

Le Numérique à travers des constructions géométriques exactes ou approchées

N. Vigier*

L'habitude en mathématiques est de demander de construire un point, un ensemble de points vérifiant certaines propriétés. Il faut donc trouver la méthode de construction et la justifier. Bien sûr il ne peut s'agir que d'une construction exacte.

Dans la pratique, cette démarche est inutile. La méthode de construction est donnée. Il n'est pas nécessaire que ce soit une construction mathématiquement exacte, il est beaucoup plus important que ce soit une construction suffisamment simple et précise. Certaines constructions exactes mathématiquement peuvent être tellement compliquées qu'elles s'avèrent à l'usage moins précises qu'une construction approchée du point de vue mathématique.

Enfin en mathématiques on s'intéresse à l'erreur absolue, alors que dans une réalisation pratique ce qui compte est l'erreur relative. Avoir une erreur de 1 cm sur une longueur ne signifie rien si l'on ne connaît pas cette longueur : 1 cm sur 1 m, c'est une précision de $1/100^{\text{ième}}$, mais 1 cm sur 1 km c'est $1/100\,000^{\text{ième}}$, quand à 1 cm sur 10 cm alors la construction ne vaut pas grand chose.

Les constructions données sont utilisées en couture, chaudronnerie, dessin technique. Il s'agira de vérifier si elles sont exactes ou approchées.

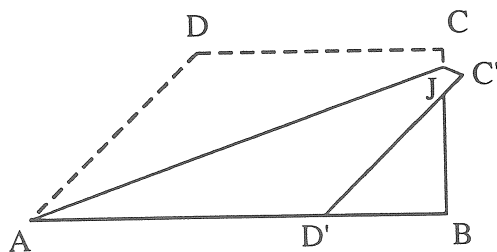
I - Quelques constructions en couture

Les constructions qui suivent sont extraites d'un livre appelé "géométrie expérimentale appliquée aux travaux de la femme", paru en 1922.

En couture il n'est pas possible d'utiliser un compas ou une règle et beaucoup de constructions se font par pliage. En voici quelques exemples.

1 - Tracé d'une bissectrice sur étoffe

a) le sommet de l'angle est connu.

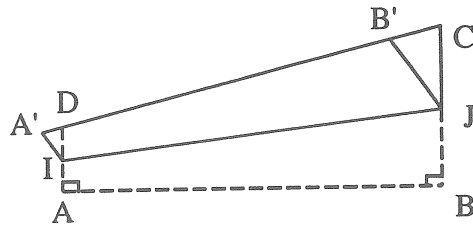


Pour construire la bissectrice de l'angle BAD, on replie l'étoffe sur elle-même autour de A de manière à faire coïncider (AD) et (AB) ; on marque le pli et on développe.

(AJ) est bissectrice de l'angle BAD, le pliage correspond à une réflexion d'axe (AJ).

* Lycée Auguste Renoir, Limoges.

b) le sommet de l'angle est en dehors de la pièce



On procède de même, lorsque l'angle n'a pas de sommet dans les limites de l'étoffe.

La droite (IJ) est bissectrice de l'angle des deux droites (AB) et (DC) car par suite du pliage on a :

$$(IA) \perp (AB), (JB) \perp (AB)$$

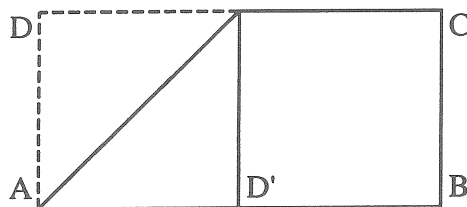
$$AI = A'I \text{ et } BJ = B'J$$

$$\text{donc } (IA') \perp (DC) \text{ et } (JB') \perp (DC)$$

Les points I et J sont équidistants des droites (AB) et (DC) et appartiennent à la bissectrice cherchée.

2 - Tracé d'angles sur étoffe

a) angle de 45°

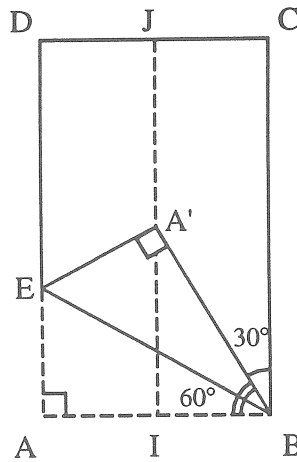
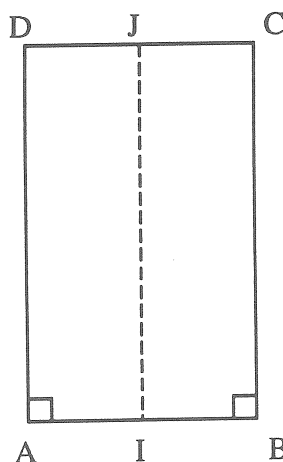


L'angle de 45° , sur la largeur d'une étoffe, est le sens dans lequel on coupe le tissu en biais.

Dans la pratique, on l'obtient en rabattant un coin de l'étoffe, de façon à faire se recouvrir un fil de chaîne et un fil de trame issus de même point.

Les fils de chaîne et les fils de trame étant perpendiculaires, le tracé est celui d'une bissectrice.

b) angles de 60° et de 30° .



Sur étoffe, pour tailler un angle de 60° , on prend une bande dont la largeur (AB) est perpendiculaire aux deux bords (AD) et (BC). On trace, par pliage, le pli médian (IJ).

On rabat l'angle A sur l'étoffe en le faisant tourner autour de B jusqu'à ce que A tombe sur la médiane (IJ) en A'.

On donne un coup de ciseau selon (BA').

L'angle $\widehat{ABA'}$ a 60° .

La portion de l'étoffe enlevée A'BC est coupée suivant un angle de 30° .

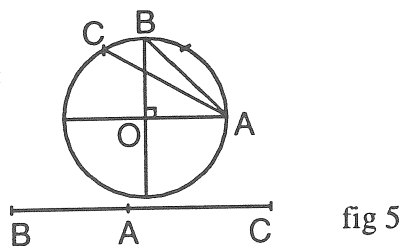
Enfin, si après rabattement, on marque le pli (BE), l'angle $\widehat{ABE}$ est aussi de 30° .

La droite (BE) est bissectrice de $\widehat{ABA'}$ car par construction : $EA = EA'$,
 $(EA) \perp (AB)$ et $(EA') \perp (A'B)$.

L'angle de 120° s'obtient en doublant celui de 60° , celui de 15° en prenant la moitié d'un angle de 30° . Pour les autres, on peut remarquer que :

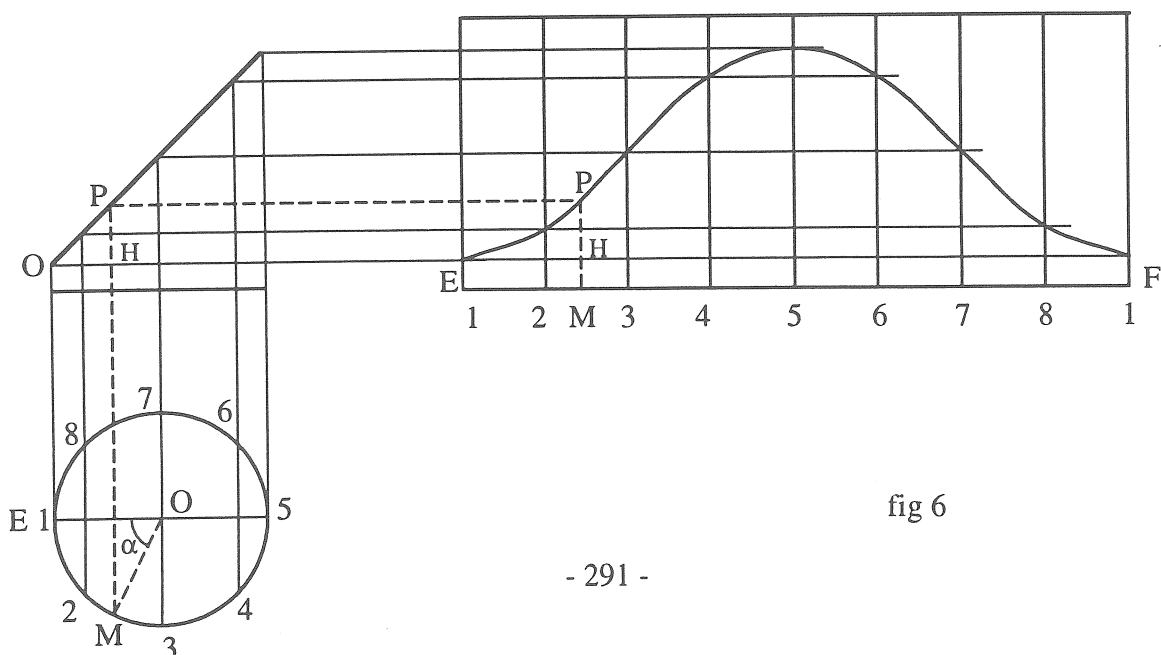
$$\begin{aligned} 75^\circ &= 60^\circ + 15^\circ = 45^\circ + 30^\circ \\ 105^\circ &= 60^\circ + 45^\circ \\ 135^\circ &= 90^\circ + 45^\circ \\ 165^\circ &= 120^\circ + 45^\circ. \end{aligned}$$

On commence par tracer [EF] fig.6, qui est le développement du cercle de base du cylindre, à l'aide d'une construction mathématiquement approchée.



$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{2} R \\ AC &= \sqrt{3} R \\ \text{donc } AB + AC &= R (\sqrt{2} + \sqrt{3}). \\ \sqrt{2} + \sqrt{3} &\approx 3,146 \ ; \ \pi \approx 3,142 \end{aligned}$$

Le segment [BC] obtenu a une longueur très proche de la longueur exacte du demi-cercle.



L'intersection du cylindre de révolution et du plan est une ellipse. Il s'agit de tracer le développement de cette ellipse. Pour cela, "on trace $[EF]$ développement du cercle de base. Si on a découpé ce cercle en 8 parties égales numérotées de 1 à 8, on divise de même $[EF]$ en 8 parties égales. Par les points de division, on mène des perpendiculaires et on porte sur ces perpendiculaires les longueurs des génératrices mesurées sur le plan vertical. On n'a plus ensuite qu'à joindre les extrémités de ces perpendiculaires par un trait continu, qu'on a soin de faire tangentiel en 1, 5, 1 aux perpendiculaires des génératrices".

Le développement obtenu est une sinusoïde :

Posons $\widehat{EOM} = \alpha$ en radians, R le rayon du cercle de base du cylindre.

L'arc EM a pour longueur $R\alpha$.

Le triangle OHP est rectangle isocèle car le plan d'intersection fait un angle de 45° avec le plan de base du cylindre.

Donc $PH = OH = (1 + \cos \alpha) R$.

Le développement est la courbe représentative de la fonction : $\alpha \rightarrow (1 + \cos \alpha) R$.

Remarque : Si le plan n'était pas à 45° par rapport au plan du cercle de base du cylindre, il suffirait de multiplier la fonction obtenue par une constante.

III - Tracé d'un polygone régulier

Ces tracés sont, pour certains, utilisés en couture, et tous servent en dessin technique. Soit P_n un polygone régulier à n sommets.

On sait construire par une méthode mathématiquement exacte P_3 , P_4 , P_5 et P_6 .

De façon générale si l'on peut obtenir n en multipliant le nombre des sommets de P_3 , P_4 , P_5 par une puissance de 2, le polygone P_n peut être tracé avec une règle et un compas.

De manière générale, le polygone régulier P_n n'est constructible avec une règle et un compas que si :

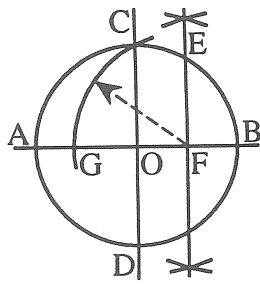
$$n = 2^{2^m} + 1 \quad m \text{ entier}, n \text{ premier}$$

ou si n est formé exclusivement de combinaison d'un nombre premier de Fermat (ex : 3, 5, 17, 257, 65537) et de puissances de 2.

Pour $n \leq 20$, seuls sont constructibles (à la règle et au compas)

$$\begin{array}{cccc} P_2 & P_4 & P_8 & P_{16} \\ P_3 & P_6 & P_{12} & \\ P_5 & P_{10} & P_{15} & P_{20} \\ P_{17} & & & \end{array}$$

1) - Pentagone régulier



Construire la médiatrice de $[OB]$ soit (EF) ,
de F porter $FG = FC$
alors CG est le côté C_5 du pentagone
régulier.

fig. 7

Vérifions :

on sait que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ d'où $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

et $C_5 = 2R \sin \frac{\pi}{5} = R \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

d'autre part $OF = \frac{R}{2}$, $FC = R \frac{\sqrt{5}}{2}$, $OG = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

d'où $CG = R \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = C_5$

2) - Heptagone (7 côtés) et undécagone (11 côtés) réguliers

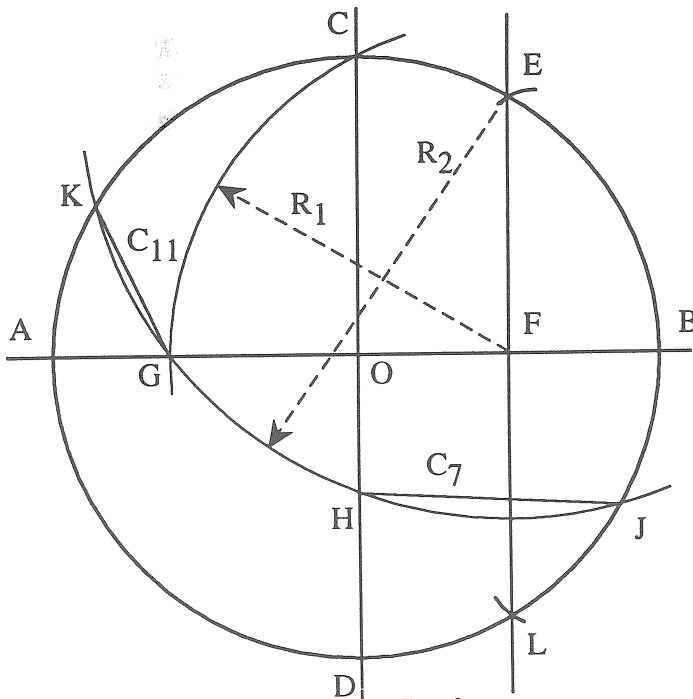


fig. 8

Construire

la médiatrice de $[OB]$ soit (EF)
de F , porter
 $FG = FC = R_1$

de E , porter
 $EH = EJ = EG = EK = R_2$

alors $HJ \approx C_7$ et $KG \approx C_{11}$

Ce sont des constructions approchées mathématiquement puisque ces deux polygones réguliers ne sont pas constructibles à la règle et au compas.
Calcul de HJ et KG .

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon $OB = R$ a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$.

Le point E a pour coordonnées $(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2})$

Nous avons $FG = FC = \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$.

Donc les coordonnées de G sont $(\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R\sqrt{5}, 0)$.

et $R_2 = EG = \sqrt{\frac{5}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2} = R\sqrt{2} = C_4$ (côté du carré inscrit).

Le cercle de centre E et de rayon R_2 a pour équation :

$$(x - \frac{1}{2}R)^2 + (y - \frac{R\sqrt{3}}{2})^2 = 2R^2.$$

Les coordonnées de H sont : $(0, \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R\sqrt{7}}{2})$

Le cercle de centre E et de rayon R_2 coupe le cercle $\mathcal{C}$ en J et K dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - \frac{1}{2}R)^2 + (y - \frac{R\sqrt{3}}{2})^2 = 2R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x + y\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées des points J et K sont donc :

$$J(\frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}) \quad K(-\frac{R\sqrt{3}}{2}, \frac{R}{2})$$

Nous en déduisons :

$$HJ = \frac{R}{2} \sqrt{3 + (1 + \sqrt{3} - \sqrt{7})^2} \quad \text{et} \quad HJ \approx 0,8670 R$$

$$\text{alors que} \quad c_7 = 2R \sin \frac{360}{14} \approx 0,8677 R$$

$$\text{de même} \quad GK = \frac{R}{2} \sqrt{1 + (1 + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2} \quad \text{et} \quad GK \approx 0,558 R$$

$$\text{alors que} \quad c_{11} = 2R \sin \frac{360}{22} \approx 0,563 R.$$

Conclusion

Ce texte n'expose qu'une petite partie d'un travail réalisé sur les méthodes de construction utilisées, en particulier, en dessin technique. Il existe par exemple une construction plus simple de l'heptagone régulier.

Les constructions par pliage peuvent faire l'objet d'exercices au niveau du collège car elles font appel aux réflexions.

Par contre, la plupart des justifications concernant les polygones réguliers sont plutôt du niveau du lycée et même de Terminale Scientifique.

Nota : les parties en italique du texte sont des citations du [1]

Bibliographie :

[1] Géométrie expérimentale appliquée aux travaux de la femme 1922

[2] Le nombre et son mystère A. Warusfeld

[3] Manuel de dessin technique - ed. Casteilla