

# Utilisation du logiciel : Le Géomètre

## Etude de quelques Transformations

R. Arnaud\* - A. Defaye\*

### INTRODUCTION

Le géomètre propose directement la construction de l'image d'un point par une symétrie centrale ou une réflexion. On peut aussi construire, de façon plus indirecte, l'image d'un point par d'autres transformations : translation, homothétie, rotation ou autre similitude directe.

Pour utiliser facilement de telles constructions, on peut créer des macro-constructions. Ces constructions peuvent servir à visualiser l'image de certaines figures.

### CONSTRUCTION DE L'IMAGE D'UN POINT PAR QUELQUES TRANSFORMATIONS

#### A) Translation

On fixe deux points  $A$  et  $B$ . Pour construire l'image  $N$  d'un point  $M$  dans la translation de vecteur  $\vec{AB}$  on construit le milieu de  $[BM]$  et  $N$  est le symétrique de  $A$  par rapport à ce milieu.

#### B) Homothétie

On fixe trois points sur une droite : le centre  $O$ , un point  $A$  et son image  $B$ .

Pour obtenir l'image d'un point  $M$  dans l'homothétie de centre  $O$  transformant  $A$  en  $B$  on fait la construction classique, valable seulement pour un point  $M$  pris hors de la droite  $(OA)$  : l'image  $N$  est à l'intersection de la droite  $(OM)$  et de la parallèle à  $(AM)$  passant par  $B$ .

#### C) Rotation

On fixe le centre  $O$  un point  $A$  et son image  $B$  ou seulement  $O, A$  et un point  $C$  de la demi-droite d'origine  $O$  contenant  $B$  : dans ce deuxième cas, l'angle de la rotation est l'angle  $(\vec{OA}, \vec{OC})$ . La rotation ainsi définie est la composée de deux réflexions d'axes concourants en  $O$ . On peut prendre comme premier axe la droite  $(OA)$ , le deuxième sera la bissectrice de l'angle  $AOC$ . La construction de l'image  $N$  d'un point  $M$  utilise ces deux réflexions.

#### D) Similitude directe de centre $O$

On fixe  $O$  un point  $A$  et son image  $B$ . On construit l'image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  comme intersection du cercle de centre  $O$  passant par  $A$  et de la demi-droite  $[OB)$ . On a ainsi décomposé la similitude en la rotation de centre  $O$  transformant  $A$  en le point construit et en l'homothétie de centre  $O$  transformant ce point en  $B$ . Les deux constructions vues en B) et C) permettent alors de construire l'image  $N$  d'un point  $M$  par la similitude de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $B$ .

\* Lycée Turgot, Limoges.

\* Lycée A. Renoir, Limoges.

## MACRO-CONSTRUCTIONS

### A) Construction d'une macro-instruction

Pour la translation les objets initiaux sont le point  $A$ , son image  $B$  et un point  $M$  quelconque ; l'objet final est l'image  $N$  de  $M$ .

Pour les trois autres, les objets initiaux sont le centre  $O$ , un point  $A$ , son image  $B$  et un point  $M$  quelconque ; l'objet final est l'image  $N$  de  $M$ . Pour la rotation le point  $B$  n'est pas

nécessairement l'image de  $A$  mais seulement un point tel que l'angle  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  soit l'angle de la rotation.

### B) Utilisation d'une macro-instruction

On peut avoir besoin d'utiliser une similitude (ou une homothétie, ou une rotation) ayant un rapport précis et un angle précis.

Pour obtenir un rapport simple, on peut construire un point  $A$  et son image  $B$  dans une homothétie de centre  $O$  en reportant des segments égaux grâce à des symétries centrales ; par exemple, avec le rapport 3, on trace le symétrique de  $O$  par rapport à  $A$ , puis le symétrique de  $A$  par rapport à ce point ; avec le rapport  $1/3$ , on place d'abord  $O$  et  $B$  puis on construit  $A$ .

Pour obtenir un angle simple, on peut utiliser des droites perpendiculaires et des bissectrices qui permettent d'obtenir des angles de mesures  $\mp \frac{\pi}{2}$ ,  $\mp \frac{\pi}{4}$ ,  $\mp \frac{3\pi}{4}$  ... ; un

triangle équilatéral et une hauteur donnent des angles de mesures  $\mp \frac{\pi}{3}$ ,  $\mp \frac{\pi}{6}$  ...

On peut aussi construire, à partir du centre  $O$ , les segments  $[OA]$  et  $[OB]$  et l'angle  $AOB$ , les mesurer puis les faire varier pour obtenir les valeurs voulues.

Ces constructions servent à placer les objets initiaux demandés lors de l'exécution d'une macro-construction.

## IMAGES DE QUELQUES FIGURES

On peut étudier l'image d'une figure par n'importe quelle transformation pour laquelle on sait construire l'image  $N$  d'un point  $M$ .

### 1° Image d'une figure libre

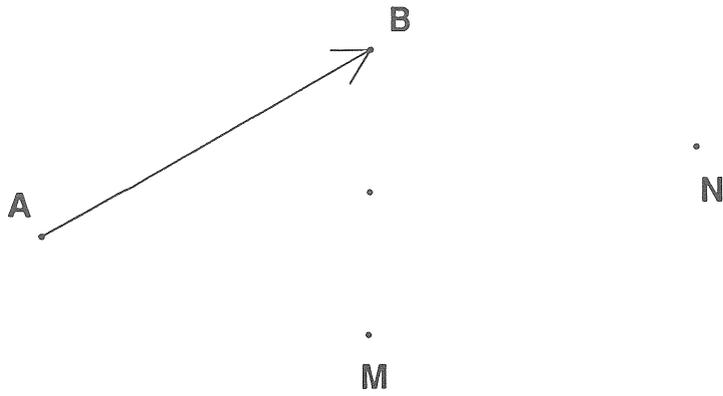
On déplace le point  $M$ . On constate que le point image  $N$  se déplace. Pour préciser ce déplacement on demande le lieu géométrique de  $N$  et celui de  $M$  quand on déplace  $M$ . On voit alors la figure décrite par  $M$  et la figure image.

### 2° Image d'une droite ou d'un cercle

On lie le point  $M$  à un cercle ou à une droite et on fait varier  $M$  ; on peut demander le lieu de  $N$  quand  $M$  varie.

On peut aussi tracer d'abord un cercle ou une droite et y placer ensuite  $M$ . Après avoir construit son image  $N$ , on est ramené aux mêmes conditions que ci-dessus.

Dans le cas d'un cercle, on peut faire tracer le centre  $I$  du cercle et son image  $J$  avant de faire varier  $M$  ; on peut ainsi constater que l'image  $N$  de  $M$  semble décrire un cercle de centre  $J$ .



construction de l'image  
d'un point par la translation  
de vecteur  $\vec{AB}$

Image d'une  
"figure libre"

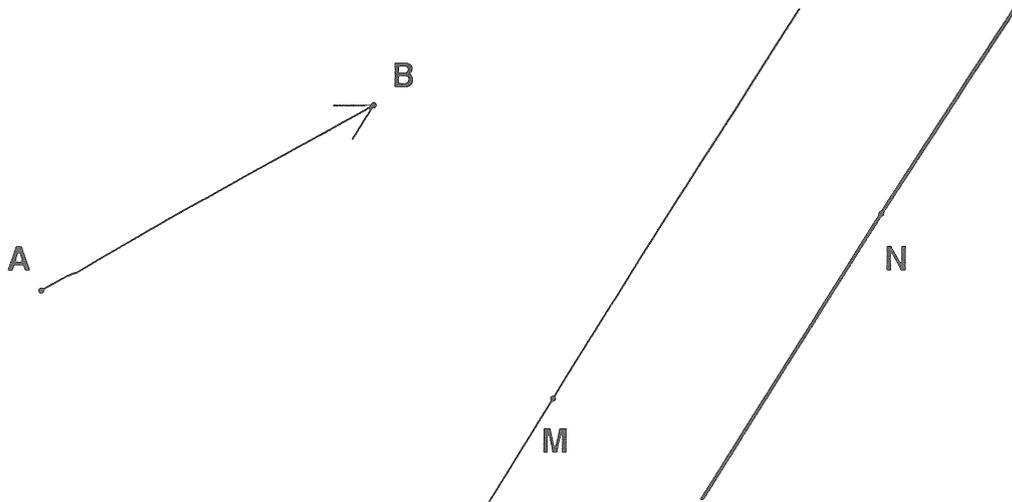
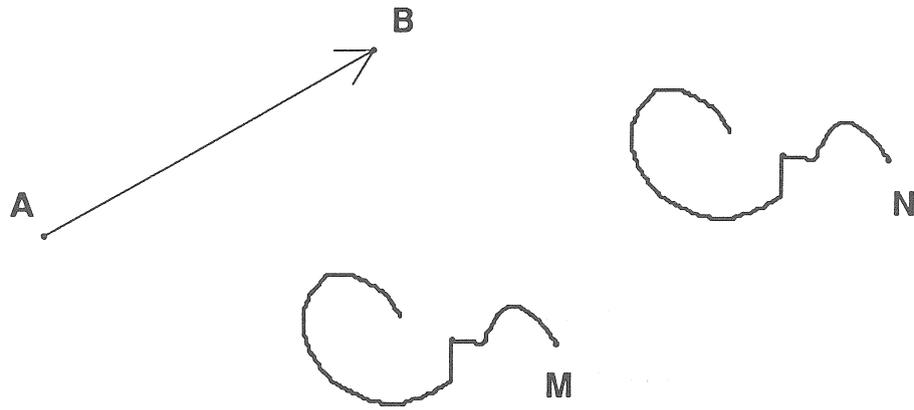


Image d'une droite