \nu & & \rho & \sigma & \text{etc ...}
\end{array}$$

On pose "a" comme terme premier et "ω" comme terme dernier. L'auteur trouvait alors :

$$\begin{array}{rcl}
a-\omega & = & 1f+1g+1h+1i+1k+etc\\
a-\omega & = & 1l+2m+3n+4o+5p+etc\\
a-\omega & = & 1q+3r+6s+10t+15u+etc\\
a-\omega & = & 1\beta+4\gamma+10\delta+20\varepsilon+35\theta+etc, etc.
\end{array} \qquad (1)$$

Remarques :

1) la suite "décroissant à l'infini" signifie que la suite est décroissante et tend vers zéro (le terme dernier, désigné par ω plus bas)

2) f représente ici $a-b$ (et non plus $b-a$ comme au début) sans doute pour ne considérer que des quantités positives

3) on lit la somme partielle des termes d'une suite partant de l'infini (à droite) et limitée à gauche par un terme (m par exemple), sur la ligne immédiatement supérieure, en prenant le terme le plus proche à gauche (ici g) : $g = m+n+o+p+\ldots$; $f = l+m+n+o+p+\ldots$

La première égalité est celle que l'on a vue plus haut, moyennant le changement de signe observé. Pour la deuxième, on remplace chaque lettre de la ligne précédente par les sommes partielles obtenues selon la remarque 3. l apparaît une fois (venant de f), m deux fois (venant de f et g), n trois fois (venant de f, g et h) etc... On continue pour la troisième égalité. Il est possible d'écrire cela précisément avec les notations contemporaines, mais cela serait contraire à l'esprit du texte, qui ne démontre rien, mais se contente de montrer (donner à voir)

$$[2]\, a-\omega \;=\; \begin{array}{lllll}
+1f & & & & \\
& -1l & & & \\
+1f & & +1q & & \\
& -2l & & -1\beta & \\
+1f & & +3q & & +1\lambda\\
& -3l & & -4\beta & \\
+1f & & +6q & & etc.\\
& -4l & & etc. & \\
+1f & & etc. & & \\
& etc. & & & \\
etc. & & & &
\end{array}$$

Le deuxième membre de l'égalité ci-dessus est la somme tous les termes du triangle. Cette disposition en triangle me suggère une explication du résultat : en sommant selon les diagonales ascendantes, on trouve successivement f, puis g, puis h, puis i, etc... Cela revient à repartir de la première ligne de (1), mais en remplaçant cette fois les termes de la somme par des différences de termes tous situés sur la diagonale à l'extrême gauche du tableau initial.

$$a-\omega \;=\; \begin{array}{lllll}
+1f & & 1g & 1h & 1i\\
& -1l & & & \\
+1f & & +1q & & \\
& -2l & & -1\beta & \\
+1f & & +3q & & +1\lambda\\
& -3l & & -4\beta & \\
+1f & & +6q & & etc.\\
& -4l & & etc. & \\
+1f & & etc. & & \\
& etc. & & & \\
etc. & & & &
\end{array} \qquad (2)$$

Par conséquent, en adoptant la terminologie introduite plus tard par l'auteur, et en appelant y n'importe quel terme d'une suite (et dans ce cas même $a = y$), on pourra appeler la différence première dy, la différence seconde ddy, la différence troisième d^3y, la différence quatrième d^4y, et en appelant x n'importe quel terme d'une deuxième suite, on pourra appeler la somme de ces termes $\int x$, la somme des sommes (ou somme seconde) $\int\int x$, la somme troisième $\int^3 x$, et la somme quatrième $\int^4 x$.

Si l'on pose ensuite que : $1+1+1+1+$ etc, sont égaux à x, c'est-à-dire que x représente les nombres naturels, dont la différence première $dx = 1$, alors :

$$\begin{array}{rlll}
 & 1+2+3+4+5+ & \text{etc font} & \int x\\
\text{et} & 1+3+6+10+ & \text{etc font} & \int\int x\\
 & 1+4+10+20+ & \text{etc font} & \int^3 x\\
 & 1+5+15+35+ & \text{etc font} & \int^4 x
\end{array}$$

et ainsi de suite.

D'où finalement, il résulte :

$$y-\omega = dy.x - ddy.\int x + d^3y.\int\int x - d^4y.\int^3 x + \text{etc}, \qquad (2)$$

ce qui est égal à y, si l'on convient de continuer à l'infini c'est-à-dire de rendre $\omega = 0$.

Ce résultat s'obtient aisément en sommant selon les colonnes le tableau [2]. Notons la virtuosité dans les changement de points de vue. La créativité vient de l'observation systématique selon une multiplicité de points de vue.

D'où il s'ensuit la somme de la suite y elle-même, soit

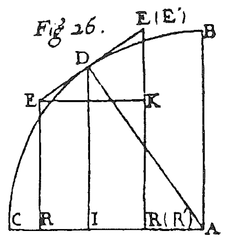
$$\int y = yx - dy. \int x + ddy \int\int x - d^3y. \int^3 x + \text{etc.}^5 \qquad (3)$$

Je suppose que Leibniz remplace y par $\int y$, ce qui n'a pas d'importance, puisque la suite y est quelconque. Ceci suppose tout de même l'utilisation de la relation $d(\int y) = y$. Leibniz ajoute alors une petite phrase...

Or, ces deux théorèmes ont pour propriété remarquable d'être également valides dans les deux calculs différentiels, aussi bien le Calcul différentiel numérique que le Calcul différentiel infinitésimal : nous parlerons plus bas de la distinction à établir entre eux.

3 Deuxième étape : la résolution de problèmes géométriques

Sur les conseils de Huygens, en 1672, Leibniz se met à lire tout ce qui est accessible sur le sujet. Première révélation : *la Géométrie* de Descartes qui permet d'exprimer les courbes par des équations. Deuxième révélation : une figure de Pascal, que Leibniz nomme triangle différentiel, ou triangle caractéristique. Cette figure est dessinée par Pascal dans le but de calculer la somme des produits DI par EE', dans le cas particulier où la courbe CB est un quart de cercle.



PASCAL 1659

[5] Ce résultat est généralement attribué à Jean Bernoulli qui le donne dans les *Acta Eruditorum* en 1694, ou à Brook Taylor qui l'obtient comme cas particulier de son théorème général (publié en 1715).

Qu'y trouve Leibniz ?

- Pascal découpe des intervalles égaux sur la courbe, et non sur les axes, ce qui revient pour nous à prendre comme variable d'accroissement l'abscisse curviligne, alors que Leibniz "n'avait d'abord considéré que les infiniment petits du type des intervalles entre les ordonnées, conformément à la méthode de Cavalieri".
- Ensuite, peu importe que ce triangle soit "inassignable ou infiniment petit", on peut toujours considérer les triangles qui lui sont semblables.
- Par ailleurs, Leibniz emprunte sans hésitation à Pascal l'idée que la longueur de l'élément de courbe est égale à la longueur de la portion de tangente, ce qui conduit à la rectification :

  Pascal : quand je dis que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, pusqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude des sinus est indéfinie; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE, ne diffère de l'arc entier BC, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée[6].

  Leibniz[7] :... ce qui constitue pour moi le principe général de mesure des courbes, à savoir considérer qu'une figure curviligne équivaut à un Polygone d'une infinité de côtés...

- Et surtout, ce que Pascal n'a pas vu : "Je vis immédiatement que ce théorème était très général et valable pour n'importe quelle courbe"[8].

Leibniz étend donc la méthode de Pascal à une courbe quelconque et en déduit, simplement par des considérations de triangles semblables, des égalités entre sommes obtenues en changeant ce que nous appellerions la variable d'intégration[9]. Il modifie évidemment en même temps ce que nous appellerions la fonction à intégrer et dénomme la nouvelle courbe correspondant à la nouvelle fonction une quadratrice.

Il détaille trois théorèmes ainsi obtenus, faisant intervenir moments, normales, sous-normales, superficies, etc. que nous résumons en termes plus modernes[10] :

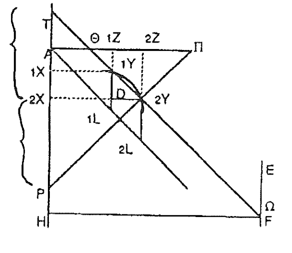


FIGURE 2

[6] *Traité des sinus du quart de cercle*, Avertissement suivant la démonstration de la proposition I.

[7] *Additio Ad Schedam de dimensionibus figuram inveniendis*, 1684. Parmentier, p. 94.

[8] Lettre à Bernoulli, 1703. Child, p.17.

[9] Les notions de fonctions et de variables ne sont pas encore conceptualisées.

[10] Attention ! l'indice est placé à gauche de la lettre pour désigner certains points. L'axe des x est AH, celui des z est AM.

1) En utilisant le triangle caractéristique D_1Y_2Y et le triangle P_2X_2Y, on obtient : $P_2Y._1YD =_2 Y_2X._2Y_1Y$; en posant $\|P_2Y\| = n$ ceci correspond à $n.dx = z.ds$. Le moment vaut $\int zds = \int ndx$ et l'aire de révolution vaut $\int 2\pi zds = 2\pi$. moment.

2) Avec le triangle ΩHT, on obtient : $\Omega H._1Y_2Y = T\Omega._2YD$ ce qui correspond à $k.ds = \|T\Omega\|.dz$ et longueur = $\int ds = \frac{1}{k}\int \|T\Omega\|dz$.

3) Avec le triangle P_2X_2Y à nouveau , on obtient : $_2XP._1YD =_2 Y_2X.D_2Y$ ce qui correspond à (sous-normale) . $dx = z.dz$ et donc $\frac{z^2}{2} = \int zdz = \int$ sous-normale dx

Par conséquent, pour trouver la superficie d'une figure donnée, on cherche une autre figure dont les sous-normales soient égales aux ordonnées de la figure donnée : cette autre figure sera la quadratrice de la figure donnée.

Ainsi, grâce à ce raisonnement très aisé, nous réduisons le calcul des superficies de solides de révolution aux problèmes de quadratures planes et de rectifications de courbes ; en même temps, nous réduisons le problème des quadratures au problème inverse des tangentes.

Autrement dit, pour trouver la surface "sous la courbe" d'ordonnée y, on cherche une courbe d'ordonnée z telle que y soit la sous normale de cette courbe, et on obtient la surface cherchée comme moitié de celle du carré de côté z. Cela ne semble pas très pratique, mais a une grande portée théorique, car LEIBNIZ découvre ainsi que Pascal n'avait pas vu, bloqué dans son quart de cercle où "tout se passe trop bien"[11] : *une relation générale entre les aires et les tangentes.* (Rappelons qu'on appelait problème inverse des tangentes la recherche d'une courbe dont les tangentes possédaient une propriété particulière : il s'agit ici d'une propriété des sous-normales)

Selon son habitude, LEIBNIZ essaie sa méthode sur une multitude de problèmes, en variant autant que possible les techniques, et il va ainsi trouver un des résultats dont il sera le plus fier : la quadrature arithmétique du cercle, en expérimentant un autre type de découpage de la figure .

En 1673, et pendant une partie de 1674, Leibniz se rendit à Paris. Mais en 1674 (pour autant qu'il puisse s'en souvenir) il tomba en Arithmétique sur cette célèbre Quadrature[12] qui mérite bien que l'on expose selon quelle méthode elle a été réalisée. D'habitude, les Géomètres décomposaient les figures en rectangles, en traçant des droites parallèles aux ordonnées. Lui-même eut l'occasion par hasard de résoudre une figure en triangles, formés par des droites concourantes en un seul point : il examina comment on pouvait obtenir quelque chose de neuf, donc de commode.

Nous ne détaillons pas ici la démonstration, qui fait l'objet de l'un des problèmes destinés aux élèves que nous avons présentés, et aussi l'objet d'un autre atelier de cette Université d'été[13]. Il s'agit encore de changer, à partir de considérations géométriques sur les triangles semblables, l'élément différentiel et la fonction à quarrer. Cette transformation (que LEIBNIZ généralise sous le nom de méthode des métamorphoses) permet d'obtenir une fonction dont on peut trouver une primitive (éventuellement sous forme de développement en série, comme ici).

[11] Comme l'écrit Claude Merker dans *Le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, 1995, IREM de Besançon.

[12] Il s'agit de l'expression de l'aire du cercle unité sous forme de série. Le procédé est détaillé dans le texte de problème inspiré de la "lettre à La Roque", dans *Mnémosyne*, n° 13.

[13] Gilles Bonnefoy.

Mais LEIBNIZ s'aperçoit alors que beaucoup de ces résultats ont déjà été obtenus par d'autres méthodes, et abandonne ses recherches géométriques.

4 Troisième étape : Retour au calcul des différences finies. La nouvelle notation

D'autre part, il faut exposer comment, peu à peu, notre auteur est parvenu à un nouveau genre de notation, qu'il a appelé "calcul différentiel".
Déjà, en 1672, Huygens lui avait proposé, alors qu'ils s'entretenaient des propriétés des nombres, le problème suivant : trouver la somme d'une série décroissante de fractions dont les numérateurs sont égaux à 1, et dont les dénominateurs sont les nombres triangulaires : somme que Huygens avait trouvée dans des travaux de Hudde sur l'estimation de la probabilité. Notre auteur trouva que la somme était 2, ce qui était en accord avec la proposition de Huygens.

Le terme général de la série est $\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$, ce qui permet à la "propriété des différences" de manifester toute son efficacité !

Du même coup, il découvrit les sommes des séries de nombres du même genre, où les dénominateurs sont des nombres combinatoires quelconques, et en fit part à Oldenbourg en février 1673, dans une lettre publiée par les adversaires. Quand l'auteur eut vu, plus tard, le triangle arithmétique de Pascal, il créa, sur cet exemple, le triangle Harmonique.

Triangle Arithmétique, où la suite fondamentale est constituée par une progression Arithmétique : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&1&&&&&\\
&&&&1&&2&&1&&&&\\
&&&1&&3&&3&&1&&&\\
&&1&&4&&6&&4&&1&&\\
&1&&5&&10&&10&&5&&1&\\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1\\
\end{array}$$
$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

Triangle Harmonique, où la suite fondamentale est la progression Harmonique $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&\frac{1}{1}&&&&&&\\
&&&&&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}&&&&&\\
&&&&\frac{1}{3}&&\frac{1}{6}&&\frac{1}{3}&&&&\\
&&&\frac{1}{4}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{12}&&\frac{1}{4}&&&\\
&&\frac{1}{5}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{20}&&\frac{1}{5}&&\\
&\frac{1}{6}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{60}&&\frac{1}{30}&&\frac{1}{6}&\\
\end{array}$$
$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}$$

Dans le triangle harmonique, si l'on divise les dénominateurs de n'importe quelle suite oblique descendant à l'infini et, de même, de n'importe quelle suite parallèle finie, par le dénominateur du terme correspondant dans la suite première, on obtient les nombres combinatoires figurant dans le triangle arithmétique.

Par ailleurs, ce qui est commun aux deux triangles, c'est que les suites obliques sont déduites les unes des autres par somme ou par différence. Dans le triangle arithmétique, une suite donnée est obtenue en faisant la somme de la suite précédente la plus proche, ou en faisant la différence de la suite immédiatement consécutive ; mais, dans le triangle harmonique au contraire, une suite donnée est obtenue en faisant la somme de la suite immédiatement consécutive.

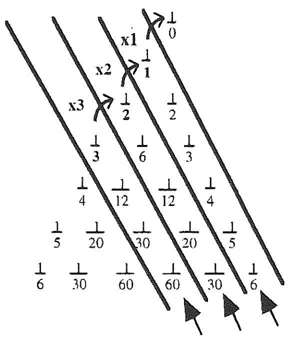
D'où il s'ensuit[14] :

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc} & = & \frac{1}{0} \\ \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\text{etc} & = & \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\text{etc} & = & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}+\text{etc} & = & \frac{4}{3} \end{array} \qquad (4)$$

et ainsi de suite.

Il s'agit de la même idée qu'au §2, avec une disposition différente : la somme des termes d'une diagonale, en partant de l'infini (en bas), s'obtient sur la diagonale précédente en prenant le nombre immédiatement au-dessus. Pour que toutes le sommes commencent par $\frac{1}{1}$, il suffit de multiplier tous les termes par le dénominateur de la première fraction.

La première égalité est assez étonnante, mais si on complète les diagonales par $\frac{1}{0}$, elle s'obtient naturellement !



ajouter en partant de l'infini

A partir de ces sommes, LEIBNIZ obtient les sommes d'autres séries, en se ramenant aux précédentes par une méthode d'identification. Cette méthode fait l'objet de l'autre problème destiné aux élèves que nous avons examiné. En voici seulement un exemple :

[14] En sommant les termes d'une oblique, on obtient le premier terme de l'oblique précédente; ici tous les termes sont de plus multipliés par l'inverse du premier terme de l'oblique.

Soit $x = 1$, ou 2, ou 3, etc... ; le terme général de la série $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$+etc... est $\frac{1}{4x^2+8x+3}$; on cherche le terme général de la série-somme ; on examine par la méthode la plus simple si l'on peut l'obtenir sous la forme suivante : $\frac{e}{bx+c}$; on aura :

$$\frac{e}{bx+c}-\frac{e}{bx+b+c}=\frac{eb}{b^2x^2+b^2x+bc+2bcx+c^2}=\frac{1}{4x^2+8x+3}.$$

En identifiant ces deux formules on obtient :
$b = 2, eb = 1$, donc : $e = \frac{1}{2}, b^2+2bc = 8$, soit : $4+4c = 8$ ou $c = 1$, et enfin : $bc+c^2 = 3$, ce qui en découle.

Donc le terme général de la série-somme est : $\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$, soit $\frac{1}{4x+2}$

Remarquons la nouvelle notation : la suite est désignée par son terme général $\frac{1}{4x^2+8x+3}$, où x désigne le rang du terme (ce que nous notons généralement n), comme dans le §2. Cette notation identique pour les fonctions et les suites va faciliter le transfert des méthodes de calcul

5 Le passage aux différentielles géométriques

LEIBNIZ poursuit sans transition: (en se désignant toujours par "notre auteur")

> Or, notre auteur remarqua aisément que le calcul différentiel, dans le cas des Figures géométriques, était étonnamment facile pour celui qui s'est exercé à manier les nombres, puisque, dans les figures, les différences et ce qui diffère sont des incomparables ; toutes les fois que sont rapprochées, dans une addition ou une soustraction, des grandeurs incomparables, les petites sont négligeables par rapport aux grandes ; aussi, les quantités irrationnelles ne sont-elles pas moins faciles à différencier que les sourdes[15], ou que les quantités exponentielles, à l'aide de logarithmes.

Certes! mais ceci ne nous dit pas ce que signifie différencier une grandeur géométrique ! la réponse suit :

> D'autre part, il observait que les lignes infiniment petites qui se présentent dans les figures ne sont que les différences relatives aux moments des lignes variables.

Pour comprendre l'importance de cette remarque, il faut remonter à ses premiers manuscrits : d'après ceux-ci, il semble bien que la notation $\int$ (d'abord notée *omn*) et d (d'abord indiqué en dénominateur), soit apparues dans le contexte géométrique, et immédiatement appliquées de façon formelle dans les calculs. Mais *d n'apparaît pas comme notation de l'élément d'accroissement.* Dans les sommations, celui-ci n'est tout simplement pas écrit ! l'auteur indique simplement, s'il y a ambiguïté, à quel axe est appliquée la sommation. Sur cet axe, le découpage est toujours régulier[16]. S'il s'agit de l'axe des abscisses, cela revient à prendre dx constant. Au départ, *d indique seulement l'opérateur inverse de $\int$.*

> Etant donné l [l'ordonnée], et sa relation avec x [la variable], trouver $\int l$. Ceci doit être obtenu par le calcul contraire, c'est-à-dire, supposons que $\int l = ya$. Soit $l = \frac{ya}{d}$; alors de même que $\int$ les accroît, d va diminuer la dimension. Mais $\int$ signifie une somme et d une différence. A partir d'un y donné, on peut toujours trouver $\frac{y}{d}$ ou l, c'est-à-dire la différence des y[17].

[15] Parmi les quantités que nous appelons irrationnelles, Leibniz distingue les sourdes qui peuvent s'exprimer à l'aide de radicaux, et les autres qu'il nomme irrationnelles.

[16] A l'époque, il n'était pas d'usage d'indiquer l'élément différentiel dans la sommation. Pascal par exemple le sous-entend généralement, et l'on sait quel est l' élément de sommation en regardant justement quelle ligne bénéficie d'un découpage équidistant.

[17] Manuscrit du 29 Octobre 1675, CHILD p. 82.

Ce n'est qu'ensuite que LEIBNIZ remarque que les accroissements des lignes correspondent à dx, dy, ds. Et c'est dans cette relation entre la quantité accroissement de la variable et l'opérateur d que se noue le calcul différentiel. Elle permet la traduction du calcul algébrique en propriétés géométriques, et réciproquement.

Dans une lettre à L'Hospital de 1694, Leibniz est un peu plus explicite. Après avoir rappelé brièvement comment il a obtenu les formules (5), il écrit :

> Reconnaissant donc cette grand utilité des différences et voyant que par le calcul de M. des Cartes l'ordonnée de la courbe peut estre exprimée, je vis que trouver les quadratures ou les sommes des ordonnées n'est autre choses que trouver une ordonnée (de la quadratrice) dont la différence est proportionnelle à l'ordonnée donnée. Je reconnus aussi bientost que trouver les tangentes n'est autre chose que différentier, et trouver les quadratures n'est autre chose que sommer, pourvu qu'on suppose les différences incomparablement petites[18].

Pour trouver la quadrature de y on calcule la somme des rectangles ydx : $Q = \int ydx$ est ainsi interprétée comme une *sommation*. Mais elle signifie aussi que Q est une quantité dont la différentielle est ydx (interprétation comme une *intégration*[19]).

Notons que pour la quadrature, comme pour les tangentes, la rédaction de cet extrait suppose que les dx sont égaux (et c'est dx qui donne le coefficient de proportionnalité). Pour une quadrature on somme des rectangles de base égales : "la somme des ydx" devient "la somme des y" si $dx = 1$. Pour les tangentes, si $dx = 1$, la valeur de dy permet de construire la tangente, au moyen du triangle différentiel.

Cela tombe bien, puisque dans les formules du §2, dx valait 1. A un coefficient de proportionnalité près, les résultats du calcul des différences finies restent valables. Cette condition $dx = 1$ indique simplement que x est considérée comme la variable (elle peut se lire aussi : la différentielle de la fonction $x \mapsto x$ est égale à 1).

Cette convention sera abandonnée en pratique dès lors que la variable n'est plus x. Nous avons dit que pour LEIBNIZ, y n'est pas une fonction de x au sens actuel: x et y sont des variables liées par une relation. Quand dx apparaît, c'est que x est elle-même fonction d'une variable déterminée (par exemple l'abscisse curviligne) ou non, le choix étant fait plus tard pour la commodité des calculs.

De plus, la définition de d comme opérateur permet la réitération, grâce à la notation exponentielle dont LEIBNIZ élargit ici le champ, et le nouveau calcul va définir les règles qui permettent de combiner d et $\int$ avec toutes les autres opérations, permettant ainsi le traitement de beaucoup plus de courbes.

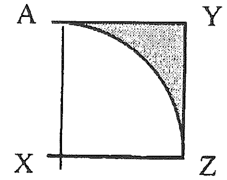
> Et, de la même façon que les quantités considérées jusqu'ici par les analystes avaient des fonctions telles que, par exemple, les puissances et les racines, de même, désormais, des quantités considérées comme des variables admettent de nouvelles fonctions, comme par exemple les différences. Tout comme nous avons eu jusqu'ici les fonctions x, xx, x^3, etc..., y, yy, y^3, etc..., de même, nous pouvons employer dx, ddx, d^3x, etc... Ainsi, même les Courbes que Descartes a exclues de sa Géométrie, en tant que "mécaniques", peuvent être exprimées par des équations appropriées et traitées par le calcul, ce qui libère l'esprit de l'attention continuelle qu'il porte aux figures.
>
> Dès lors, tout ce qui, autrefois, était donné dans des figures, pouvait être exprimé par le calcul. En effet, $\sqrt{dxdx + dydy}$ exprimait un élément de courbe, ydx une portion de son aire ; du fait que

[18]GERHARDT, MS, Tome II, p. 260.

[19]Signalons au passage que le terme "intégrale" apparaît en 1690 sous la plume de Jacques Bernoulli dans une lettre à LEIBNIZ.

> $\int ydx$ et $\int xdy$ sont complémentaires, il ressort aussitôt avec évidence que : $d(xy) = xdy + ydx$, soit, si l'on préfère : $xy = \int xdy + \int ydx$, bien que ces signes varient parfois.

La différentielle du produit est obtenue ici par un raisonnement géométrique :



En prenant A comme origine et une courbe AZ, l'aire de la partie blanche est $\int ydx$, celle de la partie complémentaire grisée $\int xdy$, et l'aire du rectangle est xy[20]. Cette méthode correspond aux essais de LEIBNIZ dans ses premiers manuscrits (1675). Mais dans une lettre de 1677 à Oldenburg (destinée à Newton), il raisonne sur les ordres de grandeur. Cette méthode est reprise dans un article de 1710 sur l'analogie symbolique entre les puissances et les différences:

> $d(xy)$ est la différence entre $(x+dx)(y+dy)$ et xy, c'est-à-dire entre un produit donné et le produit immédiatement consécutif. Or $(x+dx)(y+dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$; en soustrayant xy, il vient : $ydx + xdy + dxdy$; mais puisque dx et dy sont incomparablement plus petits que x ou y, $dxdy$ sera donc incomparablement plus petit que xdy et ydx, par conséquent nous l'écartons pour aboutir en définitive à $(x+dx)(y+dy) - xy = ydx + xdy$[21].

En fait, nous voyons que c'est par un aller-retour incessant entre les démonstrations de type géométrique et celles de type calculatoire que LEIBNIZ teste et affine sa méthode ; il donne à la fin de Historia et Origo un exemple de double démonstration de ce type pour un théorème sur les moments.

Ce nouveau calcul présente l'avantage de prouver simplement tous les résultats déjà connus, mais surtout d'étudier de nouvelles courbes, définies par des équations transcendantes. C'est en particulier en cela qu'il estime avoir amélioré le travail de Descartes.

> Ainsi, même les Courbes que Descartes a exclues de sa Géométrie, en tant que "mécaniques", peuvent être exprimées par des équations appropriées et traitées par le calcul, ce qui libère l'esprit de l'attention continuelle qu'il porte aux figures.

Par ailleurs, à condition de considérer soigneusement les ordres de différentiation, la méthode s'étend à d'autres problèmes que les quadrature et tangentes :

> Lorsqu'on applique le calcul différentiel à la Géométrie, les différences de premier ordre correspondent exactement aux tangentes, les différences de second ordre aux cercles osculateurs (dont notre jeune homme a introduit lui-même l'usage), et on peut procéder ainsi de suite. Or, ces procédés ne s'appliquent pas seulement aux tangentes et aux quadratures, mais à toutes sortes de problèmes et de théorèmes, où sont diversement mêlées différences et intégrales (selon la terminologie de l'ingénieux Bernouilli), comme cela se produit d'ordinaire dans les problèmes physico-mécaniques.

[20]Il n'y a pas de figure à cet endroit du texte, mais celle-ci se trouve un peu plus loin, pour un raisonnement du même type, avec un intégrande plus compliqué. Cela revient à une intégration par parties.

[21]*Symbolismus memorabilis...* in PARMENTIER, p. 417.

Ce qui permet à LEIBNIZ de conclure, qu'étant "parvenu à quelque chose de plus élevé et de plus général" que ses adversaires, on ne peut l'accuser de plagiat.

Conclusion

Au terme de cette étude, nous restons un peu sur notre faim. Nous ne trouvons aucun "passage à la limite" qui justifierait le passage du discret au continu, des différences finies aux différentielles.

Des transformations qui reviennent pour nous à des changements de variable ou à des intégrations par parties permettent de ramener les calculs à des quadratures connues (et prouvées par la méthode d'exhaustion), ou à des développements en série de fonctions dont on sait faire les quadratures. Ces transformations sont justifiées tantôt par des considérations géométriques, tantôt par un calcul formel dont les règles sont simplement données sans preuve dans le *Nova methodus*[22].

A la lueur de ce texte et des manuscrits que j'ai pu trouver, voici comment je vois le déroulement des faits :

Les observations sur les suites mettent en évidence les deux opérations réciproques : différence et somme, sans que cela soit formalisé, faute de notation adéquate.

Puis commence le travail géométrique sur les aires. Les travaux antérieurs des géomètres, associés à la notation de Descartes, les font apparaître comme sommes de suites. Le triangle différentiel de Pascal fait découvrir à LEIBNIZ une relation entre quadrature et tangentes, qui n'est pas encore celle dont nous avons l'habitude entre différentiation et intégration, et une technique de "métamorphoses" qui revient à transformer les intégrales.

Emergent alors simultanément la notation par une seule lettre d'une suite et d'une fonction, (lettre qui représente à la fois un terme ou une ligne <u>et</u> l'ensemble de tous les termes ou de toutes les lignes) et les symboles -et le concept- des opérateurs réciproques sur ces objets, avec les symboles $\int$ et d. La réciprocité observée sur les suites suggère sans doute celle posée par définition, puis interprétée, sur les opérateurs en géométrie.

LEIBNIZ explore alors, à son habitude toutes les règles de combinaison avec les autres symboles connus, en même temps que l'application systématique à la géométrie. Cette recherche utilise en aller-retours constants l'interprétation géométrique et les analogies formelles.

Les justifications "métaphysiques" n'interviendront que plus tard, quand les interlocuteurs de LEIBNIZ insisteront, sous forme d'une théorie assez floue sur la nature des infiniment petits, les ordres de grandeur, le principe de continuité, etc. Il est d'ailleurs remarquable que dans ce texte écrit à la fin de sa vie, LEIBNIZ n'y fasse aucune allusion.

Sans aucun doute la conviction de LEIBNIZ, en relation avec sa vision du monde, est davantage fondée sur l'*harmonie* formelle de son calcul, d'une part, et son efficacité dans la résolution des problèmes géométriques, d'autre part.

Faut-il le regretter ? je laisse la réponse au grand mathématicien André WEIL :

> "Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe; le pressentiment se change en certitude; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître; comme l'enseigne la Gita on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique

[22]publié en 1684, PARMENTIER, p. 96-117.

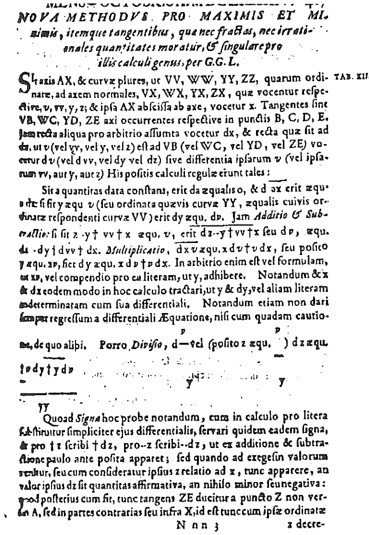
> est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.
>
> [...]
>
> Nous voyons les analogies entre le calcul des différences finies et le calcul différentiel servir de guide à Leibniz, à Taylor, à Euler, au cours de la période héroïque durant laquelle Berkeley pouvait dire, avec autant d'humour que d'à-propos, que les "croyants" du calcul infinitésimal étaient peu qualifiés pour critiquer l'obscurité des mystères de la religion chrétienne, celui-là étant pour le moins aussi plein de mystères que celle-ci. Un peu plus tard, d'Alembert, ennemi de toute métaphysique en mathématiques comme ailleurs, soutint dans les articles de l'Encyclopédie que la vraie métaphysique du calcul infinitésimal n'était autre chose que la notion de limite. S'il ne tira pas lui-même de cette idée tout le parti dont elle était susceptible, les développements du siècle suivant devaient lui donner raison; et rien ne saurait être plus clair aujourd'hui, ni, il faut le dire, plus ennuyeux, qu'un exposé correct des éléments du Calcul différentiel et intégral".[23]

Ouvrages référencés dans les notes :

J.M. CHILD, *The early manuscripts of Leibniz*, 1920, The open court publishing company.

M. PARMENTIER, *G.W.Leibniz, La naissance du calcul différentiel*, 1989, Vrin.

C.I. GERHARDT *Mathematische Schriften* (7 vol) Berlin et Halle, 1848-1863, réedition Hildersheim, 1965.



NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

TAB. XII.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & d ax erit æqu. a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit z -y † w † x æqu. v, erit d z--y † w † x seu dv, æqu. dz -dy † dw † dx. *Multiplicatio*, d xv æqu. x dv † v dx, seu posito y æqu. xv, fiet d y æqu. x d v † v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d v/y vel (posito z æqu. v/y) dz æqu. † v dy † y dv / yy

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro † z scribi † dz, pro--z scribi--dz, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ

N n n 3 z decre-

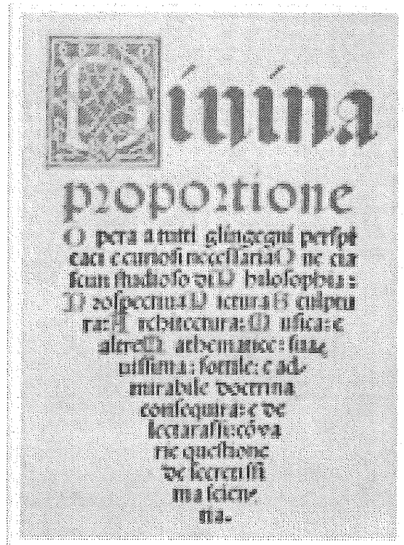
[23]André WEIL (1960) *Œuvres complètes*, Tome 2, p.408.

Il y a 500 ans, un cours de maths fut immortalisé sur toile...

ROELENS Michel
KHL, Lerarenopleiding, Hasselt (Belgique)

Abstract

Une main dessine une figure géométrique sur une ardoise. Il s'agit d'un détail d'une peinture d'il y a 500 ans, représentant un cours de mathématiques. La main appartient à quel professeur? Qui est le peintre? Qui est l'élève? Quel est le sujet du cours? En partant du tableau, nous tâcherons de reconstruire ce cours historique et de l'adapter à nos élèves de l'an 2000. Ceci nous amènera auprès des Éléments d'Euclide, des artistes-mathématiciens de la Renaissance et de l'histoire des polyèdres.



1 Le tableau

À Naples, sur une colline verte qui surplombe la ville, se trouve le somptueux *Museo di Capodimonte*. Dans ce musée, la peinture reproduite dans la Figure 1 n'est, pour la plupart des visiteurs, qu'une toile parmi d'autres. Mais pour nous, professeurs de mathématiques, elle constitue un document capital concernant l'histoire de la géométrie et de son enseignement. Du moins, si l'interprétation de NICK MACKINNON[1] [5] est exacte.

La toile est peinte à Venise il y a environ un demi-millénaire, en pleine Renaissance. Le professeur représenté au milieu est le franciscain LUCA PACIOLI, né en 1445 à *Borgo San Sepolcro*, en Ombrie (Italie centrale), village natal du peintre et mathématicien PIERO DELLA FRANCESCA qu'il a bien connu. Pacioli est l'auteur de *Summa de aritmetica, geometria, proporzioni e proporzionalità*, traité encyclopédique des mathématiques rédigé en italien (et non en latin) et publié à Venise en 1494, contenant entre autres un compte-rendu des Éléments d'EUCLIDE. C'est le gros bouquin à droite sur la peinture, sur lequel repose le dodécaèdre. Il a également écrit *La divina proporzione*, un petit livre sur les polyèdres et la section d'or, recopié en grande partie du *Libellus* de Piero della Francesca, et illustré par le grand LEONARDO DA VINCI, ami de Luca Pacioli. Plutôt qu'un grand innovateur mathématique, Pacioli était un vrai professeur ambulant, voyageant dans les différents états de l'actuelle Italie (en guerre entre eux) afin d'enseigner les mathématiques.

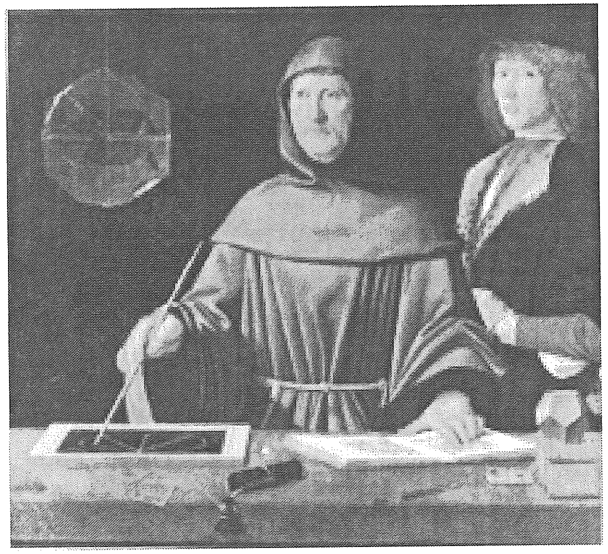


FIGURE 1 : *Le portrait du Frère Luca Pacioli*, MUSEO DI CAPODIMONTE (NAPLES)

[1]que je remercie pour m'avoir autorisé à baser cet atelier sur son interprétation du tableau.

On voit Luca Pacioli dessiner d'une main une figure géométrique sur une ardoise pendant qu'il montre de l'autre main un passage dans un livre ouvert. S'agit-il, comme beaucoup d'historiens de l'art le prétendent, d'un "portrait de mathématicien entouré d'attributs mathématiques" ? Ou serait-ce plutôt un "reportage" d'un cours de mathématiques qui a vraiment eu lieu, reportage sur toile à défaut de caméra vidéo ? Même si l'on en aura peut-être jamais la certitude, cette deuxième possibilité est de loin la plus intéressante pour nous et pour nos élèves.

Le dessin sur l'ardoise représente un cercle avec un triangle équilatéral inscrit et un trait que Pacioli est en train de tracer. Ce trait est un côté d'un pentagone régulier inscrit (Figure 2).

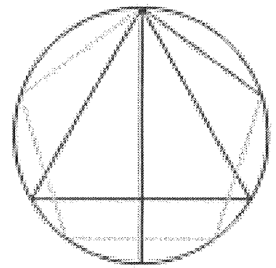


FIGURE 2. Le dessin de l'ardoise

Le livre ouvert sur la table est une traduction latine des Éléments d'Euclide, imprimée en 1482 à Venise par ERHALD RATDOLT. Mackinnon a même pu identifier la page exacte et le théorème que Pacioli indique : *le carré du côté d'un triangle équilatéral est le triple du carré du rayon de son cercle circonscrit.* Ceci relie le livre ouvert à la figure de l'ardoise. Reste à trouver le lien entre cette figure et les polyèdres, car le vrai sujet du cours, toujours selon l'interprétation de Mackinnon, n'est pas cette figure plane en soi, mais une propriété importante des polyèdres réguliers liée à la figure de l'ardoise... Le lecteur découvrira cette propriété dans le paragraphe 3.

Qui est l'élève, à droite sur le tableau ? Le tableau est dédié à GUIDOBALDO DI MONTEFELTRO, fils de FEDERICO, duc d'Urbino. Certains en concluent que Guidobaldo est l'élève. Cependant, il ne lui ressemble pas. La ressemblance avec ALBRECHT DÜRER est bien plus forte (Figure 3). La rencontre de Dürer et Pacioli n'est pas démontrée, mais on sait que Dürer était à Venise pendant l'hiver 1494-1495, où il a beaucoup appris en géométrie et en peinture. De plus, Pacioli était également à Venise pour la parution de la *Summa*. Dürer ne s'exprimait pas couramment ni en latin ni en italien, mais l'éditeur allemand de la *Summa*, le même Ratdolt qui avait imprimé les Éléments, pourrait bien avoir facilité la rencontre entre les deux géomètres.

FIGURE 3. A gauche : portrait de Guidobaldo par GIACOMO FRANCIA (détail)
Au milieu : autoportrait de Dürer en 1493 (détail, image renversée)
A droite : autoportrait de Dürer en 1498 (détail, image renversée).

Un autre lien possible entre Pacioli et Dürer est le peintre du tableau. La toile est signée "Jaco. Bar.". Le peintre est donc sans doute JACOPO DE' BARBARI, quoique certains historiens de l'art le contestent et attribuent la toile à un peintre mystérieux dont aucune autre toile ne serait conservée. On sait que de' Barbari a connu aussi bien Dürer que Pacioli. Ceci est argumenté largement dans [5].

Le polyèdre en verre, à moitié rempli d'eau, est sans doute ajouté après par Leonardo da Vinci, seul peintre de la Renaissance capable de cette prouesse. La réflection de la lumière des fenêtres dans le verre et dans l'eau est parfaite. Pacioli possédait une collection de polyèdres en verre, et on sait que da Vinci et Pacioli étaient très amis (au point d'avoir même cohabité).

2 Polyèdres réguliers et semi-réguliers

Pour comprendre l'importance historique du cours de mathématique représenté sur le tableau, il faut connaître un peu l'histoire des polyèdres.

Un polyèdre convexe est dit *régulier* si les faces sont des polygones réguliers égaux et si, de plus, à chaque sommet le même nombre de faces se rencontrent. En raisonnant sur le nombre de faces par sommet, il est aisé de découvrir qu'il n'y a pas plus que cinq possibilités. En effet, à chaque sommet il faut au moins trois faces, et la somme des angles qui s'y rencontrent doit être inférieure à 360°. A chaque sommet on ne peut donc avoir que trois, quatre ou cinq triangles équilatéraux, trois carrés ou trois pentagones réguliers. Ce raisonnement démontre qu'il n'y en a *pas plus* que cinq. De plus, en les "construisant", on peut démontrer que les cinq polyèdres réguliers *existent* : le *tétraèdre*, l'*octaèdre*, l'*icosaèdre*, le cube (*hexaèdre*) et le *dodecaèdre* (noms grecs indiquant le nombre de faces). Quoiqu'ils étaient connus avant PLATON (4e siècle a.C.), on les nomme *corps platoniciens*. Ce philosophe et mathématicien grec les associa aux éléments constituants de la nature : feu, air, eau, terre et l'univers (Figure 4). Le raisonnement esquissé plus haut, démontrant qu'il n'y a pas plus que cinq polyèdres réguliers, apparaît dans un texte de THEAIÈTE, élève de Platon.

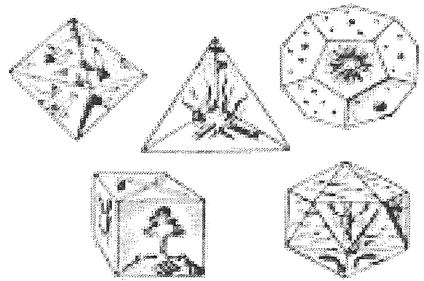


FIGURE 4. Les cinq corps platoniciens associés aux "éléments" (dessin de KEPLER)

Les *Éléments* d'EUCLIDE aboutissent, dans le treizième et dernier livre, à la construction (et donc à la démonstration de l'existence) des cinq corps platoniciens. Ceux-ci tiennent donc une place d'honneur dans la géométrie grecque; en exagérant un peu on pourrait dire que le reste des Éléments n'est qu'une introduction pour arriver à cette apothéose. . .

L'astronome, astrologue et mathématicien JOHANNES KEPLER (vers 1600) était tellement impressionné par la beauté des polyèdres réguliers, qu'il les utilisa pour expliquer l'harmonie du système solaire. Les trajectoires des six planètes connues à l'époque seraient situées sur des sphères inscrites et circonscrites aux cinq corps platoniciens (Figure 5). Plus tard, quand les observations se faisaient de plus en plus précises, il dut abandonner ce modèle et le remplacer par les "lois de Kepler" encore enseignées aujourd'hui.

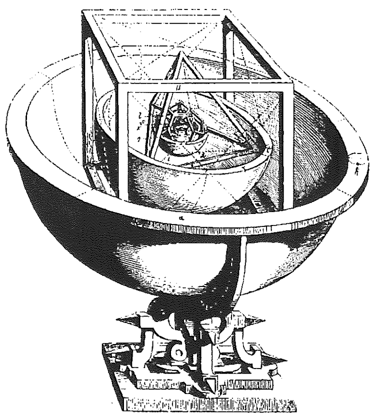


FIGURE 5. Système cosmologique de Kepler (*Mysterium cosmographicum*, 1596)

Un polyèdre convexe est dit *semi-régulier* si les faces sont des polygones réguliers de plus d'une sorte et si, de plus, à chaque sommet on retrouve la même configuration. Les treize corps archimédiens satisfont à cette définition, ainsi que deux familles infinies : les prismes et les antiprismes (Figure 6). Les treize corps archimédiens ont été découvert par ARCHIMÈDE (3ᵉ siècle a.C.), mais son texte à ce sujet est perdu. A la Renaissance, une partie de ces treize polyèdres furent redécouverts par Piero della Francesca, Pacioli, Dürer... Pour une description de tous les treize, il faut attendre Kepler.

Le polyèdre du tableau (Figure 1), à moitié rempli d'eau, est un des treize corps archimédiens, le rhombicuboctaèdre (le numéro 10 dans la Figure 6). Il a la particularité d'avoir un "petit frère", moins symétrique mais satisfaisant également à la définition de semi-régularité formulée plus haut (Figure 7). On pourrait dire qu'il y a, à part les prismes et les antiprismes, 13,5 polyèdres semi-réguliers. Le rhombicuboctaèdre du tableau symbolise doublement les quatre éléments. En tant que polyèdre composé de carrés et de triangles équilatéraux, il réfère aux quatre premiers corps platoniciens. De plus, il réunit en soi l'eau, l'air, la terre (matière dure, symbolisée par le verre) et le feu (symbolisée par le reflet de la lumière).

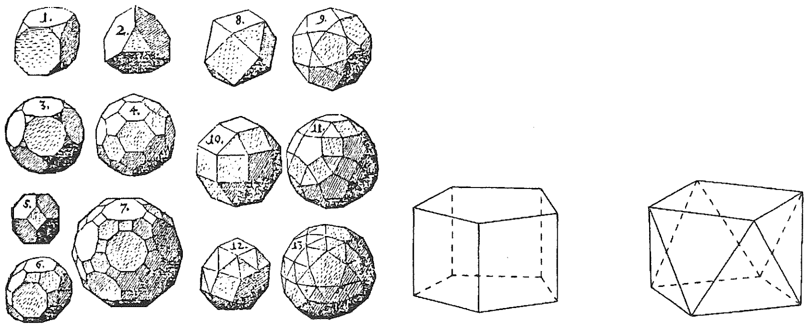


FIGURE 6. Les treize corps archimédiens (dessins de Kepler), ainis qu'un prisme et un antiprisme

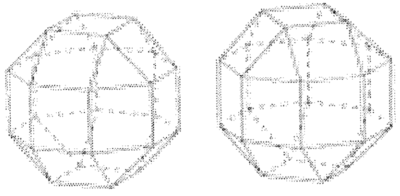


FIGURE 7. Le rhombicuboctaèdre et son "petit frère"

3 Dodécaèdre et icosaèdre selon Euclide et Pappos

Partons à la recherche du sujet précis du cours que Pacioli fait à Dürer. Il nous faut donc trouver le lien entre la figure de l'ardoise (Figure 1) et les polyèdres réguliers. (Laissons de côté le rhombicuboctaèdre puisqu'il a probablement été ajouté après).

Euclide construit le dodécaèdre en partant d'un cube pourvu de "crêtes" rectangulaires (Figure 8). Les extrémités des crêtes sont reliées aux sommets du cube de façon à obtenir des pentagones. Il s'agit de montrer qu'il est possible, en adaptant les dimensions des crêtes, d'obtenir des pentagones plans et réguliers (équilatéraux et équiangulaires). Plutôt que de lire ligne après ligne les démonstrations d'Euclide, faisons-le de notre façon, soit-elle anachronique par endroits. Grâce à la symétrie, il suffit de s'occuper d'un seul pentagone.

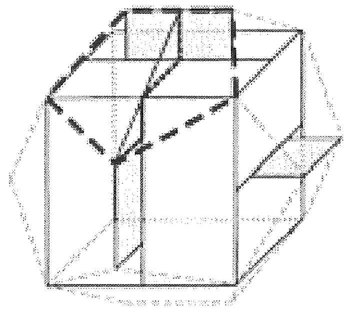


FIGURE 8. Construction du dodécaèdre selon Euclide

Dans un pentagone régulier, le rapport diagonale/côté égale

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618,$$

le nombre d'or. (Rappelons que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\varphi^{-1} = \varphi - 1$, identités qui seront utile à ceux qui voudront vérifier les calculs ci-dessous). Ici, la diagonale du pentagone, c'est l'arête du cube. Partons d'un cube d'arête afin d'obtenir un pentagone de côté 1. Ainsi, la longueur des crêtes est déterminée : c'est l'unité. Reste à fixer la *largeur* u des crêtes. Afin que le pentagone soit *plan*, les deux "marches" de l'escalier indiqué dans la Figure 8 doivent avoir la même pente. Ceci nous fournit l'équation

$$\frac{u}{\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{\varphi-1}{2}}{u}$$

dont la solution est : $u = \frac{1}{2}$. Les crêtes sont donc des "doubles carrés". Vérifions maintenant que ce pentagone plan est véritablement régulier. Pour qu'il soit *équilatéral*, il suffit qu'un côté reliant la crête à un sommet du cube mesure l'unité. Et c'est bien le cas, car

$$\left(\frac{\varphi-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

On peut se convaincre de l'*équiangularité* du pentagone par l'argument suivant : de tous les pentagones équilatéraux de côté 1 et ayant une diagonale égale à φ, le pentagone régulier est le seul qui soit symétrique par rapport à la médiatrice de cette diagonale (Figure 9).

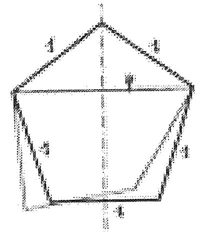


FIGURE 9. Argument de symétrie pour l'équiangularité

Remarquons qu'en reliant les "bases" des crêtes, on obtient un icosaèdre (Figure 10). Les commentaires de l'édition [3] des Éléments d'Euclide attribuent cette construction à un certain H. M. TAYLOR. La construction d'Euclide est un peu différente.

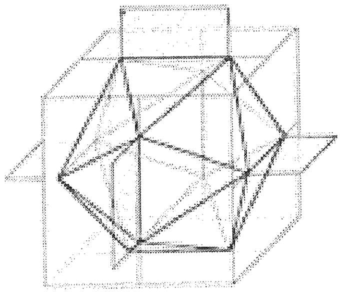


FIGURE 10. Icosaèdre dans un cube

Avons nous, jusqu'à présent, rencontré un triangle équilatéral et un pentagone régulier inscrits dans un même cercle (Figure de l'ardoise) ? Hélas non, ce qui nous contraint à poursuivre notre recherche.

PAPPOS, mathématicien Grec en Alexandrie (actuelle Egypte) vers l'an 300, construit le dodécaèdre et l'icosaèdre à partir d'une sphère (Figure 11).

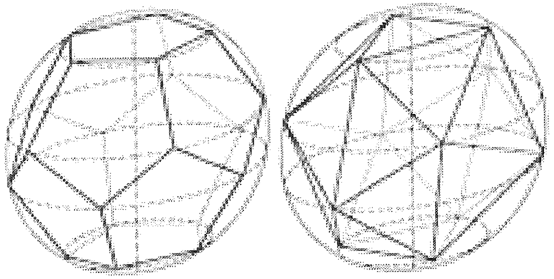


FIGURE 11. Construction du dodécaèdre et de l'icosaèdre selon Pappos

Les sommets des polyèdres sont placés sur quatre "étages" horizontaux. Pappos démontre qu'il est possible de déterminer les hauteurs de ces étages de telle façon que ces deux polyèdres soient réguliers. Calculons ces hauteurs à partir du plan équatorial et en prenant comme unité de longueur le rayon de la sphère. Limitons-nous aux hauteurs des étages supérieurs.

Commençons par le dodécaèdre. Supposons qu'il est régulier et calculons la hauteur h de l'étage supérieur.

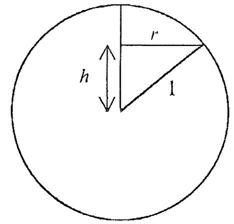


FIGURE 12.

Pour connaître h, il suffit de connaître le rayon r du cercle circonscrit à la face supérieure du dodécaèdre (Figure 12) :

$$h\sqrt{1-r^2}.$$

Rappelons le rapport suivant entre le côté z d'un pentagone régulier et le rayon r de son cercle circonscrit :

$$z = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

ce qui nous donne

$$h = \sqrt{1 - \frac{2z^2}{5-\sqrt{5}}}. \qquad (*)$$

Il suffit donc de trouver la valeur de l'arête z du dodécaèdre inscrit dans la sphère de rayon 1.

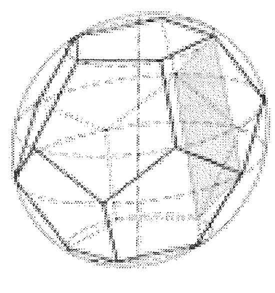


FIGURE 13a.

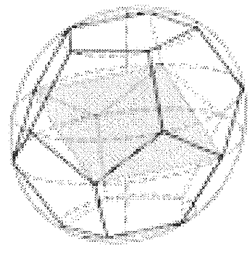


FIGURE 13b.

Le quadrilatère indiqué dans la Figure 13a est un carré. En effet, ayant deux côtés parallèles, il est plan. Un quadrilatère plan dont les sommets se trouvent sur une sphère, est nécessairement un quadrilatère inscrit. Comme de plus les quatre côtés sont égaux, c'est donc un carré. Le côté de ce carré mesure φz où z est l'arête du dodécaèdre. Le quadrilatère indiqué dans la Figure 13b est un rectangle (car les diagonales sont égales et se coupent au milieu) de largeur φz, de longueur $\sqrt{2}\varphi z$ (c'est la diagonale du carré de la Figure 13a) et de diagonale 2. Le théorème de Pythagore nous fournit la valeur de z :

$$(\varphi z)^2 + (\sqrt{2}\varphi z)^2 = 2^2$$
$$z = \frac{2}{\varphi\sqrt{3}}.$$

Substituons dans (*) :

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{1 - \frac{\frac{8}{3\varphi^2}}{5-\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \qquad (**) \\ &\approx 0,7947. \end{aligned}$$

Nous avons donc calculé la hauteur de l'étage supérieur pour le dodécaèdre. Au lieu de calculer la hauteur de l'étage d'en dessous, passons plutôt à l'icosaèdre. Calculons la hauteur h' de l'étage supérieur (toujours à partir du plan équatorial et le rayon de la sphère étant toujours l'unité).

Tout comme pour le dodécaèdre, nous avons

$$h' = \sqrt{1 - r'^2}$$

où r' est le rayon du cercle circonscrit de la face supérieure. Le rapport entre le côté d'un triangle équilatéral et le rayon de son cercle circonscrit est

$$z' = \sqrt{3}r',$$

ce qui nous donne

$$h' = \sqrt{1 - \frac{z'^2}{3}}. \qquad (***)$$

Recherchons donc la valeur de l'arête z' d'un icosaèdre inscrit dans une sphère de rayon 1.

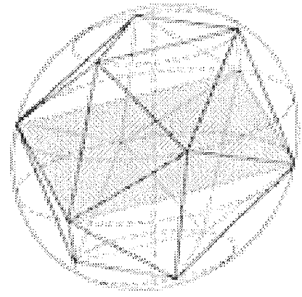


FIGURE 14.

Le quadrilatère indiqué dans la Figure 14 est un rectangle car les diagonales sont égales et se coupent au milieu. C'est même un "rectangle d'or" : sa largeur est z' et sa longueur est la diagonale d'un pentagone régulier de côté z', donc $\varphi z'$. Le théorème de Pythagore nous fournit la valeur de z' :

$$z'^2 + (\varphi z')^2 = 2^2$$
$$z' = \frac{2}{\sqrt{\varphi + 2}}.$$

Substituons dans (***) :

$$\begin{aligned} h' &= \sqrt{1 - \frac{3}{3(\varphi+2)}} \\ &= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}. \end{aligned}$$

C'est exactement la même valeur que (**) ! La hauteur de l'étage supérieur est la même que pour le dodécaèdre. Conclusion : *dans des sphères égales, le dodécaèdre et l'icosaèdre ont des faces qui s'inscrivent dans des cercles égaux.* C'est la figure de l'ardoise !

Est-ce cette propriété que Pacioli enseigna à Dürer il y a un peu plus d'un demi-millénaire, à Venise? Il est peu probable que Pacioli ait lu l'entièreté des *Collections* de Pappos, qui n'étaient pas disponibles en Italie à cette époque. Mais on retrouve le même résultat dans le 14^e livre des Éléments d'Euclide. Les Éléments contiennent 13 livres, mais un 14^e et un 15^e livre ont été ajoutés après la mort d'Euclide. L'auteur du 14^e livre est un certain HYPSICLES. La propriété que nous venons de découvrir par le biais de la construction de Pappos, en est la deuxième proposition. La démonstration de Hypsicles repose directement sur ... le théorème que Pacioli indique de la main gauche dans le livre ouvert ! Hypsicles en déduit un peu plus loin que *le rapport entre les aires du dodécaèdre et de l'icosaèdre est égale au rapport entre leurs volumes.* (Ceci découle directement de notre résultat $h = h'$). Et dans la démonstration de ce corollaire, on retrouve exactement ... la figure de l'ardoise !

Si cette hypothèse est exacte, et j'aime bien y croire, tout se tient en rien de ce que l'on voit sur la peinture n'est disposé là par hasard. Le cours de Pacioli concerne l'apothéose de la géométrie grecque, sauvegardée pendant le Moyen-Age grâce aux Arabes et se répandant en Italie à la Renaissance. Il transmet cette connaissance millénaire à Dürer qui à son tour la diffusera au Nord de Alpes ! Un moment historique dont nous sommes témoins en regardant cette peinture !

Références

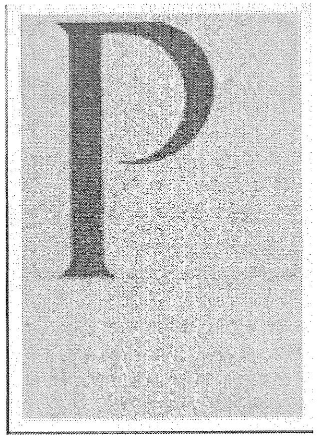
[1] N. BOONEN, *Platonische en Archimedische lichamen*, mémoire non-publié, KHLim Lerarenopleiding (Hasselt), 1999.

[2] P.R. CROMWELL, *Polyhedra*, Cambridge University Press (Cambridge, New York, Melbourne), 1997, ISBN 0-521-66405-5.

[3] EUCLID, *The thirteen books of the Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Volume III, Dover Publications (New York), 1956, ISBN 0-486-60090-4.

[4] J.V. FIELD, *The invention of infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*, Oxford University Press (Oxford, New York, Tokyo), 1997, ISBN 0-19-852394-7.

[5] N. MACKINNON, *The portrait of Fra Luca Pacioli*, The Mathematical Gazette 77/479 (1993), p. 129-219.



Une histoire des approximations successives :
des équations numériques aux équations fonctionnelles

TOURNES Dominique[1]
IUFM de la Réunion (France)

Abstract

Faire un essai, observer attentivement ce qu'il advient et corriger sa stratégie en conséquence : voici sans doute la démarche la plus naturelle qui soit pour résoudre un problème. Tout apprentissage n'est-il pas le fruit d'une suite consciemment organisée d'"essais-erreurs" ? En mathématiques, la *méthode des approximations successives* apparaît comme une formalisation de ce schéma général d'action. Une équation de nature quelconque peut toujours s'écrire sous la forme $x = \varphi(x)$, où x est un élément inconnu appartenant à un ensemble donné et où φ est un opérateur agissant sur cet ensemble. La valeur de x semble irrémédiablement hors d'atteinte puisqu'elle s'exprime en fonction d'elle-même. Comment sortir de ce cercle vicieux ? Imaginons qu'un certain raisonnement ait conduit à considérer comme intéressante une valeur approchée x_1 de x. Il peut être tentant d'appliquer à x_1 l'opérateur φ de manière à obtenir la valeur corrigée $x_2 = \varphi(x_1)$. Le miracle est de constater que, souvent, x_2 est une valeur plus précise que x_1. Il paraît alors presque naturel de recommencer ce calcul auto-correctif une fois, deux fois, etc., puis, si l'on ose franchir l'obstacle conceptuel, une infinité de fois, afin de parvenir à une solution qui n'a plus besoin d'être corrigée, c'est-à-dire à la solution exacte. Face à une telle conclusion, Gaston Bachelard, qui a étudié la méthode itérative du point de vue épistémologique, n'a pas caché son étonnement : "ainsi, parti de n'importe où, en substituant n'importe quoi, par le seul jeu du système lui-même on arrive à sa solution"[2]. Il reste toutefois à préciser la nature de ce qu'on entend par "solution" : s'agit-il d'une solution donnée *a priori* dont on construit des valeurs approchées aussi précises que l'on veut, ou bien est-ce le processus itératif lui-même qui définit un objet de type nouveau qu'on peut regarder *a posteriori* comme étant une solution ?

La méthode des approximations successives a été pratiquée sous des formes variées depuis deux mille ans, d'abord pour les équations numériques, puis pour des équations plus générales dans d'autres ensembles que les ensembles de nombres. Pendant l'atelier de l'université d'été, nous avons tenté de faire revivre cette longue histoire à travers la lecture de textes originaux. En raison de la durée limitée dont nous disposions, il a fallu se restreindre à la présentation d'un petit nombre de textes, choisis parmi les plus significatifs. Le caractère réducteur d'une telle démarche sera atténué, dans le compte rendu qui suit, par l'insertion de nombreuses références bibliographiques permettant au lecteur intéressé de donner par lui-même davantage d'épaisseur à notre étude[3].

---

[1] IUFM de La Réunion, allée des Aigues Marines, Bellepierre, 97487 Saint-Denis Cedex, et REHSEIS-CNRS, 37 rue Jacob, 75006 Paris. Courrier électronique : tournes@univ-reunion.fr.

[2] BACHELARD, 1973, p. 215.

[3] Afin de ne pas trop alourdir cette bibliographie, nous ne donnerons pas de références primaires, sauf pour les

1 Itérer les méthodes de fausse position

Dans une première partie, nous allons examiner les tentatives faites avant Newton pour résoudre itérativement les équations numériques[1]. Ces tentatives, relativement nombreuses, se rencontrent régulièrement dans les mathématiques grecques, indiennes, arabes et occidentales, et peuvent être placées dans la filiation directe des anciennes méthodes de fausse position.

a) Schéma de l'évolution de l'analyse numérique des équations $f(x) = 0$

La première étape est celle des *équations linéaires*, qui peuvent se mettre sous la forme réduite $ax = b$ (ici, $f(x) = ax - b$). Dans les écrits mathématiques de toutes les civilisations, on rencontre très tôt de nombreux problèmes dont la formalisation moderne conduirait à ce type d'équation. Ces problèmes font l'objet d'un traitement arithmétique consistant à "tester" d'abord une ou deux valeurs numériques particulières de la quantité inconnue, et à les "corriger" ensuite par un raisonnement de proportionnalité pour en déduire la valeur exacte cherchée.

Dans la méthode de *simple fausse position*, on essaye une seule valeur x_1, conduisant au résultat b_1. Des égalités $ax = b$ et $ax_1 = b_1$, on tire $\frac{x}{x_1} = \frac{b}{b_1}$, soit $x = \frac{bx_1}{b_1}$. En revanche, dans la méthode de *double fausse position*, on s'appuie sur deux essais x_1 et x_2, ce qui mène, en désignant par e_1 et e_2 les erreurs commises, aux égalités $ax_1 = b + e_1$ et $ax_2 = b + e_2$. Le plus souvent, on s'arrange pour que l'une des erreurs soit positive et l'autre négative, d'où les expressions parfois rencontrées de "règle du trop et du pas assez", "règle de l'excédent et du déficit", "règle de l'augmentation et de la diminution", etc. En multipliant la première des égalités précédentes par e_2 et la seconde par e_1, puis en faisant leur différence, on obtient $a(e_2x_1 - e_1x_2) = b(e_2 - e_1)$. En combinant avec $ax = b$, il vient $\frac{x}{e_2x_1 - e_1x_2} = \frac{1}{e_2 - e_1}$, soit enfin $x = \frac{e_2x_1 - e_1x_2}{e_2 - e_1}$.

Il faut bien sûr lire cette présentation des méthodes de fausse position avec les précautions qui s'imposent. La forme algébrique moderne ne reflète en aucun cas les processus mentaux sous-jacents aux textes anciens qui nous sont parvenus; elle masque notamment les difficultés liées, d'une part à l'absence de notations littérales, d'autre part aux contraintes numériques (contraintes variables en fonction du système de numération et des techniques opératoires en usage en un lieu et un temps donnés)[2].

On peut analyser les méthodes de fausse position d'une autre manière, en faisant appel à la notation fonctionnelle $f(x) = ax - b$ et à une interprétation géométrique (voir Figure 1).

textes étudiés pendant l'atelier. Le lecteur trouvera ces références primaires dans les bibliographies des références secondaires auxquelles nous le renvoyons.

[1]Dans le cas des équations numériques, l'histoire de la méthode des approximations successives a donné lieu à une littérature considérable, y compris ces dernières années, ce qui montre que le sujet est loin d'être épuisé. Pour une première vue d'ensemble, se reporter à CHABERT *et al.*, 1994 ou à BAILEY, 1989.

[2]Pour une histoire détaillée des méthodes de fausse position à travers des textes babyloniens, égyptiens, chinois, indiens, arabes et européens, on pourra se reporter à CHABERT *et al.*, 1994, chap. 3 et à SPIESSER, 1982. Une référence complémentaire intéressante est CHEMLA, 1997; on y découvre comment la méthode de double fausse position, probablement née en Chine vers le début de notre ère, a pu être transmise d'Orient en Occident.

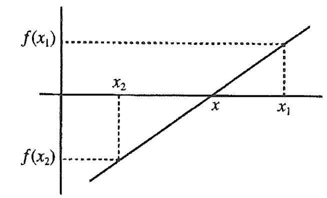


FIGURE 1

Revenons d'abord à la méthode de simple fausse position et à son unique essai x_1. De l'égalité des rapports $\frac{f(x_1)-0}{x_1-x} = a$, on tire $x = x_1 - \frac{f(x_1)}{a}$. Pour anticiper sur la suite, nous nous permettrons d'écrire le résultat sous la forme

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{1}$$

De façon analogue, en ce qui concerne la méthode de double fausse position et ses deux essais x_1 et x_2, l'égalité des rapports $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{0-f(x_2)}{x-x_2}$ conduit à

$$x = x_2 - \frac{f(x_2)}{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}. \tag{2}$$

En adoptant les écritures (1) et (2), nous avons seulement voulu montrer que les anciennes techniques arithmétiques de fausse position pouvaient être placées à la source des idées développées ensuite pour la résolution numérique des équations quelconques. En effet, dans un second temps, il est tentant de continuer à appliquer, face à une équation non linéaire $f(x) = 0$, les algorithmes mis au point pour les équations linéaires. C'est le principe même de l'*interpolation linéaire*[3] : sur un petit intervalle, on peut faire comme si une grandeur quelconque variait linéairement sans que cela entraîne d'erreur grave.

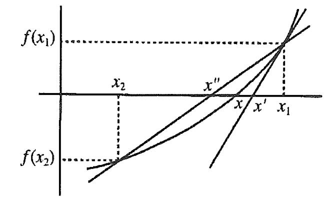


FIGURE 2

[3]Cette idée se rencontre très tôt chez les astronomes babyloniens, qui dressent des éphémérides des corps célestes et ont ensuite à interpoler entre deux valeurs consécutives de leurs tables. Voir NEUGEBAUER, 1957 et surtout NEUGEBAUER, 1975. Une fois décrites en termes modernes, la méthode d'interpolation linéaire entre deux valeurs d'une table (une valeur par excès et une valeur par défaut) et la méthode de double fausse position (règle de l'excédent et du déficit) semblent voisines, voire identiques. Pourtant, elles sont probablement le fruit de deux traditions historiques longtemps indépendantes, la première se développant pour les besoins des calculs astronomiques, et la seconde en réponse aux problèmes concrets des comptables ou des marchands.

Si l'on connaît seulement un point $(x_1, f(x_1))$, on peut remplacer la courbe par sa tangente en ce point (voir Figure 2); la valeur exacte x de la racine est alors approchée par

$$x \approx x' = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (1')$$

De façon analogue, si l'on connaît deux points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$, on peut remplacer la courbe par la sécante joignant ces deux points, d'où la seconde approximation

$$x \approx x'' = x_2 - \frac{f(x_2)}{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}. \qquad (2')$$

Ainsi, par ces processus de correction de la (ou des) valeur(s) fausse(s) dont on était parti, on obtient une nouvelle valeur approchée meilleure –en général– que la (ou les) précédente(s). Ces méthodes de fausse position généralisée (au sens où elles ne sont plus appliquées à des problèmes du premier degré) apparaissent, sous une forme ou sous une autre, dans de nombreux textes de diverses civilisations et de diverses époques, mais, presque toujours, on s'y contente d'une seule correction. Ce qui est plus rare –et c'est ce qui va nous intéresser dans cet article–, ce sont les textes dans lesquels on trouve l'idée d'*itérer la correction*, autrement dit le fondement d'un algorithme permettant d'obtenir des valeurs approchées aussi précises que l'on veut.

L'itération de la formule de correction (1') conduit à la *méthode de Newton-Raphson*, méthode à convergence rapide d'ordre 2, définie par

$$\begin{cases} x_1 & \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{cases}$$

La formule de correction (2'), quant à elle, peut s'itérer de deux façons. Selon que l'on adopte une récurrence simple ou double, on obtient la *méthode de Lagrange* (d'ordre 1) ou la *méthode de la sécante* (d'ordre le nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$), définies respectivement par

$$\begin{cases} x_1, x_2 & \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_1)}{x_n-x_1}} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1, x_2 & \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}}. \end{cases}$$

Outre ces trois schémas issus des anciennes techniques de fausse position ou d'interpolation, il peut apparaître des schémas plus généraux nés de la transformation, par un procédé quelconque, de l'équation à résoudre $f(x) = 0$ en une équation à point fixe $g(x) = x$. Le processus d'approximation est alors décrit par la suite récurrente

$$\begin{cases} x_1 & \\ x_{n+1} &= g(x_n). \end{cases}$$

Nous allons maintenant analyser quelques textes illustrant l'émergence historique des techniques précédentes. Ces textes sont empruntés aux mathématiques grecques, arabes et indiennes.

b) Texte 1 : Héron d'Alexandrie, I$^{\text{er}}$ siècle

Héron vivait à Alexandrie, au I$^{\text{er}}$ siècle de notre ère. Ses principaux écrits, retrouvés à Constantinople en 1896, s'intitulent *Les Métriques et La Dioptrique*. Ce sont des manuels de

mathématiques destinés à des mécaniciens et des ingénieurs. L'extrait suivant des *Métriques*[4], qui présente le calcul approché de $\sqrt{720}$, est incontournable : c'est, semble-t-il, le premier texte connu dans lequel on rencontre le schéma des approximations successives.

> Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27; cela fait $26\frac{2}{3}$; ajoute 27, cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié, cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ainsi donc le côté de 720 sera très proche de $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. En fait, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même donne $720\frac{1}{36}$, de sorte que la différence est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons $720\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et, en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.

Les calculs de Héron peuvent être résumés ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\frac{720}{27} + 27\right) &= 26\frac{1}{2}\frac{1}{3} \approx 26,83333333; \\ \frac{1}{2}\left(\frac{720}{26\frac{1}{2}\frac{1}{3}} + 26\frac{1}{2}\frac{1}{3}\right) &= 26\frac{1609}{1932} \approx 26,83281574. \end{aligned}$$

Sachant que $\sqrt{720} \approx 26,83281573$, on constate que la méthode est excellente. Bien que Héron s'en tienne à une seule itération, sans doute parce que la précision obtenue est d'ores et déjà suffisante pour les besoins de la pratique, le texte contient implicitement l'idée que l'on pourrait continuer, avec, à chaque étape, une erreur beaucoup plus petite que précédemment. Il serait abusif d'y voir un algorithme infini au sens moderne du terme mais il s'agit malgré tout d'un processus "potentiellement infini" en ce sens qu'il peut être appliqué un nombre fini de fois aussi grand que nécessaire, jusqu'à ce que l'on obtienne la précision souhaitée. L'algorithme s'écrit

$$\begin{cases} x_1 &= 27 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{720}{x_n} + x_n\right) = x_n - \frac{x_n^2-720}{2x_n}. \end{cases}$$

Si l'on considère que l'équation à résoudre est $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^2 - 720$, on observe que $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Le procédé de Héron apparaît donc à nos yeux comme un cas particulier de la méthode de Newton mais, bien entendu, Héron ne connaissait pas la notion de dérivée ! Nombreuses sont les hypothèses sur le raisonnement qui a pu conduire à la mise au point d'un tel algorithme[5]. Notons a une valeur approchée par excès de $\sqrt{A}$, et désignons par e l'erreur commise. Si a est très proche de $\sqrt{A}$, e est petit, d'où $A = (a-e)^2 = a^2 - 2ae + e^2 \approx a^2 - 2ae$. On obtient alors $e = \frac{a^2-A}{2a}$, soit $\sqrt{A} \approx a - \frac{a^2-A}{2a} = \frac{1}{2}(\frac{A}{a} + a)$, et on retrouve la formule du texte. Ce raisonnement par linéarisation, équivalent à la méthode moderne de Newton, est des plus séduisants mais on ne peut pas savoir s'il traduit correctement la pensée de Héron. Connaissant le goût des Grecs pour la théorie des "médiétés", voici une autre possibilité : a est une valeur approchée par excès de $\sqrt{A}$, donc $\frac{A}{a}$ en est une valeur approchée par défaut, et $\sqrt{A}$ est la moyenne géométrique de ces deux valeurs ($\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A}{a} \times a}$); il est alors tentant de prendre comme nouvelle approximation la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}(\frac{A}{a} + a)$.

[4]Texte grec dans HÉRON D'ALEXANDRIE, 1903, Livre I des *Métriques*, p. 18-20. Nous avons repris la traduction française de J.-P. Levet (CHABERT *et al.*, 1994, p. 231).

[5]On trouvera une analyse fine de la méthode de Héron dans CAVEING, 1998, chap. 1. Caveing soutient que cette méthode était connue des Babyloniens et des Grecs bien avant le premier siècle, et qu'elle a pu jouer un rôle dans la découverte de l'irrationalité.

La méthode de Héron se retrouve ensuite régulièrement, sous diverses formes, dans des textes alexandrins, arabes, byzantins et européens. Chez les mathématiciens arabes[6], qui ont approfondi les algorithmes numériques grecs et indiens, on rencontre, à côté de l'approximation de Héron $\sqrt{A} \approx a + \frac{A-a^2}{2a}$, une autre approximation, qualifiée de "conventionnelle" : $\sqrt{A} \approx a + \frac{A-a^2}{2a+1}$. Cette dernière formule correspond à une interpolation linéaire entre deux entiers consécutifs a et $a + 1$, ainsi qu'on le voit sur l'égalité $a + \frac{A-a^2}{2a+1} = a - \frac{a^2-A}{\frac{(a+1)^2-a^2}{(a+1)-a}}$. Au XII$^{\text{ème}}$ siècle, al-Samaw'al, dans son *Traité d'arithmétique*, généralise le résultat au calcul d'une racine n^e en proposant d'itérer la formule $\sqrt[n]{A} \approx a + \frac{A-a^n}{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^k}$, formule que nous pouvons aussi écrire sous la forme $\sqrt[n]{A} = a - \frac{a^n-A}{\frac{(a+1)^n-a^n}{(a+1)-a}}$. Chez al-Samaw'al, l'idée des approximations successives est extrêmement claire, puisqu'il écrit : "Nous pouvons ainsi obtenir des quantités rationnelles dont le nombre est infini et dont chacune est plus proche que celle qui la précède de la quantité que l'on cherche à approcher".

c) Texte 2 : Parameśvara, XV$^{\text{ème}}$ siècle

Faisons maintenant une incursion dans l'astronomie indienne. Comme les Arabes, les Indiens ont hérité des techniques d'interpolation de l'astronomie babylonienne et grecque (nombre de leurs travaux se situent dans la lignée de l'*Almageste* de Ptolémée). Dans les traités astronomiques indiens, il apparaît dès le V$^{\text{ème}}$ siècle des techniques itératives pour résoudre des équations, avec des calculs reposant souvent sur des procédés de simple ou double fausse position[7]. Le texte suivant[8] est dû à Parameśvara (environ 1380-1460), un élève de Mādhava, astronome renommé de Kerala. C'est un extrait du *Siddhāntadīpikā*, commentaire d'un commentaire (sic) du *Mahābhāskarīya* de Bhāskara I. L'objectif est de calculer le sinus d'un angle donné.

> Le sinus peut être obtenu à partir de l'arc au moyen d'une méthode dite "sans différence".
>
> On doit prendre la moitié de l'arc donné, puis la moitié du résultat, et ainsi de suite. Il faut continuer à diviser par deux jusqu'à ce que le résultat soit plus petit que 1/300 du quadrant. Alors la corde de l'arc divisé est égale à cet arc.
>
> En raison de la petitesse du sinus-verse, le sinus aussi est presque égal à cet arc. Le cosinus est calculé au moyen du sinus, et le sinus-verse à partir du cosinus. De proche en proche, la racine carrée du carré de la corde diminué du carré du sinus-verse est le sinus corrigé et, à partir de là, le cosinus est calculé puis, à partir du cosinus, le sinus-verse.
>
> La racine carrée de la différence des carrés de la corde et du sinus-verse est le sinus corrigé; et, en ayant fait ceci sans cesse, on peut rendre le résultat indiscernable.
>
> Le sinus itéré, multiplié par deux, est la corde précise du double de cet arc. Et le sinus est obtenu ainsi :
>
> Si on suppose que le sinus est la corde diminuée de quelque chose (ou si on choisit que le sinus est la corde diminuée par la différence entre la corde et son arc, multipliée par 30 et divisée par 11), le

[6]Se reporter à RASHED, 1984, p. 115-120 ou à RASHED, 1997, p. 61-67.

[7]Pour des approximations successives analogues dans l'astronomie occidentale, en particulier au XIV$^{\text{ème}}$ siècle, on pourra consulter MANCHA, 1998. Dans GLUSHKOV, 1976 est défendue la thèse selon laquelle Leonardo Fibonacci aurait lui aussi conduit certains calculs en itérant la méthode de double fausse position.

[8]Ce texte est étudié dans PLOFKER, 1996, où on le trouvera en sanskrit. La traduction française est de nous, à partir de la traduction anglaise de Plofker.

> cosinus et le sinus-verse sont obtenus à partir de là. Et le sinus est la racine carrée de la différence des carrés de la corde et du sinus-verse. On doit corriger ceci itérativement. Ce sinus, multiplié par deux, est la corde du double de l'arc.
>
> De cette façon on peut obtenir la corde de l'arc successivement doublé et son sinus corrigé itérativement, jusqu'à ce qu'il en résulte le sinus désiré de l'arc donné. De la même façon, le cosinus se déduit de l'arc complémentaire de la même manière.
>
> Cette correction itérative entraîne souvent beaucoup de répétitions. On explique donc une certaine méthode pour accélérer la correction :
>
> La racine carrée de la somme des carrés du sinus et du sinus-verse est la corde. On peut déduire la corde de chaque sinus et sinus-verse.
>
> À chaque étape, la différence entre les deux cordes précédemment obtenues est le "diviseur", et le "multiplicateur" est la différence entre les deux précédents sinus-verses.
>
> La différence entre la corde donnée et la corde produite à l'étape précédente est le "multiplicande". Le résultat obtenu est successivement ajouté ou retranché du sinus-verse précédemment obtenu. La règle est la suivante : quand la corde résultant du sinus donné est plus grande que la corde précédemment obtenue, elle est ajoutée; sinon, retranchée. Ceci donne la correction du sinus-verse, et le sinus en est déduit comme auparavant.
>
> Quand on a calculé la corde et le sinus-verse et ainsi de suite par la méthode décrite, on doit corriger itérativement. Alors la correction est rapidement réalisée.

Introduisons quelques notations. Les lignes trigonométriques indiennes correspondent à un cercle de rayon R donné; nous les noterons avec une majuscule pour les distinguer des fonctions modernes associées à un cercle de rayon unité. Les fonctions sinus, cosinus, sinus-verse et corde, dont il est question dans le texte, seront donc définies respectivement (voir Figure 3) par Sin $\theta = R\sin\theta$, Cos $\theta = R\cos\theta$, Vers $\theta = R-$ Cos $\theta = R(1-\cos\theta)$ et Cord $\theta = \sqrt{\text{Sin}^2\theta + \text{Vers}^2\theta} = 2\text{Sin}\,\frac{\theta}{2}$.

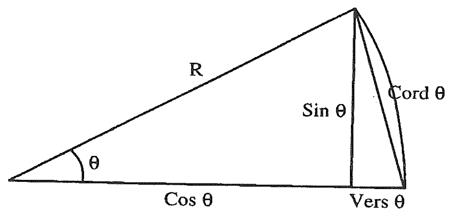


FIGURE 3

Soit à calculer Sin θ pour un angle θ donné. On détermine d'abord un entier p tel que $\frac{\theta}{2^p} \leq \frac{90°}{300} = 18'$. On peut considérer que la valeur de Cord $\frac{\theta}{2^p}$ est connue puisque, pour un angle aussi petit, la corde s'identifie à l'arc (on vérifie effectivement que $\frac{\pi}{600}$ et $2\sin(\frac{\pi}{1200})$ coïncident jusqu'à la huitième décimale). On calcule alors Sin $\frac{\theta}{2^p}$ à partir de Cord $\frac{\theta}{2^p}$ par un processus itératif que nous décrirons plus loin. Une fois calculée la valeur de Sin $\frac{\theta}{2^p}$, la relation Cord$\frac{\theta}{2^{p-1}}$ = 2 Sin $\frac{\theta}{2^p}$ permet d'obtenir la valeur de Cord $\frac{\theta}{2^{p-1}}$. On applique à nouveau le processus itératif pour déterminer Sin $\frac{\theta}{2^{p-1}}$ à partir de Cord $\frac{\theta}{2^{p-1}}$, et on recommence : de proche en proche, on obtient les valeurs de Sin $\frac{\theta}{2^{p-2}}, \ldots$, Sin $\frac{\theta}{2}$ et Sin θ.

À chaque étape, le problème est de déterminer le sinus d'un angle donné α à partir de sa corde. Cela se fait par le schéma de calcul Cos $\alpha = \sqrt{R^2 - \text{Sin}^2\alpha}$, Vers $\alpha = R - \text{Cos}\alpha$ et Sin $\alpha = \sqrt{\text{Cord}^2\alpha - \text{Vers}^2\alpha}$, autrement dit par l'équation à point fixe

$$\text{Sin}\,\alpha = \sqrt{\text{Cord}^2\alpha - \left(R - \sqrt{R^2 - \text{Sin}^2\alpha}\right)^2}.$$

Notons C la corde connue de α. Si l'on tient compte de la valeur initiale proposée par le texte[9], la valeur de Sin α est finalement calculée à l'aide des approximations successives

$$\begin{cases} u_1 &= C - \frac{30}{11}(R\alpha - C) \\ u_{n+1} &= \sqrt{C^2 - \left(R - \sqrt{R^2 - u_n^2}\right)^2}. \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que la méthode converge pour un angle α inférieur à 60°. Lorsque l'angle s'approche de 60°, la convergence est de plus en plus lente, ce qui amène notre astronome indien à proposer une méthode d'accélération de convergence. La méthode accélérée porte cette fois sur le calcul de Vers α (ce qui équivaut au calcul de Sin α puisque Cord $\alpha = \sqrt{\text{Sin}^2\alpha + \text{Vers}^2\alpha}$). Si on note Vers_n et Cord_n les valeurs du sinus-verse et de la corde calculées à chaque étape, l'algorithme présenté par le texte peut s'écrire[10]

$$\text{Vers}_{n+1} = \text{Vers}_n + \frac{(C - \text{Cord}_n)(\text{Vers}_n - \text{Vers}_{n-1})}{\text{Cord}_n - \text{Cord}_{n-1}} = \text{Vers}_n - \frac{(C - \text{Cord}_n)}{\frac{(C-\text{Cord}_n)-(C-\text{Cord}_{n-1})}{\text{Vers}_n - \text{Vers}_{n-1}}}.$$

Remarquons que

$$C - \text{Cord}\,\alpha = C - \sqrt{\text{Sin}^2\alpha + \text{Vers}^2\alpha} = C - \sqrt{R^2 - (R - \text{Vers}\,\alpha)^2 + \text{Vers}^2\alpha} = C - \sqrt{2R\text{Vers}\,\alpha}.$$

En introduisant la fonction $f(x) = C - \sqrt{2Rx}$ et en réutilisant les deux valeurs initiales issues du premier algorithme, l'algorithme accéléré s'écrit donc

$$\begin{cases} v_1 &= \sqrt{C^2 - u_1^2}, v_2 = \sqrt{C^2 - u_2^2} \\ v_{n+1} &= v_n - \frac{f(v_n)}{\frac{f(v_n)-f(v_{n-1})}{v_n - v_{n-1}}}. \end{cases}$$

On reconnaît exactement la méthode de la sécante, dont la convergence est effectivement plus rapide que la méthode ordinaire des approximations successives. En guise d'illustration, nous avons testé les deux algorithmes de Parameśvara pour un angle de 45°. À la précision 10^{-6}, les valeurs correctes sont $\sin 45° \approx 0,707107$ et Vers $45° \approx 0,292893$. Voici maintenant les valeurs fournies par les deux algorithmes du texte :

[9] Cette valeur initiale n'est autre, sans doute, qu'une ancienne formule empirique reliant la corde et le sinus. Comme elle fournit déjà une assez bonne valeur approchée, il est naturel de s'en servir pour initialiser le processus itératif. Dans le cas particulier du premier calcul (celui de Sin $\frac{\theta}{2^p}$), la corde n'est pas connue mais nous avons vu qu'on pouvait considérer, sans perte significative de précision, que $C = R\alpha$; la valeur initiale devient donc, tout simplement, $u_1 = R\alpha$.

[10] La notation algébrique moderne permet de donner une seule formule là où le texte indien doit énoncer deux règles selon le "signe" de la correction à effectuer.

$$u_1 = 0,710736; u_2 = 0,705585; u_3 = 0,707734; u_4 = 0,706846;$$
$$u_5 = 0,707215; u_6 = 0,707062; u_7 = 0,707125; u_8 = 0,707099;$$
$$u_9 = 0,707110; u_{10} = 0,707105; u_{11} = 0,707107.$$

$$v_1 = 0,283973; v_2 = 0,296541; v_3 = 0,292921; v_4 = 0,292893.$$

En définitive, ce texte témoigne du haut niveau atteint par les astronomes indiens dans le domaine du calcul numérique. On appréciera notamment la clarté et la précision du langage utilisé par l'auteur pour décrire, en l'absence de toute notation symbolique, des algorithmes très élaborés.

d) Texte 3 : Qāḍī-Zāda, XVème siècle

Chez les Arabes, on a retrouvé des traces de calculs itératifs dès le IXème siècle : Habash al-Hāsib, un contemporain d'al-Khwārizmī, traite par approximations successives une équation transcendante de la forme $t = x - e\sin x$, où t et e sont donnés (en 1618, Kepler a lui aussi résolu par un procédé itératif une équation analogue pour établir ses célèbres *Tables rudolphines*[11]).

Toujours chez les Arabes, le mathématicien al-Kāshī, qui vivait à Samarkand dans la première moitié du XVème siècle, a développé un procédé original d'itération pour le calcul de $\sin 1°$. Depuis Ptolémée, ce calcul était une étape délicate et incontournable dans la confection des tables trigonométriques[12]. Al-Kāshī part de la formule $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, formule qui fait apparaître $\sin 1°$ comme solution de l'équation $3x - 4x^3 = \sin 3°$. L'équation, mise sous la forme $x = \frac{q+x^3}{p}$, fait ensuite l'objet d'un traitement consistant à "extraire" un à un les chiffres successifs (en numération sexagésimale) de la racine. L'ouvrage d'al-Kāshī, intitulé *Sur la corde et le sinus*, n'a pas été retrouvé, mais la méthode de calcul de $\sin 1°$ nous a cependant été transmise car elle est décrite par Mīram Shalabī (un astronome ayant vécu en Turquie au début du XVIème siècle) dans ses *Règles des opérations et correction des tables*. Par chance, on a trouvé récemment un traité de Qāḍī-Zāda (le grand-père de Shalabī), intitulé *Traité sur la détermination du sinus d'un degré*, qui donne de la méthode une description issue plus directement de l'enseignement d'al-Kāshī. En voici un extrait[13].

> On divise d'abord quelques chiffres du nombre par le nombre des choses. On forme le cube du quotient et on l'ajoute au reste du nombre. On divise encore une fois leur somme. On forme le cube de la somme des deux quotients et on ajoute son excès par rapport au cube obtenu d'abord au reste de la somme. On divise ensuite leur deuxième somme encore une fois. On forme le cube de la somme des quotients et on ajoute l'excès de ce cube par rapport au cube de la somme des deux quotients au reste de la deuxième somme. On divise ensuite encore une fois la troisième somme et on procède comme auparavant. L'opération est terminée dès que l'on arrive à ce que l'on peut négliger.

[11] On trouvera le texte de Kepler et une analyse dans CHABERT *et al.*, 1994, p. 250-254.

[12] Les formules d'addition et de duplication permettent de calculer directement $\sin 3°$ à partir des lignes trigonométriques connues de 30° et de 36° : il suffit de remarquer que 3° = (36° - 30°)/2. Par contre, il n'existe pas de méthode analogue pour sin 1°; dans ce cas, on doit nécessairement faire appel à un procédé de calcul approché.

[13] La traduction française est tirée de YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 176. Pour d'autres études sur la méthode d'al-Kāshī, voir AABOE, 1954 et RIAHI, 1995.

Dans l'équation $x = \frac{q+x^3}{p}$, ou $px = q + x^3$, q est le "nombre" et p le "nombre des choses". La quantité inconnue x, c'est-à-dire les "choses", est cherchée sous la forme $a+b+c+\cdots$, où $a, b, c, \ldots$ sont les chiffres successifs de x en unités sexagésimales[14]. On peut alors expliquer le texte de la façon suivante :

- Première étape : x étant très petit (c'est le sinus de 1°), son cube est négligeable et on peut considérer que $x = a + \ldots = \frac{q+x^3}{p} \approx \frac{q}{p}$. Le chiffre a s'obtient donc comme le premier chiffre de la division de q par p.

- Deuxième étape : sachant maintenant que $x = a$, on peut écrire de façon plus précise que $x = a + b + \cdots = \frac{q+x^3}{p} = \frac{q+a^3}{p}$, d'où $b + \cdots = \frac{q+a^3}{p} - a = \frac{(q-ap)+a^3}{p}$. Le chiffre b est ainsi le premier chiffre de la division de $(q - ap) + a^3$ par p (les parenthèses servent seulement à indiquer que la quantité $q - ap$ n'est pas recalculée ici, puisque c'est le "reste du nombre", autrement dit le reste de la division effectuée lors de la première étape).

- Troisième étape : on recommence le processus avec la nouvelle approximation $x \approx a + b$. De façon analogue, il vient $x = a + b + c + \cdots = \frac{q+x^3}{p} = \frac{q+(a+b)^3}{p}$, d'où l'on déduit que $c + \cdots \approx \frac{q+(a+b)^3}{p} - a - b = \frac{(q-ap+a^3-bp)+(a+b)^3-a^3}{p}$, ce qui permet de calculer le chiffre c (à nouveau, on remarque que la quantité $q - ap + a^3 - bp$ est le reste de la division effectuée lors de l'étape précédente).

Il est loisible de continuer ainsi pour obtenir autant de chiffres que nécessaire. Abstraction faite des problèmes techniques de calcul liés à l'utilisation du système sexagésimal, l'algorithme d'al-Kāshī peut se résumer par la suite récurrente

$$\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_{n+1} & = \frac{q+x_n^3}{p} \end{cases}$$

Cette idée d'"extraire" l'un après l'autre les chiffres successifs de la racine d'une équation, un peu comme on le fait dans les procédés classiques d'extraction des racines carrées ou cubiques, n'est pas vraiment nouvelle, au XV$^{\text{ème}}$ siècle, dans les mathématiques arabes. On la rencontre déjà trois siècles plus tôt dans le *Traité des équations* de Sharaf al-Dīn al-Tūsī. Ce dernier ouvrage contient en particulier un procédé de résolution numérique des équations du troisième degré[15] qui s'apparente assez étroitement à celui qui sera exposé plus tard par Newton.

2 Le génie de Newton : des équations numériques aux équations fonctionnelles

Ainsi qu'il vient d'être dit, Newton n'est pas l'inventeur de la méthode qui porte son nom. On sait maintenant que son œuvre dans le domaine de la résolution numérique des équations est l'aboutissement d'une longue tradition, commençant au moins au XII$^{\text{ème}}$ siècle avec Sharaf

[14] Il s'agit là d'un abus de notation destiné à alléger les écritures. Il faut comprendre que, si l'écriture réelle en base soixante de sin 1° est $0; \alpha, \beta, \gamma, \ldots$, alors $a = \alpha.60^{-1}$, $b = \beta.60^{-2}$, $c = \gamma.60^{-3}, \ldots$.

[15] Sur les algorithmes numériques de Sharaf al-Dīn al-Tūsī, la référence qui s'impose est RASHED, 1984, chap. III. Dans HOUZEL, 1995, on trouvera un complément intéressant permettant de bien comprendre en quoi les calculs du mathématicien arabe préfigurent ceux de Newton.

al-Dīn al-Tūsī, et se poursuivant ensuite chez les mathématiciens arabes puis européens, avec notamment Viète (1600), Kepler (1618), Harriot (1631) et Oughtred (1652). D'ailleurs, dans une lettre à Oldenbourg du 26 juin 1676, Newton indique lui-même que, pour sa part, il s'est inspiré des travaux de Viète et d'Oughtred[16].

a) Une méthode universelle pour toutes les équations

Un exposé détaillé de la méthode de Newton se trouve dans *La méthode des fluxions et des suites infinies*[17], traité achevé dès 1671. On peut y lire ceci :

> Il faut que nous entrions dans un détail un peu plus grand pour expliquer comment on doit réduire les racines de ces équations à des suites infinies, car ce que les géomètres nous ont donné sur les équations en nombres est extrêmement embarrassé et chargé d'opérations superflues, de sorte qu'on ne peut prendre sur cela un bon modèle pour faire les mêmes opérations en espèces. Je ferai donc voir d'abord comment se doit faire en nombres la réduction des équations affectées, et ensuite j'appliquerai la méthode aux espèces.

L'extrait est des plus explicites quant aux objectifs de l'auteur : en ce qui concerne les "équations en nombres" (les équations numériques), Newton ne prétend pas apporter quelque chose de fondamentalement nouveau, si ce n'est clarifier et simplifier la démarche "embarrassée" de ses prédécesseurs; par contre, il se propose d'étendre le procédé des approximations successives aux "équations en espèces", c'est-à-dire aux équations littérales.

Le but annoncé est des plus ambitieux : disposer d'une méthode universelle pour résoudre toutes les équations, qu'il s'agisse d'équations numériques $f(x) = 0$, d'équations fonctionnelles simples $f(x, y) = 0$ reliant deux quantités inconnues, ou même d'équations fonctionnelles plus complexes $f(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0$ faisant intervenir, en outre, les "fluxions" des quantités inconnues[18] (dans les deux derniers cas, il s'agit bien d'une équation fonctionnelle dans la mesure où la résolution consiste à tenter d'exprimer l'une des quantités inconnues en "fonction" de l'autre). L'idée de base de la technique utilisée est d'effectuer les opérations littérales de l'algèbre à l'aide des suites[19] infinies, de la même façon qu'on effectue les opérations numériques de l'arithmétique au moyen des fractions décimales. Au développement décimal d'un nombre correspond formellement le développement en série d'une expression littérale. Une réflexion en profondeur sur les anciennes méthodes d'extraction des chiffres successifs de la racine d'une équation numérique (que ce soit en base 10 ou en base 60) a conduit Newton à imaginer un processus analogue pour les équations fonctionnelles : la fonction inconnue est cherchée sous la forme d'une série de puissances de la variable indépendante, et les termes successifs de la série sont extraits un à un.

[16] Sur la façon dont Newton a étudié les travaux de ses prédécesseurs, et sur ses tentatives antérieures à 1671, on pourra consulter YPMA, 1995.

[17] NEWTON, 1671. Dans la suite, nous nous référerons à la traduction française du Marquis de Buffon.

[18] Dans la conception de Newton, les fluxions $\dot{x}$ et $\dot{y}$ représentent les variations instantanées des grandeurs variables x et y par rapport à une grandeur de référence variant uniformément, et qu'on peut supposer être le temps t. Avec les notations de Leibniz, on aurait $\dot{x} = dx/dt$ et $\dot{y} = dy/dt$. Le quotient $\dot{y}/\dot{x}$ représente alors la dérivée dy/dx de y par rapport à x, notée aujourd'hui y'. Lorsqu'on suppose que x est la variable de référence, il vient tout simplement $\dot{x} = 1$ et $\dot{y}/\dot{x} = \dot{y}$.

[19] Au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, le mot "suite" est employé avec le sens actuel de "série".

Afin d'illustrer cette généralisation audacieuse, nous allons commenter trois extraits de *La méthode des fluxions*[20], traitant tour à tour d'une équation numérique, d'une équation fonctionnelle ordinaire et d'une équation différentielle.

b) Textes 4, 5, 6 : Newton, 1671

Le premier exemple est une équation numérique du troisième degré. Dans le texte original, les calculs sont disposés dans un tableau que nous n'avons pas reproduit ici.

> Soit l'équation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à réduire en suite infinie; prenez un nombre comme 2, qui ne diffère pas d'une de ses dixièmes parties de la vraie valeur de la racine, et faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'équation donnée, et vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la racine pour l'ajouter au quotient; rejetez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse, il restera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0,1$; ce qui est très près de la vraie valeur de p; c'est pourquoi, l'écrivant au quotient, je fais $0,1 + q = p$, et substituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$; négligeant les deux premiers termes, il reste $11,23q + 0,061 = 0$, ou $q = -0,0054$ à peu près $[\cdots]$. J'écris donc $-0,0054$ dans le quotient, mais au-dessous parce que ce terme est négatif, et supposant $-0,0054 + r = q$, je substitue comme auparavant, et je continue ainsi l'opération aussi longtemps qu'il convient $[\cdots]$.

L'équation s'écrit $f(y) = 0$, avec $f(y) = y^3 - 2y - 5$. Newton prend comme première approximation $y_1 = 2$, sans doute après avoir constaté que $f(2) < 0$, que $f(3) > 0$, et donc que la racine se trouve entre 2 et 3. L'idée générale est alors de chercher la racine sous la forme d'une "suite infinie" $y = 2 + p + q + r + \cdots$, dont chaque terme est petit par rapport au précédent. Pour trouver la seconde approximation $y_2 = 2 + p$, on écrit que $f(2+p) = 0$, égalité qui devient $10p - 1 = 0$ après suppression des termes négligeables en p^2 et en p^3. Ainsi que le remarquera Joseph Raphson[21] en 1715, cette linéarisation de l'équation revient à déterminer p par l'égalité $f(2) + pf'(2) = 0$, de sorte que $y_2 = 2 + 0,1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}$. De même, si on pose ensuite $y_3 = 2,1 + q$, l'équation obtenue par Newton pour la détermination de q n'est autre que $f(2,1) + qf'(2,1) = 0$. Grâce à la remarque de Raphson, le processus assez lourd décrit par le texte (à chaque étape, changement d'inconnue et linéarisation de la nouvelle équation) peut être ramené au schéma itératif simplifié utilisé aujourd'hui :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1 & = & 2 \\ y_{n+1} & = & y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}. \end{array}\right.$$

Pendant longtemps, les deux méthodes, celle de Newton et celle de Raphson, ont été exposées comme si elles étaient distinctes. C'est Lagrange, en 1798, qui mettra définitivement en évidence le fait que "ces deux méthodes ne sont au fond que la même présentée différemment". Depuis, on a pris l'habitude de parler de la "méthode de Newton-Raphson"[22].

[20]Ces extraits se trouvent respectivement p. 7, p. 12 et p. 34.

[21]Sur les travaux de Raphson, voir CHABERT *et al.*, 1994, p. 201-204.

[22]Dans YPMA, 1995, on apprend que Thomas Simpson a joué un rôle non négligeable dans la mise au point de la version définitive de la méthode. Alors que Newton et Raphson conduisaient des raisonnements purement algébriques, Simpson a, le premier, fait intervenir explicitement le calcul des fluxions. Cependant, Lagrange, dans son *Traité de la résolution des équations numériques* (publié en 1798), n'a fait référence qu'à Newton et à Raphson. De même, Fourier, dans son *Analyse des équations indéterminées* (publiée en 1831), a seulement parlé de "la méthode newtonienne". On comprend donc pourquoi le nom de Simpson a ensuite été oublié.

Sans nous attarder davantage sur cette méthode de résolution numérique des équations qui, comme tout le montre depuis le début de cet article, est l'aboutissement de deux millénaires d'efforts continus[23], passons à ce qui constitue l'apport original et exceptionnel de Newton : la résolution approchée des équations fonctionnelles. L'extrait suivant de *La méthode des fluxions* explique tout d'abord comment il faut procéder dans le cas d'une équation fonctionnelle simple, c'est-à-dire sans fluxions (comme pour l'extrait précédent, nous n'avons pas reproduit le tableau dans lequel sont organisés les calculs).

> Soit donc pour exemple l'équation $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, dont il faille tirer la racine; je choisis, comme je l'ai dit, les termes $y^3 + a^2y - 2a^3$, qui étant égalés à zéro me donnent $y - a = 0$, ainsi j'écris $+\ a$ dans le quotient; mais, parce que $+\ a$ n'est pas la valeur complète de y, je fais $a + p = y$, et je substitue dans l'équation cette valeur de y, et parmi les termes $p^3 + 3ap^2 + axp$, etc. qui en résultent, je choisis de la même façon les termes $+4a^2p + a^2x$, qui étant égalés à zéro donnent $p = -\frac{1}{4}x$, j'écris donc $-\frac{1}{4}x$ au quotient; mais parce que $-\frac{1}{4}x$ n'est pas la valeur exacte de p, je fais $-\frac{1}{4}x + q = p$, et substituant cette valeur je choisis dans les termes $q^3 - \frac{3}{4}xq^2 + 3aq^2$, etc. qui en résultent, les termes $4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$ qui étant égalés à zéro donnent $q = \frac{xx}{64a}$ que j'écris au quotient, mais comme $\frac{xx}{64a}$ n'est pas la valeur exacte de q, je fais $\frac{xx}{64a} + r = q$, et je substitue comme ci-dessus, ce qui se peut continuer aussi longtemps qu'on voudra [...].

Cette fois, l'équation à résoudre s'écrit $f(x, y) = 0$, avec $f(x, y) = y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3$. Newton cherche la solution sous la forme d'une série de puissances de la variable indépendante x. Les calculs du texte s'interprètent plus facilement si on note cette série $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$. En substituant dans l'équation et en négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 1, il vient $\alpha^3 + a^2\alpha - 2a^3 = (\alpha - a)(\alpha^2 + a\alpha + 2a^2) = 0$, d'où $\alpha = a$. La première approximation est donc $y_1 = a$. Newton reprend alors, avec les mêmes notations, la démarche mise au point pour les équations numériques : il effectue le changement d'inconnue $y = a + p$, ce qui conduit à la nouvelle équation $p^3 + 3ap^2 + (4a^2 + ax)p + a^2x - x^3 = 0$. En remplaçant p par $\beta x + \gamma x^2 + \cdots$ et en négligeant les termes de degré supérieur ou égal à 2, on aboutit à $4a^2\beta x + a^2x = 0$, c'est-à-dire à $\beta = -\frac{1}{4}$. À partir de la seconde approximation $y_2 = y_1 - \frac{1}{4}x$, une nouvelle itération conduit à $y_3 = y_2 + \frac{1}{64a}x^2$, et ainsi de suite.

> Soit proposée l'équation $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$; j'écris de suite et de gauche à droite dans une ligne au-dessus les termes $1 - 3x + x^2$, qui ne sont pas affectés de la quantité relative y, et j'écris le reste y et xy dans une colonne à main gauche.

	$+1$	$-3x$	$+xx$				
$+y$	$*$	$+x$	$-xx$	$+\frac{1}{3}x^3$	$-\frac{1}{6}x^4$	$+\frac{1}{30}x^5$	, &c.
$+xy$	$*$	$*$	$+xx$	$-x^3$	$+\frac{1}{3}x^4$	$-\frac{1}{6}x^5$	$+\frac{1}{30}x^6$, &c.
Somme	1	$-2x$	$+xx$	$-\frac{2}{3}x^3$	$+\frac{1}{6}x^4$	$-\frac{4}{30}x^5$	, &c.
$y =$	x	$-xx$	$+\frac{1}{3}x^3$	$-\frac{1}{6}x^4$	$+\frac{1}{30}x^5$	$-\frac{1}{45}x^6$	, &c.

> Et d'abord je multiplie le premier terme 1 par la quantité corrélative x, et divisant le produit $1x$ ou x par le nombre 1 des dimensions, j'écris $\frac{x}{1}$ ou simplement x dans le quotient au-dessous; puis au

[23]On pourrait signaler aussi que, peu après Newton, son compatriote Edmond Halley a publié, en 1694, une méthode encore plus performante se traduisant par le schéma itératif $x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$. La méthode de Halley revient à effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 alors que celle de Newton se limitait à l'ordre 1 (par suite, l'ordre de convergence est 3 au lieu de 2). Mais on ne sait pas vraiment comment Halley a pu raisonner pour aboutir à un tel résultat : voir SCAVO et THOO, 1995, où l'on trouvera aussi un grand nombre de références antérieures sur la méthode de Halley.

lieu de y substituant cette valeur dans les termes $+\ y$ et $+\ xy$ de la colonne à main gauche, j'ai $+\ x$ et $+\ xx$, que j'écris vis-à-vis et à main droite; ensuite je prends dans ce qui reste les termes les plus bas $-\ 3x$ et $+\ x$, dont la somme $-\ 2x$ multipliés par x devient $-\ 2xx$, qui divisé par le nombre 2 des dimensions donne $-\ xx$ pour le second terme de la valeur de y dans le quotient. Prenant donc ce terme et le substituant au lieu de y, j'ai $-\ xx$ et $-x^3$ qu'il faut ajouter respectivement aux termes $+\ x$ et $+\ xx$, écrits vis-à-vis de y et yx. Je prends de même les plus bas termes $+\ xx\ -\ xx\ +\ xx$ de la somme xx desquels etc. je tire le troisième terme $+\frac{1}{3}x^3$ de la valeur de y, et après l'avoir substitué etc. je tire des plus bas termes $\frac{1}{3}x^3$ et $-x^3$ le quatrième terme $-\frac{1}{6}x^4$. Ce que l'on peut continuer aussi longtemps qu'on le jugera à propos.

Ce procédé pour extraire la fluente y, terme après terme, est tout à fait analogue à celui utilisé plus haut pour extraire une racine d'une équation numérique. Nous pouvons encore l'analyser comme un schéma itératif, en interprétant le calcul de Newton de la façon suivante : prenons $y_1 = 0$ comme première approximation de l'équation différentielle $y' = 1-3x+x^2+(1+x)y$; en substituant dans le second membre, on obtient $y' = 1-3x+x^2$, puis, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 1, $y' = 1$, d'où la nouvelle approximation $y_2 = x$; en substituant à nouveau, on aboutit à l'équation $y' = 1 - 2x + 2x^2$, qui, par suppression des termes d'ordre supérieur ou égal à 2, s'écrit plus simplement $y' = 1-2x$, d'où l'approximation $y_3 = x - x^2$; et ainsi de suite. Finalement, en faisant abstraction de la suppression, à chaque étape, des termes non significatifs de degré élevé, l'algorithme peut s'écrire

$$\begin{cases} y_1 & = & 0 \\ y_{n+1} & = & \int_0^x f(x, y_n)dx. \end{cases}$$

Ce schéma d'intégrations successives conduit à un développement en série de la solution qui s'annule en 0. Le problème de la constante d'intégration n'est pas directement évoqué.

3 Vers le théorème du point fixe de Banach

Newton ayant ainsi ouvert la voie, on va assister pendant les XVIII$^{\text{ème}}$ et XIX$^{\text{ème}}$ siècles à une extension progressive de la méthode des approximations successives aux équations fonctionnelles les plus diverses : équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles, équations aux différences finies, équations intégrales, équations intégro-différentielles, etc.

a) Les approximations successives des astronomes

C'est en astronomie que l'idée originale de Newton devait connaître ses applications les plus ambitieuses. En 1747, à peu près simultanément, Clairaut, d'Alembert et Euler réussissent à mettre en équations le redoutable problème des trois corps et en donnent les premières solutions approchées analytiques sous forme de développements en séries trigonométriques[24]. D'Alembert et Euler, dans la plupart de leurs recherches, s'inspirent directement de Newton : ils déterminent un à un les termes des séries grâce à des substitutions successives dans les équations différentielles. Cette démarche sera généralement retenue par la suite, ainsi qu'en témoigne Laplace, en 1776, dans la seconde partie de ses *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde* :

[24]Vu leur complexité, nous ne pouvons pas aborder ces calculs ici. On pourra consulter TOURNÈS, 1996, chap. IV et TATON et WILSON, 1995.

> Ayant ainsi une première valeur approchée des variables, on substitua dans les équations différentielles, au lieu de chaque variable, cette valeur, plus une très petite indéterminée dont on négligea le carré et les puissances supérieures, et, en continuant d'opérer ainsi, on eut une seconde, une troisième, etc. valeur approchée. Cette méthode, analogue à celle de Newton pour déterminer par approximation les racines des équations numériques, se présenta naturellement aux géomètres qui résolurent les premiers le problème des trois corps.

Clairaut, quant à lui, adopte un point de vue assez différent[25]. Dans ses recherches sur la théorie de la Lune (1750-1765) et sur le retour de la comète de Halley (1757-1760), il aboutit à une équation différentielle de la forme $\frac{d^2r}{dv^2} = F\left(v, r, \frac{dr}{dv}\right)$, analogue à celle de d'Alembert. Mais, au lieu de procéder directement à des substitutions successives dans cette équation différentielle, il la transforme d'abord en une équation intégrale de la forme $r = G\left(v, r, \frac{dr}{dv}\right)$. Ce n'est qu'après qu'il part d'une première valeur supposée r_0 de la fonction inconnue r, qu'il obtient une valeur corrigée de cette même fonction en substituant r_0 dans le second membre, soit $r_1 = G\left(v, r_0, \frac{dr_0}{dv}\right)$, et ainsi de suite. Cette façon de remplacer explicitement l'équation différentielle par une équation intégrale équivalente constitue, en quelque sorte, une anticipation de la méthode de PICARD dont nous parlerons plus loin.

Ainsi, sans entrer dans les détails, on peut dire que la méthode des approximations successives a été abondamment pratiquée pendant la seconde moitié du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle et au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, essentiellement par les astronomes. Le texte que nous allons étudier maintenant permettra de faire le point sur la situation à l'issue de cette longue période de recherches empiriques.

b) Texte 7 : SCHMIDTEN, 1821

Dans un mémoire paru en 1821[26], Henri Gerner SCHMIDTEN offre un panorama de la méthode des approximations successives et de ses possibles applications dans les diverses branches de l'analyse. Selon lui, la méthode des approximations successives, connue depuis longtemps, s'applique à tous les types d'équations :

> Depuis longtemps on se sert du principe des substitutions successives, comme d'une méthode d'approximation, fondée sur des valeurs particulières des quantités qui entrent dans l'équation proposée; et on l'a employée, faute de méthodes plus rigoureuses; c'est pourquoi je me suis surtout attaché à l'exposer sous un point de vue qui doit la faire considérer comme la seule méthode générale qui existe pour l'intégration des équations.

Pour illustrer cette philosophie toute newtonienne, SCHMIDTEN propose de nombreux exemples, en considérant tour à tour des équations différentielles à deux variables, des équations aux différences finies à deux variables, des équations aux différences mêlées à deux variables et des équations linéaires aux différences partielles. Ces exemples, traités de façon purement

[25]Voir TOURNÈS, 1996, (chap. IV et V) et TOURNÈS, 1998. Nous montrons notamment en quoi la méthode de Clairaut est à l'origine des quadratures mécaniques par approximations successives pratiquées par les astronomes, et des méthodes multipas pour l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires. Par ailleurs, dans GREENBERG, 1988, on verra que Clairaut savait aussi appliquer la méthode itérative à des équations numériques : plus précisément, Greenberg explique comment Clairaut résout ainsi un système de quatre équations numériques à quatre inconnues.

[26]SCHMIDTEN, 1820/21. L'extrait sélectionné se trouve p. 270-271.

formelle, donnent lieu à des développements calculatoires dans la tradition de l'école combinatoire allemande. Auparavant, le début du mémoire contient un exposé abstrait de la méthode des substitutions successives, d'une grande beauté formelle en même temps qu'étonnamment moderne :

> Soit, en effet, y une fonction d'un certain nombre de variables indépendantes, donnée par l'équation différentielle
>
> $$\varphi \cdot y = f \cdot y;$$
>
> $\varphi \cdot y$ étant une fonction qui contient les coefficients différentiels ou aux différences de l'ordre le plus élevé qui soient dans l'équation proposée, et $f \cdot y$ étant une autre fonction quelconque des variables indépendantes [contenant] des coefficients différentiels ou aux différences; on aura l'équation intégrale
>
> $$y = X + \frac{1}{\varphi} f \cdot y;$$
>
> $1/\varphi$ signifiant la fonction inverse de φ; et X étant la fonction la plus générale qui satisfasse à l'équation $\varphi \cdot X = 0$.
>
> Au moyen de cette relation implicite, on trouvera facilement la valeur explicite de y, par des substitutions successives; ce sera
>
> $$y = X + \frac{1}{\varphi} f(X + \frac{1}{\varphi} f(X + \frac{1}{\varphi} f(X + \ldots$$
>
> Maintenant, il se peut que chaque substitution rapproche cette série de la véritable valeur de y; mais il se peut aussi qu'elle l'en éloigne; et alors on devra donner une autre forme à la série; ce qui est toujours possible d'autant de manière différentes qu'il y en aura de partager l'équation entre les deux termes $\varphi \cdot y$ et $f \cdot y$.
>
> On voit cependant que la valeur de y restera, en général, très compliquée, à moins que $\varphi \cdot y$ et $f \cdot y$ ne soient linéaires par rapport à y, ce qui embrasse déjà une classe d'équation très étendue et très importante : celle des équations linéaires.
>
> On a, dans ce cas,
>
> $$y = X + \frac{1}{\varphi} f \cdot X + \frac{1}{\varphi} f\left(\frac{1}{\varphi} f \cdot X\right) + \frac{1}{\varphi} f\left(\frac{1}{\varphi} f\left(\frac{1}{\varphi} f \cdot X\right)\right) + \cdots;$$
>
> et je me propose d'en exposer les principales conséquences [...].

Ce texte appelle trois groupes de remarques :

1) SCHMIDTEN raisonne directement sur une équation dont l'inconnue est une fonction. À cette fonction sont appliqués des opérateurs sur lesquels on peut effectuer, à nouveau, des opérations d'un niveau supérieur (par exemple, prendre l'inverse, c'est-à-dire appliquer l'opérateur réciproque). Le concept d'*équation fonctionnelle paraît* donc tout à fait clair en ce début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, soit plus tôt que ce que l'on dit parfois. Si, en l'absence de toute notion topologique et de toute considération de convergence, il serait abusif de parler déjà d'analyse fonctionnelle, par contre le terme d'*algèbre fonctionnelle* semble parfaitement approprié.

2) Pour SCHMIDTEN, le problème de l'existence ne se pose pas. Lorsqu'il parle de la "véritable valeur de y", il est clair que cette valeur existe et qu'il s'agit seulement d'en trouver un développement en série. De plus, les substitutions successives fournissent toujours la "valeur explicite de y", que le développement soit convergent ou divergent. On est en plein dans la tradition eulérienne : les algorithmes infinis restent recevables même quand ils ne débouchent pas sur la possibilité d'un calcul numérique. Une idée supplémentaire très importante se greffe là-dessus : il y a une infinité de façons de transformer une équation en une équation à point fixe et, sans que l'on sache expliquer pourquoi, certaines équations à point fixe conduisent à des séries convergentes et d'autres non.

3) En dehors des équations linéaires, les calculs sont inextricables; plus précisément, la loi de formation du développement en série reste implicite. Pour une équation non linéaire, on peut toujours calculer l'un après l'autre les premiers termes du développement mais on ne disposera jamais que d'un nombre fini de ces termes : le développement reste potentiel. Or, pour aborder valablement le problème de la convergence, il faut pouvoir raisonner sur l'infinité des termes de la série. On voit mal comment y parvenir sans disposer d'une expression explicite, directe ou récurrente, de tous les termes. Si SCHMIDTEN se restreint aux équations linéaires, c'est parce que, pour lui, dans l'optique de l'analyse algébrique, l'essentiel est de caractériser complètement la loi de formation du développement. Plus tard, lorsqu'on s'intéressera à la convergence, il sera également naturel, pour la raison que nous avons indiquée, de s'en tenir aux équations linéaires.

Ce texte de SCHMIDTEN de 1821 apporte la preuve que, au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la technique empirique des substitutions successives avait déjà revêtu l'aspect d'un problème de point fixe très général, assez bien théorisé dans son aspect formel. Restait à expliquer ce qui, dans certains cas, provoquait le succès numérique du procédé, c'est-à-dire déterminer des conditions suffisantes assurant la convergence des séries obtenues.

c) Le problème de la convergence

Jusqu'à présent, nous n'avons rencontré dans aucun des textes étudiés ce qu'en termes modernes nous appelons le *problème de la convergence*. Pour tous les auteurs cités, y compris SCHMIDTEN, ce problème ne se pose pas. Dans leur esprit, il va de soi que l'équation à résoudre, qu'elle soit numérique ou fonctionnelle, admet une solution, et qu'il s'agit seulement d'en calculer des valeurs approchées. SCHMIDTEN souligne clairement que, dans la mise en œuvre des substitutions successives, on constate parfois que les valeurs successives se rapprochent de la solution, et parfois qu'elles s'en éloignent, mais la réflexion n'est pas poussée plus avant.

Dans le cas des équations numériques, c'est Fourier qui, semble-t-il, aborde pour la première fois la question de la convergence de la méthode de Newton dans un article de 1818, mais c'est Cauchy qui en réalise le premier traitement correct dans son *Cours d'Analyse* de 1821[27].

En ce qui concerne les équations différentielles ordinaires, on peut mentionner des recherches de Liouville en 1830, sur la théorie de la chaleur, et en 1837-38, sur ce qui deviendra la "théorie de Sturm-Liouville". Au cours de ces travaux, Liouville résout par approximations successives

[27] Sur ces travaux de Fourier et Cauchy, voir CHABERT *et al.*, 1994, p. 210-216.

des équations différentielles linéaires du second ordre, avec une preuve quasiment complète de la convergence. Liouville démontre non seulement la convergence de la série qui définit la solution, mais aussi la convergence de la série des dérivées, ce qui justifie la dérivation terme à terme. La seule faiblesse est l'absence d'une notion explicite de convergence uniforme, mais cela ne compromet pas fondamentalement la validité de la preuve dans la mesure où n'interviennent que des séries entières. On trouve des raisonnements analogues à ceux de Liouville dans divers travaux de Cauchy à partir de 1830, de sorte qu'il est difficile de savoir lequel des deux hommes a eu le premier l'idée de ce type de démonstration[28].

D'autres travaux sur la méthode des approximations successives sont publiés par Caqué (1864), Fuchs (1870) et Peano (1887), toujours dans le cas des équations différentielles ordinaires linéaires. Parallèlement, la méthode itérative est également employée pour résoudre des équations aux dérivées partielles linéaires : en 1877, Neumann aborde ainsi l'équation de Laplace et, en 1885, Schwarz fait de même pour l'équation des membranes vibrantes[29]. C'est dans ces travaux de Neumann et de Schwarz que PICARD trouve son inspiration pour publier, en 1890[30], une preuve de la méthode des approximations successives s'appliquant, pour la première fois, à des équations *non linéaires*. Le mémoire de Picard débute par ces mots :

> Considérons une équation du second ordre aux dérivées partielles de la forme [...]. On peut, pour intégrer cette équation, avec des conditions aux limites déterminées, procéder de la manière suivante par approximations successives.

Ce n'est qu'au bout d'une cinquantaine de pages que PICARD, presque incidemment, s'intéresse aux équations différentielles ordinaires : "Les méthodes d'approximation dont nous venons de faire usage peuvent évidemment être employées dans le cas des équations différentielles ordinaires [...]". Ainsi donc, c'est par le biais des équations aux dérivées partielles que PICARD aboutit finalement à une nouvelle démonstration du théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz. Par cette démonstration générale, il parachève l'œuvre entrepris auparavant par Liouville, Cauchy et PEANO. De nos jours, du moins en ce qui concerne les équations différentielles, l'expression "méthode de Picard" est devenue synonyme de "méthode des approximations successives".

d) Texte 8 : PEANO

Plutôt qu'un texte de PICARD, nous avons choisi d'étudier un extrait du mémoire de PEANO de 1887 sur l'intégration par séries des équations différentielles linéaires. Laissant de côté le mémoire original en italien, nous nous référerons à la traduction française parue l'année suivante avec de légères modifications[31]. L'originalité de PEANO est double : la méthode itérative est utilisée pour intégrer un *système* d'équations linéaires du premier ordre (alors qu'on s'était surtout intéressé, jusque là, à une seule équation linéaire d'ordre supérieur) et, pour la première fois, un système d'équations est traité comme une *équation unique*. PEANO considère le système d'équations différentielles linéaires homogènes

[28]Une analyse détaillée de ces recherches de Liouville et de Cauchy se trouve dans TOURNÈS, 1996, p. 268-285.

[29]Voir DIEUDONNÉ, 1981 et ARCHIBALD, 1996.

[30]PICARD, 1890.

[31]PEANO, 1888.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= r_{11}x_1 + \cdots + r_{1n}x_n \\
\cdots & \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= r_{n1}x_1 + \cdots + r_{nn}x_n
\end{aligned}
$$

où les r_{ij} sont des fonctions réelles de la variable t, continues dans l'intervalle (p, q). S'inspirant des travaux de Grassmann, Hamilton, Cayley et Sylvester[32], il ramène le système à la seule équation

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{x},$$

en introduisant le "nombre complexe" (le vecteur) $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]$ et la "substitution" (la transformation linéaire) représentée par la "matrice"

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{l} r_{11} \ldots r_{1n} \\ \ldots \\ r_{n1} \ldots r_{nn} \end{array} \right\} = \{r_{ij}\}.$$

La moitié de l'article est naturellement consacrée à une étude préliminaire des propriétés de ces objets, qui nous sont aujourd'hui si familiers mais qui étaient alors peu connus des mathématiciens. Pour comprendre la suite, il suffira de savoir que PEANO définit les "modules" (les normes) d'un nombre complexe et d'une substitution par les formules :

$$\text{mod.}\mathbf{x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$
$$\text{mod.}\mathbf{R} = \text{maximum de } \frac{\text{mod.}(\mathbf{R}\mathbf{x})}{\text{mod.}\mathbf{x}}.$$

Une fois ces notions et notations introduites, la démonstration de PEANO est un modèle de rigueur, de concision et d'élégance :

> Le système d'équations données se réduira à l'équation unique
>
> $$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{x}. \tag{1}$$
>
> Soit a un complexe constant quelconque. Posons :
>
> $$\mathbf{a}' = \int \mathbf{R}\mathbf{a}\, dt, \quad \mathbf{a}'' = \int \mathbf{R}\mathbf{a}' dt, \quad \mathbf{a}''' = \int \mathbf{R}\mathbf{a}'' dt, \cdots,$$
>
> où les intégrales s'étendent de t_0 à t. On doit prouver que la série
>
> $$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{a}' + \mathbf{a}'' + \ldots \tag{2}$$

[32]C'est vers 1843-45 que Cayley et Grassmann, voulant étendre le langage géométrique, considèrent les systèmes de n nombres en tant qu'éléments d'un nouvel espace. PEANO lui-même s'intéresse à la question en logicien et donne une définition générale, proche de la nôtre, des espaces vectoriels et des applications linéaires sur le corps des nombres réels dans *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, publié en 1888.

est convergente, et que sa somme $\mathbf{x}$ est une fonction de t (qui, évidemment, a la valeur $\mathbf{a}$ pour $t = t_0$) satisfaisant à l'équation (1). En effet puisque les r_{ij} sont des fonctions continues de t dans l'intervalle $(p,\ q)$, mod.$\mathbf{R}$ sera aussi une fonction continue de t, et soit m son maximum. En supposant, pour simplifier, $t > t_0$, on a :

$$\text{mod.a}' \leq \int \text{mod.}(\mathbf{Ra})dr \leq \int \text{mod.}\mathbf{R} \cdot \text{mod.a} \cdot dt \leq m \cdot \text{mod.a} \cdot (t - t_0),$$

$$\text{mod.}\underline{\text{a}}'' \leq \int \text{mod.}(\mathbf{Ra}')dt \leq \int \text{mod.}\mathbf{R} \cdot \text{mod.a}' \cdot dt \leq \frac{1}{2}m^2.\text{mod.a} \cdot (t - t_0)^2,$$

etc.

$$\text{mod.a}^{(n)} \leq \frac{1}{n!}m^n \cdot \text{mod.a} \cdot (t - t_0)^n.$$

Donc la série (2) est uniformément convergente, car les modules des termes sont moindres que des quantités constantes qui forment une série convergente. En différentiant les termes de (2) on obtient la série $0 + \mathbf{Ra} + \mathbf{Ra}' + \cdots$, qui converge uniformément vers $\mathbf{Rx}$. Donc x satisfait bien à l'équation proposée.

Il s'agit, pour la première fois, d'une démonstration d'existence ne laissant rien à désirer : convergence de la série en tout point de l'intervalle de régularité, justification correcte de la dérivation terme à terme pour prouver que la série est bien solution de l'équation. Ce travail de PEANO apparaît ainsi comme l'ultime avatar des idées semées vers 1830 par Liouville et Cauchy. La seule possibilité de dépasser la perfection atteinte par le mathématicien italien réside désormais dans l'abandon de l'hypothèse de linéarité, ce qui sera réalisé par Picard en 1890, ainsi que nous l'avons souligné plus haut.

e) Texte 9 : BANACH, 1920

Après PICARD, les approximations successives deviennent une méthode générale de résolution des équations fonctionnelles. La démarche de PICARD trouve son aboutissement dans la thèse[33] que soutient BANACH en 1920 et qui contient un théorème abstrait de point fixe :

THÉORÈME 6. Si

1° $U(X)$ est une opération continue dans E, le contre-domaine de $U(X)$ étant contenu dans E;

2° il existe un nombre $0 < M < 1$ qui pour tout X' et X'' remplit l'inégalité

$$\|U(X') - U(X'')\| \leq M\|X' - X''\|,$$

il existe un élément X tel que $X = U(X)$.

Démonstration. Y désignant un élément choisi d'une façon arbitraire, soit $\{X_n\}$ une suite qui satisfait aux conditions :

$$X_1 = Y \quad \text{et pour tout } n\ , \quad X_{n+1} = U(X_n).$$

Nous allons démontrer que la suite $\{X_n\}$ converge suivant la norme vers un certain élément X. On observera dans ce but que l'on a pour tout $n > 1$:

[33] BANACH, 1920.

$$\|X_{n+1} - X_n\| = \|U(X_n) - U(X_{n-1})\| \leq M\|X_n - X_{n-1}\|,$$

d'où

$$\|X_{n+1} - X_n\| \leq M^{n-1}\|X_2 - X_1\|.$$

On a par hypothèse $M < 1$; la série $\sum_{n=1}^{\infty} \|X_{n+1} - X_n\|$ est donc convergente, ce qui implique que la série $X_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(X_{n+1} - X_n)$ converge suivant la norme vers un certain élément X.

Or,

$$X_1 + \sum_{n=1}^{n_1}(X_{n+1} - X_n) = X_n$$

donc

$$\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}} X_n = X.$$

$U(X)$ étant continu, on a $\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}} U(X_n) = U(X)$ et comme

$$X_n = U(X_{n-1}),$$

on trouve

$$\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}} X_n = \overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}} U(X_{n-1})$$

et finalement

$$X = U(X).$$

c.q.f.d.

La preuve, identique à celle que l'on trouve aujourd'hui dans les traités d'analyse, n'appelle pas de remarque particulière. Par la considération d'espaces abstraits munis de normes adéquates, la résolution de l'équation fonctionnelle la plus complexe devient ainsi formellement identique à la résolution de l'équation numérique la plus simple. En quelque sorte, le théorème de BANACH détermine sous quelles conditions les procédés formels très généraux décrits plus haut par SCHMIDTEN peuvent être considérés comme recevables en analyse. À lui seul, ce théorème résume et justifie tous les algorithmes d'approximations successives utilisés pendant près de deux mille ans[34].

Bibliographie

AABOE, A. Al-Kāshī's iteration method for the determination of sin 1°, *Scripta Mathematica*, **20** (1954), p. 24-29.

ARCHIBALD, T. From attraction theory to existence proofs : The evolution of potential-theoretic methods in the study of boundary-value problems, 1860-1890, *Revue d'histoire des mathématiques*, **2** (1996), p. 67-93.

BACHELARD, G. *Essai sur la connaissance approchée*, Paris : Vrin, 1973.

BAILEY, D.F. A historical survey of solution by functional iteration, *Mathematics Magazine*, **62** (1989), p. 155-166.

BANACH, S. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations*

[34] Pour suivre les développements de la méthode des approximations successives après la thèse de Banach, on pourra consulter KANTOROVITCH, 1939 et MAHWIN, 1994.

intégrales, Thèse présentée en juin 1920 à l'Université de Léopol pour obtenir le grade de docteur en philosophie. Publiée dans *Fundamenta Mathematicæ*, **3** (1922), p. 133-181.

CAVEING, M. *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque.* Vol. 3 : *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Villeneuve d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion, 1998.

CHABERT, J.-L. *et al. Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Paris : Belin, 1994. Trad. angl. par C. Weeks, *A history of algorithms. From the pebble to the microchip*, New York : Springer, à paraître.

CHEMLA, K. Reflections on the world-wide history of the rule of false double position, or : How a loop was closed, *Centaurus*, 39 (1997), p. 97-120.

DIEUDONNÉ, J. *History of functional analysis*, Amsterdam : North-Holland, 1981.

GLUSHKOV, S. On approximation methods of Leonardo Fibonacci, *Historia Mathematica*, **3** (1976), p. 291-296.

GREENBERG, J.L. Breaking a "vicious circle" : Unscrambling A.-C. Clairaut's iterative method of 1743, *Historia Mathematica*, **15** (1988), p. 228-239.

HÉRON D'ALEXANDRIE *Heronis Alexandrini Opera quæ supersunt omnia.* Vol. III : *Metrica, Dioptra*, Ed. H. Schöne, Leipzig : Teubner, 1903.

HOUZEL, C. Sharaf al-Dīn al-Tūsī et le polygone de Newton, *Arabic Sciences and Philosophy*, **5** (1995), p. 239-262.

KANTOROVITCH, L. The method of successive aproximations for functional equations, *Acta Mathematica*, **71** (1939), p. 63-97.

KENNEDY, E. S. An early method of successive approximations, *Centaurus*, **13** (1969), p. 248-250.

KENNEDY, E. S. & TRANSUE, W. R. A medieval iterative algorithm, *American Mathematical Monthly*, **63-2** (1956), p. 80-83.

MANCHA, J.L. Heuristic reasoning : Approximation procedures in Levi ben Gerson's Astronomy, *Archive for History of Exact Sciences*, **52** (1998), p. 13-50.

MAWHIN, J. Boundary value problems for non linear ordinary differential equations : from successive approximations to topology, dans J.-P. Pier (Ed.), *Development of mathematics 1900-1950*, Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser, 1994.

NEUGEBAUER, O. *The exact sciences in Antiquity*, 2e Ed., Providence : Brown University Press, 1957; rééd. New York : Dover, 1969.

A history of ancient mathematical astronomy, 3 vol., New York-Heidelberg-Berlin : Springer, 1975.

NEWTON, I. *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, 1671. Trad. angl. par J. Colson, *The method of fluxions and infinite series*, Londres, 1736. Trad. fr. par M. de Buffon, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Paris, 1740; rééd. Paris : Blanchard, 1994.

PEANO, G. Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari, *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, **22** (1887), p. 437-446. Intégration par séries des équations différentielles linéaires, *Mathematische Annalen*, **32** (1888), p. 450-456.

PICARD, É. Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, Journal de mathématiques pures et appliquées (4e série), **6** (1890), p. 145-210.

PLOFKER, K. An example of the secant method of iterative approximation in a fifteenth century sanskrit text, *Historia Mathematica*, **23** (1996), p. 246-256.

RASHED, R. *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris : Les Belles Lettres, 1984. Trad. angl., *The development of arabic mathematics : Between arithmetic and algebra*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (Boston Studies

in the Philosophy of Science, vol. 156), 1994.

Histoire des sciences arabes. Vol. 2 : *Mathématiques et physique*, sous la direction de R. Rashed, Paris : Seuil, 1997.

RIAHI, F. An early iterative method for the determination of sin 1°, *The College Mathematics Journal*, **26-1** (1995), p. 16-21.

SCAVO, T.R. & THOO, J. B. On the geometry of Halley's method, *American Mathematical Monthly*, **102** (1995), p. 417-426.

SCHMIDTEN, H.G. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, **11** (1820/21), p. 269-316.

SPIESSER, M. *Équations du premier degré. Méthode de "fausse position"*, Toulouse : IREM, 1982.

TATON, R. et WILSON, C. (Eds.) *Planetary astronomy from the Renaissance to the rise of astrophysics. Part B : The eighteenth and nineteenth centuries*, Cambridge : University Press, 1995.

TOURNÈS, D. *L'intégration approchée des équations différentielles ordinaires (1671-1914)*, Thèse de doctorat de l'université Paris 7-Denis Diderot (juin 1996), Villeneuve d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion, 1997.

L'origine des méthodes multipas pour l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires, *Revue d'histoire des mathématiques*, **4** (1998), p. 5-72.

YOUSCHKEVITCH, A.P. *Les mathématiques arabes (VIIIème-XVème siècles)*, trad. par M. Cazenave et K. Jaouiche, Paris : Vrin, 1976.

YPMA, T.J. Historical development of the Newton-Raphson method, *SIAM Review*, **37** (1995), p. 531-551.

About Mathematics in University Textbooks of Economics

ZERNER Martin
REHSEIS, Paris (France)

Abstract

In the specialization "economical and social studies" of the French baccalauréat (final high school degree) the mathematics curriculum has been replaced by "mathematics applied to economics and the social sciences". Problems which pretend to include economic applications will be analyzed.

In a text on economics, we will discuss how the use of mathematics masks the introduction of new economic hypotheses through the combined effects of the importance and the weakness of the mathematical reasoning.

There will be no prerequisit in economics and participants can choose between the two topics. This program may be slightly modified if I find new documents inbetween.

Note

No knowledge in economics is necessary to understand what follows.

Our project

As is well known, mainstream economics relies heavily on mathematics. However, students in economics are usually not so good at math and that is a problem for teaching. The usual way out is a heavy use of graphical representations. We want to analyze how it works in a widely used textbook, Barro's *Macroeconomics* (BARRO, 1984). This book has a short section with the title "A note on mathematics and economic reasoning" which runs thus :

> This book does not use any advanced mathematics. Rather, it relies on graphical methods and occasional algebraic derivations. Although calculus[1] would speed up the presentation in some places, it is unnecessary for the main economic arguments. Students should therefore not find the book difficult on technical grounds.
>
> What will be demanding from time to time is the economic reasoning. It is this aspect of economics that is the most difficult - as well as the most rewarding. Unfortunately, not all of this difficulty can be avoided if we wish to understand the economic events which occur in the real world. The feature that should help students to master the material is the use of a single, consistent model, which is then successively refined and applied to a variety of macroeconomic problems. Anyone who invests enough effort to understand the basic model will eventually see the simplicity of the approach, as well as its applicability to a wide variety of real world issues. Conversely, anyone who fails to master the basic model will be in serious trouble later on. (p.25-26)[2]

Our questions are how the mathematics are modified in this process and whether this modification has consequences for the economics. The first of these questions has been dealt with by Michèle Artaud (ARTAUD 1993, 1995) on the basis of another case study, namely a textbook of financial theory (COPELAND & WESTON, 1988). On the whole, her conclusions are consistent with ours. Our method will be to translate as closely as possible into rigorous mathematical terms.

It may be useful to say a word about research papers in economics. Of course, they use algebra and calculus. But they also do use graphical methods. An example is DORNBUSCH (1983) who studies the problem of the Third World debt[3]. This is a very real problem, but Dornbusch's developing country is very unreal. The article appeared shortly before the first edition of Barro's textbook and contains the very same kind of reasoning and figures as those which you can find in it.

Introducing Barro's *Macroeconomics*

This book is a success. It has had four editions (more if I am not up to date) and a French translation[4]. I have checked that it is actually in use in French universities. It is very carefully written and has many assets in its presentation (summaries, a glossary, etc). The fourth edition on which the present text is based has substantial improvements with respect to the preceding ones. The author is professor at Harvard and has been an advisor to several government and international agencies.

[1]Rappel pour les lecteurs francophones: *calculus* signifie calcul différentiel et intégral.

[2]References, when not otherwise stated, are to the 4th (1993) edition of BARRO (1984).

[3]I have explained that article in a summer school on didactics of mathematics (ZERNER, 1996).

[4]Armand Colin, Paris, 1987. La traduction a été faite sur une édition antérieure (très probablement la première) et moins bonne que celle qui est utilisée ici. Il y a aussi une certaine adaptation au contexte français, pas toujours heureuse.

A introductory chapter explains what macroeconomics is about and gives indications on the main macroeconomics indices : gross national product (GNP)[5], unemployment rate, etc. Here are the titles of the following parts :

I Microeconomic foundations and the basic market-clearing model
II Inflation
III Business fluctuations, unemployment and economic growth
IV Government behavior
V The international economy
VI Interactions between the monetary sector and the real sector.

Part I is of course devoted to the basic model (except for a final chapter on the labour[6] market). As we want to start from scratch, we'll concentrate on the beginning of the first chapter of that part : "Work effort, production, and consumption - the economics of Robinson Crusoe".

Basic principles

Mainstream economics is called neoclassical. Here we will pretend to believe in its starting postulates, whatever we think of them. It starts from a few lines from the classical economist Adam Smith (1723-1790) who stated that if every individual pursues his own profit, the invisible hand of the market will see to it that the outcome be the best possible for everyone. "The invisible hand of the market" is a phrase which you hear very often in discussions among economists. One of the conclusions they draw from it is that economic theory has to start from the study of the economic behaviour of individuals (methodological individualism).

That is why they are interested in Robinson Crusoe. To put it in BARRO's words:

> In any[7] economic analysis, the determination of work effort, production, and consumption depends on opportunities for production and on preferences about working and consuming. This basic interaction between opportunities and preferences shows up even in the simplest possible economy, which consists of isolated individuals, each of whom resembles Robinson Crusoe. (p.41)

As Robinson Crusoe has to grant for the basic model of every subfield of economics, each economist has his own Robinson. To the Robinson of Copeland and Weston, it is very important to be able to choose how much of his crop he will save for sowing. Not so with Barro whose Robinson cannot save anything and must consume immediately all that which he produces (and of course no more). The only choice left to him is how much to work. In economic terms he is a "basic economic unit which we think of as a combination of a household and a firm. [. . .] For most purposes this abstraction will be satisfactory because some households ultimately own the public businesses." (p. 41-42) This basic unit is called a household in the book. In the usual economic terminology, to be distinguished from everyday language, a household is any unit of consumption.

Another simplification is to suppose an economy with only one product. When it comes to comparison with statistical data, the amount of this product is identified with the GNP.

[5]En français: produit national brut (PNB).

[6]Except for mistakes, my own spelling is British.

[7]Incidentally, this implies that there is no economic analysis in Marx's works!

Robinson Crusoe at work

The more Robinson works, the more product he gets.

> Formally, the quantity of a household's commodity output per period, denoted by y, is a function of the quantity of labor input l. We write this relation as :
>
> $$y_t = f(l_t) \tag{2.1}$$
>
> where f is the household's production function[8], which specifies the relation between the amount of work and the quantity of goods produced. (p.42)

Obviously, this function must be increasing. Moreover:

> The extra output produced by one more unit of work is called the **marginal (physical) product of labor,** henceforth designated **MPL**. We assume **diminishing marginal productivity,** which means that each successive unit of work generates progressively smaller, but still positive, responses of output. (p. 43)

In mathematical terms, this means that f, the production function, is concave. Notice that there is no justification of diminishing marginal productivity, an essential and most questionable assumption of neoclassical economics. It may be assumed that the students have had a course on microeconomics in which it has been discussed.

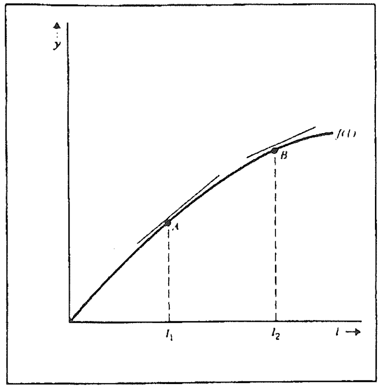


FIGURE 2.1 *Graph of Production Function*
The curve shows the level of output as a function of the quantity of labor input. At point A. the slope of the tangent straight line equals the marginal product of labor when $l = l_1$. The same is true for point B when $l = l_2$.

FIGURE 1 (from BARRO, 1984, p. 42)

> Figure 2.1, which is the graphical representation of equation (2.1), shows the relation of output to the quantity of labor input. [. . .] The positive slope of the curve (that is, of a straight line tangent to the curve) at any point indicates the additional output that results from extra labor input, which is the marginal product of labor. [. . .]
>
> The shape of the production function in Figure 2.1 implies that the slope becomes less steep as work effort increases. This property reflects the diminishing marginal productivity of labor. (p. 43)

[8] Actually all households are supposed to have the same production function throughout the book.

Through the use of the slope, which will be systematic, a new analytic property has been imposed on the production function: it must be differentiable. This is again questionable. Suppose the household is a French firm which still abides by labour regulations[9]. It has to pay 25% more for every hour of work in excess of 39 per worker and per week, which creates an angular point in its production function. A (weak) counter-argument might be that various angular points from different economic units average out. As a very important parenthesis, note that this example shows how utterly irrelevant the basic model is when it comes to real situations in which workers and bosses are implied. Which Robinson chooses the level of work effort? But here we pretend to believe in the basic principles of neoclassical economics.

Utility

It has already been said that Robinson consumes exactly what he produces. As a consequence :

> Then in the world of Robinson Crusoe we have:
>
> $$c_t = y_t = f(l_t) \tag{2.2}$$
>
> where c_t is the amount of consumption in physical units. (p. 44-45)

Here a key notion steps in :

> Consumption in each period is a source of happiness or **utility** for households. (Henceforth, we use *utility*, the economist's standard jargon.) (p. 45)

Utility has now to be formalized and made graphic.

> Households have a fixed amount of time in each period, which they can divide between work and leisure. [. . .] We assume that leisure is intrinsically more enjoyable than time at work. In other words, leisure is a source of utility for households.
>
> Suppose that we can define a function to measure the amount of utility that derives each period from consumption and leisure. The form of this **utility function** is
>
> $$u_t \;=\; \underset{(+)(-)}{u\,(c_t\,,\,l_t)} \tag{2.3}$$
>
> where u_t is the amount of utility (in units of happiness, which are sometimes called *utils*[10]) that someone obtains for period t. We assume that the form of the utility function, u, is the same for all periods. The positive sign under the quantity of consumption, c_t, indicates that utility rises with consumption. The negative sign under work effort, l_t, signifies the negative effect on utility of more work (that is, of less leisure).[11] (p. 46)

These properties are not enough for what is to follow. Above all, utility has to be made graphic. A slightly more sophisticated presentation going back to Pareto (1848-1923) gets rid of the utility function entirely, using only the indifference curves to be defined presently.

[9] As they are in November 1999.

[10] The util is never defined and never used.

[11] Though this is not a standard mathematical notation, it is legitimate, convenient, and often used by economists.

A basic assumption is that the utility gained from an extra unit of leisure, relative to that from an extra unit of consumption, diminishes as the ratio[12] of leisure to consumption rises. In other words, if someone has a lot of leisure but relatively little consumption, he or she is more concerned with adding to consumption rather than to leisure. Consider the amount of extra consumption needed to comprensate for the loss of a unit of leisure time. If a person starts with little consumption and a lot of leisure, then it is important to add to consumption. Therefore, he or she is willing to work a lot more to get additional consumption. If the person is already working quite a bit and has a high level of consumption, then leisure becomes more significant. Therefore, he or she is lesswilling to work more and give up leisure to obtain extra consumption.

The curve in Figure 2.5 summarizes this discussion. At zero work effort, $l = 0$, the curve specifies a level of consumption, c^0, on the vertical axis. This amount of consumption, together with full time leisure ($l = 0$), determines some level of utility from equation (2.3). Denote this level of utility by u^1. The curve shown in the figure connects this initial point to all other possible combinations of work and consumption to provide the same level of utility u^1.

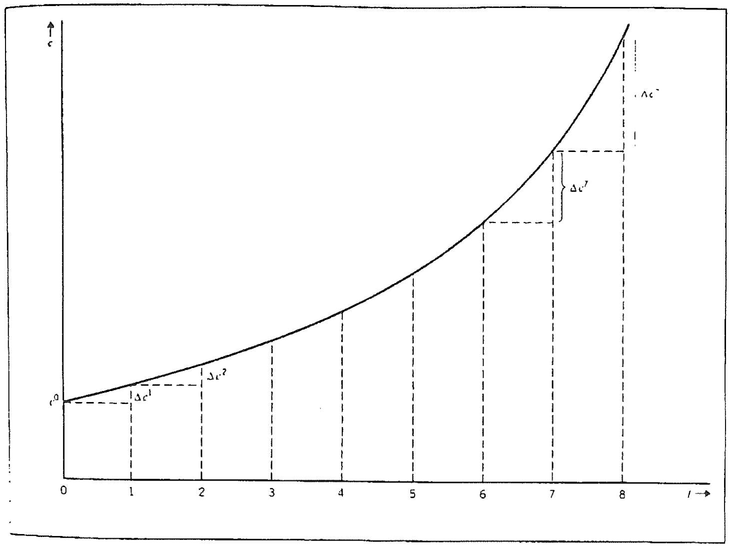


FIGURE 2.5 *An Indifference Curve for Work and Consumption*
All points (l,c) on the curve yield the same level of utility, u^1. Hence, the household is indifferent among these pairs of work effort and consumption.

FIGURE 2 (from BARRO, 1984, p. 47)

Suppose the person works a positive amount, so that leisure becomes less than a full time activity. Assume that work is one hour per day, represented by $l = 1$ in Figure 2.5. By itself, this reduction

[12]The word "ratio" is used here in a loose and non technical sense. This is not important. M.Z.

in leisure lowers utility. But we want to know how much additional consumption would restore the original level of utility. Denote by Δc^1 the required amount of extra consumption. Then the new combination of work and consumption, where $l = 1$ and $c = c^0 + \Delta c^1$, yields the same utility as the initial pair, where $l = 0$ and $c = c^0$. Hence, the person is indifferent between the two pairs of work and consumption. We show that these two points yield the same level of utility by connecting them by the curve shown in the figure.

If the person works another hour, that is, $l = 2$, then some additional consumption is again needed to maintain the level of utility. Figure 2.5 assumes that the required extra consumption is the amount δc^2. Therefore, the point where $l = 2$ and $c = c^0 + \Delta c^1 + \Delta c^2$ again provides the same utility as the initial pair, where $l = 0$ and $c = c^0$.

We can continue this exercise as the amount of work rises. The result is the curve in Figure 2.5, which shows all pairs (l, c) that yield the same level of utility. Since people are indifferent among these pairs of work and consumption, the curve is called an **indifference curve**.

The previous discussion tells us something about the shape of an indifference curve. As someone works more, each additional unit of work requires a greater amount of consumption to maintain utility. Therefore, the size of each addition to consumption, Δc, is larger the higher the associated number of work hours. Note in particular that $\Delta c^1 < \Delta c^2 < \ldots < \Delta c^7 < \Delta c^8$ in Figure 2.5.

At any point along the indifference curve, the slope of a tangent straight line indicates the increment in consumption that a person requires to make up for the loss of a unit of leisure. Each of the additions to consumption, Δc, that appears in Figure 2.5 approximates this slope in the vicinity of the corresponding level of work. For example, the amount Δc^2 is a good measure of the slope when the level of work lies between one and two hours per day. The previous results imply that the slope of the indifference curve rises as the amount of work, l, increases.

This long quotation shows us the utter care which BARRO brings to his economico-mathematico-graphical explanations (with apologies for the long word). We extract from it the analytic properties of an indifference curve: it is the graph of an increasing, differentiable, and convex function of l.

These are the properties of one indifference curve. BARRO goes on to explain briefly what happens when one goes from one indifference curve to another one. Obviously, these curves do not intersect, and the higher the curve, the higher the constant level of utility on it. The fact that there is one such curve through each point of the positive quarter of the plane is implicit.

Robinson's optimization

We are now in a position to decide with Robinson how much he will work. We have skipped above several mentions of how this is done, namely by finding the balance between work and consumption which yields the highest possible level of utility. Beware that Robinson is a very wise man : he knows his production function and his utility function, so that in principle he is left with a purely mathematical problem. Here is the way BARRO explains the solution.

Suppose that a household begins from a particuliar combination of work and consumption (l, c). We can consult Figure 2.6 to find the indifference curve to which the point corresponds. The slope of the indifference curve at this point indicates how much extra consumption, Δc, someone insists on to work an additional unit of time. To determine how much one actually works, we combine the indifference curves with a description of people's opprtunities for raising consumption when work effort rises. In the model, these opportunities come from the production function, which appears in Figure 2.1. The marginal product of labor, MPL, is the amount of extra output generated by an extra unit of work. Further, we know from equation (2.2) that each addition to output corresponds to an equal addition to consumption.

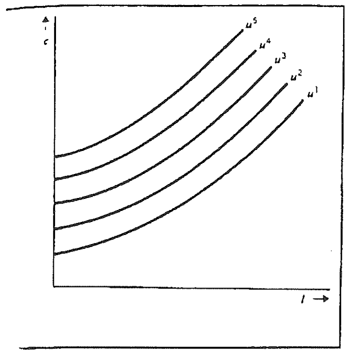


FIGURE 2.6 *A Family of Indifference Curves for Work and Consumption*
The level of utility rises as the household moves from the curve labeled u^1 to that labeled u^2, and so on.

FIGURE 3 (from BARRO, 1984, p. 49)

> The MPL is the addition to production, and therefore to consumption, that results from an extra unit of work. The slope of the indifference curve is the amount of extra consumption that a person needs to make up for less leisure. Therefore, if the MPL exceeds the slope of the indifference curve, then the person will be better off if he or she works more and uses the added output to expand consumption. However,as work rises, the MPL declines, and the slope of the indifference curve rises. Therefore, the increase in work lessens the initial excess of the MPL over the slope of the indifference curve. When the gap vanishes, that is, when the marginal product equals the slope of the indifference curve, it no longer pays to work more.
>
> [...]
>
> To summarize, each household chooses the combination of work and consumption that maximizes utility. Therefore, the household selects the pair (l^*, c^*) at which the production function is tangent to an indifference curve. (p. 49-50)

The part which we have skipped describes the optimization process in more graphical terms on the basis of the figure reproduced below.

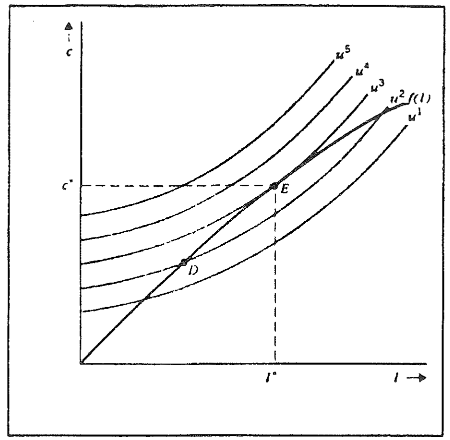


FIGURE 2.7 *Combining the Indifference Curves with the Production Function*
The household moves along the production function : to reach the highest possible indifference curve. This occurs at point E, where the production function is tangent to indifference curve u^3.

FIGURE 4 (from BARRO, 1984, p. 50)

We need some notations to analyze the mathematics involved. The partial derivatives of a function g of l and c will be denoted by g_l and g_c. The key mathematical object is the slope $p(l,c)$ of the indifference curve at the point (l,c). From it, we can recover the indifference curves by Cauchy's theorem on differential equations. Let us assume it is differentiable as well as the utility function.

By the definition of the indifference curves, we have :

$$u_l + p u_c = 0 \qquad (a)$$

The convexity of the indifference curve can be translated into the inequality :

$$p_l + p p_c > 0 \qquad (b)$$

Let us first examine BARRO's assertion that, as long as as the slope of the production function exceeds the slope of the indifference curve, the slope of the indifference curve increases with increasing work time along the graph of the production function. This would imply that the derivative along the graph, namely $p_l + f' p_c$, be non negative. Nothing of the above grants us that. Indeed, look at the following figure.

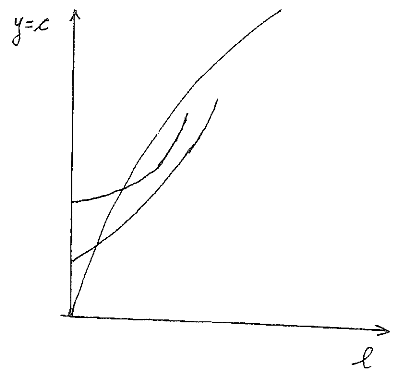


FIGURE 5

It is left as an exercise for the reader to find functions that fit it. (Hint: it is enough to find p). However, this objection vanishes if the slope of the indifference curve is an increasing function of c when l is kept constant[13]. Anyone who accepts the indifference curves as a legitimate economic concept and thinks that they are convex will probably be willing to grant this additional assumption.

So we can be convinced that, starting from a point were the MPL is lower than the slope of the indifference curve and increasing work the gap will diminish. Can it be proved, with all the preceding hypotheses, that it will vanish at some point? The answer is a square no. If you doubt it, just try and when you tired of it, check on the following counter-example.

$$f(l) = \sqrt{2l + l^2}.$$

We need not to know explicitly u, it is enough to have the indifference curves. Take for their equation :

$$c = r + \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \text{Arc tg } r)\sqrt{a^2 + l^2}$$

where r is a real parameter.
(Notice that $f' > 1$ and $p < 1$).

In economic terms, there are situations in which Robinson, in order to maximize his utility, has to work as much as he can[14].

[13]To show that $p(l_1, f(l_1)) > p(l_0, f(l_0))$ when $l_1 > l_0$ and $f' > p$ on $[l_0, l_1]$, use the point with abscissa l_0 on the indifference curve through $(l_1, f(l_1))$.

[14]How much is that? In early nineteenth century England, 16 hours a day must have been quite frequent. In the 1820s, the parliament passed a bill forbidding children to work more than 8 hours per day. As machines staying idle for 16 hours each day is not tolerable for profit, work was organized in two turns of 8 hours for children and one of 16 for grown up workers.

Now what are they going to do with that?

We are not through with the economics of Robinson Crusoe, not to speak of the basic model. The next step is to study shocks. By this word, economists mean a great variety of phenomena, ranging from technical improvements to bad harvests. All these are supposed to be formally representable by a change in the production function. This is handled graphically on the basis of the tangency of the graphs of the old and new production functions and the indifference curves (fixed for eternity). The first example is at the end of this same chapter where the long run evolution of working time is supposed to be explained by technical progress.

In the next chapter, Robinson is brought to a world equipped with markets and, most important, money and credit so that he has new indifference curves relative to his choice between consuming now or in the next period. But the rule that everything is consumed as soon as it is produced remains valid. Indeed, it is quite essential to make the basic model complete and operational, as is seen in chapter 5 "The basic market-clearing model".

The basic model is then applied to a large variety of real world issues indeed, including increase or decrease of taxes, level of unemployment and a lot of others. And all this relies on the reasoning we just found faulty.

References

ARTAUD, M. (1993) *La Mathématisation en économie comme problème didactique. Une étude exploratoire.* Thèse à l'Université de Provence.

ARTAUD, M. (1995) La graphisation en économie: étape de mathématisation et stratégie de démathématisation. *Actes du séminaire de didactique et de l'EIAO de l'IRMA de Rennes.*

BARRO, R. (1984) *Macroeconomics* Wiley, New York.

COPELAND, T. & WESTON, J. (1988) *Financial theory and corporate policy* (3rd edition) Addison-Wesley, New York.

DORNBUSCH, R. (1983) Real interest rates, home goods and optimal external borrowing *Journal of Political Economy* **91**, 141-153.

ZERNER, M. (1996) Explication d'un modèle économique. *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques IREM de Clermont-Ferrand.*

ZERNER, M. (1999) Les sujets de mathématiques du baccalauréat ES: le jour du BAC tu fais le con. *Repères IREM* **36**, 59-71.

Comité scientifique international
Internationaal Programma-comité
International Program Committee

H. J. M. Bos, Universiteit Utrecht, Nederland
E. Barbin, IREM de Paris 7, France
J. Fauvel, Open University, United Kingdom
J. Folta, President of the Commission on Teaching the History of science ; IUHPS/DHS ; National Technical Museum, Czech Republic
F. Furinghetti, Università degli Studi di Genova, Italia
E. Giusti, Università di Firenze, Italia
G. Schubring, Universität Bielefeld, Deutschland
K. Tzanakis, University of Creta, Greece
J. Van Maanen, Universiteit Groningen, Nederland
E. Veloso, Universidade de Lisboa, Portugal

Comité d'organisation
Organiserend comité
Organising committee

M. Ballieu, Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Altaïr
E. Borgonie, Katholieke Universiteit Leuven
J. Deprez, Katholieke Universiteit Leuven
H. Eggermont, Katholieke Universiteit Leuven
M. Fremal, Société belge des professeurs de mathématique d'expression française
M. Citta, G. Cuisinier, C. Hauchart, M. Krysinska, D. Legrand, B. Willems, Groupe d'enseignement mathématique
G. Noël, Université de Mons-Hainaut
M. Roelens, Katholieke Hogeschool, Limburg
J. Roels, Katholieke Universiteit Leuven
M. F. Van Troeye, Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques

Comité scientifique belge
Lokaal Programma comité
Local Programme Commttee

Fr. Bingen, Vrije Universiteit Brussel
P. Bockstaele, Katholieke Universiteit Leuven
J.-M. Delire, Université libre de Bruxelles
J. Doyen, Université libre de Bruxelles
C. Hauchart, Université catholique de Louvain, Groupe d'enseignement mathématique
C. Impens, Rijksuniversiteit Gent
D. Janssens, Katholieke Universiteit Leuven
Fr. Jongmans, Université de Liège
J. Mawhin, Université catholique de Louvain
P. Radelet-De-Grave, Université catholique de Louvain, Centre interfacultaire d'étude en histoire des sciences
N. Rouche, Université catholique de Louvain, Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Groupe d'enseignement mathématique
M. Schneider, Facultés universitaires Notre Dame de la Paix à Namur
B. Timmermans, Université libre de Bruxelles
G. Van Paemel, Universiteit Nijmegen, Katholieke Universiteit Leuven

Adresses de contact
Contactadressen
Contact addresses

P. Radelet, Institut de physique théorique (FYMA),
Université catholique de Louvain,
chemin du Cyclotron 2,
B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
Téléphone (32 10) 47 32 80
Télécopie (32 10) 47 24 14
Radelet@fyma.ucl.ac.be

D. Janssens, Acad. Lerarenopleiding Wiskunde,
Katholieke Universiteit Leuven,
Celestijnenlaan 200B, B-3001 Heverlee, België.
Telefoon (32 16) 32 70 95
Telefax (32 16) 32 79 98
Dirk.Janssens@wis.kuleuven.ac.be

http://ramses.umh.ac.be/noel/univete.htm